Zeitschrift: Asiatische Studien : Zeitschrift der Schweizerischen Asiengesellschaft = Études asiatiques : revue de la Société Suisse-Asie

Herausgeber: Schweizerische Asiengesellschaft

Band: 57 (2003)

Heft: 2

Artikel: Der arabische Mathematiker As-Sumaist (374/985-453/1061) und das isoperimetrische Problem

Autor: Duncker, Tanja

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-147601

DER ARABISCHE MATHEMATIKER AS-SUMAISĀṬĪ (374/985 - 453/1061) UND DAS ISOPERIMETRISCHE PROBLEM

Tanja Duncker

Ein Thema, mit dem sich arabische Mathematiker beschäftigten, war die Isoperimetrie, d.h. die Frage, welche Flächen gleichen Umfangs bzw. welche Körper gleicher Oberfläche den grössten Flächeninhalt bzw. das grösste Volumen haben. Einer dieser Mathematiker war Abū Ǧaᶜfar al-Ḫāzin,[1] mit dem sich R. LORCH in dem Aufsatz "Abū Jaᶜfar al-K͟hāzin on Isoperimetry and the Archimedean Tradition"[2] beschäftigte. Darin erwähnt R. LORCH (S. 154) auch einen Beweis in einer Istanbuler Handschrift, den er einem Abū l-Qāsim ᶜAlī as-Samsāṭī zuschreibt. Dieser Beweis und sein Autor bilden den Gegenstand dieses Aufsatzes.

In ihm soll zunächst ein Abriss der Geschichte des isoperimetrischen Problems im Altertum und bei den Arabern gegeben werden. Daran anschliessend soll der wenig bekannte arabische Mathematiker as-Sumaisāṭī – so lautet sein Name richtig – vorgestellt werden. Zuerst wird seine Vita nach den biographischen Quellen dargestellt. Es folgen die Edition seiner Abhandlung – auf der Grundlage einer Berliner Handschrift (Ms. or. quart. 1867, Bl. 270b-271a), die G. SCHOELER in seinem Katalog *Arabische Handschriften* unter Nr. 189 beschrieben hat –, eine wörtliche Übersetzung und eine freie Übertragung des Textes. Der Versuch einer Einordnung des Beweises schliesst die Arbeit ab.

1. Geschichte des isoperimetrischen Problems im Altertum[3]

Mit der Frage, wie sich eine Fläche zu ihrem Umfang (bzw. ein Volumen zu seiner Oberfläche) verhält, beschäftigte man sich schon in der Antike, da es bei

1 Zu Abū Ǧaᶜfar al-Ḫāzin s. weiter unten Abschnitt 2.2.

2 *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, Bd. 3:150-229.

3 In den beiden foglenden Abschnitten über die Geschichte des isoperimetrischen Problems im Altertum und bei den Arabern stütze ich mich vorwiegend auf den erwähnten Artikel von R. LORCH sowie auf die Aufsätze "Das isoperimetrische Problem im Altertum" von W. MÜLLER und "Sur un théorème isopérimétrique d'Ibn-i-Haitham" von H. DILGAN.

dieser Frage auch um die praktische Anwendung ging, wie etwa, die Fläche eines Stück Landes aus seinem Umfang zu bestimmen. Dass dieses Verhältnis keineswegs allgemein klar war, zeigt sich z.B. daran, dass sowohl Thukydides (2. Hälfte des 5. Jh. v.Chr.) wie Strabo (63 v.Chr. bis ca. 20 n.Chr.) meinten, es genüge, die Zeit für die Umfahrung Siziliens anzugeben, um daraus auf die Grösse schliessen zu können. Andere dagegen merkten, dass sich aus dem Umfang allein eine Fläche nicht bestimmen lässt. So stellte Polybios (1. Hälfte des 2. Jh. v.Chr.)

> fest, dass die Kenntnis des besagten Zusammenhanges vertrautes Gedankengut der Geometer gewesen sei; er schreibt weiter, dass es falsch sei, aus dem Umfang von Städten, Truppenlagern usw. auf deren Grösse zu schliessen, dieser Fehlschluss rühre daher, dass sich die meisten Menschen nicht mehr an das erinnerten, was sie als Knaben (sic) gelernt hätten.[4]

Dass diese "Vergesslichkeit" auch ausgenutzt werden konnte, zeigt Proklos (410-485 n.Chr.) in seinem Kommentar zum 1. Buch der Elemente Euklids:

> Schon manche auch, die Teilhaber von Ländereien waren, übervorteilten bei der Teilung die mit ihnen Teilenden durch unsaubere Manöver mit dem grösseren Umfang. Sie kamen besser weg als ihre Genossen bei der Auswanderung, indem sie die vom grösseren Umfang umschlossene Fläche, die sie erhalten hatten, hinterher vertauschten gegen Flächen geringeren Umfangs, und trugen noch dazu den Ruf von Biedermännern davon [...].

Weder Polybios noch Proklos erwähnen allerdings in diesem Zusammenhang, dass der Kreis von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs die grösste Fläche hat, oder gar, dass die Kugel von allen Körpern mit der selben Oberfläche das grösste Volumen besitzt.

Bei Plato (428-348/7 v.Chr.) wird die Kugel als vollkommene Gestalt bezeichnet, und auch Aristoteles (384-322 v.Chr.) nennt Kreis und Kugel vollkommen, weil sie im Gegensatz zu anderen Figuren oder Körpern nur von einer Linie bzw. Oberfläche begrenzt sind, doch fehlt auch hier ein Hinweis auf ihre Maximaleigenschaft.

Allerdings erwähnt Proklos in seinem Kommentar zu Platons Timaios die Sätze des Zenodoros (s.u.), und Simplikios weist in seinem nach 533 n.Chr. verfassten Kommentar zu Aristoteles auf die Maximaleigenschaft von Kreis und Kugel hin. Auch Quintilian (ca. 35-100 n.Chr.), Galen (129 - ca. 199 n.Chr.) und Damianos (4. Jh. n.Chr.) bemerken, dass der Kreis von allen ebenen Figuren gleichen Umfangs die grösste Fläche hat. Die Stelle bei Quintilian weist ebenfalls auf die Schwierigkeit hin, das Verhältnis von Fläche und Umfang zu erkennen:

4 Dieses und das folgende Zitat MÜLLER, S. 40.

Denn wer würde nicht jemandem beistimmen, der folgende Behauptung aufstellt: Wenn die Länge der Begrenzungslinien irgendwelcher Figuren gleich ist, muss notwendig auch der Flächeninhalt, der von diesen begrenzt wird, gleich sein? Und das ist falsch; denn es ist von grösster Bedeutung, welche Form dieser Umfang hat. Einige Geschichtsschreiber wurden von den Geometern getadelt, weil sie meinten, die Grösse von Inseln hinreichend durch die Dauer einer Umschiffung gekennzeichnet zu haben. Je vollkommener eine Gestalt ist, desto grösseren Flächeninhalt schliesst sie ein. Ist also die Umfangslinie ein Kreis, der die vollkommenste Gestalt in der Ebene ist, so schliesst sie mehr Fläche ein, als wenn sie bei gleicher Küstenstrecke ein Quadrat bildete. Das Quadrat schliesst wiederum eine grössere Fläche ein als das Dreieck, das gleichseitige Dreieck eine grössere als das ungleichseitige Dreieck.[5]

1.1 Zenodoros[6]

Eine genaue mathematische Behandlung erfuhr das isoperimetrische Problem durch Zenodoros. Dieser lebte im Zeitraum zwischen 200 v.Chr. und 90 n.Chr. Der terminus post quem lässt sich daraus ableiten, dass er in seinem Werk Archimedes nennt, der terminus ante quem ergibt sich aus der Lebenszeit Quintilians, der in der oben zitierten Stelle in einer Weise von der Isoperimetrie spricht, die an Zenodoros' Darstellung erinnert. Wahrscheinlich lebte er nicht lange nach Archimedes (ca. 285-212 v.Chr.), da er sich eng an die Methoden Euklids und Archimedes' hielt.

Zenodoros' Abhandlung *περὶ ἰσομέτρων σχημάτων* (Über die Figuren gleichen Umfangs) ist in drei Quellen erhalten geblieben: Erstens im Kommentar des Theon von Alexandrien (Ende 4. Jh.) zum ersten Buch des *Almagest*, wo Zenodoros ausdrücklich als Autor der Abhandlung genannt wird. Nach W. MÜLLER kommt dieser Text dem Original wahrscheinlich am nächsten. Zweitens behandelt Pappos (wahrscheinlich Ende 3. / Anfang 4. Jh.) im V. Buch seiner *Collectio (συναγωγή)* die Sätze des Zenodoros zur Isoperimetrie, ohne ihn zu nennen. Drittens enthält eine anonyme Einführung zum *Almagest* einen Auszug aus der Abhandlung des Zenodoros, ebenfalls ohne Angabe seines Namens. Pappos hat einige Sätze zusätzlich eingeschoben. Zudem hat er, ebenso wie der anonyme Verfasser der *Almagest*-Einführung, einige Beweise des Zenodoros verbessert.

Die wichtigsten isoperimetrischen Sätze zu den ebenen Figuren nach dem V. Buch von Pappos' *Collectio* lauten:

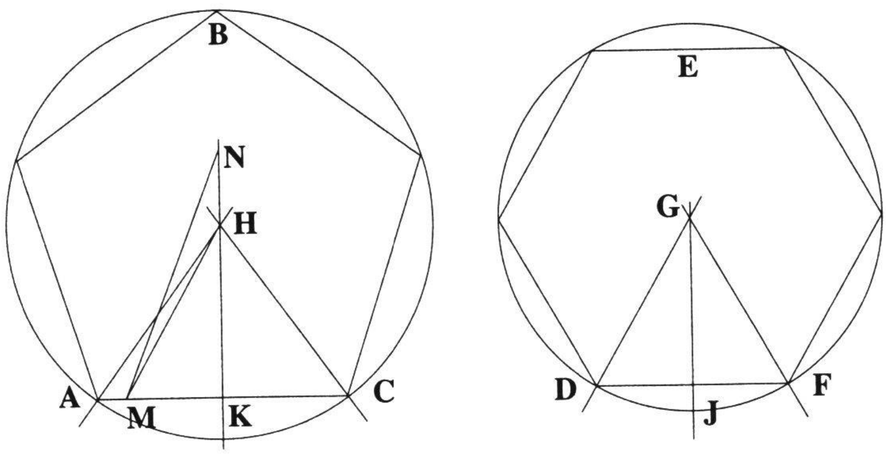
5 MÜLLER, S. 43.
6 Vgl. neben MÜLLER auch HEATH, S. 207ff.

1. Unter regelmässigen Vielecken von gleichem Umfang hat dasjenige den grösseren Inhalt, welches mehr Ecken hat.
2. Der Kreis hat einen grösseren Inhalt als jedes regelmässige Vieleck, das ihm im Umfang gleich ist.
3. Das Rechteck aus dem Umfang und dem Radius eines Kreises ist doppelt so gross wie der Kreis.

(Die Sätze 4-9 sind Hilfssätze zu 10)

10. Unter allen geradlinigen Figuren mit gleicher Seitenzahl und gleichem Umfang ist die grösste gleichseitig und gleichwinklig.

Da für uns zum Vergleich mit as-Sumaisāṭī's Beweis vor allem die ersten zwei Sätze interessant sind, führe ich hier noch die dazu gehörenden Beweise nach dem V. Buch der *Collectio* an:[7]



Beweis für den 1. Satz: *ABC* und *DEF* seien zwei gleichseitige und -winklige Vielecke, und ihr Umfang sei gleich. *DEF* habe mehr Ecken. Dann ist *DEF* grösser als *ABC*. Beweis: Man ziehe von den Mittelpunkten der den Vielecken umbeschriebenen Kreise die Lote $\overline{HK}$ und $\overline{GJ}$, zudem noch $\overline{AH}$, $\overline{HC}$, $\overline{DG}$, $\overline{GF}$. Da *DEF* mehr Ecken hat als *ABC*, ist $\overline{DF}$ öfter im Umfang von *DEF* enthalten als $\overline{AC}$ im Umfang von *ABC*. Da die Umfänge gleich sind ist $\overline{AC} > \overline{DF}$, also auch $\overline{AK} > \overline{DJ}$. Man mache $\overline{KM}$ gleich $\overline{DJ}$ und ziehe $\overline{MH}$. Es gilt:

$\angle(AHC) : 4\,Rechte = AC : Umfang\,(ABC)$, weil das Vieleck gleichseitig ist, die Seiten gleiche Stücke aus dem Umfang des umgeschriebenen Kreises

7 Nach der Übersetzung von Paul EECKE, S. 239-243; vgl. auch MÜLLER, S. 49-52.

ausschneiden und weil das Verhältnis der Zentriwinkel dem der zugehörigen Kreisbögen gleich ist. Weiter ist:

$$\frac{4\,Rechte}{\angle(DFG)}=\frac{Umfang\,(DEF)}{\overline{DF}}=\frac{Umfang\,(ABC)}{\overline{DF}}$$

Daraus folgt : $$\frac{\angle(AHC)}{\angle(DGF)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

bzw. $$\frac{\angle(AHK)}{\angle(DGJ)}=\frac{\overline{AK}}{\overline{DJ}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}}$$

Weiter gilt: $$\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}}>\frac{\angle(AHK)}{\angle(MHK)}$$ (Beweis weiter unten)

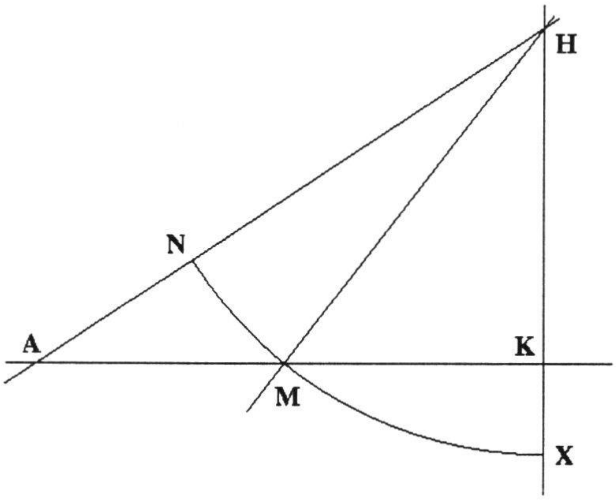
und daher: $$\frac{\angle(AHK)}{\angle(DGJ)}>\frac{\angle(AHK)}{\angle(MHK)}$$

Daraus folgt $\angle(MHK)>\angle(DGJ)$. Der rechte Winkel bei K ist gleich dem rechten Winkel bei *J*. Daher ist $\angle(HMK)<\angle(GDJ)$. Es sei $\angle(KMN)$ = $\angle(GDJ)$ und $\overline{KH}$ werde verlängert bis *N*. Da $\angle(GDJ)=\angle(KMN)$ und der rechte Winkel bei *K* gleich dem bei *J*, weiter $\overline{DJ}=\overline{MK}$, ist $\overline{GJ}=\overline{NK}$ und daher $\overline{GJ}>\overline{HK}$. Nun sind aber die Umfänge gleich, daher ist das Rechteck aus dem Umfang von *DEF* und $\overline{GJ}$ grösser als das Rechteck aus dem Umfang von *ABC* und $\overline{HK}$. Das Rechteck aus dem Unfang von *DEF* und $\overline{GJ}$ ist doppelt so gross wie das Vieleck *DEF*, das Rechteck aus dem Umfang von *ABC* und $\overline{HK}$ ist doppelt so gross wie das Vieleck *ABC*. Also ist das Vieleck *DEF* grösser als das Vieleck *ABC*.

Beweis dafür, dass

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KM}}>\frac{\angle(AHK)}{\angle(MHK)}:$$

Das Dreieck *HKA* wird für sich gezeichnet und $\overline{HM}$ gezogen. Mit $\overline{HM}$ als Radius ziehe man um *H* den Kreisbogen *NMX* und verlängere $\overline{HK}$ bis *X*.



Nun ist

$$\frac{Dreieck\ HMA}{Sektor\ HMN} > \frac{Dreieck\ HMK}{Sektor\ HMX}$$

$$\frac{Dreieck\ HMA}{Dreieck\ HMK} > \frac{Sektor\ HMN}{Sektor\ HMX}$$

$$\frac{Dreieck\ HMA}{Dreieck\ HMK} + \frac{Dreieck\ HMK}{Dreieck\ HMK} > \frac{Sektor\ HMN}{Sektor\ HMX} + 1$$

$$\frac{Dreieck\ HAK}{Dreieck\ HMK} + 1 > \frac{Sektor\ HMN}{Sektor\ HMX} + 1 + \frac{Sektor\ HMX}{Sektor\ HMX}$$

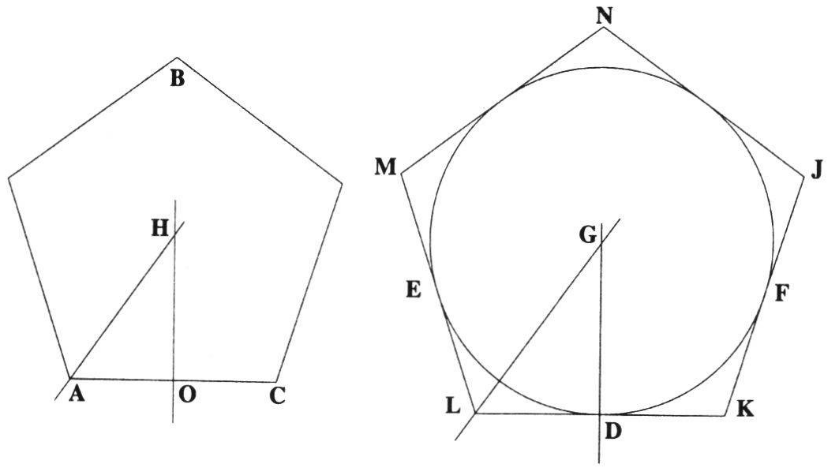
$$\frac{Dreieck\ HAK}{Dreieck\ HMK} > \frac{Sektor\ HNX}{Sektor\ HMX}$$

Es ist aber $$\frac{\overline{AK}}{\overline{MK}} = \frac{Dreieck\ HAK}{Dreieck\ HMK}$$

und $$\frac{\angle(AHK)}{\angle(MHK)} = \frac{Sektor\ HNX}{Sektor\ HMX}$$

Also gilt: $$\frac{\overline{AK}}{\overline{MK}} > \frac{\angle(AHK)}{\angle(MHK)}$$

Beweis für den 2. Satz: *ABC* sei ein gleichseitiges und -winkliges Vieleck, dessen Umfang dem Umfang des Kreises *DEF* gleich ist. Dann ist der Kreis grösser als das Vieleck. Um den Kreis wird ein Vieleck *JKLMN* gezeichnet, das dem Vieleck *ABC* ähnlich ist. *G* und *D* werden verbunden und von *H* wird zur Seite $\overline{AC}$ die Senkrechte $\overline{HO}$ gezogen. Da das Vieleck *JKLMN* einen grösseren Umfang hat als der Kreis *DEF*, der Umfang des Vielecks *ABC* aber dem des Kreises gleich ist, hat das Vieleck *JKLMN* einen grösseren Umfang als das Vieleck *ABC*. Wegen der Ähnlichkeit ist $\overline{LD} > \overline{AO}$ und das Dreieck *AHO* ähnlich dem Dreieck *LGD*. Also ist auch $\overline{GD} > \overline{HO}$. Nun ist der Umfang des Kreises *DEF* gleich dem Umfang des Vielecks *ABC*. Also ist das Rechteck aus $\overline{GD}$ und dem Umfang des Kreises grösser als das Rechteck aus $\overline{HO}$ und dem Umfang des Vielecks. Das Rechteck aus $\overline{GD}$ und dem Kreisumfang ist zweimal die Fläche des Kreises, und das Rechteck aus $\overline{HO}$ und dem Umfang des Vielecks ist zweimal die Fläche des Vielecks. Also ist der Kreis grösser als das Vieleck.



2. Die Isoperimetrie bei den Arabern

Es gibt mehrerer Hinweise, dass die Araber mit dem isoperimetrischen Problem und Zenodoros' Abhandlung vertraut waren. So kannten sie die Abhandlung durch Theons Kommentar zum *Almagest*, denn im *Fihrist* wird eine vorḥunainitische Übersetzung dieses Werkes erwähnt. Ferner befindet sich in Basel die

Handschrift einer lateinischen Abhandlung zur Isoperimetrie, in der der Name "Archimenides" vorkommt. Diese Verballhornung des Namens Archimedes weist darauf hin, dass es sich bei diesem Text um eine Übersetzung aus dem Arabischen handelt. Bei der Übermittlung griechischer Werke durch die Araber wurden nämlich Eigennamen oft verändert, was sich aus der Eigenart der arabischen Schrift erklärt, manche Buchstaben nur durch kleine "Zähnchen" darzustellen und Vokale teilweise wegzulassen.[8]

Auch Pappos war den Arabern bekannt. Im Gegensatz zu Zenodoros wird er im *Fihrist* genannt;[9] doch wird dort die für uns interessante *Collectio* nicht erwähnt. Allerdings gibt es Indizien dafür, dass diese Sammlung, und zwar gerade das V. Buch über die Isoperimetrie, bekannt war: In den *Rasāʾil* der Iḫwān aṣ-Ṣafāʾ[10] finden sich eine Bemerkung zur Maximaleigenschaft des Kreises und eine Schilderung des Hausbaus der Bienen, die an die Einleitung zum V. Buch der *Collectio* erinnern.[11]

Das Werk der Iḫwān erzählt auch Anekdoten über Missverständnisse bezüglich des Verhältnisses von Umfang und Fläche, wie wir sie ähnlich schon bei antiken Autoren finden. An den Betrug bei der Landverteilung (s.o. Abschnitt 1) erinnert die folgende Geschichte:

> Zweifel beschleicht bei jeder wissenschaftlichen Arbeit einen, der sie unternimmt und nicht zu ihren Leuten gehört [nicht wissenschaftlich ausgebildet ist] und darin fehlerhaft ist oder unaufmerksam. Ein Beispiel dafür ist [folgendes], was man berichtet: Ein Mann kaufte von einem anderen ein Stück Land für 1000 Dirham, das 100 Ellen lang und 100 breit war. Da sagte [der Verkäufer] zu ihm: "Nimm statt dessen zwei Stück, jedes 50 Ellen lang und 50 breit", und er wähnte, damit sei des anderen Recht erfüllt. Da stritten sie vor einem Richter, der nichts von der Geometrie verstand [*ġair muhandis*], und dieser urteilte ebenso. Danach verhandelten sie vor einem Richter, der sich in der Mathematik auskannte [*min ahli ṣ-ṣināʿa*], und dieser entschied, dies sei nur die Hälfte seines Anrechts.

Es folgt noch eine zweite, etwas konstruiert wirkende Geschichte, die dasselbe Missverständnis in Bezug auf den Raum zeigt:

> Ebenso wird berichtet, dass ein Mann einen anderen beauftragte, ihm für acht Dirham eine Grube zu graben vier Ellen lang, vier breit und vier tief. Dieser aber hub eine Grube aus, zwei Ellen lang, breit und tief und verlangte dafür vier Dirham, die Hälfte des Lohnes. Da gingen sie miteinander vor einen Mufti, der nichts von der Geometrie verstand, und dieser

8 CANTOR, S. 663.

9 *Fihrist*, S. 269.

10 2. Hälfte 4./10. Jh.; *GAL2* 1/236-238 S. 1/379-381; *GAS* 3/379-380, 5/348-352.

11 IḪWĀN, S. 96 und S. 108; vgl. auch CANTOR, S. 696.

urteilte, dies[e Forderung] sei sein Recht. Danach stritten sie vor einem, der sich in der Mathematik auskannte, und dieser entschied, sein Lohn sei nur ein Dirham.[12]

Über Isoperimetrie wurde oft, getreu der griechischen Tradition, in Kommentaren zum *Almagest* geschrieben, so u.a. von Ibn al-Haiṯam und Ǧābir b. Aflaḥ (lebte im 6./12. Jh. in Andalusien).[13] Isoperimetrische Theoreme enthält auch das mathematische Kompendium des Yūsuf al-Mu'taman b. Hūd (König von Saragossa 1081-85).[14]

2.1 al-Kindī

Al-Kindī, der "Philosoph der Araber", muss das isoperimetrische Problem aus Theons *Almagest*-Kommentar gekannt haben, da er selbst einen Kommentar zum *Almagest* schrieb, der dem des Theon sehr ähnlich ist.[15] Ferner schrieb al-Kindī eine Abhandlung zur Isoperimetrie, die in Ibn an-Nadīm's *Fihrist* erwähnt wird unter dem Titel *Risāla fī anna l-Kura aʿẓam al-aškāl al-ǧirmīya wa-d-dāʾira aʿẓam min ǧamīʿ al-aškāl al-basīṭa* (Abhandlung darüber, dass die Kugel die grösste der körperlichen, der Kreis die grösste der ebenen Figuren ist).[16] Leider ist uns der Text dieser Abhandlung nicht erhalten.

2.2 Abū Ǧaʿfar al-Ḫāzin[17]

Auch Abū Ǧaʿfar al-Ḫāzin (lebte im 4./10. Jh.) schrieb einen Kommentar zum *Almagest*, der als Fragment in einer Pariser Handschrift (BN 4821) erhalten ist und 19 Sätze zur Isoperimetrie enthält. Die ersten 10 Sätze befassen sich mit der Isoperimetrie in der Ebene, wobei Abū Ǧaʿfar mehr oder weniger Zenodoros folgt, vermutlich nach der Überlieferung in Theons *Almagest*-Kommentar. Nach R. LORCH könnte es sich auch um eine primitivere Quelle als Zenodoros handeln. Auch der Beweis zu Satz 19 (Isoperimetrie der Kugel) entspricht dem des Zenodoros. Hingegen ist der Rest der Abhandlung abhängig vom ersten Buch aus Archimedes' Werk über Kugel und Zylinder und wurde auch durch die Verba filiorum der Banū Mūsā beeinflusst. Diese Sätze 11-18 behandeln Oberfläche und Volumen verschiedener Körper.

12 IḪWĀN, S. 99.
13 *GAS* 5/53.
14 LORCH, S. 154.
15 Vgl. dazu ROSENTHAL, *Al-Kindī and Ptolemy*.
16 *GAS* 5/258; *Fihrist*, S. 256.
17 *GAL2*, 1/387; *GAS* 5/298-299.

Die Beweise der für uns interessanten Sätze 9 und 10 (die den ersten zwei Sätzen bei Pappos entsprechen) unterscheiden sich von den Beweisen des Zenodoros nur dadurch, dass Abū Ǧaʿfar ein Dreieck und ein Viereck benutzt statt ein Fünfeck und ein Sechseck wie Zenodoros.

2.3 Anonymus

Auf al-Ḫāzin's Text folgt in der Pariser Handschrift noch eine kurze anonyme Abhandlung, die beweist, dass der Kreis grösser ist als ein regelmässiges Vieleck gleichen Umfangs. Es handelt sich dabei um eine Abhandlung, die von F. Sezgin in *GAS* 7/414 unter den Nachträgen zu Band V aufgeführt wird und deren Titel lautet: *Maqāla fī anna saṭḥ kull dāʾira ausaʿ min kull saṭḥ mustaqīm al-aḍlāʿ mutasāwīhā mutasāwī az-zawāyā, musāwiya iḥāṭatuhū li-iḥāṭatihā*. Der Beweis ist von ganz anderer Art als der des Zenodoros. Er ist von R. LORCH übersetzt und behandelt worden.[18]

2.4 Ibn al-Haiṯam

Ibn al-Haiṯam, der fast zur gleichen Zeit wie as-Sumaisāṭī lebte, beschäftigte sich mit dem isoperimetrischen Problem in seiner Arbeit *Maqāla fī anna l-kura ausaʿ al-aškāl al-muǧassama allatī iḥaṭātuhā mutasāwiya wa-anna d-dāʾira ausaʿ al-aškāl al-musaṭṭaḥa allatī iḥāṭatuhā mutasāwiya* (Abhandlung darüber, dass die Kugel der weiteste der Körper mit gleichem Umfang [d.h. gleicher Oberfläche] ist, und dass der Kreis die weiteste der Flächen mit gleichem Umfang ist).[19] Ibn al-Haiṯam kannte die Beweise seiner Vorgänger, doch fand er sie, wie er in der Einleitung zu seinem Werk bemerkte, ungenügend. Seltsamerweise untersuchte er im ersten Teil seiner Arbeit die Kugel, während die griechischen Autoren zuerst die Figuren in der Ebene behandelten. Der zweite Teil des Werks, der sich dann mit der Isoperimetrie in der Ebene befasst, enthält drei Sätze:

1. Wenn ein Kreis und ein regelmässiges Vieleck den selben Umfang haben, hat der Kreis die grössere Fläche.
   Ibn al-Haiṯam's Beweis dafür gleicht denen von Zenodoros und Pappos.
2. Wenn zwei regelmässige Vielecke den selben Umfang haben, so hat dasjenige die grössere Fläche, das mehr Ecken hat.
   Auch hier gleicht der Beweis denen von Zenodoros und Pappos.
3. Von zwei regelmässigen Vielecken, die in den selben Kreis einbeschrieben

18 LORCH, S. 212-15; 218.
19 *GAS* 5/366.

sind, hat dasjenige die grössere Fläche und den grösseren Umfang, das mehr Ecken hat.

Dieser Satz fehlt bei den griechischen Autoren.

2.5 as-Sumaisāṭī

2.5.1 Biographie

As-Sumaisāṭī ist ein kaum bekannter Mathematiker, der in der *GAL* gar nicht, in der *GAS* nur in einem Nachtrag zu Band V[20] vorkommt. Doch wird er in einigen arabischen Lexika (Kaḥḥāla, Ziriklī) aufgeführt.

R. LORCH, der as-Sumaisāṭī's Beweis aus einer anonymen Istanbuler Handschrift (Köprülü 941, 31^0 136b-137a) kennt (s. unten Abschnitt 2.5.2), erhielt den Namen von Prof. R. Rashed (CRNS, Paris), der ihn allerdings unrichtig mit Abū l-Qāsim ʿAlī as-Samsāṭī angab (s. Fussnote 28 in LORCHs Aufsatz). Es ist nicht klar, woher Rashed diese Namensform hatte. Möglicherweise fand er sie in der Berliner Handschrift, da dort der Name so angegeben ist (s.u. Abschnitt 2.5.2). Sollte dies nicht der Fall sein, so müsste wohl noch eine weitere Handschrift dieser Abhandlung existieren. In der *Encyclopedia of the History of Arabic Science* erwähnt R. Rashed Abū l-Qāsim dann mit der richtigen Nisbe as-Sumaisāṭī und verweist dort auf einen Beweis zur Isoperimetrie, der in *Les mathématiqus infinitésimales du IXe au XIe siécle* als kleines Werk as-Sumaisāṭī's behandelt wird, doch ist dieser Beweis mit dem oben in Abschnitt 2.3 erwähnten Beweis identisch und nicht mit dem im Folgenden behandelten.[21]

Für die Biographie as-Sumaisāṭī's wurden die folgenden Quellenwerke[22] benutzt (in chronologischer Reihenfolge):

1. *al-Ikmāl fī rafʿ al-irtiyāb ʿan al-muʾtalif wal-muḫtalif min al-asmāʾ wal-kunā wal-ansāb* von Ibn Mākūlā (st. zwischen 475/1082 und 487/1094) über ähnlich lautende Namen. As-Sumaisāṭī ist im Abschnitt über aš-Šimšāṭī und as-Sumaisāṭī zu finden. (Er wurde auch tatsächlich mit aš-Šimšāṭī verwechselt, so von Kaḥḥāla in dessen *Muʿǧam al-muʾallifīn.*)
2. *al-Ansāb,* ein Nisbenlexikon von as-Samʿānī (st. 562/1166), der Ibn Mākūlā zitiert. Beide Autoren machen nur wenige Angaben zu as-Sumaisāṭī.
3. *Muʿǧam al-buldān,* das geographische Lexikon von Yāqūt (st. 626/1229), berichtet im Absatz über die Ortschaft Sumaisāṭ ziemlich ausführlich über

20 *GAS* 7/413 f.

21 Roshdi RASHED, *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, Bd. 2, S. 444; *Les mathématiques infinitésimales*, Bd. I, S. 777.

22 Für genaue bibliographische Angaben siehe Literaturverzeichnis.

as-Sumaisāṭī. In diesem Absatz wird auch Ibn ʿAsākir zitiert, in dessen Taʾrīḫ Dimašq[23] ich die entsprechende Stelle auch fand. Doch wird, zumindest in der mir vorliegenden Faksimile-Ausgabe der Handschrift, as-Sumaisāṭī nicht erwähnt, sondern nur das Haus des ʿAbdalʿazīz b. Marwān, das er später kaufte.

4. *al-Kāmil fī taʾrīḫ* und *al-Lubāb fī tahḏīb al-ansāb* von Ibn al-Aṯīr (st. 630/1233). Im ersten steht as-Sumaisāṭī unter seinem Todesjahr 453, im zweiten unter seiner Nisbe. Die Angaben sind jeweils relativ kurz.
5. die Werke von aḏ-Ḏahabī (st. 748/1348), in denen sich viele Angaben über as-Sumaisāṭī finden, besonders in seinem *Siyār aʿlām an-nubalāʾ,* einem Personenlexikon. Daneben wird as-Sumaisāṭī in den Nekrologen von *Duwal al-islām* und *al-ʿIbar fī ḫabar man ġabar* aufgeführt, und unter seiner Nisbe im Werk *al-Muštabih fī r-riǧāl* über einander ähnliche Nisben. In *Siyar* wird ebenfalls Ibn ʿAsākir zitiert, doch ist die Herkunft dieses Zitats nicht ersichtlich, es könnte auch von Ibn Mākūlā oder as-Samʿānī stammen.
6. *al-Wāfī bi-l-wafayāt* von aṣ-Ṣafadī (st. 764/1363), eine Sammlung von Biographien, und
7. *an-Nuǧūm az-zāhira fī mulūk Miṣr wal-Qāhira* von Ibn Taġrībirdī (st. 874/1469), eine Geschichte Ägyptens und der umliegenden Länder, in der as-Sumaisāṭī unter dem Jahr 453 aufgeführt wird. Beide Werke bringen verhältnismässig wenig Angaben.
8. *ad-Dāris fī taʾrīḫ al-madāris,* eine Geschichte der verschiedenen Medresen und Konvente (in Damaskus?) von an-Nuʿaimī (st. 927/1521), ist dagegen sehr ausführlich. An-Nuʿaimī lagen offenbar viele frühere Werke vor, u.a. von aḏ-Ḏahabī und aṣ-Ṣafadī. SAUVAIREs Übersetzung von ʿAbdalbāṣit ad-Dimašqī al-ʿAlmawī's (st. 981/1573) Auszug aus an-Nuʿaimī's *Tanbīh aṭ-ṭālib wa-d-dāris fīmā fī Dimašq min al-ǧawāmiʿ wa-l-madāris* (identisch mit obigem Werk?) zog ich zur Ergänzung bei.
9. *Šaḏarāt aḏ-ḏahab fī aḫbār man ḏahab,* ein nekrologisches Werk von Ibn al-ʿImād (st. 1089/1679), war das späteste Werk, das ich benutzte. Es enthält allerdings nicht mehr Angaben als die Werke früherer Autoren.

Der volle Name von as-Sumaisāṭī lautet nach Yāqūt Abū l-Qāsim ad-Dimašqī ʿAlī b. Muḥammad b. Yaḥyā b. Muḥammad b. ʿAbdallāh b. Zakarīyāʾ as-Sulamī al-Ḥubaiš (oder al-Ǧumaiš) as-Sumaisāṭī.[24] Bei den meisten Biographen wird er etwas kürzer mit Abū l-Qāsim ʿAlī b. Muḥammad b. Yaḥyā b. as-

23 Faksimile-Ausgabe der Ẓāhirīya-Handschrift, Bd. 10, S. 387.
24 *Muʿǧam*, S. 152.

Sulamī as-Sumaisāṭī angegeben. Aṣ-Ṣafadī hat statt Ḥubaiš die Nisbe Ḥubaišī,[25] während aḏ-Ḏahabī und an-Nuʿaimī die Variante al-Ḥubšī erwähnen.[26] Ibn Taġrībirdī nennt neben Abū l-Qāsim noch die sonst nirgends erwähnte Kunya Abū Muḥammad.[27] Die Nisbe as-Sumaisāṭī stammt von der Stadt Sumaisāṭ (Samosata) am westlichen Euphrat-Ufer, die zur Lebenszeit von as-Sumaisāṭī byzantinisch war.[28] Nach Ibn al-ʿAdīm war die Stadt bekannt für ihre Gelehrten.[29]

As-Sumaisāṭī wurde im Ramaḍān des Jahres 374 der Hiǧra / Januar/ Februar 985 geboren, wie er nach aḏ-Ḏahabī selbst gesagt haben soll, und starb im Rabīʿ II 453 / April/Mai 1061.[30] Nach Yāqūt soll as-Sumaisāṭī dagegen den Ramaḍān 377 / Dezember 987 / Januar 988 als Geburtsdatum erwähnt haben,[31] doch passt dieses Jahr nicht so gut mit der Angabe mehrerer Autoren zusammen, dass er etwa 80 Jahre alt wurde.[32]

Über das Leben von as-Sumaisāṭī ist wenig bekannt. Nach an-Nuʿaimī sei sein Vater Muʿtazilit gewesen und im Jahr 402/1011 gestorben.[33] Diese Angaben fehlen allerdings bei den anderen Biographen. Mehrfach erwähnt wird jedoch, dass as-Sumaisāṭī von seinem Vater überliefert hat.[34]

Es ist nicht klar, ob as-Sumaisāṭī im damals byzantinischen as-Sumaisāṭ geboren wurde und dort aufwuchs, bevor er nach Damaskus kam, oder ob schon sein Vater as-Sumaisāṭ verlassen hatte. An-Nuʿaimī erwähnt, as-Sumaisāṭī sei nach Damaskus gezogen, was wohl bedeutet, dass er nicht dort geboren wurde.[35] Gleichzeitig schreiben viele Biographen, er habe bei Abū l-Ḥasan ʿAbdalwahhāb b. al-Ḥasan al-Kilābī, einem Traditionarier aus Damaskus, Ḥadīṯ gehört.[36] Da dieser 396/1005 starb, muss as-Sumaisāṭī schon in jungen Jahren nach Damaskus gekommen sein.

25 *al-Wāfī*, S. 156.

26 *Siyar*, S. 71; *ad-Dāris*, S. 151.

27 *an-Nuǧūm*, S. 70.

28 Vgl. ʿIzzaddīn IBN ŠADDĀD, S. 361 f. und ABŪ L-FARAǦ, S. 775 und S. 803.

29 Ibn al-ʿAdīm, S. 270.

30 *Siyar*, S. 72; *ad-Dāris*, S. 151 (mit der verdächtig genauen Angabe, er sei am Donnerstag nach dem Nachmittagsgebet am 10. Rabīʿ II gestorben); SAUVAIRE, S. 278.

31 *Muʿǧam*, S. 152.

32 *al-ʿIbar*, S. 230; *Duwal*, S. 195; *Šaḏarāt*, S. 291.

33 *ad-Dāris*, S. 151 f.; SAUVAIRE, S. 278.

34 *Siyar*, S. 71; *al-Wāfī*, S. 156; *ad-Dāris*, S. 151.

35 *ad-Dāris*, S. 152.

36 *al-Ikmāl*, S. 141; *al-Ansāb*, S. 247; *Muʿǧam*, S. 152; *al-Lubāb*, S. 143; *Siyar*, S. 71; *al-Muštabih*, S. 372; *al-ʿIbar*, S. 230; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291.

As-Sumaisāṭī scheint ziemlich vermögend gewesen zu sein.[37] Denn nachdem er nach Damaskus gekommen war und dort in der Ḫazāʿiya-Gasse wohnte, wie an-Nuʿaimī berichtet,[38] kaufte er dort ein Haus, das früher dem Umaiyaden ʿAbdalʿazīz b. Marwān b. Ḥakam (st. 65/685) gehört hatte.[39] As-Sumaisāṭī soll das Haus durch eine Vorhalle erweitert haben.[40] Sicher ist jedenfalls, dass er das Haus als Ḫānqāh ("Konvent") für Sufis stiftete, wie von den meisten Biographen bemerkt wird.[41] Den oberen Teil (*ʿulūw*) seines Hauses stiftete er der Moschee.[42] Von seinem Vermögen spendete er für verschiedene fromme Zwecke,[43] z.B. für arme Sufis[44] und blinde Koranleser.[45] Später wurde dieses Haus dann als al-Ḫānqāh as-Sumaisāṭīya bezeichnet.[46] In diesem Haus wurde as-Sumaisāṭī auch begraben.[47] Nach aḏ-Ḏahabī wurde sein Grab besucht.[48] Nach seinem Tode wurde das Haus in der Zeit von Tāğaddaula Tutuš (herrschte in Damaskus 471/1079 bis 488/1095)[49] durch ein Tor mit der Vorhalle der danebenliegenden Umaiyaden-Moschee[50] verbunden[51] und mehrmals erweitert.[52]

As-Sumaisāṭī war bekannt als Überlieferer,[53] er überlieferte nicht nur von seinem Vater,[54] sondern auch von al-Kilābī,[55] bei dem er den *Muwaṭṭaʾ*[56] und andere Werke[57] hörte. Er gehörte zu den Notabeln von Damaskus.[58] Vor allem

37 *al-ʿIbar*, S. 230; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291.
38 *ad-Dāris*, S. 152; SAUVAIRE, S. 279.
39 *Muʿğam*, S. 152; *ad-Dāris*, S. 152; SAUVAIRE, S. 279.
40 *ad-Dāris*, S. 153.
41 *Muʿğam*, S. 152; *Siyar*, S. 72; *Duwal*, S. 195; *al-Muštabih*, S. 372; *al-ʿIbar*, S. 229; *al-Wāfī*, S. 156; a*n-Nuğūm*, S. 70; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291; SAUVAIRE, S. 278. Zum Begriff Konvent vgl. F. MEIER, S. 302-312.
42 *Muʿğam*, S. 152; *Siyar*, S. 72; *al-Wāfī*, S. 156; *ad-Dāris*, S. 151.
43 *Muʿğam*, S. 152; *ad-Dāris*, S. 151.
44 *Muʿğam*, S. 152; *ad-Dāris*, S. 151.
45 *al-Ansāb*, S. 247.
46 *al-Kāmil*, S. 19; *al-Wāfī*, S. 156; *ad-Dāris*, S. 151.
47 *Muʿğam*, S. 152; *Siyar*, S. 72; *Duwal*, S. 195; *al-Wāfī*, S. 156; *ad-Dāris*, S. 151.
48 *Siyar*, S. 72.
49 *ad-Dāris*, S. 153; SAUVAIRE, S. 279.
50 *Šaḏarāt*, S. 291.
51 *al-Ansāb*, S. 246; *al-Lubāb*, S. 143; *ad-Dāris*, S. 153; SAUVAIRE, S. 279.
52 *ad-Dāris*, S. 153; SAUVAIRE, S. 279.
53 *Šaḏarāt*, S. 291.
54 *Siyar*, S. 71; *al-Wāfī*, S. 156; *ad-Dāris*, S. 151.
55 *al-Ikmāl*, S. 142; *al-Ansāb*, S. 247; *Muʿğam*, S. 152; *al-Lubāb*, S. 143; *Siyar*, S. 71; *al-Muštabih*, S. 372; *al-ʿIbar*, S. 230; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291.
56 *Muʿğam*, S. 152; *Siyar*, S. 72.
57 *Muʿğam*, S. 152; *Siyar*, S. 72.
58 *al-Muštabih*, S. 372; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291.

bekannt war er für seine mathematische Begabung. Denn alle Biographen ausser Yāqūt stellen in mindestens einem ihrer Werke fest, dass er in Geometrie und Astronomie "hervorragte".[59] Doch wird nirgends ein Werk von ihm erwähnt, auch keine Sammlung von einzelnen Abhandlungen etwa durch seine Schüler. Zwar werden Personen genannt, die von ihm überlieferten,[60] sicherlich ist aber damit die Überlieferung von Ḥadīṯen gemeint. Neben dem Beweis zur Isoperimetrie, der im Folgenden zu behandeln sein wird, sind noch drei weitere Abhandlungen von ihm bekannt, die F. SEZGIN offenbar bei einer genaueren Prüfung der Oxforder Handschrift Thurst. 3970 und Marsh. 713 entdeckte und in *GAS* VII, S. 413f. aufführt:

1. *Fī anna iḫtilāf al-qusīy al-mutasāwiya al-qarība min ad-daura aʿẓam min baʿīda ʿanhā* (Betrachtung der Differenzen von Winkeln am Kreisumfang unter gleichen Bögen).
2. *Fī maʿnā faṣlin mā baina s-saṭrain min ǧadāwil al-autār al-wāqiʿa fī d-dāʾira* (eine Definition im Zusammenhang mit trigonometrischen Tabellen).
3. *Mā suʾila ʿanhu min raʾy al-mutakallimīn fī anna l-aǧsām murakkaba min ǧawāhir farda,* seine Antwort auf Fragen nach der Ansicht der Dialektiker darüber, dass die zusammengesetzten Körper aus einzelnen Substanzen bestehen, usw.

F. SEZGIN schreibt, es handle sich um einen erhaltenen Teil aus einem mathematischen Buch, was bedeutet, dass eine Sammlung von Abhandlungen existiert haben muss.

2.5.2 Die Handschrift

Der als Grundlage für die nachfolgende Edition benutzte Text stammt aus dem Sammelband Ms. or. quart. 1867, Bl. 270b-271a der Staatsbibliothek Preussischer Kulturbesitz in Berlin. Eine genaue Beschreibung des Sammelbandes ist in G. SCHOELERs Katalog *Arabische Handschriften* Teil II unter Nr. 178 erschienen; der kurze Teil, der unsere Abhandlung enhält, ist ebenda unter Nr. 189 beschrieben. Auf diese eingehenden Beschreibungen sei hier verwiesen.

Der Sammelband enthält 20 Abhandlungen. Mehr als die Hälfte davon sind griechischen Ursprungs. 17 der Abhandlungen wurden von Nāṣiraddīn aṭ-Ṭūsī bearbeitet. Zwei stammen von al-Karābīsī und Ibn al-Haiṯam, zwei berühmten Mathematikern, während der letzte Teil des Bandes (Bl. 270b-271a) auf den

59 *al-Ikmāl*, S. 142; *al-Ansāb*, S. 246; *al-Kāmil*, S. 19; *Siyar*, S. 72; *al-ʿIbar*, S. 230; *al-Wāfī*, S. 156; *an-Nuǧūm*, S. 70; *ad-Dāris*, S. 151; *Šaḏarāt*, S. 291.

60 *al-Ansāb*, S. 247; *al-Lubāb*, S. 143; *Siyar*, S. 71f.; *an-Nuǧūm*, S. 70.

kaum bekannten as-Sumaisāṭī zurückgeht. Thematisch passt dieser Text gut in die Sammlung; da er an letzter Stelle steht, scheint er dazu gedient zu haben, das Buch zu füllen. Der Text existiert noch in zwei weiteren Handschriften, die anonym sind (vgl. *GAS* 5/393 und M. KRAUSE: *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker,* S. 522). Die Berliner Handschrift ist also nach derzeitigem Wissen die einzige, die die Abhandlung as-Sumaisāṭī zuschreibt. Zwar wird dort sein Name as-Samsāṭī السمساطي (statt as-Sumaisāṭī السميساطي) geschrieben, doch da ein Mathematiker dieses Namens in der biographischen Literatur nicht existiert, kann es sich nur um as-Sumaisāṭī handeln. Dafür, dass die Zuschreibung echt ist, spricht der Umstand, dass as-Sumaisāṭī ein wenig bekannter Autor ist; denn wenn ein Schreiber dieses Werk einem falschen Autor hätte unterschieben wollen, hätte er wohl einen bekannteren gewählt, etwa einen der in der Berliner Handschrift erwähnten Griechen.

Für die nachfolgende Edition wurde neben dem Text der Berliner Handschrift der von Krause erwähnte Text Köprülü 941, 31^{0} 136b-137a verwendet. Frau Dr. Gudrun SCHUBERT, der ich an dieser Stelle danken möchte, war so freundlich, die beiden Texte während ihres Aufenthaltes in Istanbul zu kollationieren. Der zweite von Krause erwähnte Text war leider nicht zugänglich, es ist allerdings nicht anzunehmen, dass er inhaltlich von den anderen zwei Handschriften abweicht.

Im Folgenden wird für die Berliner Handschrift die Sigle B, für die Handschrift Köprülü 941 die Sigle K verwendet. Angaben ohne Sigle sind Konjekturen von mir. [Aus satztechnischen Gründen erfolgt der Abdruck des arabischen Textes erst auf den Seiten 313-317. Die Redaktion]

2.5.3 Wörtliche Übersetzung und freie Übertragung

Wörtliche Übersetzung

1. Aus der Erörterung des Abū l-Qāsim ʿAlī as-Sumaisāṭī, Gottes Erbarmen auf ihn!
2. [Von] allen gleichseitigen Vielecken und einem Kreis, dessen Umfang ihrem Umfang gleich ist [gilt]: der Kreis ist
3. von ihnen der [flächenmässig] grösste. Was mehr Seiten hat
4. ist weiter als jenes mit weniger Seiten und es ist grösser an Fläche.
5. Es sei A [ein Punkt auf dem Kreis] um das Zentrum B.
6. Man ziehe eine Tangente durch A, was die Strecke $\overline{\underset{.}{H}AY}$ ergibt.

7. Diese sei die Seite des gleichseitigen Dreiecks, das an den

8. Kreis konstruiert wird. Und es werden *Ḥ, H, B* und *Y, D, B* verbunden. Dann ist der Bogen $\overset{\frown}{HD}$ ein Drittel des Kreisumfangs.

9. Und weil $\overline{ḤY}$ ein Drittel des Umfangs des an den Kreis konstruierten

10. Dreiecks ist, ist $\overline{ḤY}$ länger als $\overset{\frown}{HD}$. Dann sei $\overline{AḪ}$ gleich

11. dem Bogen $\overset{\frown}{AH}$ und $\overline{AṬ}$ gleich dem Bogen $\overset{\frown}{AD}$. Und man errichtet

12. auf den Punkten *Ḫ, Ṭ* die Senkrechten $\overline{ḪK}$, $\overline{ṬL}$. Und weil die

13. gerade Strecke $\overline{ḪṬ}$ gleich dem Bogen $\overset{\frown}{HD}$ ist, liegen die Punkte

14. *K, L* ausserhalb des Kreisumfangs. Es liege der Punkt *K*

15. auf der Strecke $\overline{ḤH}$ und der Punkt *L* auf der Strecke $\overline{YD}$ und *K,*

16. *L* werden verbunden. Dann ist $\overline{KL}$ gleich der Strecke $\overline{ḪṬ}$, die parallel ist zu $\overline{KL}$ und $\overline{ḪṬ}$ ist gleich dem Bogen $\overset{\frown}{HD}$. Und die

17. Strecke $\overline{BA}$ geht durch den Punkt *M*. Und das Verhältnis von $\overline{ḤY}$

18. zu $\overline{KL}$ ist wie das Verhältnis von $\overline{AB}$ zu $\overline{BM}$, und $\overline{ḤY}$ ist länger

19. als $\overline{KL}$, entsprechend ist $\overline{AB}$ länger als $\overline{BM}$. Und $\overline{AB}$ multipliziert mit der Hälfte des Umfangs [des Kreises] ergibt die Fläche

20. des Kreises, und $\overline{MB}$ multipliziert mit der Hälfte des Umfangs [des Kreises] ergibt die Fläche des Dreiecks. Also hat der Kreis

21. die grössere Fläche als das Dreieck.

22. Was die Seite des an den Kreis konstruierten Quadrats angeht, so sei $\overline{AǦ}$ gleich abgetrennt wie [der Radius] $\overline{AB}$, und $\overline{AS}$

23. wie $\overline{AB}$. Dann ist $\overline{ǦS}$ die Seite des an den Kreis konstruierten

24. Quadrats, und *Ǧ, B* und *S, B* werden verbunden, Dann ist der

25. Bogen $\overset{\frown}{ʿF}$ ein Viertel des Kreisumfangs und ist kleiner als

26. die Strecke $\overline{ǦS}$. Es sei $\overline{ṢQ}$, in dessen Mitte sich *A* befindet,

27. gleich [dem Bogen] $\overset{\frown}{ʿF}$, der ein Viertel des Kreisumfangs ist.

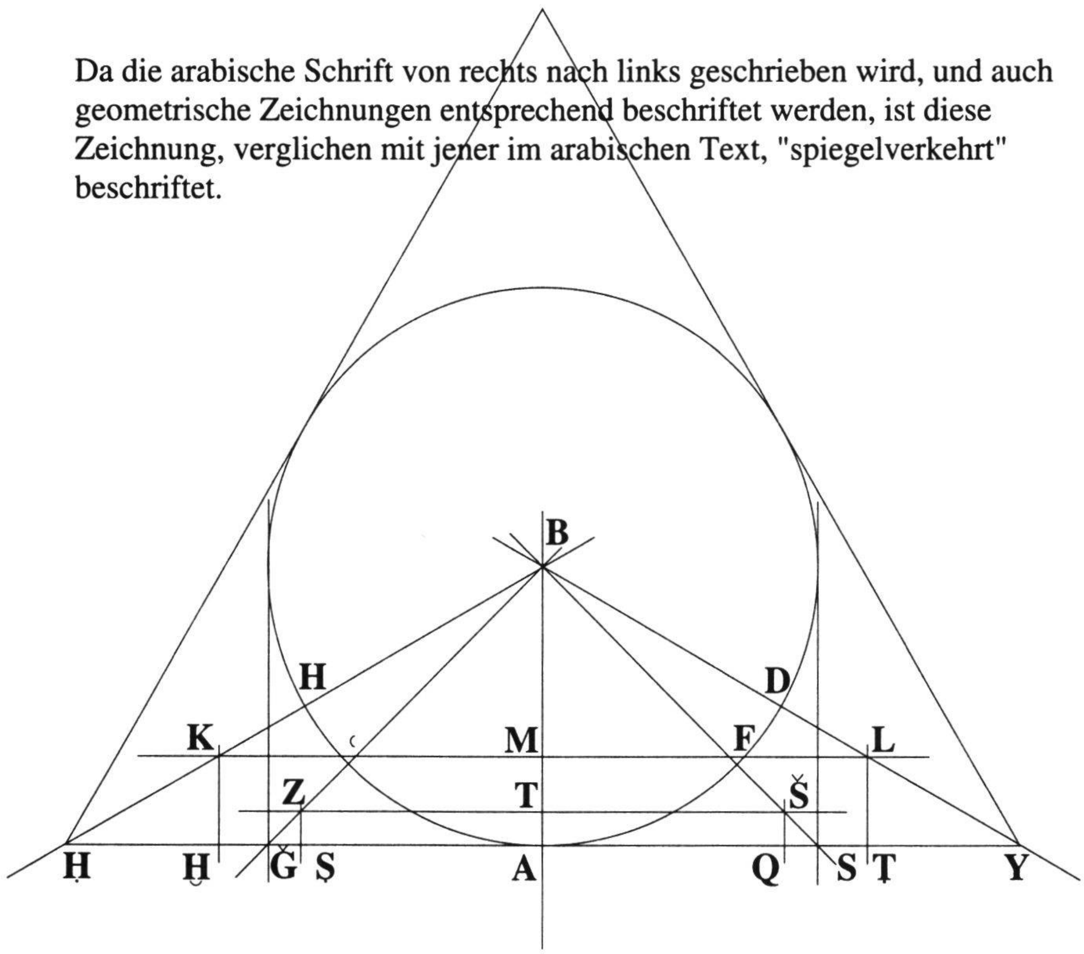
28. Dann ist $\overline{ṢQ}$ gleich dem Bogen $\overset{\frown}{ʿF}$ und man errichtet auf den

29. beiden Punkten *Ṣ, Q* die beiden Senkrechten $\overline{ṢZ}$, $\overline{QŠ}$. Und weil

30. die beiden Linien $\overline{ǦB}$, $\overline{SB}$ ein Viertel des Kreises abtrennen, und zwar den

Bogen $\widehat{`AF}$, der gleich der Strecke $\overline{ṢQ}$ ist, der

31. Geraden in der Breite, und die beiden Strecken $\overline{ǦB}$, $\overline{SB}$ innerhalb
32. der Strecken $\overline{ḤB}$, $\overline{YB}$ sind, schneiden die Senkrechten $\overline{ṢZ}$, $\overline{QŠ}$ die beiden Strecken $\overline{Ǧ`}$, $\overline{SF}$. Wenn wir Z und Š verbinden
33. zu einer Strecke, dann schneidet diese die Strecke $\overline{BA}$ im
34. Punkt T. Dann ergibt die Multiplikation von $\overline{BT}$ mit der Hälfte
35. des Umfangs [des Kreises] die Fläche des Quadrats. Dagegen
36. ergibt die Multiplikation von $\overline{BM}$ mit der Hälfte des Umfangs [des Kreises] die Fläche des Dreiecks. Dabei ist $\overline{BT}$ länger
37. als $\overline{BM}$, und das Quadrat folglich grösser als das Dreieck.
38. Und ebenso erklären wir, was an Formen nach dem Viereck kommt; und das war, was wir wollten.



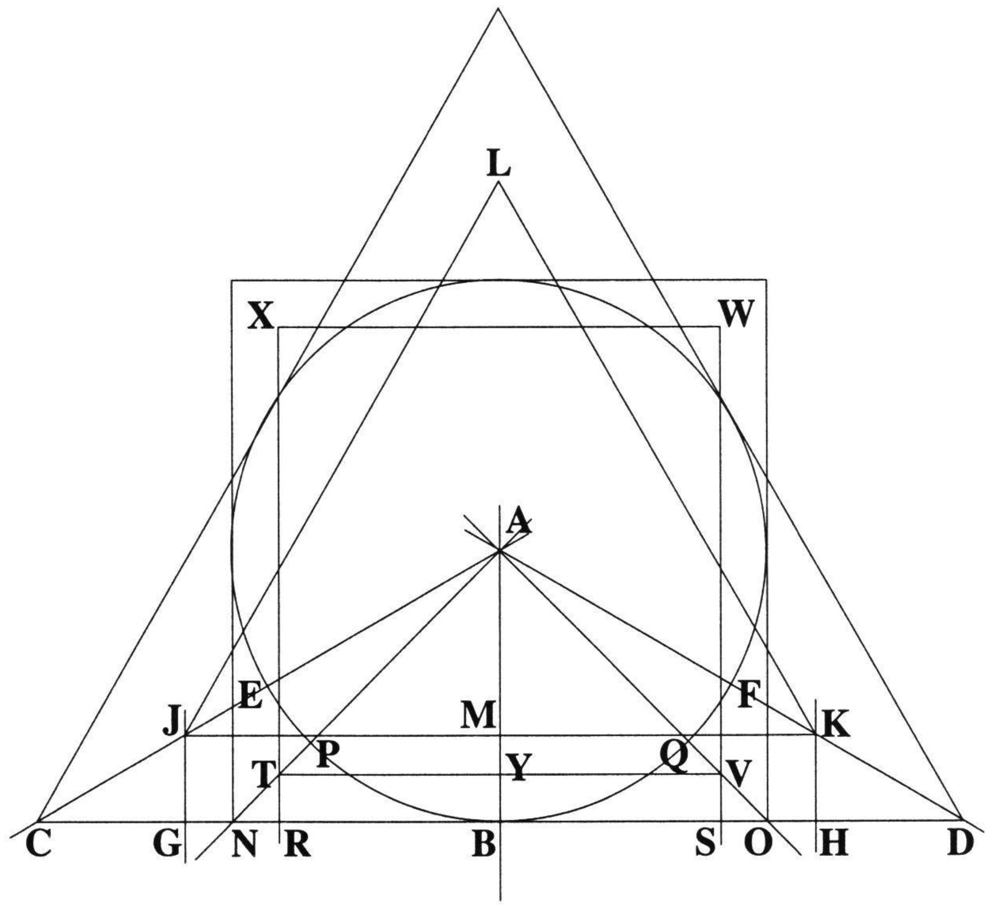
Freie Übertragung

Da manche Stellen im Text von as-Sumaisāṭī nicht ganz klar sind, (es kommen z.B. mehrere Dreiecke vor, die nicht deutlich unterschieden werden), möchte ich versuchen, seinen Beweis in moderner Sprache nochmals darzustellen.

Um einen Kreis mit dem Mittelpunkt A wird ein gleichseitiges Dreieck konstruiert. Eine der Seiten des Dreiecks berührt den Kreis im Punkt B. Von beiden Enden C und D dieser Seite werden zum Mittelpunkt A $\overline{CA}$ und $\overline{DA}$ gezogen. Diese schneiden den Kreis in den Punkten E und F. $\overset{\frown}{EBF}$ ist ein Drittel des Kreisumfangs U. Es gilt $\overline{CBD} > \overset{\frown}{EBF}$. Man nehme nun zwischen C und D eine Strecke $\overline{GH} = \overset{\frown}{EBF}$ an mit B als Mittelpunkt. Auf G und H werden zwei Senkrechte errichtet, die $\overline{CA}$ in J und $\overline{DA}$ in K schneiden. Da $\overline{GH}$ bzw. $\overline{JK}$ gleich lang sind wie $\overset{\frown}{EBF}$, liegen die Punkte J und K ausserhalb des Kreises. $\overline{JK}$ sei eine Seite des gleichseitigen Dreiecks JKL mit dem Mittelpunkt A, dessen Umfang gleich lang ist wie der Umfang U des Kreises. Nun schneidet $\overline{JK}$ den Radius $\overline{AB}$ im Punkt M. Für die Fläche des Dreiecks JKL gilt daher $1/2U \cdot \overline{AM} = F_\Delta$. Für die Fläche des Kreises gilt aber $1/2U \cdot \overline{AB} = F_\bigcirc$. Da $\overline{AM} < \overline{AB}$ ist $F_\Delta < F_\bigcirc$.

Weiter wird um den Kreis ein Quadrat konstruiert. Eine der Seiten des Quadrats berührt den Kreis im Punkt B. Von den beiden Enden N und O dieser Seite werden zum Mittelpunkt A $\overline{NA}$ und $\overline{OA}$ gezogen. Diese schneiden den Kreis in den Punkten P und Q. $\overset{\frown}{PBQ}$ ist ein Viertel des Kreisumfangs U. Es gilt $\overline{NBO} > \overset{\frown}{PBQ}$. Man nehme nun zwischen N und O eine Strecke $\overline{RS} = \overset{\frown}{PBQ}$ an mit B als Mittelpunkt. Auf R und S werden zwei Senkrechte errichtet, die $\overline{NA}$ in T und $\overline{OA}$ in V schneiden. Da $\overline{RS}$ bzw. $\overline{TV}$ gleich lang sind wie $\overset{\frown}{PBQ}$, liegen die Punkte T und V ausserhalb des Kreises. $\overline{TV}$ sei eine Seite des Quadrates $TVWX$ mit dem Mittelpunkt A, dessen Umfang dem Umfang U des Kreises gleich ist. Nun schneidet $\overline{TV}$ den Radius $\overline{AB}$ im Punkt Y. Für die Fläche des Quadrats gilt daher $1/2U \cdot \overline{AY} = F_\square$. Die Fläche des Kreises ist aber $1/2U \cdot \overline{AB} = F_\bigcirc$. Da $\overline{AY} < \overline{AB}$, ist $F_\square < F_\bigcirc$. Gleichzeitig gilt $\overline{AM} < \overline{AY}$, also $F_\Delta < F_\square < F_\bigcirc$.

Der Beweis wird in derselben Weise bis zum n-Eck fortgesetzt.



2.5.4 Einordnung

As-Sumaisāṭī's Beweis ist schwierig einzuordnen, da ein Kontext fehlt, aus dem sich ableiten liesse, ob as-Sumaisāṭī die Abhandlung des Zenodoros bzw. Pappos kannte. Auch am Beweis selbst lässt sich kein Einfluss erkennen. Zwar entspricht die Einleitung den oben erwähnten zwei ersten Sätzen des Pappos (allerdings in anderer Reihenfolge), doch ist as-Sumaisāṭī's Beweis anders aufgebaut. Zudem ist er nicht vollständig, denn das Verhältnis $\overline{AM} < \overline{AY}$, das im letzten Satz des Beweises verwendet wird, zeigt sich zwar in der Zeichnung, wird aber nicht bewiesen. As-Sumaisāṭī beweist also nur, dass ein Kreis mehr Fläche hat als ein regelmässiges Vieleck gleichen Umfangs, aber nicht, dass ein regelmässiges Vieleck mit mehr Ecken eine grössere Fläche hat als eines mit weniger Ecken. Diesen Mangel bemerkte auch R. LORCH in seiner Abhandlung über Abū Ǧaʿfar al-Ḫāzin (S. 154).

Da der Beweis aus einer grösseren Abhandlung zu stammen scheint *(min kalām...),* liesse sich darüber spekulieren, ob es sich dabei um eine Abhandlung zur Isoperimetrie handelte. Allerdings ist es eben so gut möglich, dass sich as-Sumaisāṭī eher zufällig mit diesen zwei Sätzen beschäftigte.

من كلام ابي القاسم علي السميساطي[1] رحمة الله عليه

كل اشكال[2] متساوية الاضلاع ومحيط دائرة متساوٍ احاطتها فان الدائرة اوسعها وما كان عدد اضلاعه اكثر فهو[3] اوسع مما كان عدد اضلاعه اقل واعظم مساحة[4]

فليكن ا[5] على مركز ب وليجز على نقطة ا[6] خطا مماسا للدائرة وهو خط ح ا ى[7] وليكن ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المعمول على دائرة ا ب ويصل ح ه ب ى د ب فيكون قوس ه د ثلث محيط الدائرة ولان ح ى ثلث محيط المثلث المعمول على الدائرة[8]

[1] ابي القاسم علي السميساطي : ابي القسم علي السمساطي B;-K
[2] اشكال B: شكل K
[3] فهو B: فانه K
[4] واعظم مساحة B: واعظم K
[5] فليكن ا B: فليكن دائرة ا K
[6] على نقطة ا B: على ا K
[7] وهو خط ح ا ى B: وهو ح ا ى K
[8] الدائرة B: الدائرة و ه ز ثلث محيط الدائرة K
[9] ا خ : ا ح K,B

يكون ح ى اطول من ه د فليكن ا خ[9] مساويا لقوس ا ه[10] و ا ط مساويا لقوس ا د ويقيم على نقطتي خ[11] ط عمودي خ ك ط ل[12] فلان خ ط المستقيم مساو لقوس ه د تقع نقطتا ك ل خارج محيط الدائرة فلتقع نقطة ك على خط ح ه ونقطة ل علي خط ى د ويصل ك ل فيكون ك ل مساويا لخط خ ط[13] الموازي ك ل[14] و خ ط[15] مساو لقوس ه د وليقع[16] خط ب ا على نقطة م ونسبة ح ى الى ك ل كنسبة ا ب الى ب م و ح ى اعظم من ك ل فـ ب ا اعظم من ب م و ب ا في نصف

10 ا ه :B ه ر K

11 خ : ح K,B

12 خ ك ط ل: ح ك ط ل المستقيم K,B

13 خ ط : ح ط K,B

14 الموازي ك ل B: الموازي له K

15 خ ط : ح ط K,B

16 وليقع B: وليقطع K

الاحاطة مساحة الدائرة و ب م في نصف الاحاطة مساحة المثلث[17] فالدائرة اعظم مساحة من المثلث[18] واما ضلع المربع المعمول على الدائرة وليفصل ا ج[19] مساوي لـ ا ب و ا س مثل ا ب[20] فيكون ج س ضلع المربع المعمول على الدائرة ويصل ج ب س ب[21] فيكون قوس ع ف ربع محيط الدائرة فهي اصغر من خط ج س[22] وليكن ص ق الذي نقطة ا على منتصفه مساويا لـ ع ف الذي هو ربع محيط الدائرة فيكون ص ق[23]

[17] فالدائرة ··· من المثلث B:-K
[18] فالدائرة ··· من المثلث B:-K
[19] ا ج B: ا ه K
[20] فيكن ج س ··· ج ب س ب B:-K
[21] فيكن ج س ··· ج ب س ب B:-K
[22] ج س B: ه س K
[23] ص ق K: ص ج B
[24] ويقيم على B: ويحرح من K
[25] ق B: ف K

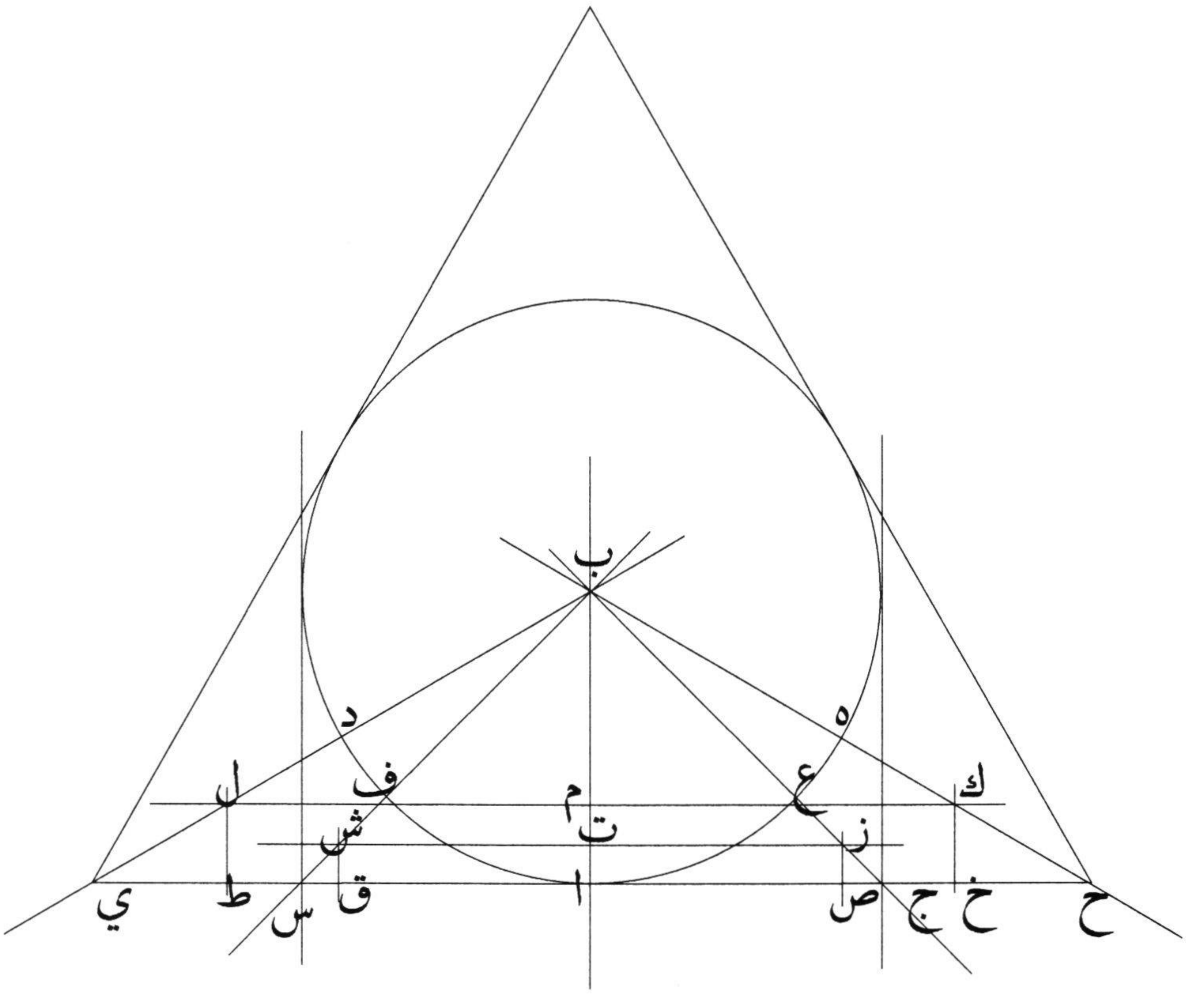
مساويا لقوس ع ف ويقيم على[24] نقطتي ص ق[25] عمودي ص ز ق ش ولان[26] خطي ج ب[27] س ب يفصلان ربع الدائرة وهو قوس ع ا ف المساوي لخط ص ق المستقيم بلعرض وخطا ج ب[28] س ب داخلان[29] خطي ح ب ى ب يقع عمودا ص ز[30] ق ش على خطي[31] ج ع[32] س ف واذا وصلنا خط[33] ز ش[34] قطع خط ب ا[35] على نقطة ت فضرب[36] ب ت في نصف الاحاطة مساحة المربع لكن ضرب ب م

26 ولان B: لان K
27 ج ب B: ه ب K
28 ج ب B: ه ب K
29 داخلان B: داخلا K
30 ص ز B: ص ر ن K
31 خطي K: خط B
32 ج ع B: ه ع K
33 خط K: خطي B
34 ز ش : ر س B ; ر ه ش K
35 ب ا : ب ح B ; م ا K
36 فضرب B: وضرب K

في نصف الاحاطة مساحة المثلث و ب ت اعظم

من ب م فالمربع اعظم من المثلث

وكذلك نبين فيما[37] بعد المربع من الاشكال وذلك ما اردناه



[37] فيما B: ما K

3. Literatur- und Abkürzungsverzeichnis

3.1 Arabische Werke

ABŪ L-FARAĞ = Abū l-Farağ Yaḥyā b. Saʿīd al-Anṭākī: *Taʾrīḫ aḏ-Ḏail*; herausgegeben und übersetzt von I. KRATCHKOFSKY und A. VASILIEV. Petrologia Orientalis, Tome XVIII, Fasc. 5. – Paris 1957.

al-Ansāb = AS-SAMʿĀNĪ, Abū Saʿd ʿAbdalkarīm b. Muḥammad b. Manṣūr at-Tamīmī: *al-Ansāb*. Haidarābād 1382f. = 1962f. Bd. 7.

ad-Dāris = AN-NUʿAIMĪ, Abū l-Mafāḫir Muḥyiddīn ʿAbdalqādir b. Muḥammad: *ad-Dāris fī taʾrīḫ al-madāris;* [Hrsg.:] Ǧaʿfar AL-ḤASANĪ. Damaskus 1367f. = 1948f. Bd. 2.

Duwal = AḎ-ḎAHABĪ, Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. ʿUṯmān b. Qāimāz Šamsaddīn: *K. Duwal al-islām*. 2. Aufl. Haidarābād 1364 = 1945.

Fihrist = IBN AN-NADĪM, Abū l-Farağ Muḥammad b. Isḥāq: *K. al-Fihrist;* herausgegeben von Gustav Flügel. Leipzig 1871/2.

al-Ibar = AḎ-ḎAHABĪ, Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. ʿUṯmān b. Qāimāz Šamsaddīn: *al-Ibar fī ḫabar man ġabar;* [Hrsg.:] Ṣalāḥaddīn AL-MUNAĞĞID u. Fuʾād SAIYID. Kuwait 1960f. – Bd. 3.

IBN AL-ʿADĪM = Ibn al-ʿAdīm, Kamāladdīn ʿUmar b. Aḥmad: *Buġyat aṭ-ṭalab fī taʾrīḫ Ḥalab;* herausgegeben von Fuat SEZGIN. Frankfurt 1986.

IḪWĀN = Iḫwān aṣ-Ṣafāʾ: *Rasāʾil*. Beirut 1376 = 1957.

al-Ikmāl = IBN MĀKŪLĀ, al-Amīr Abū Naṣr ʿAlī b. Hibatallāh: *al-Ikmāl fī rafʿ al-irtiyāb ʿan al-muʾtalif wal-muḫtalif min al-asmāʾ wal-kunā wal-ansāb*. Haidarābād 1381f. = 1962f. – Bd. 5.

ʿIZZADDĪN = ʿIzzaddīn IBN ŠADDĀD, Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Ibrāhīm: *al-Aʿlāq al-ḫaṭīra fī ḏikr umarāʾ aš-Šām wal-Ǧazīra;* herausgegeben von Anne-Marie EDDÉ. In: *Bulletin des Etudes Orientales*. Damaskus 1983 (?).

al-Kāmil = ʿIzzaddīn IBN AL-AṮĪR, Abū l-Ḥasan ʿAlī b. Abī l-Karam Muḥammad b. Muḥammad b. ʿAbdalkarīm: *al-Kāmil fī t-taʾrīḫ*. Beirut 1385f. = 1965f. – Bd. 10.

al-Lubāb = derselbe: *al-Lubāb fī tahḏīb al-ansāb*. Baġdād, ohne Jahr. – Bd. 2.

Muʿǧam = YĀQŪT b. ʿAbdallāh ar-Rūmī: *K. Muʿǧam al-buldān*; herausgegeben von Ferdinand WÜSTENFELD. Leipzig 1866f. – Bd. 3.

al-Muštabih = AḎ-ḎAHABĪ, Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. ʿUṯmān b. Qāimāz Šamsaddīn: *al-Muštabih fī r-riğāl*; [Hrsg.:] ʿAlī Muḥammad AL-BAĞĀWĪ. Ohne Ort 1962. – Bd. 1.

an-Nuğūm = IBN TAĠRIBIRDĪ, Abū l-Maḥāsin Ǧamāladdīn Yūsuf: *an-Nuğūm az-zāhira fī mulūk Miṣr wal-Qāhira*. Kairo 1352f. = 1933f. – Bd. 5.

Šadarāt = IBN AL-ʿIMĀD, Abū l-Falāḥ ʿAbdalhaiy b. Aḥmad b. Muḥammad: *Šadarāt aḏ-ḏahab fī aḫbār man ḏahab*. Beirut, ohne Jahr. – Bd. 3.

Siyar = AḎ-ḎAHABĪ, Abū ʿAbdallāh Muḥammad b. Aḥmad b. ʿUṯmān b. Qāimāz Šamsaddīn: *Siyar aʿlām an-nubalāʾ;* [Hrsg.:] Šuʿaib AL-ARNAʾŪṬ u. Akram AL-BŪŠĪ. 2. Aufl. Beirut 1404 = 1984.

al-Wāfī = AṢ-ṢAFADĪ, Ṣalāḥaddīn Ḫalīl b. Aibak: *al-Wāfī bi-l-wafayāt;* herausgegeben von Ramzi BAALBAKI. Wiesbaden 1983. – Teil 22.

Ẓāhirīya-Handschrift = IBN ʿASĀKIR, Abū l-Qāsim ʿAlī b. al-Ḥasan b. Hibatallāh Ṯiqataddīn: *Taʾrīḫ madīnat Dimašq;* Faksimile-Ausgabe der Ẓāhirīya-Handschrift. Amman 1988.

3.2 Werke in europäischen Sprachen

CANTOR = Cantor, Moritz: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*; 1. Bd.: Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200 n.Chr. – Leipzig 1894.

DILGAN = Dilgan, Hamid: *Sur un théorème isopérimetrique d'Ibn-i-Haitham*. In: *Collection de travaux de l'académie internationale d'histoire des sciences No 12. Actes du IXe Congrès international d'histoire des Sciences, Barcelona - Madrid 1-7 Septembre 1959*, S. 453-460.

EECKE = Ver Eecke, Paul: *Pappus d'Alexandrie, la collection mathématique, œuvre traduite pour la première fois du grec en français*. Paris 1933. – Bd. 2.

EI[1] = *Enzyklopädie des Islam*. Herausgegeben von Houtsma, Arnold, Basset u. Hartmann. 1. Aufl. Leiden, Leipzig 1913f.

EI[2] = *The Encyclopaedia of Islam*. Herausgeberkollektiv. 2. Aufl. Leiden, London 1960f.

GAL = BROCKELMANN, Carl: *Geschichte der Arabischen Litteratur*. 2. Aufl. Leiden 1943f. (Supplementbände 1937).

GAS = SEZGIN, Fuat: *Geschichte des Arabischen Schrifttums*. Leiden 1967f.

HEATH = Heath, Thomas: *A History of Greek Mathematics*. Bd. 2. Oxford 1921.

KRAUSE = Krause, Max: *Stambuler Handschriften islamischer Mathematiker*. In: *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*; Abt. B; Studien Bd. 3. Berlin 1936. S. 437-532.

LORCH = Lorch, Richard: "*Abū Jaʿfar al-Khāzin on Isoperimetry and the Archimedean Tradition*". In: *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften*, Bd. 3 (Frankfurt 1986):150-229.

MEIER = Meier, Fritz: *Abū Saʿīd Abū l-Ḫayr. Wirklichkeit und Legende*. Acta Iranica Bd. IV. Leiden, Teheran 1976.

MÜLLER = Müller, Wilhelm: "Das isoperimetrische Problem im Altertum". In: *Sudhoffs Archiv für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, 37 (1953):39-71.

RASHED, Roshdi: *Les mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle, fondateurs et commentateurs*. London, 1996.

RASHED, Roshdi: "Infinitesimal determinations, quadrature of lunales and isoperimetric problems". In: *Encyclopedia of the History of Arabic Science;* London, 1996. Bd. 2:418-446.

ROSENTHAL = Rosenthal, Franz: "al-Kindī and Ptolemy". In: *Studi orientalistici in onore di Giorgio Levi delle Vida*. Rom 1956. Bd. 2:436-456.

SAUVAIRE = Sauvaire, Henri: "Description de Damas". Kapitel VIII in: *Journal asiatique*, 9ième série, tome V (Paris 1895):269-315.

SCHOELER, Gregor: *Arabische Handschriften*. Teil II. Unter Mitarbeit von H.-C. Graf von Bothmer, T. Duncker Gökçen und H. Jenni beschrieben. (= *Verzeichnis der orientalischen Handschriften in Deutschland*, Reihe B, Bd. XVII). Stuttgart 1990.