Zeitschrift: Allgemeine schweizerische Schulblätter

Band: 11 (1845)

Heft: 4

Artikel: Einige Beispiele, wie der Unterricht in der Mathematik in ein gründliches

Verständnis der philosophischen Begriffe einführen und so als Vorübung zur philosophischen Bildung benutzt werden kann

Autor: Fröbel, Karl

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-865800

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Einige Beispiele, wie der Unterricht in der Mathematik in ein gründliches Verständniß der philosophischen Begriffe einführen und so als Vorübung zur philosophischen Bildung benutzt werden kann. Von Karl Fröbel.

Es ist schon oft das Bildende des mathematischen und des Sprachunterrichts abgewogen und dem Letteren der Vorzug ge= geben worden. Die größte philosophische Autorität, Hegel, hat die Unzulänglichkeit der Mathematik für jeden philosophischen Inhalt, ihre Unfruchtbarkeit für philosophische Wahrheit ausge= sprochen, weil ihre Beweise ein äußerliches, gedankenarmes Vorzeigen seien, ja ihre Operationen bis zu mühsamen Verwickelungen (z. B. das Summiren von Reihen) einer Maschine übertragen werden können. Das scheint gewiß, daß die Mathematik auf die geistloseste Weise gelehrt und gelernt, und dabei doch mit ihr für praktische Zwecke Viel geleistet werden kann. Diesem entgegen läßt sich die Behauptung aufstellen, daß die Mathematik die Grundlage für alle Philosophie in sich enthält, und daß ein mit dieser Rücksicht ertheilter Unterricht mehr als selbst der Sprachunterricht auf das wahre Verständniß der Philofophie vorbereitet, also auch den Geist für seine höchsten Intereffen anregt. Ein paar Beispiele sollen dies näher zeigen.

Der Unterricht in der Mathematik wird geistlos, so wie der Lehrer nicht auf eine scharfe Bestimmung der Begriffe einzgeht, sondern nur auf Mittheilung der Lehrsätze und Darlegung der Beweise sich beschränkt; dagegen wird er abschreckend mühssam, wenn mit scharfen Definitionen angesangen werden soll, oder doch schon früh versucht wird, die Schüler auf strenge Begriffsbestimmungen zu sühren. Als der rechte Gang eines bildenden Unterrichts in der Mathematik wird sich der erweisen, daß die Schüler zuerst auf die sinnliche Anschauung begrenzter Körper, dann auf die Vorstellung vermittelst Zeichnungen und Zeichen verwiesen, beim weitern Fortschritt aber auf die scharfe

Unterscheidung der Grundbegriffe zurückgeführt werden, wozu Wiederholungen bei Abschnitten, von denen aus ein Ueberblick sich geben läßt, Gelegenheit bieten.

Einer ber schwierigsten Begriffe in der Geometrie ist ber Begriff Winkel, wenn er streng aufgefaßt werden foll. Berwandt mit ihm ift Richtung, Ebene und das Raumganze oder der Raum als allfeitige Ausdehnung von einem Punkte aus betrachtet (ber volle "Stralenbufchel"). Auf ber mangel= haften Auffaffung dieser Begriffe beruht die Schwierigkeit eines einfachen und bennoch vollständig genügenden Beweises ber "Paralleltheorie;" sind aber jene richtig aufgefaßt, so ist dieser leicht und klar, und kann mit Umgehung der Definitionen felbst beim ersten Unterricht an seiner ihm in der Wissenschaft gebühs renden Stelle vorkommen. Den Hauptgedanken hat Lacroix als Anmerkung in seiner Geometrie ausgesprochen, aber weder schlagend dargestellt (er beruft sich auf Bertrand), noch unter die Lehrsätze aufgenommen. — Gerade diese Beweisführung der auf gleichlaufenden Linien beruhenden Lehrsäte, die hier als erstes Beispiel folgen soll, macht ben Schüler mit wichtigen Grundbegriffen bekannt und zeigt, wie die Mathematik sich eignet, den Geist auf das philosophische Denken vorzubereiten.

Der Bollständigkeit wegen soll mit den ersten Begriffsbesstimmungen der Geometrie angefangen und Alles so behandelt werden, wie ein streng wissenschaftlicher Unterricht es verlangt. Es wird daraus hervorgehen, daß die Begriffe des unendlich Großen und unendlich Kleinen ganz auf elementare Weise beshandelt werden können, und schon in den ersten Säßen der Geometrie vorkommen müssen.

Begriffsbestimmungen.

1. Ein räumlicher Körper oder Raumkörper (zu unsterscheiden von einem materiellen Körper oder Stoffförper) ist von allem übrigen Raum durch Grenzen geschieden. Umgestehrt ist auch aller übrige Raum durch dieselben Grenzen von dem Raumkörper geschieden. Die Grenzen eines Raumkörpers

find Flächen, welche durch Linien begrenzt sind. Die Grenzen der Linien sind Punkte. Ein Punkt ist die letzte, die vollstänstige Grenze. Alle Punkte sind rein oder vollskändig getrennt; zwei durch Flächen geschiedene Räume sind nicht vollskändig getrennt, sondern in der Grenze verbunden und durch diese nur geschieden. Zwei Punkte, die einander begrenzen sollen, sind nicht geschieden, sondern sie sind nur ein unterschiedsloser Punkt.

- 2. Ein Punkt begrenzt den leeren, unbegrenzten Raum. Umgekehrt: was den leeren Raum vollständig begrenzt, sind Punkte. Der Punkt bestimmt den unbestimmten Raum; er ist das Etwas im leeren Raume.
- 3. Eine Richtung ist die unmittelbare Beziehung eines Punktes auf einen andern. Umgekehrt: wenn einer von zwei Punkten so vorgestellt wird, daß er den zweiten hinter ihm liesgenden verdeckt, so ist das, was wir uns zwischen den beiden Punkten denken, die durch sie bestimmte Richtung.
- 4. Eine gerade Linie ist eine solche, deren Punkte alle in einer Richtung liegen. Umgekehrt: wenn zwei Punkte einer Linie so vorgestellt werden, daß der eine den andern, der weiter liegt, verdeckt, und dann auch alle übrigen Punkte von dem ersten verdeckt werden, so ist die Linie, vom ersten Punkte nach den übrigen hin gerechnet, gerade.
- 5. Bemerkung. Eine Richtung hat keine Länge, also auch keine Größe (denn Breite und Dicke hat sie auch nicht), sondern nur einen Gegensaß; sie unterscheidet sich in sich selbst als Richtung vom Punkte a nach b und Gegenrichtung von b nach a. Sie hat nur einen doppelten Ansang, aber kein Ende; sie ist auch doppelt endlos.
- 6. Bemerkung. Eine Gerade unterscheidet sich von einer Richtung dadurch, daß die Letztere nur zwei Punkte in sich schließt, hingegen die Erstere als eine Reihe zahlloser Punkte vorgestellt wird, die entsteht, wenn man sich einen Punkt in einer Richtung so fortbewegt denkt, daß zugleich an jeder Stelle,

durch die die Bewegung ihn bringt, ein Punkt zurückbleibt. (Berändert sich dabei allmählig die Richtung, so entsteht eine krumme Linie.) Denkt man sich den Punkt durch die ganze Richtung bewegt, so erhält man die (einfach und doppelt) end slose Gerade.

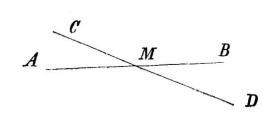
- 7. Ein Winkel ist die unmittelbare Beziehung zweier von einem Punkte ausgehenden Richtungen auf einander. Wegen des Gegensaßes in jeder Richtung (5) bilden zwei Richtungen vier Winkel um einen Punkt; diese zusammengesaßt sind die Ebene als Ganzes ohne Länge und Breite betrachtet oder das Winkelganze. Umgekehrt: wenn man sich von einem Punkte aus Richtungen nach allen Punkten einer endlosen Geraden denkt, so ist die Zusammenkassung dieser Richtungen die Winkelhälfte, die mit der entgegengesetzten das Winkelganze ause macht. Zeder Winkel ist ein bestimmter Theil des Winkelganzen, und schließt zwischen seinen Grenzrichtungen einen entsprechenden Theil der zahllosen Richtungen des Winkelganzen in sich. (Der Rechte ist nach dieser Bezeichnung das Winkelviertel.)
- 8. Bemerkung. Eine Ebene unterscheidet sich vom Winstelganzen ähnlich, wie die Gerade von der Richtung. Das Winkelganze hat weder Länge noch Breite, sondern nur versschiedene Richtungen. Eine Ebene aber entsteht, wenn eine Gerade so bewegt gedacht wird, daß alle ihre Punkte in jeder Lage von einer Geraden verdeckt vorgestellt werden können, und eine Gerade in jeder Lage, durch die sie die Bewegung bringt, zurückbleibt. Wird eine doppelt endlose Gerade auf diese Weise um einen Punkt bewegt gedacht, so entsteht die endlose ganze Ebene.
- 9. Wenn drei Richtungen von einem Punkte aus in Beziehung zu einander drei verschiedene Winkelganze bilden, so ist die Beziehung dieser drei Winkelganzen, welche natürlich die Beziehung aller eingeschlossenen und durch die neu entstehenden Beziehungen hinzukommender Richtungen zur Folge hat, das Raumganze. Theile des Raumganzen sind durch

ebene oder gebogene Winkel begrenzt; man nennt sie Kör= perwinkel.

- 10. Bemerkung. Das Raumganze hat weder Länge, noch Breite, noch Dicke, sondern unterscheidet sich nur in versschiedene Richtungen und Bruchtheile.
- 11. Durch die Bewegung einer Fläche, wenn diese in jeder Lage, durch welche die Bewegung sie führt, mit oder ohne Veränderung ihrer Form zurückgeblieben vorgestellt wird, entsteht ein Körperraum. Wenn die bewegte Fläche die ganze endlose Ebene ist, und so bewegt wird, daß sie dabei eine Umskehrung erleidet, ohne daß verschiedene oder dieselben Punkte durch dieselbe Stelle gehen, so entsteht der ganze endlose Raum als allseitige Ausdehnung.

Grundfäge ber Form.

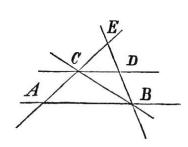
- 1. Zwei Punkte bestimmen eine und nur eine Richtung; und umgekehrt, eine Richtung muß zwei getrennte Punkte zu ihrer Bestimmung haben.
- 2. Wenn zwei der drei Richtungen, die von drei Punkten bestimmt werden, zusammenfallen, fallen auch die beiden andern zusammen.
- 3. Zwei endlose Gerade, die von verschiedenen Richtuns gen in einem Punkte zusammentreffen, müssen einander durchs schneiden.



Erläuterung. Die beiden ends losen Geraden AB, CD sollen in den verschiedenen Richtungen AM, CM in M zusammentressen. Nun stelle man sich M von C gedeckt

vor, ohne eine Beränderung ihrer Lage: dann liegen beliebige Punkte in AB zu beiden Seiten von CM. Irgend ein Punkt D in CD, der über M hinausliegt, wird aber auch von C gedeckt; wenn man sich nun umgekehrt M von D gedeckt vorskellt, so wird auch C gedeckt, und die Punkte in AB liegen nun auch zu beiden Seiten von M oder DM. Also durchsschneidet CD die Gerade AB in M.

- 4. Zwei endlose Gerade können nur in einem Punkte einander durchschneiden; wenn sie in zwei Punkten zusammenstreffen, haben sie dieselbe Richtung und fallen in dieser zusammen.
- 5. Zwei endlose Gerade können in einer Ebene durch zwei beliebig gegebene Punkte liegen, ohne in irgend einem Punkte zusammenzutreffen.



Erläuterung. Von irgend einem Punkte C außerhalb der Geraden AB denke man sich CA und CB, und von E in AC die Gerade EB gezogen. Zwischen C und den Punkten in AB, die über B hinaus liegen, liegt BE, so daß sie von C aus

durch Punkte in BE gedeckt werden; die Geraden von C nach diesen Punkten werden also BE zwischen B und E durchschneiden.

Von den Punkten in AB aus, die vor A liegen, werden Punkte in BE von C gedeckt; also wird BE auch von den endlosen Geraden geschnitten, welche durch C und die Punkte vor A liegen. — Da nun die durch C und die Punkte in AB bestimmten endlosen Geraden, die Linie AB theils in Punkten, die über B hinaus, theils in solchen, die vor A liegen, treffen, so muß es irgend einen Punkt D in BE geben, der so liegt, daß CD die Gerade AB weder über B hinaus, noch vor A, also nirgends trifft.

Wortbestimmung. Zwei endlose Gerade in einer Ebene, die in keinem Punkte zusammentreffen, nennt man Gleichlaufende.

Grundfäge ber Größe.

6. Wenn man sich eine Gerade so auf eine andere unverändert gelegt vorstellen kann, daß jeder Punkt in der einen auf einen Punkt in der andern fällt, und umgekehrt auch jeder Punkt in der zweiten auf einen in der ersten, so sind die beiden Linien gleich lang oder gleich groß. (Ihre Größe besteht allein in ihrer Länge.) Umgekehrt: wenn zwei Gerade gleich groß sind, und die eine wird auf die andere gelegt vorgestellt, so daß zwei Enden und die Richtungen zusammenfallen, so müssen die beiden andern Enden auch zusammenfallen. — Wenn im ersten Fall nicht jeder Punkt der zweiten auf einen in der ersten salz len kann, so ist die zweite größer als die erste. Umgekehrt: wenn sie größer ist u. s. w.

- 7. Wenn man sich eine ebene Fläche so auf eine andere gelegt vorstellen kann, daß jeder Punkt in der einen auf einen Punkt in der andern fällt, und umgekehrt, so sind die beiden Flächen gleich groß.
- 8. Zwei Gerade, die einander durchschneiden, bilden vier Winkel, deren Größe sich verhält, wie die Größe der vier Theile oder Ausschnitte, in welche die endlose ganze Ebene der Geraden durch diese, als endlos gedacht, getheilt wird. (Diese Geraden nennt man Schenkel der Winkel oder Ausschnitte.)
- 9. Wenn zwei Ausschnitte so auseinander gelegt vorgestellt werden, daß der Punkt und ein Schenkel des einen auf Punkt und Schenkel des andern zu liegen kommen, und dann auch die andern Schenkel in eine Nichtung fallen, so sind beide Ausschnitte, sowie die Winkel der Richtungen ihrer Schenkel gleich groß. Umgekehrt: wenn sie gleich groß sind und wie vorher auf einander gelegt werden, so müssen die beiden andern Schenkel zusammenfallen. Wenn im ersten Falle die beiden Schenkel nicht in eine Richtung fallen, so ist der eine Ausschnitt größer als der andere. Umgekehrt u. s. w.
- 10. Zwei Gerade, die einander durchschneiden, können zwei neben einander liegende gleiche Winkel einschließen. (Solche Winkel nennt mann Rechte.)

Lehrfätze.

1. Alle endlosen Geraden sind gleich groß.

Beweis. Wenn man sich vorstellt, daß zwei endlose Gerade in zwei Punkten zusammenfallen, so fallen alle ihre Punkte in eine Richtung, und in keiner kann ein Punkt vorsgestellt werden, der nicht auf einen Punkt der andern fallen

muß: also sind beide gleich lang. Was aber für zwei beliebige gilt, gilt für alle.

2. Alle endlosen ganzen Ebenen sind gleich groß.

Beweis. Man stelle sich vor, zwei beliebige Ebenen fallen in drei Punkten, die drei verschiedene Richtungen bestimmen, zusammen, so fallen beide in ein Winkelganzes; da nun in der einen kein Punkt vorgestellt werden kann, der nicht mit einem Punkt in der andern zusammenfallen muß, so sind beide gleich groß. Was für zwei beliebige gilt, gilt für alle.

Bufat. Alle Winkelganze find gleich groß.

3. Der ganze endlose Raum ist immer gleich groß, von welschem Punkt aus er gedacht werden mag. Denn jeder Punkt liegt in ihm.

Bufag. Alle Raumganze find gleich groß.

4. Eine ganze endlose Gerade wird durch einen Punkt in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweiß. M sei der Punkt, der die ganze endlose Gerade AB in die zwei Theile MA, MB theilt. Man stelle sich MA auf MB gelegt vor, so daß M wieder auf M, irgend ein anderer Punkt in MA aber auf einen Punkt in MB fällt. Dann muß seder beliebige Punkt in MA mit einem Punkt in MB, und umgekehrt, zusammenfallen. Also MA=MB; beide sind halbe endlose Gerade.

5. Eine ganze endlose Gerade wird durch zwei Punkte in drei Theile getheilt, von welchen die beiden äußern jeder die Hälfte der ganzen Linie ist. Der eingeschlossene Theil kann einen äußern weder durch Hinzufügung größer, noch durch Wegenahme kleiner machen.

Bemerkung. Die Größe MN und die ganze AB find

von einerlei Art, Längen; aber AB oder MA ist gegen MN unendlich groß. Die Länge MN kann die Länge MA zwar verändern, aber weder größer noch kleiner machen. Eine un= endlich große Länge kann nicht vorgestellt, sondern nur ge= dacht werden. Dagegen sind alle Theile, in die MN durch Bunkte getheilt wird, deren Entfernung vorgestellt werden kann, endliche Längen, d. h. folche, welche durch Hinzufügung oder Wegnahme einander größer oder kleiner machen.

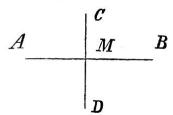
Bufat. Eine ganze endlose Gerade fann nur in zwei, nicht in drei oder mehr gleiche Theile getheilt werden.

Eine ganze endlose Ebene wird durch eine endlose Berade in zwei gleiche Theile getheilt.

Beweis. AB bezeichne die endlose Gerade; ABM und ABN seien die beiden Theile der Ebene. Run stelle man sich vor, ABM falle auf ABN, so daß AB wieder auf AB fällt und der Punkt M außerhalb AB, auf einen Punkt N. Dann fallen beide Theile zusammen, und irgend ein Punkt in ABM muß auf einen Punkt in ABN fallen, und umgekehrt. Also ift ABM=ABN; jeder ift eine halbe endlose Ebene.

Bufag. Alle halben endlosen Ebenen find einander gleich. (Lehrs. 2.)

7. Zwei nebenliegende der vier Winkel, die zwei Rich= tungen bilden, sind zusammen gleich dem Winkelhalben; die gegenüberliegenden find gleich groß.



Beweis. AB und CD seien die zwei in den Richtungen liegenden endlosen Geraden, die einander in M schneiden. Nun
sind zwei nebenliegende Ausschnitte AMC+
RMC oder RMC+BMD u. s. w. = BMC, oder BMC+BMD u. s. w. =

der halben Ebene (Grundsat 9): also sind die entsprechenden Nebenwinkel = dem Winkelhalben (Grundfat 8). — Ferner ist ABC=CDB, weil Beide halbe Ebenen sind: also ist Ausschnitt AMC = Ausschn. BMD, oder W. AMC = W. BMD.

Zusat 1. Jeder der vier Winkel ist kleiner als das

Winkelhalbe; jeder der vier Ausschnitte ist also auch kleiner als die halbe Ebene.

Zusatz. Wenn zwei Nebenwinkel einander gleich oder Rechte sind, so sind alle vier Winkel gleich; also einer ist ein Winkelviertel.

Umgekehrt. Wenn zwei nebenliegende Winkel zusammen gleich dem Winkelhalben sind, so liegen ihre Schenkel in zwei Richtungen, je zwei in einer. Wenn sie kleiner oder größer sind, liegen sie in drei verschiedenen Richtungen. U. s. w.

8. Zwei endlose Gleichlaufende theilen die ganze endlose Ebene in drei Theile, zwei Hälften und ein Band, welches eine Hälfte weder durch Hinzufügung größer, noch durch Wegenahme kleiner macht.

Beweis. AB, CD seien die beiden endlosen ABCD. ABN, und CDN=ABN—Band ABCD. ABM+ABCD=ABM—ABCD.

Bemerkung. Die halbe endlose Ebene und das endlose Band sind einerlei Größen; aber die ganze und halbe endlose Ebene sind in Vergleich mit dem endlosen Band unendlich groß. Dagegen ist jeder Ausschnitt, dessen Grenzrichtungen gestrennt vorgestellt werden, ein endlicher Theil der ganzen Ebene-

9. Eine Gerade, die zwei beliebig gegebene Punkte in zwei Gleichlaufenden verbindet, bildet mit diesen vier und vier abwechselnd gelegene gleiche Winkel.

Deweis. Es sei AB || CD; EF verschieden Bunkte M, N; die Geraden denke man sich endlos.

Die Wegnahme des endlosen Bans des ABCD macht die halbe Ebene EFA nicht kleiner (Lehrs. 8); also ist auch EFA—AMNC=EFA; also EFA—AME=

EFA—AMNC—AME, oder Ausschnitt AMF— Ausschn. CNF; also auch W. AMF— W. CNF— W. DNE u. s. w.

Umgekehrt. Wenn der Ausschnitt oder Winkel AMF= CNF, so ist AB || CD.

Beweis. Man stelle sich vor, AMNC sei auf DNMB so gelegt, daß M auf N, und MN auf NM zu liegen kommt. Dann muß AM auf ND fallen, weil W. AMN=W. CNF=W. DNM; ferner muß N auf M fallen, weil MN=NM; endslich muß NC auf MB fallen, weil W. CNM=W. BMN.

Wenn nun AB und CD in irgend einem Punkt X auf der einen Seite von EF zusammentreffen würden, so müßten sie dasselbe auf der andern Seite thun, also ganz in einer Nichstung liegen (Grunds. 4). Sie liegen aber nicht in einer Nichstung, also können sie nirgends zusammentreffen, oder sie sind gleichlaufend.

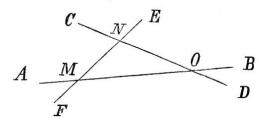
Zusatz. Das endlose Band ABCD wird durch eine Ge= rade MN, die zwei beliebig gegebene Punkte in den Gleich= laufenden AB, CD verbindet, in zwei Hälften getheilt.

10. Wenn eine endlose Gerade eine von zwei endlosen Gleichlaufenden durchschneidet, muß sie auch die andere durchsschneiden.

Beweis. GH soll CD in N durchschneiden. Man versbinde N mit einem beliebigen Punkte M in AB. Wenn GH in NM fällt, so durchschneidet sie AB in M; außerdem kann sie nur zwischen NM und ND, oder zwischen NM und NC sallen. Im ersten Fall ist W. HNM= W. DNM— W. DNH= W. BME— W. DNH; also Ausschnitt HNM= Ausschn. BME— Ausschn. DNH. Wenn nun NH die Gerade MB nirgends durchschnitte und einen Ausschnitt=DNH von BME abschnitte, so würde HNE=HNMB+BME=BME sein (weil HNMB < daß halbe Band DNMB). Aber HNE=BME—DNH; also muß NH von BME einen Ausschnitt=DNH abschneiden, solgslich MB durchschneiden. — Der zweite Fall verhält sich wie der erste.

Bufat. Gine Gerade, die mit einer von zwei Gleichlaufenden gleichlaufend ist, ist es auch mit der andern.

Die drei Winkel eines Dreiecks sind zusammen gleich dem Winkelhalben.



Beweis. Man denke sich die brei Seiten bes Dreiecks MNO d m drei Seiten des Dreiecks MNO

B als endlose Gerade AB, CD, EF;

D diese theilen die ganze Ebene in dreimal zwei gleiche Ausschnitte

AOC und BOD, BME und AMF, DNF und CNE, welche zusammen die ganze endlose Ebene ausmachen mehr zweimal die Fläche MNO, oder einfach die ganze Ebene, da MNO fleiner ift als ein Band, in dem es liegen kann, also 2 MNO die ganze Cbene nicht größer macht. Drei diefer 6 Ausschnitte, je einer von zwei gleichen, z. B. AOC+BME+DNF find also gleich der halben Ebene. — Oder auch: AMF+FND+BOD= ABF+MNO=ABF; aber AMF=BME, BOD=AOC; folg= lich AOC+BME+DNF=ABF. Also auch B. MON+B. NMO $+ \mathfrak{W}$. MNO=2 \mathfrak{R} .

Busat. Ein Außenwinkel ist gleich den beiden innern gegenüberliegenden Winkeln zusammengenommen.

- Wenn zwei Seiten und der eingeschloffene Winkel eines Dreiecks gleich ähnlich oder umgekehrt gelegenen Glie= dern eines andern Dreiecks sind, so sind die zwei andern Winkel und die dritte Seite des einen gleich den ähnlich oder umge= fehrt gelegenen Winkeln und der dritten Seite des andern Dreiecks.
- 13. Folgesat. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks gleich find, so sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Beweis. Esfei AC=BC. Wenn nun Dreieck ABC umgekehrt auf ABC in der gegebenen Lage gelegt vorgestellt wird, so daß C auf C und AC auf BC fällt, so fallen auch die andern Punkte und Seiten auf einander, also M. A= M. B.

Wenn die brei Seiten eines Dreiecks gleich find, Zusaß. so sind die Winkel gleich.

- 14. Wenn zwei Winkel und die gemeinschaftliche Seite eines Dreiecks gleich ähnlich oder umgekehrt gelegenen Gliedern eines andern Dreiecks sind, so sind u. s. w.
- 15. Folgesatz. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gleich sind, so sind die gegenüberliegenden Seiten gleich. (Beweis ähn= lich wie in Lehrs. 12.)
- 16. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks einzeln genom= men gleich den Seiten eines andern sind, so sind u. s. w.

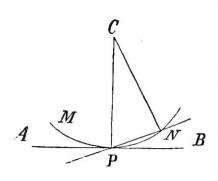
Beweis. Je nachdem die Lage der Seiten in beiden Dreiecken ähnlich oder umgekehrt ist, stelle man sich das eine Dreieck umgekehrt oder in der gegebenen Lage an das andere gelegt vor, so daß zwei gleiche Seiten zusammenfallen, und versbinde die gegenüberliegenden Punkte u. s. w.

- 17. Der größern Seite eines Dreiecks steht der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt dem größern Winkel steht die größere Seite gegenüber.
- 18. Zwei Seiten eines Dreiecks sind zusammen größer als die dritte.

Folgesatz. Eine Rechtwinklige ist die kürzeste Entfers nung eines Punktes von einer Geraden. Jeder vom Durchsschnittspunkt der Rechtwinkligen entferntere Punkt in der Gestaden ist auch weiter vom obern Punkte der Rechtwinkligen entfernt.

Formbestimmung. Wenn in einer Ebene ein Punkt so bewegt vorgestellt wird, daß seine Entsernung von einem andern gegebenen Punkte derselben Ebene immer gleich bleibt, so beschreibt er eine Boglinie, die man Kreis nennt. Den festen Punkt nennt man den Mittelpunkt; die Gerade, welche diesen mit dem bewegten Punkte verbindet, den Stral oder Halbmesser des Kreises.

17. Eine Rechtwinklige am äußern Ende des Strales berührt den Kreis in einer unendlich kleinen Geraden, während eine Gerade, die irgend zwei in endlicher (vorstellbarer) Entsfernung liegende Punkte der Kreislinie verbindet, diese, wenn verlängert, durchschneidet, wie klein die Entfernung sein mag.



Beweis. C sei der Mittelpunkt, PC | AB, MPN ein Stück der Kreislinie, P und Nzwei Punkte ders selben in irgend einer angebbaren Entsternung.

Nunist W. CPN= W. CNP <1 R. Alle Punkte der Geraden zwischen P

und N liegen also C näher, als der Punkt P oder N (18. Folges.), und somit innerhalb des Kreises; die übrigen Punkte in PN sind weiter von C entfernt, und fallen daher außershalb des Kreises. Also durchschneidet PN die Kreislinie in P und N, wie nahe auch Beide vorgestellt werden mögen.

Dagegen muß der bewegte Punkt, von M in P angekommen, sich nothwendig in einer bestimmten Richtung PX fortbewegen, wenn er die Kreislinie beschreiben soll. Diese Richtung PX muß durch 2 Punkte bestimmt sein (Grundf. 1); der eine ist P, ber andere die nächste Stelle n, in welche der Bunkt aus P Würde nun die Richtung PX, in welcher n liegt, mit PB einen Winkel bilden, so ware W. CPX entweder - oder > 1 R. Im ersteren Falle mußte die Gerade Pn den Umfreis durchschneiden, wie PN, in beiden aber würde der Bunkt den Umkreis verlassen müssen, was nicht sein soll. Also muß PX und n in PB fallen. Wäre aber die Länge Pn von vorstell= barer, endlicher Größe, so müßte Pn oder PB den Umfreis durchschneiben, wie PN, und W. CPB < 1 R., was nicht fein soll; eine Länge muß Pn dennoch haben, weil n außerhalb P liegen muß: also muß Pn in Vergleich mit PN unendlich flein sein. — Aus gleichen Gründen muß der bewegte Punft vor P durch einen Punkt m in PA kommen, der unendlich nahe an P liegt. — Alle Punkte nun in AB in angebbarer Entfernung von P liegen weiter von C, als der Bunkt P, und somit außerhalb des Kreises: also berührt AB den Kreis in der unendlich fleinen Geraden mn.

Bemerkung. Der Kreis, wie jede Boglinie, besteht aus

geraden Theilchen, die in Vergleich mit jeder angebbaren, ends lichen Länge unendlich klein sind; die sich zu endlichen Längen verhalten, wie diese zur ganzen endlosen Geraden.

18. Zwei ganze Kreise, die in einem Punkte zusammenstreffen, müssen entweder einander durchschneiden, und zwar in zwei Punkten, oder in nur einem angebbaren Punkt berühren.

Beweis. Man verbinde die beiden Mittelpunkte und den Punkt, in dem die Kreise zusammentressen, mit drei Gerasten, u. s. w. Die Beschreibung einer Rechtwinkligen wird dazu nicht erfordert.

Mit Hilfe dieser Sätze und der Verzeichnung des Kreises können nun folgende Sätze bewiesen werden.

19. Auf eine gegebene Gerade von einem Punkt in ders selben können zwei Dreiecke beschrieben werden, die einem gesgebenen Dreieck in jeder Beziehung gleich sind.

Zusatz. Auf ähnliche Weise können zwei Winkel gleich einem gegebenen verzeichnet werden.

- 20. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb oder inners halb einer gegebenen Geraden kann eine andere und nur eine rechtwinklig auf die erstere gezogen werden.
- 21. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb einer gegesbenen Geraden kann eine und nur eine andere gleichs laufend mit der ersteren gezogen werden. (Lehrf. 10.)

Schlußbemerkung.

Mit diesem letten Lehrsate, der gewöhnlich als Aufgabe gestellt wird, sind alle auf Gleichlausende bezüglichen Lehrsäte in einer Ebene erschöpft. Die vollständige Beseitigung aller bis- her gefühlten Mängel in den üblichen Beweisen dieser Säte beruht, wie man gesehen hat, auf der Unterscheidung der Bezgriffe Linie und Richtung, Ebene und Winkelganzes. Diese ist zugleich ein nicht unbedeutender philosophischer Gewinn. Die Auffassung des Begriffes Richtung bereitet die richtige Auffassung der Grundbegriffe Kraft, Masse und Bewegung vor.

Aus dem Begriff Richtung verbunden mit dem der Beswegung folgt z. B. mit mathematischer Nothwendigkeit,

erstlich, daß alle beweglichen Körper (Stoffförper) aus Punkten bestehen;

dweitens, daß alle Kräfte in (geraden) Richtungen wirken. Denn eine bewegte Körpermasse muß nothwendig aus jestem Ort, durch den sie bewegt wird, in bestimmten Richtunsgen treten; Richtungen verlangen zu ihrer Bestimmung Punkte: also müssen es Punkte sein, die an ihr bewegt werden, sie muß als bewegte Masse aus Punkten bestehen.

Ferner, Kräfte sind die Ursache der Bewegungen; die Punkte aber sind das Bewegte: also wirken Kräfte von Punkt auf Punkt. Da nun jeder durch eine Kraft zwischen ihm und einem ans dern bewegte Punkt nach jedem Zeitpunkt (Gegenwart) in einer Richtung bewegt werden muß (abgesehen von der Bewegung, die er als Massenpunkt beharrlich fortsett), so muß auch die Kraft in einer Richtung und zwar der durch beide Punkte bestimmten wirken.

Der Raum gestattet nicht, diese Begrifssbestimmungen hier weiter zu verfolgen. Man ersieht aus dem Wenigen, wie die Grundbegriffe der Mathematik, streng aufgefaßt, überführen zu einer streng wissenschaftlichen Bestimmung der Grundbegriffe der Mechanik. Was gewöhnlich als Thatsache der Erfahrung bestrachtet wird, kann so in den eignen Bestimmungen des Denskens gefunden und von diesen abgeleitet werden.

Auf andere philosophische Begriffe führt die wissenschaftsliche Bestimmung der Grundoperationen der Zahl, aus welcher sich zugleich der Beweis ergibt, daß nur drei solche Grundsoperationen mit ihren Umkehrungen möglich, d. h. denkbar sind.

— Dies in einem spätern Aufsatz.