Zeitschrift: Allgemeine schweizerische Schulblätter
Band: 11 (1845)
Heft: 5

Artikel: Die Operationen oder Denkverrichtungen in der Mathematik
Autor: Fröbel, Karl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-865802

September und October.

I.

Die Operationen oder Denkverrichtungen in der Mathematik.

Eine der beßten Uebungen für scharfes Denken ist die Bestimmung der verschiedenen Thätigkeiten, welche der Verstand in der Erkenntniß der mathematischen Wahrheiten ausübt. Nachstehender Versuch soll zu einer strengen Unterscheidung dieser Thätigkeiten oder Operationen anleiten.

Die Operationen der Mathematik unterscheiden sich, je nachdem sie zur Bestimmung der Form, der Größe, oder der Zahl angewendet werden.

I. Form.

1. Wenn die vorgestellten Grenzen der Raumkörper nach ihrer gegenseitigen Lage gedacht werden, stehen sie unter dem Begriff Form. Eine Form sind die in bestimmter Lage innerlich vorgestellten und äußerlich dargestellten und geordneten Begrenzungen des Raumes.

2. Formen bestehen aus Punkten. Denn die vollständig bestimmte Grenze ist ein Punkt, und die Lage eines Raumkörpers kann nur in Punkten oder den Stellen derselben vollständig bestimmt werden. Linien und Flächen sind schon als Formen zu betrachten und als solche aus Punkten zusammengesetzt. — Umgekehrt bilden nach Lage und Ordnung gedachte und

äußerlich hingestellte Punkte Formen und nur Formen, keine Größen. Denn weder getrennte noch sich berührende Punkte können eine Größe ausmachen. Zwar sind Linien, Flächen und Raumkörper auch Größen und dienen auch als solche zur Bildung von Formen; allein nur, insofern sie aus Punkten zusammengesetzt sind (oder so gedacht werden), und von ihrer Größe abgesehen wird.

3. Die Lage der Punkte wird durch Richtung, Winkel und Raumganzes bestimmt. Umgekehrt ist das, wodurch die Punkte auf einander bezogen und in ihrer Lage oder Stellung bestimmt werden, erstlich im einfachsten Falle die Richtung, dann das Winkelganze, und zuletzt das Raumganze.

Punkte sind also die letzten Bestandtheile oder die Grundbestandtheile, das Raumganze, der Ebenwinkel und die Richtung der letzte Bestimmungsgrund der Form.

4. Es gibt drei Arten von Grundformen: Linien, Flächen und Raumkörper, und nur diese drei; aber insofern sie als aus Punkten bestehend vorgestellt werden. Aus Punkten und den Grundformen werden durch Zusammensetzen und Anordnen (Combiniren und Permutiren) neue und immer zusammengesetztere Formen gebildet.

Von Linien, Flächen und Raumkörpern als Formen kann nicht gesagt werden: sie haben eine Form, sondern sie sind Formen; denn ohne Form gedacht sind sie in beziehungslose Punkte aufgelöst.

5. Die Grundthätigkeit bei der Bestimmung der Form ist das Stellen oder Setzen — ein einfaches Bestimmen jeder einzelnen Stelle. Eine weitere Thätigkeit ist das Zusammenstellen oder Zusammensetzen, wodurch eine Stelle für je eine andere oder viele solche der Lage nach bestimmt wird. Das Anordnen bestimmt die Lage von Stellen in Beziehung auf alle übrigen Stellen.

II. Größe.

6. Wenn Punkte zu einem Ganzen im Raume ver-

bunden gedacht werden, entsteht der Begriff Größe. Größen sind Ganze, zu welchen Punkte verbunden sind.

7. Es gibt zweierlei Ganze: Formganze und Größenganze. Formganze sind beliebige abgegrenzte Formen, die sich nur im Allgemeinen vergleichen aber nicht messen lassen. So sind zwei beliebige Dreiecke als Formganze gleich oder ähnlich und von Vierecken in dieser Hinsicht verschieden. Dasselbe gilt von zwei Kreisen, oder Halbkreisen u. s. w. Eine Form wird zu einem Ganzen, wenn man sie bewegbar denkt, ohne daß ihre Punkte dabei ihre gegenseitig bestimmte Lage verändern. — Größenganze sind entweder Linien, oder Flächen, oder Raumkörper, aber ohne Rücksicht auf ihre Form, nur ihrem Inhalt nach betrachtet als Länge, Flächeninhalt, Körperinhalt. Die Form wird für sie gleichgültig. Sie lassen sich vergleichen und auch messen, und werden zu diesem Zwecke auf die einfachste Form gebracht.

In dieser Beziehung sind Linien, Flächen und Raumkörper Größen; betrachtet man aber zugleich ihre Form, so kann man sagen: sie haben Größe. Im letztern Falle bedeutet Größe eine Eigenschaft, die den räumlichen Ganzen — Linie, Fläche, Raumkörper — als Gegenständen zugeschrieben wird; im ersteren werden diese Ganzen nur als durch die Eigenschaft Größe bestehend gedacht, so daß sie ohne Größe gar nicht Gegenstände für uns sein würden. — Streng genommen sind Linien, Flächen und Körper selbst Größen, so daß der Ausdruck: sie haben Größe, unrichtig ist; denn abgesehen von der Größe sind sie Formen, und als solche sind sie nichts als getrennte, obgleich auf einander bezogene Punkte, die in Richtungen und Flächen liegen; Punkte aber können keine Linie oder Fläche bilden.

Bemerkung. Richtungen, Ebenwinkel und Körperwinkel sind weder Größen noch Formen; nur der Zahlbegriff Einheit kann auf sie als auf Ganze angewendet werden. Man kann zwar auch von ihrer Größe sprechen und sie zu Formen anordnen, aber nur durch Beimischung von Begriffen, die ihnen selbst fremd sind.

8. Eine Größe besteht nicht aus Punkten, sondern aus gleichartigen Theilen: eine Linie aus Linientheilen, eine Fläche aus Flächentheilen u. s. w. Diese Theile werden zu dem Ganzen verbunden; das Ganze wird in seine Theile geschieden oder getheilt.

Jede Größe wird dagegen durch eine verschiedenartige erzeugt: ein Raumkörper durch eine bewegte Fläche, eine Fläche durch eine bewegte Linie, eine Linie durch einen bewegten Punkt. Ein bloßes Beziehen getrennt liegender Punkte auf einander ist nicht hinreichend, um die Begriffe Linie, Fläche, Raumkörper zu erzeugen, sondern der Begriff Bewegung muß hinzukommen.

Wenn ein Punkt bewegt gedacht wird, so ist die durch diese Bewegung hergestellte Verbindung aller durchlaufenen Stellen eine Linie; wenn alle Punkte einer Linie aus ihren Bewegungsrichtungen heraus in andere Richtungen bewegt gedacht werden, doch so, daß sie stets eine Linie bilden, so entsteht durch die hergestellte Verbindung aller durchlaufenen Stellen der Linie eine Fläche; durch die Bewegung einer Fläche endlich entsteht auf ähnliche Weise ein Raumkörper. — Diese Bewegung ist die ausgeführte, verwirklichte Beziehung, welche in der Form Statt findet. — (Nur durch Bewegung und den Grund derselben (Kraft) ist Verbindung der im Raume rein getrennten Körperpunkte denkbar.) —

9. Ungleichartige Größen können geordnet und verbunden, aber nicht verglichen werden; nur gleichartige Größen lassen sich vergleichen.

Das Vergleichen der Größen besteht darin, daß eine Größe in die Form der andern versetzt (bewegt) gedacht wird.

Zwei gleichartige Größen werden durch Vergleichen als gleich oder ungleich bestimmt.

Von zwei ungleichen Größen ist die kleinere gleich einem Theil der größeren.

Das einfache Vergleichen hat immer nur je zwei Größen zum Gegenstand.

Ein Punkt, eine Linie, eine Fläche und ein Raumkörper stehen in keinerlei Größenverhältnisse zu einander.

10. Größen können ferner durch wiederholtes Vergleichen gemessen werden.

Das Messen besteht darin, daß eine Größe mit einer Anzahl schon als gleich bestimmter Größen abermals verglichen wird. Die Anzahl kann auch nur eine Größe sein. Eine Größe ist durch eine andere gemessen, wenn diese einmal oder mehrmal an einander gesetzt, gleich der ersteren ist. Das bloße Vergleichen ist im Falle der Gleichheit auch schon ein Messen.

Die Größe, welche eine Zahl mal an einander gesetzt (verbunden), gleich einer andern ist, nennt man das Maß.

11. Das Messen unterscheidet sich in zwei entgegengesetzte Thätigkeiten: entweder ist die eine Größe als Maß gegeben, und durch ein wiederholtes oder maliges Zusammensetzen derselben wird die andere als gemessenes Ganze bestimmt; oder umgekehrt, eine Größe ist als Ganzes gegeben, und durch Eintheilen derselben wird ein sovielter Theil bestimmt. Drittens kann aber auch das Verhältniß zwei gegebener Größen durch ein gemeinschaftliches Maß bestimmt werden. Um dieses zu finden, müssen die beiden Größen und ihre Reste durch einander so oft mal gemessen werden, bis ein Rest als das Maß des vorhergehenden sich erweist. Diese Verrichtung kann man Vermessen nennen.

12. Größen werden also stufenweis durch einen bewegten Punkt erzeugt, indem aber dabei von der Bewegung abgesehen wird und nur die durch sie bestimmten Stellen als verbunden zusammengefaßt werden. Die erzeugten Größen — gleichartige und verschiedenartige — können zu Formen zusammengesetzt

werden. Die gleichartigen Größen lassen sich vergleichen und messen. Eine weitere Thätigkeit auf Größen anzuwenden ist unmöglich. Durch das Messen entstehen Größeneinheiten, auf welche die Zählthätigkeiten angewendet werden können; dadurch werden die Größen zu positiven und negativen, zu Producten und Bruchtheilen bestimmt, welches alles in die Zahlenlehre gehört.

Durch das Vermessen wird zwischen zwei Größen ein Zahlenverhältniß bestimmt, durch Vergleichen (das einfache Vergleichen) ein bloßes Größenverhältniß.

Bemerkung. Die Bezeichnung arithmetisches und geometrisches Verhältniß ist verkehrt. Wenn umgekehrt das Größenverhältniß, welches das Größer oder Gleich bestimmt, ein geometrisches, das Zahlenverhältniß, welches das Sovielmal angibt, ein arithmetisches genannt wird, so hat dies eher einen Sinn.

III. Zahl.

13. Eine Zahl besteht aus Einheiten. Weder Punkte noch Theile reichen hin, eine Zahl zu bilden.

Die Erzeugung eines Ganzen geschieht allmälig durch Bewegung, welche je zwei Punkte verbindet; die Einheit entsteht mit einem Male, indem alle Punkte oder Theile eines Ganzen vereinigt gedacht werden. Der Grund der Vereinigung, das, wodurch sie entsteht, ist ein Begriff, zu dessen Darstellung oder Verwirklichung alle Punkte und Theile des Ganzen als dienend gedacht werden. Dieser Begriff ist das, was alle Theile zusammen in dem Ganzen mit einem Male sind, oder was das Ganze in allen seinen Theilen ist. — Der einfachste Begriff, welcher zur Erzeugung einer Einheit dienen kann, ist der allgemeine Raum von einem Punkte aus als Raumganzes aufgefaßt. Denkt man sich jeden Punkt einer Form oder Größe auf einen beliebigen Bestimmungspunkt oder Mittelpunkt des Raumganzen bezogen, so erhält man im Gedanken diese Form oder Größe als Einheit.

14. Es unterscheiden sich dreierlei Einheiten: Formeinheiten, Größeneinheiten und Zahleinheiten.

Eine Formeinheit ist jede Formart, die man zählen kann, wie Gerade, Kreis, Dreieck, Fläche, Würfel, Kugel, Körper; auch die Form eines Stuhles, Baumes, Menschen u. dgl. gehört dazu, — also irgend eine durch einen Begriff zu einer Vorstellung vereinigte Form. — Das, was an einzelnen Außendingen gezählt wird, ist die begrenzte Form, welche dem Begriff des Dinges, der allgemein ist, und nicht gezählt, sondern nur als Eins gedacht werden kann, zur Verwirklichung dient, und zwar immer in je einem einzelnen Falle.

Eine Größeneinheit ist jedes Maß, das zur (räumlichen) Bestimmung eines Begriffes dient. Dazu gehört das Längenmaß, Flächenmaß, Körpermaß; auch das Kraftmaß, Gewicht, Werthmaß (Geld), Zeitmaß und anderes.

Die Zahleinheit ist die Eins und das Eins im Gegensatz gegen das Nichts. Eine Größeneinheit ist jedes durch einen Artbegriff bestimmte Maß; eine Eins dagegen ist jeder vermittelst eines (räumlichen) Maßes bestimmte Begriff. — Das Eins ist der allgemeine, unbestimmte, nur von der Zeit und gegen dieselbe unterschiedene Raumbegriff, also das unendliche auf sich selbst bezogene Raumganze, ohne jede Grenze. Es ist darum nur ein Eins denkbar.

15. Zahlen werden aus Einheiten gebildet durch Zählen. Eine Zahl kann nur aus gleichartigen Einheiten gebildet werden; daher entstehen dreierlei Zahlen: Formenzahlen, Größenzahlen, und reine Zahlen.

Es gibt so vielerlei Formenzahlen, als es verschiedene Formarten gibt, also unerschöpflich viele.

Von Größenzahlen gibt es nur drei Arten, indem verschiedene Längeneinheiten, oder Flächen-, oder Körpereinheiten auf dieselbe Einheit gebracht werden können. Die mittelbaren Größenbestimmungen der Masse, der Kraft, der Zeit u. dgl. nach Gewicht, Geschwindigkeit, Dauer u. s. w. können zwar scheinbar zu mehr Arten von Größenzahlen führen, kommen aber immer auf Zahlen von Längen-, oder Flächen-, oder Körpereinheiten zurück.

Reine Zahlen sind nur von einer Art, indem nur der allgemeine Raumbegriff sich nach Maß bestimmen läßt. Alle andern Begriffe, die sich messen lassen, wie Zeit, Kraft, Werth, ja selbst der Geist, setzen den Raumbegriff voraus, schließen ihn als Seite oder besondere Beziehung in sich; und nur diese Seite von ihnen kann nach Maß bestimmt werden. Jede Beziehung des Raumbegriffes nun auf ein Maß ist von einer andern solchen Beziehung nur der Zeit nach unterschieden, im Uebrigen dieselbe, da sie immer dasselbe Raumganze betrifft, welches bezogen wird.

16. Das Zählen unterscheidet sich in ein Vorwärts- und Rückwärtszählen. Das erstere ist ein Bilden, das letztere ein Auflösen der Zahlen; beide heben einander auf, aber ohne die Gleichheit der Bedeutung zu haben, wie zwei entgegengesetzte Richtungen, welche einander nicht aufheben. Das Rückwärtszählen hat nur eine Bedeutung, wenn das Vorwärtszählen vorausgesetzt wird, und geht nicht weiter als bis zur Auflösung schon gebildeter Zahlen. Das Rückwärtszählen bezieht sich nicht auf die Einheit, welche immer auf die gleiche Weise als Einheit erzeugt wird, sondern auf die Folge einer Einheit auf die andere; es geschieht daher sprungweise, und nicht stätig, wie die Rückbewegung eines Punktes.

Bemerkung. Das Zählen, welches die Zahlen bildet oder erzeugt, unterscheidet sich von dem Bewegen, welches die Größen erzeugt, dadurch, daß es seinen Gegenstand, das als Einheit bestimmte Ganze, stets erneuert, während das Bewegen seinen Punkt behält; beide Thätigkeiten aber bestimmen eine Zeitreihe, in welcher die vorhergegangenen Bestimmungen aufbewahrt sind. Wenn die Größe erzeugt ist, wird der Anfang derselben gleichgiltig; in einer Zahl dagegen bleibt nothwendig eine Einheit die erste, und jede folgende behält ihre Stelle in der Zeitfolge. — Der Gegensatz der Richtung macht auch für die Bewegung einen Unterschied zwischen Vorwärts und Rückwärts möglich. Denken wir uns einen Punkt (oder auch eine Linie oder Fläche) erst vorwärts, dann rückwärts bewegt, so entsteht bei jeder Bewegung eine Größe; denken wir uns dagegen beide Bewegungen zugleich auf den Punkt angewendet, so heben sie einander auf, so weit sie gleich sind.

Uebrigens bezieht sich der Unterschied zwischen Vorwärts und Rückwärts nur auf den Raum; für die Zeit ist nur ein Vorwärts denkbar.

Das Zählen oder die Zahlthätigkeit ist die **Grundoperation** der Zahl. Ihre Bezeichnung ist:

$$\begin{array}{rcl} 1=1 & \text{und} & 3-1=2 \\ 1+1=1 & & 2-1=2 \\ 2+1=3 & & 1-1=0 \\ (n-1)+1=n & & \text{u. s. w.} \end{array}$$

17. Aus schon gebildeten Zahlen können durch **Zuzählen** neue Zahlen gebildet werden; aber nur aus gleichartigen.

Das Zuzählen läßt sich auf alle drei Zahlarten anwenden, aber mit folgendem Unterschied:

Obgleich es unerschöpflich viele Arten von **Formenzahlen** gibt (15), so können doch vielerlei Formeinheiten unter einen Begriff gebracht und so zusammengezählt werden. Z. B. 1 Dreieck, 2 Rechtecke und 3 Kreise sind zusammen 6 Flächen; 2 Fliegen, 1 Fisch und 2 Hunde sind zusammen 5 Thiere. Welches die allgemeinsten Formbegriffe seien, braucht hier nicht entschieden zu werden.

Von den Größenzahlen lassen sich nur welche von Längeneinheiten, oder von Flächeneinheiten, oder von Körpereinheiten zusammenzählen; auch die mittelbaren Größeneinheiten müssen gleichartig sein. Sind die Einheiten nur ungleich groß, so können sie auf gleich große zurückgebracht werden.

Alle reinen Zahlen lassen sich zusammenzählen.

18. Das **Zuzählen** kann nur auf je zwei gegebene Zahlen, m und n, angewendet werden. Es geschieht, indem man die eine Zahl, n, auflöst, und die Einheiten zu der andern, m, zuzählt; oder indem man beide Zahlen m und n als aufgelöst neben einander setzt und nun die Einheiten zählt. Es ist also ein Zählen, aber vorgeschrieben durch zwei gegebene Zahlen.

Die Bezeichnung dieser Thätigkeit ist

$$m + n = p.$$

Die beiden Zahlen m und n sind von gleicher Art und nur dadurch unterschieden, daß die eine, m, zuerst gesetzt, die andere, n, ihr als nachgesetzt zugezählt wird. m kann daher **Setzzahl**, n **Zusetzzahl**, oder auch beide — Setzzahlen, p die **Gesammtzahl** genannt werden.

Bemerkung. Daß $m + n = n + m$ ist ein Grundsatz und zwar der erste der Zahlenlehre. Er beruht darauf, daß die Lage und Anordnung für die in einer Zahl zusammengefaßten Einheiten gleichgiltig ist, wie die Form für die Größe (7).

19. Dem Zuzählen entgegengesetzt ist das **Abzählen** und das **Vergleichen**.

Das **Abzählen** geschieht, wenn eine Zahl p, als Gesammtzahl betrachtet und von ihr rückwärts gezählt wird nach einer Zahl, n, (die als gewesene Zusetzzahl anzusehen ist,) und so die Setzzahl, m, erhalten wird. — Die Zusetzzahl erhält durch dieses Verfahren eine andere Bestimmung, sie wird **Abzählungszahl**. Die Zahl m, der **Rest**, kann auch die **Ueberzahl** genannt werden.

Das **Vergleichen** findet Statt, wenn von einer Zahl, m, als Setzzahl vorwärts gezählt wird, bis m und die zugezählte Zahl, n, gleich der gegebenen Zahl p werden. — Die so erhaltene Zahl n kann die **Unterschiedszahl** heißen.

Der Unterschied zwischen Abzählen und Vergleichen zeigt sich am deutlichsten an Formzahlen. n Formeinheiten (Kugeln) von p gleichartigen abzuzählen, hat nur einen Sinn, wenn n von den gegebenen p Formeinheiten gemeint sind; sind aber p und n (Kugeln) gegeben, so kann offenbar kein Abzählen, sondern nur ein Vergleichen Statt finden; denn eine Formeinheit (Kugel) kann von einer andern (Kugel) nicht abgezählt werden. Bei (gleichartigen) Größeneinheiten fällt diese Unmöglichkeit weg, indem eine von zwei gleichen Größeneinheiten in die andere versetzt gedacht werden kann; die, welche abgezählt werden soll, vernichtet dann die andere, indem die erzeugende Bewegung der beiden Größenganzen als entgegengesetzt angenommen wird.

Das Abzählen einer Zahl n ist nur möglich, wenn eine Gesammtzahl p gegeben ist, die ebensoviel oder mehr Einheiten hat, als n. Wenn keine Einheit mehr da ist, und m noch abgezählt werden soll, so ist die Ausführung dieser Thätigkeit zwar unmöglich, aber m ist nun als eine Zahl zu betrachten, die abgezählt werden soll, so bald es möglich ist. Mit dieser Bestimmung behaftet heißt sie eine abzählige, im Gegensatz gegen eine zuzählige Zahl. — Jede gegebene, gesetzte oder gebildete Zahl ist zuzählig (positiv); abzählig (negativ) wird eine gebildete oder gesetzte Zahl erst durch die Thätigkeit des Abzählens, die auf sie angewendet wird, der sie als Gegenstand dienen soll.

Formenzahlen können nicht abzählig sein, nur Größenzahlen und reine Zahlen.

Die Bezeichnung des Abzählens ist

$$p - n = m;$$

der Vergleichens

$$p \backsim m = n.$$

Bemerkung. Sätze der Zahlenlehre sind:

$$a - b = - (b - a); \quad o - (- a) = + a.$$

20. Eine Zahl kann ferner so oft mal gezählt werden, als eine andere Zahl Einsen hat, oder sie kann als Setzzahl nach den Einsen einer andern Zahl wiederholt werden.

Für diese Thätigkeit oder Zahlverrichtung sind, wie bei dem Zuzählen, zwei Zahlen, m und n, gegeben, aus welchen durch die Thätigkeit eine neue Zahl, p, gebildet wird. Das Zuzählen aber verlangt zwei gesetzte Zahlen oder Setzzahlen, m und n, von gleicher Art und gleicher Bedeutung, und bildet sie so in eine Zahl, daß beide neben einander bleiben. Das Wiederholen aber bedarf nur einer Setzzahl, m, und zählt diese als Einheit nach der andern gegebenen Zahl, n, so daß beide verschiedene Bedeutung haben und auch von verschiedener Art sein können.

Statt Multiplicand, Multiplicator, Product, Factoren können folgende Benennungen gebraucht werden:

Die Zahl m, welche nach n wiederholt wird, wollen wir die Setzungszahl, n die Wiederholungszahl, p die Reihenzahl oder Fachzahl nennen; die Factoren m und n können Seitenzahlen heißen.

Die Setzungszahl kann keine Formzahl sein. Denn die Bestandtheile eines Formganzen, welches zu einer Formeinheit bestimmt wird, sind alle gegeben, weßwegen eine Wiederholung nicht auf sie anwendbar ist; sie müssen zu einer zweiten und jeder folgenden Einheit ebenso unmittelbar gegeben sein. Zweimal eine Kugel sind nicht zwei Kugeln; ein Viereck beliebig oft wiederholt gedacht, ist immer nur ein Viereck; sechsmal ein Stuhl ist nicht ein halbes Dutzend Stühle, sondern nur einer. Aber sechsmal ein Zoll ist sechs Zoll. Größenzahlen und reine Zahlen können wiederholt werden, und Setzungszahlen sein.

Die Wiederholungszahl ist immer eine reine Zahl. Denn dem Wiederholen ist die Setzungszahl als Gegenstand gegeben; jede malige Setzung desselben ist eine Beziehung des allgemeinen Raumbegriffes auf ihn, und solche wiederholte Beziehungen sind nur der Zeit nach unterschieden (15). Die Zeit macht die Wiederholung von Größenzahlen und reinen Zahlen möglich, wie sie auch den Begriff Bewegung und durch ihn die Größen möglich macht. — Drei Zoll mal eine Zahl m hat keinen Sinn.

Eine Setzungszahl ist ihrer Wesenheit nach eine Größenzahl; eine reine Zahl ist ihrer Wesenheit nach eine Wiederholungszahl.

Das Wiederholen besteht darin, daß der Begriff einer reinen Zahl mit dem einer Größenzahl, oder reinen, verbunden wird. Die Setzungszahl wird als Einheit bestimmt und zwar so oft mal nach einander, als die Wiederholungszahl Einsen hat.

Die Bezeichnung des Wiederholens ist

$$m \times n = p, \text{ oder } m\,n = p.$$

Daß $m' \times n = n' \times m$, wo (′) eine Größenart bedeutet, ist ein Satz der Zahlenlehre, dessen Beweis auf der räumlichen Anordnung der Einheiten, nämlich in der Form eines Parallelogramms, beruht (::: = ⁝⁝), im Grunde also, wie $m + n = n + m$, auf der Gleichgiltigkeit der Form für die Zahl (18). — Hieraus rechtfertigt sich die Bezeichnung Seitenzahl statt Factor.

21. Dem Wiederholen entgegengesetzt ist das Eintheilen und das Vergleichen.

Eine Größenzahl oder reine Zahl p kann als Reihenzahl betrachtet, und nun eine Setzungszahl m bestimmt werden, welche in ihr n mal enthalten ist. In diesem Falle ist n die Theilungszahl, m die Theilzahl zu nennen; der Dividend p ist durch Reihen- oder Fachzahl hinreichend bezeichnet. — Um das Eintheilen auszuführen, muß p mit den nfachen Fachzahlen verglichen werden: ist sie gleich einer derselben, so ist m bestimmt; wenn sie aber zwischen zweien oder der einfachen und o liegt, so ist die Bestimmung von m unmöglich; wohl aber kann m als eine Zahl von Einheiten angegeben werden, die mit der Bestimmung behaftet sind, erst nach n maliger Wiederholung als Einheiten zu zählen. Eine mit solcher Bestimmung behaftete Einheit nennt man einen Bruch, m aber eine Bruchzahl, und bezeichnet sie, wenn q die behaftete Einheit bedeutet, durch $\frac{q}{n}$.

Auch eine Größeneinheit kann als Bruch bestimmt sein, mit dem Unterschiede von einem Bruch der Eins, daß die Eintheilung der Größeneinheit ausführbar ist, und der erhaltene Bruchtheil als Einheit betrachtet werden kann, während die Eintheilung der Zahleinheit unmöglich bleibt. Brüche von Größenzahlen können also als Einheiten betrachtet werden, so daß die Bestimmung der Theilzahl m immer möglich wird, wenn die Fachzahl p eine Größenzahl ist. — Aehnlich verhält es sich mit den abzähligen (negativen) Zahlen. Eine abzählige Zahleinheit oder Eins ist unmöglich, weil die Erzeugung der Eins mit einem Male (13) geschieht und jedes Rückwärtsgehen ausschließt; sie bleibt eine zuzählige Eins mit der Bestimmung, in Beziehung auf eine andere Eins abgezählt zu werden; aber eine abzählige Größeneinheit kann wegen der Bewegung, die als Begriff in ihr liegt, als eine zuzählige Einheit entgegengesetzter Art gedacht werden, die Größe wird dann nur in entgegengesetzter Richtung gemessen und nach ihren Maßeinheiten gezählt.

Die Bezeichnung des Eintheilens ist:

$$p : n = m, \text{ oder } \frac{p}{n} = m.$$

22. Endlich können zwei gleichartige Zahlen, reine oder Größenzahlen, durch einander gemessen werden. Die eine, m, ist die Messungszahl, die andere, p, die gemessene; das gemeinschaftliche Maß ist die Einheit.

Die Thätigkeit besteht darin, daß jede Einheit der gemessenen Zahl p als Theil der Messungszahl m bestimmt wird. p durch m gemessen ist p mal der mte Theil von m, welches man ebenfalls durch $p : m$ oder $\frac{p}{m}$ bezeichnet. Wenn $p : m$ oder $\frac{p}{m}$ als eine reine Zahl n betrachtet wird, so kann n die Verhältniß- oder Maßzahl heißen.

Bemerkung. Es wäre ein Vortheil, wenn $\frac{m}{n}$ nur für das Eintheilen, und $m : n$ nur für das Messen gebraucht würde oder umgekehrt. Um Wiederholen und Theilen als Aufgabe zu stellen, könnten dann die Zeichen $\times$ und $\div$ benutzt werden, das letztere auch für das Messen; ab, $a : b$ und $\frac{a}{b}$ würden die ausgeführte Zahlverrichtung bedeuten.

Hier folgen nun die Sätze der Zahlenlehre:

$$(a \pm b) \times c = ac \pm bc;$$
$$(a \pm b) \times - c = - ac \mp bc;$$
$$(a : b) \times c = ac : b;$$
$$(a : b) \div c = a : bc;$$
$$a \div (b : c) = ac : b; \text{ u. s. w.}$$

Formzahlen (3 Fünfecke, 4 Kegel) können so wenig eingetheilt und gemessen, als wiederholt werden.

23. Endlich kann das Wiederholen einer Zahl nach einer andern Zahl wiederholt, oder eine Zahl kann als Wiederholungszahl nach einer andern gezählt werden. Diese Zahlverrichtung heißt Potenziren oder Steigern.

Bei dieser Operation ist eine Zahl, m, gegeben, welche für jede Eins einer zweiten gegebenen Zahl, n, einmal als Wiederholungszahl gezählt oder verwendet werden soll. m kann die Grundzahl, n die Steigerungszahl, und die Zahl p, welche gebildet wird, die Stufenzahl heißen. Steigerungszahl und Grundzahl müssen reine Zahlen sein; keine von beiden kann als Setzzahl gelten, sondern was gesetzt ist, ist nur noch die Einheit der Grundzahl m, welche diese schon als einmal gezählte Wiederholungszahl m mal wiederholt. Die Setzzahl oder Setzungszahl (20), welche das Steigern erfordert, ist also die Eins.

Die Bezeichnung dieser Zahlverrichtung ist:

$$1 \times m^n = p.$$

Sätze der Zahlenlehre sind:

$$\frac{1}{m^n} = m^{-n};$$
$$a^m \; a^n = a^{m+n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

24. Eine reine Zahl p kann umgekehrt als Stufenzahl von n maliger Steigerung gegeben sein, und dann die Grundzahl bestimmt werden.

Zu diesem Zweck muß die Zahl p mit den bekannten Stufenzahlen von nter Stufe verglichen werden (ähnlich wie in 21): ist sie gleich einer derselben, so ist die Grundzahl m bestimmt; liegt sie aber zwischen zwei Stufenzahlen, so ist die Bestimmung von m nicht möglich; wohl aber können zwei Zahlen so bestimmt werden, daß ihre Verhältnißzahl (22) auf nter Stufe der Verhältnißzahl $\frac{p}{1}$ beliebig nahe kommt.

Die Grundzahl heißt in dieser Beziehung die Wurzel(zahl) der Stufenzahl; die Benennung Grundzahl ist übrigens hinreichend. Das Bestimmen der Grundzahl nennt man Wurzelausziehen; die Bezeichnung ist $\sqrt[n]{p} = m$.

Sätze der Zahlenlehre sind hier:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$$

$$\sqrt[\frac{1}{n}]{a} = a^n;$$

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}.$$

$\sqrt{-1}$ ist unmöglich auszuführen, bedeutet aber eine Eins mit der Bestimmung behaftet, daß $\sqrt{-1} \, . \, \sqrt{-1} = -1$ u. s. w.

25. Endlich kann das Steigerungsverhältniß zweier gegebenen Zahlen m und p bestimmt werden. Die eine Zahl, p, muß als Stufenzahl, die andere, m, als Grundzahl betrachtet, und nun die Steigerungszahl, n, bestimmt werden. Die letztere heißt in dieser Beziehung Logarithmus. Ist die Zahl p größer als m, so muß man sie mit den Stufenzahlen von m, ist sie kleiner als m, so muß man ihre Stufenzahlen mit m vergleichen u. s. w.; wenn die verglichenen Zahlen ungleich sind, so läßt sich eine annähernde Bruchzahl für n bestimmen.

Die Benennung Steigerungszahl macht übrigens das Wort Logarithmus überflüssig. Die Bezeichnung $\log_m$ oder $l_m p = n$ kann passend mit $p_m = n$ vertauscht werden.

Nun folgen die Sätze: $(ab)^m = a^m b^m$; $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$; ferner $(a \pm b)^m = a^m \pm m a^{m-1} b + \ldots$; u. s. w., welche die Algebra zu beweisen hat.

Soweit gehen die bekannten einfachen Operationen oder Zahlverrichtungen. Nun ist die Frage, ob es noch neue geben kann.

Die Grundthätigkeit des Denkens in der Zahlenlehre oder Analysis ist das Zählen, und der Gegenstand desselben sind Einheiten. Durch das Zählen der Einheiten entstehen Zahlen. Das Zählen kann wiederum auf schon gebildete Zahlen angewendet werden. Aber es ist selbst schon ein Verschiedenes für die verschiedenartigen Einheiten, nur tritt die Verschiedenheit noch nicht so in ihren Folgen hervor, wie dies bei dem Zählen der Zahlen der Fall ist.

Formeinheiten können nur gezählt werden, wenn sie einzeln gegeben oder gesetzt sind; das Zählen derselben ist nur ein Zuzählen.

Größeneinheiten können ebenso zugezählt werden; das Zählen derselben kann aber auch ein Wiederholen sein, wozu nur eine Größeneinheit gegeben oder gesetzt ist.

Das Zählen der Zahleinheit oder der Eins kann ein Zuzählen, kann ein Wiederholen, es kann aber auch ein Steigern sein, wodurch es freilich nicht über Eins hinauskommt. Die reine Eins ist nämlich nicht als ein Einmal Etwas, sondern als ein bloßes Ein Mal zu denken, und wenn dieses nur in Beziehung auf sich selbst m mal gezählt wird, so entsteht ein Einmal einmal einmal . . . . Eins — wenn man will, also das Eins. Aber das Zuzählen und das Wiederholen von Einheiten gibt die gleiche Zahl m.

Für das Zählen der Zahlen ist nun im einfachsten Falle nur eine Zahl gegeben, auf welche das Zählen so angewendet wird, wie auf Einheiten. Außer der gegebenen Zahl, m, welche die Einheit vertritt, ist also eine Zahl, n, bestimmt, nach welcher gezählt wird; denn immer hat das Zählen den Zweck, eine Zahl, n, zu bilden.

Wenn m eine Formzahl ist (m Kugeln), so läßt sich das Zählen nach n nur so darauf anwenden, daß n auch eine gegebene gleichartige Formzahl ist, welche zu m zugezählt wird. m und n sind dabei Setzzahlen (18).

Ist m eine Größenzahl, so kann zwar auch eine Größenzahl n zugezählt werden, aber m selbst als Setzzahl läßt sich auch nach n zählen, wo dann n eine reine Zahl und zwar Wiederholungszahl ist. Weiter geht das Zählen einer Größenzahl nicht.

Ist m eine reine Zahl, so kann eine andere, n, als Setzzahl zugezählt werden; oder m selbst wird als Setzungszahl nach n gezählt, wo n Wiederholungszahl ist; oder man kann endlich m als Wiederholungszahl nach n zählen, in welchem Falle n Steigerungszahl ist.

Dies sind die drei oben erklärten einfachen Operationen der Zahl oder Zahlverrichtungen; ihre Umkehrungen gehen nicht über sie hinaus und verlangen hier keine besondere Berücksichtigung. Sie heißen einfach, weil für sie immer nur eine Zahl gegeben ist, auf welche das Zählen nach einer und auch nur einer andern angewendet wird. Das Zuzählen, Wiederholen und Steigern kann aber auch auf mehrere Zahlen angewendet werden, woraus jedoch keine neuen Operationen hervorgehen, sondern nur Vermischungen der schon bekannten und ihrer Umkehrungen.

Nun könnte man zunächst versuchen, eine gegebene Zahl, m, als Steigerungszahl nach einer andern Zahl, n, zu zählen. Wenn dieses möglich wäre, so würde es eine neue einfache Operation sein, welche unmittelbar auf das Potenziren folgt, wie dieses auf das Multipliziren folgt.

Eine Steigerungszahl (ein Exponent), m, ist nothwendig eine reine Zahl, welche als solche aus m Einheiten besteht, von denen jede als ein Ein Mal gedacht werden muß. Als Wiederholungszahl nun ist die reine Zahl m = m $\times$ Eins; als Steigerungszahl aber muß sich jedes Ein-Mal auf das vorhergehende beziehen, und statt m $\times$ Eins erhält man Ein-Mal Ein-Mal .... (m mal nach einander) = Ein-Mal = $1^m = 1$. Soll also eine Zahl m für sich als Steigerungszahl gesetzt werden, so verwandelt sie sich dadurch in Eins. Nur die Eins ist zugleich die Steigerungszahl ihrer selbst. In dieser Beziehung aber ist sie das Eins (14). Und m als Steigerungszahl n mal gesetzt würde

$$1^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot\,(n\ \mathrm{mal})}}}}} \quad \text{oder} \quad 1^{1^{1^{\cdot^{\cdot^{\cdot\,(n\ \mathrm{mal})}}}}} = 1 \text{ geben.}$$

Also führt eine möglichst einfache Zahlverrichtung, die zunächst auf das Potenziren folgen würde, zu Eins und durchaus zu nichts außer Eins. Aber diese Operation ist nicht einfach.

Daß eine einfache Operation über das Potenziren hinaus unmöglich ist, läßt sich nämlich auch so zeigen.

Es ist klar, daß, wenn eine neue Operation auf das Potenziren folgen könnte, eine Zahl, m, zunächst als Exponent nach einer andern Zahl, n, gesetzt werden müßte. Weil die Operation einfach und nicht aus verschiedenartigen gemischt sein soll, darf m bloß als Exponent und nicht als Factor verwendet werden. Was ist dann aber die Grundzahl, und woher soll sie genommen werden? Setzt man 1 für die Grundzahl, so kommt aus der Operation stets nur die Eins heraus; setzt man ein m auch für die Grundzahl, so wird es 1 mal als Factor verwendet und muß außerdem noch n mal als Exponent stehen, und so hat man offenbar keine einfache, sondern eine gemischte Operation, so daß ein Umkehren der Operation unmöglich wird, wie sogleich beim Versuch sich zeigt. Dasselbe ist der Fall, wenn statt m eine beliebige andere Zahl, r, als Grundzahl gesetzt wird. Dazu kommt, daß m in

$$1^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad (1) \quad \text{und} \quad m^{m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} \quad (2)$$

an jeder Stelle, außer in der letzten und in (2) in der ersten, auch schon zugleich als Factor und als Exponent steht, so daß dieser Grund allein eine einfache Operation über das Potenziren hinaus unmöglich macht.

Somit ist die Unmöglichkeit einer vierten einfachen Zahlverrichtung erwiesen. Alles, was mit Zahlen noch vorgenommen werden kann, sind Mischungen der drei Grundoperationen: Zuzählen, Wiederholen und Steigern und ihrer Umkehrungen.

Aus den bisher aufgeführten Sätzen ergibt sich Folgendes:

Die Mathematik oder die reine Raumlehre gliedert sich in drei innig zusammenhängende Theile: in Formenlehre oder Syntaktik, Größenlehre oder Geometrie, und Zahlenlehre oder Analysis. In jeder dieser drei Lehren verfährt das Denken, welches die Raumwissenschaft erzeugt, auf eigenthümliche Weise. Das Grundverfahren der Formenlehre ist Setzen oder Stellen, das der Größenlehre Messen, und das der Zahlenlehre Zählen.

Das Stellen ist, näher bestimmt, ein Zusammenstellen oder Zusammensetzen (Combiniren) und ein Anordnen mit Vertauschen (Permutiren und Variiren).

Das Messen der Größen ist entweder ein bloßes Vergleichen — ein Bestimmen der Gleichheit oder Ungleichheit, — oder eigentliches Messen, Vermessen, d. h. Bestimmen des Maßes zweier Größen.

Das Zählen unterscheidet sich in Zuzählen, Wiederholen und Steigern.

In die tiefere philosophische Bedeutung dieser hier unterschiedenen Denkverrichtungen der Mathematik einzugehen, gestattet für jetzt der Raum nicht. Karl Fröbel.

Des Lehrers Stellung zur Gegenwart. Vortrag zur Eröffnung der zweiten ordentlichen Versammlung des aargauischen Lehrervereins zu Birr am 28. Aug. 1845, von J. W. Straub, d. Z. Vorstand des Vereins.

Verehrteste Amtsgenossen und Freunde!

Wenn ich am 30. Sept. v. J. in Ihrer ersten ordentlichen Versammlung zu Lenzburg die Hoffnung aussprach, eine Vereinigung des aargauischen Lehrstandes werde zu Resultaten führen, welche zu erzielen außer der Macht des Einzelnen liege;