

Zeitschrift: Allgemeine schweizerische Schulblätter
Band: 7 (1841)
Heft: 5-6

Artikel: Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien [Schluss]
Autor: [s.n.]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-865830>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 28.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

fen. Der Lehrer der Volksschule wird sich mit der 2ten Stufe begnügen müssen; in dieselbe aber wird er Rassen der herrlichen Sonne der letzteren Stufe, Blüten jenes Wundergartens, Strahlen jener Weltanschauung fallen lassen. Das ist das Rechte in jeder Wissenschaft, dies das Wahre, daß man sich an die Idee halte, und dieselbe so viel als möglich verständlich zu machen und zu verkörpern suche; sonst ist der Unterricht todt und fruchtlos. Geht es uns ja doch im Leben selber so: nur der lebt im ächten Sinne des Wortes, welcher die Idee des Lebens aufzufassen im Stande ist, der die Blütenäste zu ergreifen versteht aus den Gärten der himmlischen Hesperiden.

So viel für Einmal; mögen diese Andeutungen dazu beitragen, die Pädagogik immer lebenskräftiger, produktiver, naturgemäßer zu machen.

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien (Schluß.)

Fünfter Abschnitt.

Richtung gerader Linien zu Ebenen und der Ebenen zu einander.

§. 43.

Bisher kamen nur solche Linien vor, welche in der Ebene lagen, mit der sie in Verbindung waren. Es können aber auch Linien, welche außerhalb einer Ebene liegen, mit derselben in Beziehung gebracht werden. Eine Gerade außerhalb einer Ebene kann diese entweder in einem Punkte oder auch gar nicht treffen, d. h. mit ihr ungleichlaufend oder gleichlaufend sein. Der Punkt, in welchem eine aufstehende Gerade einer Ebene begegnet, heißt ihr Fußpunkt. Die aufstehende Gerade kann zur Ebene senkrecht oder schief sein.

Anm. In Bezug auf den Inhalt dieses Abschnittes vergleiche man §. 16.

I. Die Aufstehende AB fig. 129 sei zu den Geraden CD und EF in der Ebene MN senkrecht; ist sie dann auch zu der Ebene MN selbst senkrecht?

Mache $BC = BD$; durch C und D ziehe $EG \parallel FH$. Die Dke. BCE und BDF haben nun $BC = BD$, $\sphericalangle CBE = \sphericalangle DBF$, $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BDF$, sind also einerlei, daher ist $BE = BF$, und $CE = DF$. — Die Dke. BCG und BDH haben ebenso $BC = BD$, $\sphericalangle CBG = \sphericalangle DBH$, $\sphericalangle BCG = \sphericalangle BDH$, sind also einerlei, daher ist $BG = BH$, $CG = DH$.

Ziehe nun AC, AD, AE, AF, AG, AH . Die rechtwinkligen Dke. ABC und ABD haben $AB = AB$, $BC = BD$, sind also einerlei, daher ist $AC = AD$. Die rechtwinkligen Dke. ABE und ABF haben $AB = AB$, $BC = BF$, sind also einerlei, daher ist $AE = AF$. — Die Dke. ACE und ADF haben nun alle Seiten wechselseitig gleich, sind somit einerlei, also ist $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADF$, und folglich sind auch die Nebenw. der Letzteren gleich, oder $\sphericalangle ACG = \sphericalangle ADH$. Die Dke. ACG und ADH haben nun $AC = AD$, $CG = DH$, $\sphericalangle ACG = \sphericalangle ADH$, sind somit einerlei, demnach ist $AG = AH$. Endlich haben die Dke. ABG und ABH alle Seiten wechselseitig gleich, sind somit einerlei, und daher ist $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ABH$. Folglich ist AB senkrecht zu GH .

Die Gerade GH ist in der Ebene MN durch den Fußpunkt B in beliebiger Richtung gezogen, ist also Stellvertreterin aller Geraden, die außer CD und EF durch B gehen können; somit ist auch AB zu allen Letzteren senkrecht, folglich auch zur Ebene MN , weil sie rings um den Punkt B nur rechte $\sphericalangle$ bildet.

II. Es sei umgekehrt AB senkrecht zur Ebene MN . Dies kann nur eine Folge davon sein, daß AB auch zu jeder Geraden senkrecht ist, welche in der Ebene MN durch den Punkt B geht.

III. Es sei AB senkrecht zur Ebene MN , und BC senkrecht zu AB im Punkte B ; liegt dann BC in der Ebene MN ? — AB ist senkrecht zu jeder Linie, welche in der Ebene MN durch B geht; eine Gerade, die durch B geht, aber über oder unter der Ebene MN liegt, muß

also mit AB einen schiefen $\mathcal{W}$. bilden. Demnach kann BC als zu AB senkrecht, nur in der Ebene MN liegen.

IV. Es seien die Geraden BC , BE , BG in B zu AB senkrecht. Dann müssen sie in derjenigen Ebene liegen, auf welcher AB in B senkrecht steht; sie liegen also in einer Ebene.

V. AB ist die kürzeste Gerade, die aus A nach der Ebene MN gehen kann. Denn alle Schiefen sind Hypotenusen, also $> AB$; darum ist auch AB der wahre Abstand des Punktes A von der Ebene MN .

VI. Aus A und B kann nur eine Gerade AB gehen, welche zugleich zu den in B sich schneidenden Linien senkrecht ist, also auch nur eine Gerade, die zur Ebene MN senkrecht ist. — H. f.

- 46) a. Wenn eine Aufstehende in ihrem Fußpunkt zu zwei in der Ebene sich durchschneidenden Geraden senkrecht ist; so ist sie zur Ebene selber senkrecht.
- b. Ist eine Aufstehende zu einer Ebene senkrecht; so ist sie auch zu jeder Geraden senkrecht, welche in der Ebene durch den Fußpunkt geht.
- c. Ist eine Aufstehende senkrecht zu einer Ebene, so liegt in der Letzteren auch jede Gerade, welche zu jener im Fußpunkte senkrecht ist.
- d. Ist eine g. L. zu mehreren andern, in einem Punkte sich schneidenden g. L. senkrecht; so liegen diese in einer Ebene.
- e. Die Senkrechte ist die kürzeste Gerade von einem Punkte nach einer Ebene, oder der Abstand desselben von ihr.
- f. Durch einen bestimmten Punkt innerhalb oder außerhalb einer Ebene kann zu derselben nur eine Senkrechte gehen.

An m. Auch ergibt sich aus I., daß die Schiefen, die mit der Senkrechten vom gleichen Punkt außer der Ebene ausgehen, und deren Fußpunkte vom Fußpunkt der Senkrechten gleich weit abstehen, gleich sind, und umgekehrt.

VII. Die Linie AB fig. 130 stehe schief auf der Ebene PQ . Aus A gehe zur Ebene PQ die Senkrechte

AC, und man ziehe BC. Die Gerade BC zwischen den Fußpunkten von AB und AC heißt der Grundriß (die Basis, Projektion) der Schiefauftstehenden AB.

VIII. Wie verhält sich nun der W. ABC zu andern W., welche AB mit Linien in der Ebene PQ, z. B. mit BG und BH bildet? — Man beschreibe mit BC als Halbmesser einen Kreis, und ziehe die Sehnen CG und CH, dann die Linien AG und AH. — Weil nun W. CBG < W. CBH, so ist auch CG < CH. Die rechtwinkligen Dke. ACG und ACH haben nun AC = AC, aber CG < CH; also ist die Hypotenuse AG < AH. In den Dkn. ABG und ABH ist AB = AB, und BG = BH, aber AG < AH, somit W. ABG < ABH. Wenn also der W. CBG zu- oder abnimmt, so muß auch der W. ABC zu- oder abnehmen. Wenn daher der W. CBG verschwindet, indem BG in den Grundriß BC fällt, so entsteht der kleinste W., den AB mit einer Linie in der Ebene bilden kann, nämlich der W. ABC, welcher daher der Richtungsw. von AB zur Ebene PQ ist.

IX. Es sei nun fig. 131 der Grundriß BC senkrecht zu EF in der Ebene PQ. — Man mache wieder mit dem Grundriß BC einen Kreis, ziehe CE, CF, AE, AF. Wegen der rechten W. am Mittelpunkt B ist CE = CF. Die rechtwinkligen Dke. ACE und ACF sind wegen der Gleichheit ihrer Katheten einerlei, also ist AE = AF. Nun haben die Dke. ABE und ABF alle Seiten wechselweise gleich, sind daher einerlei, also auch die Nebenw. ABE und ABF gleich, mithin AB senkrecht zu EF.

X. Ist umgekehrt AB senkrecht zu EF, so muß auch wieder BC zu EF senkrecht sein.

XI. Es sei fig. 132 die Schiefauftstehende AB senkrecht zur Linie DE in der Ebene MN, und eine andere Linie BC in der Ebene MN sei ebenfalls senkrecht zu DE. Will man nun aus B den Grundriß von AB ziehen, so muß er ebenfalls zu DE senkrecht sein (X). Es kann aber in der Ebene MN zu DE nur eine Senkrechte aus B gehen; und weil BC wirklich zu DE senk-

recht ist, so muß der Grundriß von AB in die Gerade BC fallen.

XII. Aus A gehe nun noch AC senkrecht zu BC ; ist dann AC auch senkrecht zur Ebene MN ? — Will man aus A eine Senkrechte auf die Ebene MN fallen, so muß dieselbe auch den Grundriß BC treffen und zu ihm senkrecht sein. Es kann aber aus A zu BC nur eine Senkrechte gehen; und weil AC zu BC senkrecht ist, so muß AC auch zur Ebene MN senkrecht sein. — H. f.

- 47) a. Eine Schiefauflstehende bildet mit ihrem Grundriß ihren Richtungsw. zur Ebene.
- b. Ist der Grundriß einer Schiefauflstehenden senkrecht zu einer in der Ebene durch den Fußpunkt gehenden Linie; so ist auch die Auflstehende zu Letzterer senkrecht.
- c. Ist eine Schiefauflstehende zu einer Linie in der Ebene senkrecht, so ist es auch ihr Grundriß.
- d. Ist eine Linie in der Ebene senkrecht zu einer Schiefauflstehenden und zu einer anderen durch den Fußpunkt gehenden Linie in der Ebene; so liegt in der letztern Linie der Grundriß der Schiefauflstehenden.
- e. Geht aus einem Punkte einer Schiefauflstehenden zu ihrem Grundriß eine Senkrechte; so ist Letztere auch zur Ebene senkrecht.

§. 44.

I. Die Linien AB und CD fig. 133 stehen senkrecht auf der Ebene MN . — Man ziehe zwischen den Fußpunkten die Gerade BD und ebenfalls in der Ebene MN die Linie DE senkrecht zu BD , dann noch AD . Nun ist BD Grundriß von AD , also auch DE senkrecht zu AD (No. 47, b); ED ist aber auch zu DC senkrecht (46, b), daher liegen die L. AD , BD , CD in einer Ebene (46, d), in welcher auch AB liegt. Da nun AB und CD in einer Ebene liegen und zu BD senkrecht sind; so sind sie #.

II. Es sei umgekehrt $AB \# CD$, und AB senkrecht zur Ebene MN . Dann muß auch CD zur Ebene MN senkrecht sein. Denn das Gleichlaufendsein Beider ist (nach I.) nur dann möglich, wenn auch Beide zu MN senkrecht sind. — S. f.

48) a. Sind 2 g. L. zu einer Ebene senkrecht, so sind sie unter sich gleichlaufend.

b. Stehen 2 gleichlaufende g. L. auf einer Ebene, und ist eine derselben zur Letzteren senkrecht, so ist es auch die andere.

III. Die Schiefauftstehenden AB und CD fig. 134 seien $\#$. — Mache $AB = CD$, falle AE und CF senkrecht zur Ebene PQ , ziehe BE und DF , dann AC , BH , EF , ferner EG und FH senkrecht zu BH , endlich AG und CH , welche ebenfalls zu BH senkrecht sind (47, b).

Weil $AB \# CD$ ist, so liegen Beide in einer Ebene $ABHC$. Die rechtwinkligen Dke. ABG und CDH haben nun $AB = CD$ und $\mathcal{W}. ABG = \mathcal{W}. CDH$, sind also einerlei, daher $AG = CH$ und $BG = DH$.

Die Senkrechten AG und CH liegen ebenfalls in der nämlichen Ebene $ABHC$, sind also $\#$; weil sie aber auch gleich sind, so ist auch $AC \# GH$ (oder BH) (17, e). Da jedoch GH zu GA und GE , also zur Dreiecksebene AGE senkrecht ist (46, a); so ist auch AC zur Ebene AEG (48, b), und darum zur Linie AE senkrecht (46, b). AE und CF , als senkrecht zur Ebene PQ , sind $\#$ und liegen in einer Ebene $ACFE$, in welcher auch AC und EF liegen; Letztere sind daher, als senkrecht zu AE , ebenfalls $\#$. Weil aber AC zur Ebene AEG senkrecht ist, so ist auch EF zu ihr, und darnach zu EG senkrecht. Das Viereck $EGHF$ ist somit ein Rechteck, also $GE = HF$.

Nun sind die rechtw. Dke. BEG und DFH einerlei, also $\mathcal{W}. m = \mathcal{W}. n$, daher $BE \# DF$; ferner $BE = DF$. Dann haben die rechtw. Dke. ABE und CDF jetzt $AB = CD$, $BE = DF$, sind demnach einerlei, folglich ist $\mathcal{W}. ABE = \mathcal{W}. CDF$.

IV. Bei den Schiefauftstehenden AB und CD sei nun umgekehrt $\mathcal{W}. ABE = \mathcal{W}. CDF$ und $BE \# DF$. Dies kann nur eine Folge davon sein, daß $AB \# CD$ ist.

V. Es seien fig. 135 die Aufstehenden AB und CD, dann in der Ebene PQ die Geraden BE und DF $\#$. — Man mache wieder $BA = DC$, fälle AG und CH senkrecht zur Ebene PQ, ziehe GF, dann AE und CF, ferner BG und DH. — Die rechth. Dfe. ABG und CDH haben nun $AB = CD$, $\mathbb{W}. ABG = \mathbb{W}. CDH$ (nach III.), sind also einerlei, daher $AG = CH$, $BG = DH$. Auch werden dadurch die Dfe. BEG und DFH einerlei, also $BE = DF$, $EG = FH$. Die rechth. Dfe. AEG und CFH sind, weil $AG = CH$, $GE = HF$, ebenfalls einerlei, also $AE = CF$. Die Dfe. ABE und CDF haben endlich wegen der Gleichheit aller Seiten auch $\mathbb{W}. ABE = \mathbb{W}. CDF$. — h. f.

49. a. Sind 2 schiefauftstehende g. L. $\#$; so haben sie gleichlaufende Grundrisse und gleiche Richtungsw. zur Ebene.
- b. Haben 2 schiefauftstehende g. L. gleichlaufende Grundrisse und gleiche Richtungsw. zur Ebene; so sind sie $\#$.
- c. Wenn 2 schiefauftstehende g. L. $\#$ sind, und aus ihren Fußpunkten gleichlaufende g. L. in der Ebene gehen; so bilden jene mit diesen gleiche $\mathbb{W}$.

VI. Die Schiefauftstehenden AB und AC fig. 136, die außerhalb der Ebene in A sich treffen, seien gleich. — Man fälle AD senkrecht zur Ebene, ziehe die Grundrisse BD und CD und die Verbindungslinie BC. — Die rechth. Dfe. ABD und ACD sind einerlei, also $BD = CD$, $\mathbb{W}. ABD = \mathbb{W}. ACD$; das Df. BCD ist gleichschenkelig, also $\mathbb{W}. DBC = \mathbb{W}. DCB$.

U n m. Die Gleichheit von AB und AC, BD und CD, $\mathbb{W}. ABD$ und $\mathbb{W}. ACD$, $\mathbb{W}. DBC$ und $\mathbb{W}. DCB$ bedingen sich gegenseitig.

VII. Die Schiefauftstehenden AB und AC fig. 137 begegnen sich außerhalb der Ebene in A; durch ihre Fußpunkte gehen in der Ebene die Parallelen FG und HI; es sei AB zu FG, und AC zu HI senkrecht. — Man fälle aus A auf die Ebene die Senkrechte AD, ziehe dann DB und DC. Letztere sind die Grundrisse von AB und AC, also senkrecht zu FG und HI (47, c). Man denke einen dieser Grundrisse, z. B. BD bis nach

HI verlängert, so muß diese Verlängerung zur Parallelen HI senkrecht sein (4, d). Weil aber DC zu HI wirklich senkrecht ist, und aus D nach HI nur eine Senkrechte gehen kann; so muß jene Verlängerung von BD mit DC zusammenfallen; daher sind BD und CD nur eine Gerade, nämlich die Verbindungslinie der Aufstehenden, die zu den beiden Parallelen senkrecht ist.

VIII. Es bleibe $FG \# HI$, aber es seien AB und BC zugleich senkrecht zu FG. — Dann liegt in BC der Grundriß von AB (47, d); geht daher AD senkrecht zu BC, so ist AD auch senkrecht zur Ebene MN (47, e), also ist DC der Grundriß von AC. Es ist aber DC senkrecht zu HI (4, d), somit auch AC senkrecht zu HI (47, b).

Un m. Oder: weil FG zu BA und BC senkrecht ist, so ist FG auch senkrecht zur Ebene ABC (46, a); da aber $HI \# FG$ ist, so ist auch HI zur Ebene ABC, und folglich zu AC senkrecht (48, b und 46, b).

- 50) a. Wenn 2 Schiefauftstehende, die außerhalb der Ebene sich treffen, gleich sind; so haben sie gleiche Grundrisse, gleiche Richtung zur Ebene und zu ihrer Verbindungslinie in der Ebene, und umgekehrt.
- b. Wenn 2 Schiefauftstehende, die außer der Ebene sich treffen, zu 2 Parallelen, welche in der Ebene durch die Fußpunkte jener Beiden gehen, senkrecht sind; so ist auch ihre Verbindungslinie in der Ebene zu den beiden Parallelen senkrecht.
- c. Wenn eine von 2 Schiefauftstehenden, die außer der Ebene sich treffen, mit ihrer Verbindungslinie zu einer der beiden Parallelen, welche in der Ebene durch die Fußpunkte gehen, senkrecht ist; so ist auch die andere Aufstehende zu der andern Parallelen senkrecht.

§ 45.

I. Die Linie DE außerhalb der Ebene PQ fig. 138 sei $\#$ zu der Linie FG in der Ebene PQ. — Dann liegen

beide Linien DE und FG auch in einer Ebene, nämlich, wenn man DF und EG zu FG senkrecht zieht, in der Ebene $DFGE$ (§. 10, I). Könnte nun DE die Ebene PQ treffen, so müßte es innerhalb der Ebene $DFGE$ geschehen, und zwar so, daß DE die Linie FG trafe. Dies ist aber nicht möglich, weil $DE \# FG$ ist. Das Gleiche findet ebenso zwischen DE und jeder andern Linie in PQ Statt, zu der $DE \#$ ist. Da somit DE nirgends eine Richtung zu PQ hat, so ist sie mit dieser Ebene gleichlaufend.

II. Es sei nun wieder $DE \# FG$, und $FG \#$ zu einer andern Linie LR in der Ebene PQ . — Aus einem Punkte D in DE falle man zur Ebene PQ die Senkrechte DH , und aus H die Linie HL senkrecht zu FG und LR , und ziehe DF und DL . Nun ist FH Grundriß von DF , also auch DF senkrecht zu FG (47, b), mithin FG zur Ebene des Dfs. DHL senkrecht (46, a). Weil aber $FG \# DE$ und LR ist, so sind auch diese zur Ebene DHL senkrecht (48, b) daher selbst parallel (48, a). —
h. f.

- 51) a. Wenn eine Linie außer einer Ebene zu einer Linie in derselben $\#$ ist, so ist sie auch $\#$ mit der Ebene selbst.
b. Ist eine Linie außer einer Ebene $\#$ mit einer Linie in der Ebene, und diese wieder $\#$ mit einer andern Linie in der Ebene; so ist die erste auch $\#$ mit der letzten.

§. 46.

I. Die Ebenen MN und NP fig. 139 durchschneiden sich; wie ist ihr Durchschnitt beschaffen? — Man verbinde 2 Durchschnittspunkte B und E durch die Gerade BE . Weil nun die Punkte B und E in der Ebene MN liegen, so liegt auch die Gerade BE darin; und weil B und E auch in der Ebene NP liegen, so liegt die Gerade BE ebenfalls darin. Somit ist die Gerade BE (oder NQ), weil sie in beiden Ebenen liegt, der Durchschnitt derselben.

II. Welches ist nun die Richtung beider Ebenen zusammen? — Senkrecht zur Durchschnittslinie NQ ziehe

man in der Ebene MN die Geraden AB und DE, in der Ebene NP die Geraden BC und EF; dann ist $AB \# DE$, und $BC \# EF$. Man kann aber BC und EF in Bezug auf die Ebene MN als Schiefaufstehende betrachten, deren Grundrisse in AB und DE liegen (47, d); daher ist $\angle ABC = \angle DEF$ (49, a). Das Nämliche gilt ebenso von jedem $\angle$, dessen Schenkel wechselweise in den beiden Ebenen liegen und zum Durchschnitt senkrecht sind; derselbe hat also eine beständige Größe, gibt somit die Zusammenrichtung beider Ebenen an.

III. Es sei die Gerade BC in der Ebene NP zur Ebene MN senkrecht. Dann ist auch ihre Parallele EF zur Ebene MN senkrecht (48, b); also steht die Ebene NP selbst auf der Ebene MN senkrecht.

IV. Die Ebene MK fig. 140 schneide die Ebene MQ unter einem spitzen $\angle$ in der Geraden MN. Aus dem Punkte H zwischen beiden Ebenen gehen auf dieselben die Senkrechten HC und HD; wie ist der $\angle$ CHD beschaffen? — Man ziehe aus H nach MN die Senkrechte HB, dann die Linien CB und DB. Nun ist HB in Bezug auf beide Ebenen eine Schiefaufstehende, BC ihr Grundriß in der untern, BD ihr Grundriß in der obern Ebene. Da nun auch BC und BD zu MN senkrecht sind (47, c), so folgt, daß CBD der Richtungsw. beider Ebenen ist (oben II.), und daß BC und BH und BD in einer Ebene liegen (46, d), in welcher HC und HB sich befinden. In dem Viereck BCHD ist nun $\angle BCH = \angle BDH = 90^\circ$ (46, b), also auch $\angle CBD + \angle CHD = 180^\circ$.

- 52) a. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine g. L.
 b. Der Richtungsw. zweier Ebenen ist durch 2 Gerade bestimmt, deren je eine in jeder Ebene zum Durchschnitt senkrecht ist.
 c. Ist eine Gerade in einer Ebene zu einer andern Ebene senkrecht; so ist auch jene Ebene zu der Letzteren senkrecht.
 d. Wenn 2 Gerade aus einem Punkte zwischen 2 Ebenen nach denselben senkrecht gehen; so bilden sie einen $\angle$, der mit dem Richtungsw. beider Ebenen zusammen 180° beträgt.

V. Es sei fig. 141 die Linie Aa senkrecht zu den Ebenen MN und mn. Durch A ziehe man in der Ebene MN die g. L. BC, DE, FG, so sind sie zu Aa senkrecht (46, b). Durch a ziehe man die g. L. bc # BC, de # DE, fg # FG, so sind bc und de und fg auch senkrecht zu Aa, und liegen daher in der Ebene mn (46, c). Die Ebene mn hat also nach allen Seiten hin mit MN gleiche Richtung (51, a), also ist $mn \# MN$.

VI. Es sei umgekehrt $mn \# MN$ und Aa senkrecht zu MN; so kann Ersteres nur Statt finden, wenn Aa auch zu mn senkrecht ist.

VII. Es bleibe $mn \# MN$ und es seien Aa und Ee senkrecht zu MN. — Nun sind Aa und Ee (nach VI.) auch senkrecht zu mn; und wenn man AE und ae zieht, so ist AaeE ein Rechteck, mithin $Aa = Ee$.

53) a. Wenn eine Gerade zu 2 Ebenen senkrecht ist, so sind sie gleichlaufend.

b. Wenn eine Gerade zu einer von 2 gleichlaufenden Ebenen senkrecht ist, so ist sie es auch zur andern.

c. Senkrechte Linien zwischen gleichlaufenden Ebenen sind gleich.

VIII. Die Linie AB durchdringe fig. 142 die # Ebenen MN und PQ. — Man fälle BC senkrecht auf MN, also auch auf PQ (53, b), und ziehe durch die Fußpunkte in beiden Ebenen die Linien AC und DE. Dann sind x und y die Richtungsw. von AB zu MN und PQ, und ist BC senkrecht zu AC und DE (46, b), also $AC \# DE$ im Df. ABC, folglich $x = y$.

Anm. Es finden also auch hier die Sätze No. 4, a Statt.

IX. Die Schiefauftstehenden AD und BE fig. 143 liegen zwischen den # Ebenen MN und PQ, und ihre Richtungsw. zu MN seien gleich. — Man fälle aus D und E zu MN die Senkrechten DG und EH, ziehe AG und BH. Die rechth. Dfe. ADG und BEH haben nun $DG = EH$ (53, c) und W. DAG = W. EBH, sind also einerlei, daher $AD = BE$.

X. Umgekehrt sei $MN \# PQ$ und $AD = BE$. Man ziehe die vorigen Hilfslinien; dann sind die rechth. Dfe.

ADG und BEH wieder einerlei (9, d), also $\mathfrak{W}. DAG = \mathfrak{W}. EBH$.

XI. Es sei fig. 144 $MN \# PQ$ und dazwischen $AD \# BE$; wie verhalten sich ihre Verbindungslinien AB und DE in beiden Ebenen? — Man fälle die Senkrechten DG und EH zu MN, und ziehe AG und BH; so ist $\mathfrak{W}. DAG = \mathfrak{W}. EBH$ (49, a), also $AD = BE$ (54, b); folglich im Viereck ADEB nun $AB =$ und $\#$ DE (17, e).

XII. Es sei fig. 145 $MN \# PQ$, und aus B gehen durch PQ nach MN die g. L. BA und BC; man verbinde ihre Durchgangspunkte durch die g. L. AC und DE; wie verhalten sich Letztere? — Man ziehe DF $\#$ CE (oder CB); dann ist DE $\#$ FC (oder AC) (54, d).

XIII. Es sei fig. 146 $MN \# PQ$ und darin $AB \# DE$, $AC \# DF$; wie sind die $\mathfrak{W}. BAC$ und EDF beschaffen? — Man fälle aus D, E, F zu MN die Senkrechten DG, EH, FI, ziehe GH und GI. Nun ist DG $\#$ EH $\#$ FI (48, a), also DE $\#$ GH, und DF $\#$ GI (54, b); darum auch AB $\#$ GH, und AC $\#$ GI, mithin $\mathfrak{W}. BAC = \mathfrak{W}. HGI$ (4, f). Ferner ist DG senkrecht zu DE und DF, GH und GI; man kann daher die $\mathfrak{W}. EDF$ und HGI als Richtungsw. der in DG sich treffenden Ebenen DEHG und DFIG ansehen (52, b), also ist $\mathfrak{W}. EDF = \mathfrak{W}. HGI$; da aber $\mathfrak{W}. BAC = \mathfrak{W}. HGI$ ist, so ist auch $\mathfrak{W}. BAC = \mathfrak{W}. EDF$.

- 54) a. Wenn eine g. L. zwei $\#$ Ebenen durchdringt, so hat sie zu Beiden gleiche Richtungsw.
- b. Wenn 2 Schiefauftstehende zwischen $\#$ Ebenen zu einer derselben gleiche Richtungsw. haben, so sind sie gleich.
- c. Gleiche Schiefauftstehende zwischen $\#$ Ebenen haben gleiche Richtungsw. zu denselben.
- d. Parallele Linien zwischen $\#$ Ebenen sind gleich und schließen in denselben gleiche Parallelen ein.
- e. Wenn zwei g. L. von einem Punkte aus 2 $\#$ Ebenen durchdringen, so schließen sie in denselben $\#$ Linien ein.

f) Wenn 2 W. in # Ebenen je 2 Schenkel # haben, so sind die W. selbst gleich.

XIV. Die Ebenen MN und PQ fig. 147 sollen eine solche Richtung haben, daß zwischen ihnen die zu MN Senkrechten DG, EH, FI gleich sind. — Man ziehe DE, DF, GH, GI. Weil nun DG und EH, dann DG und FI # und = sind (48, a); so ist DE # GH und DF # GI (17, e), also DG senkrecht zu DE und DF, und darum senkrecht zu PQ (46, a) mithin PQ # MN (53, a).

XV. Die Geraden AD, BE, CF zwischen den Ebenen MN und PQ fig. 148 seien # und =. Man falle auf MN die Senkrechten DG, EH, FI und ziehe AG, BH, CI. Dann sind die Dke. ADG, BEH und CFI einerlei (40, a und 9, b oder d), also DG = EH = FI, folglich MN # PQ (55, a).

XVI. Die Schiefauftstehende AB fig. 142 durchdringe die Ebenen MN und PQ unter gleichen übereinstimmenden Richtungsw. x und y, so daß die Grundrisse AC und DE in einer Ebene liegen. Dann ist AC # DE. Fällt man BC senkrecht zu AC, so ist sie auch senkrecht zu DE, also senkrecht zu beiden Ebenen (47 e), daher MN # PQ (53, a).

XVII. In den Ebenen MN und PQ fig. 146 sei endlich AB # DE, AC # DF. — Man mache AB = DE, AC = DF, ziehe AD, BE, CF. Weil nun AB # und = DE, so ist AD # und = BE (17, e); und weil AC # und = DF, so ist AD # und = CF, daher alle 3 Linien AD, BE, CF # und =, folglich MN # PQ (55, b). — S. f.

55) Zwei Ebenen sind gleichlaufend :

- a. wenn sie 3 gleiche Senkrechte zwischen sich fassen;
- b. wenn sie 3 gleiche und parallele Schiefauftstehende zwischen sich fassen, die unter sich nicht in einer Ebene liegen;
- c. wenn eine Schiefauftstehende sie unter gleichen übereinstimmenden Richtungsw. durchdringt;
- d. wenn die Schenkel eines W. in der einen wechselweise zu den Schenkeln eines W. in der andern # sind,

§. 47.

I. Es sei fig. 149 die Ebene $AB \# CD$, und $CD \# EF$. — Man ziehe durch diese 3 Ebenen eine Hilfslinie MP senkrecht zu AB . Dann ist MP auch senkrecht zu CD , und deshalb wieder zu EF (53, b), also ist $AB \# EF$ (53, a).

II. Aus A fig. 150 gehen die 2 Geraden AB und AC durch die $\#$ Ebenen MN , PQ , RS . — Man ziehe zwischen den Fußpunkten in jeder Ebene die Geraden DE , FG , BC , welche $\#$ sind (54, e); daher ist $AB : AC = AD : AE$, dann $AB : AC = AF : AG$, und $AB : AC = DF : EG$, endlich $AB : AC = BF : CG$ (31, c), folglich $AB : AC = AD : AE = AF : AG = DF : EG = BF : CG$. — S. f.

56) a. Ist eine von 3 Ebenen mit den beiden andern $\#$, so sind auch diese unter sich selbst $\#$.

b. Wenn aus einem Punkte 2 Gerade durch 2 von 3 $\#$ Ebenen bis nach der dritten gehen; so sind sie und ihre entsprechenden Abschnitte proportional.

III. Die 3 Ebenen AB , AC , AD fig. 151 durchschneiden sich in einer Geraden AL . — Aus dem Punkte E des Durchschnits ziehe man zu ihm in jenen Ebenen die Senkrechten EF , EG , EH . Dann ist $\mathcal{W}$. FEG der Richtungsw. von AB und AC , $\mathcal{W}$. GEH der Richtungsw. von AC und AD , $\mathcal{W}$. FEH der Richtungsw. von AB und AD . Die Geraden EF , EG , EH liegen aber in einer Ebene (46, d), folglich ist $\mathcal{W}$. $FEH = \mathcal{W}$. $FEG + \mathcal{W}$. GEH .

IV. Die Ebenen CD und EF fig. 152 seien $\#$ und werden von der Ebene AB in CH und EK durchschnitten. — Die Geraden CH und EK , als in den $\#$ Ebenen CD und EF liegend, können sich nicht begegnen; sie liegen aber auch in der einen Ebene AB , müssen daher, weil ihnen die Zusammenrichtung fehlt, $\#$ sein.

Zieht man in AB nun MR senkrecht zu CH und EK , in CD die Senkrechte MN zu CH , und in EF die Senkrechte PQ zu EK , so sind $\mathcal{W}$. NMR und $\mathcal{W}$. QPR die

Richtungsw. der Ebenen CD und EF zur Ebene AB (52, b), aber auch zugleich die Richtungsw. der Linie MR zu den Ebenen CD und EF (47, d und a), und daher gleich (54, a).

V. Ist nun umgekehrt $CH \# EK$, und $\mathbb{W}. NMR = \mathbb{W}. QPR$; so kann dies nur eine Folge davon sein, daß $CD \# EF$ ist.

- 57) a. Durchschneiden sich 3 Ebenen in einer Linie; so ist der Richtungsw. der beiden äußern Ebenen so groß, als ihre Richtungsw. zu der innern Ebene.
- b. Werden 2 gleichlaufende Ebenen von einer 3ten durchschnitten, so sind ihre Durchschnitte $\#$ und ihre Richtungsw. zur letztern gleich.
- c. Zwei Ebenen sind $\#$, wenn ihre Durchschnitte mit einer 3ten Ebene $\#$, und zugleich ihre Richtungsw. zu derselben gleich sind.

VI. Die 3 Ebenen Ab , Ac , Bc fig. 153 durchschneiden sich in 3 Linien, von denen Aa und $Bb \#$ seien: wie verhält sich Cc ? — Man ziehe aus den Punkten C und c im Durchschnitt Cc zu Aa die Senkrechten CA und ca , und zu Bb die Senkrechten CB und cb , ferner in der Ebene Ab die Linien AB und ab . Nun sind AB und ab senkrecht Aa und Bb (50, b), daher $AB = ab$ (17, b); auch ist $\mathbb{W}. CAB = \mathbb{W}. cab$, und $\mathbb{W}. CBA = \mathbb{W}. cha$ (52, b oder 49, a), somit sind die Dfe. ABC und abc einerlei, also $AC = ac$. Diese beiden Linien sind aber als senkrecht zu Aa auch $\#$, daher auch $Aa \# Cc$, folglich auch $Bb \# Cc$ (51, b).

VII. Weil Aa zu AC , und Bb zu BC senkrecht, aber $Cc \# Aa$ und Bb ist, so ist auch Cc senkrecht zu AC und BC ; demnach ist $\mathbb{W}. ACB$ der Richtungsw. der Ebenen Ac und Bc . Die Richtungsw. aller 3 Ebenen zu einander liegen somit in einem Df., sind also zusammen $= 180^\circ$. — H. f.

- 58) a. Wenn sich 3 Ebenen in 3 Linien durchschneiden, und 2 Kanten $\#$ sind, so ist auch die 3te mit ihnen $\#$.
- b. Wenn 3 Ebenen in 3 $\#$ Kanten sich schneiden; so betragen ihre 3 Richtungsw. zusammen 180° .

VIII. Die Kanten BA, BC, BE der Ebenen AC, AE, MN fig. 154 laufen in B zusammen, und die Kante AB der Ebenen AC und AE sei senkrecht zur Ebene MN; dann sind auch die Ebenen AC und AE zu MN senkrecht (52, c).

IX. Sind umgekehrt AC und AE zu MN senkrecht; so muß als Grund vorausgesetzt werden, daß auch AB zu MN senkrecht ist.

X. Die Kante AB der Ebenen AC und AE fig. 155 stehe schief auf der Ebene MN, und bilde mit den Trefflinien BC und BE gleiche W. ABC und ABE; wie sind die Richtungsw. der Ebenen AC und AE zu MN beschaffen? — Man fälle AG senkrecht zu MN, ziehe GH zu BC, und GI zu BE senkrecht, dann AH und AI, wovon jene zu BC und diese zu BE senkrecht ist (47, b). Nun sind die rechth. Dke. ABH und ABI einerlei, also $AH = AI$; dadurch werden auch die rechth. Dke. AGH und AGI einerlei, folglich ist W. AHG = W. AIG, welches die Richtungsw. der Ebenen AC und AE zu MN sind.

XI. Es sei umgekehrt W. AHG = W. AIG. Dann kann dies nur die Folge davon sein, daß auch W. ABC = W. ABE ist.

- 59) a. Ist die Kante zweier Ebenen zu einer 3ten Ebene senkrecht; so sind beide Ebenen selbst zur 3ten Ebene senkrecht.
- b. Laufen die Kanten dreier Ebenen in eine Ecke zusammen und stehen 2 Ebenen auf der 3ten senkrecht; so ist auch ihre Kante zu derselben senkrecht.
- c. Bildet die Kante zweier Ebenen mit den beiden Trefflinien dieser Ebenen und einer 3ten Ebene gleiche schiefe W.; so haben auch jene Ebenen gleiche Richtungsw. zur 3ten Ebene.
- d. Haben 2 von 3 in einer Ecke zusammenlaufenden Ebenen gleiche schiefe Richtungsw. zu der 3ten Ebene; so bildet auch ihre Kante gleiche W. mit den Trefflinien derselben und der 3ten Ebene.

Anm. Die Sätze unter a und b ergeben sich auch aus denen unter c und d, aus welchen noch weiter folgt: α . Bilden die 3 Kanten einer dreikantigen Ecke unter sich 3 gleiche W.; so haben auch die 3 Ebenen gleiche Richtungsw. zu einander. — β . Haben die 3 Ebenen einer 3kantigen Ecke gleiche Richtungsw. zu einander; so bilden auch ihre Kanten unter sich gleiche W.

XII. Es sei A fig. 156 eine dreikantige Ecke, u. W. BAC der größte ihrer 3 Kantenw. — Man ziehe in der Ebene ABC die Linie $BE = BD$, und $AE = AD$, so daß BE und AE in E sich treffen; verlängere dann BE bis F und ziehe in der Ebene ADC noch FD. — Nun sind die Dfe. ABD und ABE einerlei, also W. $BAD = W. BAE$. Im Df. BDF ist ferner $BD + DF > BF$, oder $BD + DF > BE + EF$; da aber $BD = BE$, so ist $DF > EF$. In den Dfen. AEF und ADF ist $AF = AF$, $AD = AE$, aber $DF > EF$, also W. $DAF > W. EAF$; daher W. $BAD + W. DAF > BAE + W. EAF$, oder W. $BAD + W. DAF > BAF$. — Was hier vom größten W. BAF gilt, das gilt um so mehr auch von einem kleineren.

XIII. In A fig. 157 laufen ebenfalls 3 Ebenen zusammen. Man lege durch sie eine Ebene BCD und falle auf diese aus A eine Senkrechte AE und ziehe BE, CE, DE. — In den rechth. Dfen. ABE und ADE ist $AB > BE$, $AD > DE$; daraus folgt für die Dfe. ABD und BDE, welche BD gemein haben, daß W. $BAD < W. BED$. Eben so ergibt sich, daß W. $BAC < W. BEC$, W. $CAD < W. CED$ ist. Deshalb sind die 3 Kantenw. bei A zusammen kleiner als die 3 W. um E, oder kleiner als 360° .

Dies gilt ebenso für jede mehr- als 3kantige Ecke. Jeder Kantenw. ist kleiner als der ihm entsprechende W. bei E in der Hilfsebene. Da jedoch alle W. um E = 360° sind, so sind alle Kantenw., so viel ihrer sein mögen, kleiner als 360° . — H. f.

60) a. An einer dreikantigen Ecke sind 2 Kantenw. immer größer als der dritte.

b. Alle Kantenw. an einer Ecke sind zusammen kleiner als 360° .

Sechster Abschnitt.

Oberfläche und Inhalt der Körper.

§. 48.

Die Berechnung der Oberfläche geradflächiger Körper beruht auf den Sätzen No. 40 und 41.

I. Pyramide. Man berechnet die Grundfläche einer 3 oder 4 oder vielseitigen Pyramide, so wie jede Seitenfläche und sucht dann die Summe sämtlicher Ergebnisse. — Ebenso verfährt man bei der abgestumpften Pyramide, bei welcher auch die zur Grundfläche parallele Ebene zu berechnen ist.

II. Prisma. Man berechnet die Grundfläche, verdoppelt sie, und zählt dazu die einzeln berechneten Seitenflächen.

III. Parallelopipedum. Je zwei entgegengesetzte Grundflächen desselben sind parallel und einerlei (No. 55, a oder b, und 49, c).

Beim schiefwinkligen Parallelopipedum ist also jede von den 3 verschiedenen, an einer Ecke sich treffenden Seitenflächen besonders zu berechnen und zu verdoppeln; die Summe dieser Produkte gibt die Oberfläche.

Ebenso verhält es sich beim rechtwinkligen Parallelopipedum. Aber die in einer Ecke sich treffenden 3 Kanten sind zugleich die Abmessungen der 3 zu berechnenden Flächen. Ist demnach o die Oberfläche, b die Breite, d die Dicke, h die Höhe des Körpers, so ist

$$o = 2 \times (bd + bh + dh).$$

IV. Beim Würfel kommt noch hinzu, daß seine Seitenflächen Quadrate sind. Ist daher k die Kante desselben, so ist jede Seitenfläche $= k^2$, also $o = 6 \cdot k^2$.

1. Anm. Auf ähnliche Weise sucht man auch die Oberfläche aller übrigen, z. B. der regelmäßigen Körper (§. 22). —

2. Anm. Denkt man sich die Seitenflächen in bestimmten Kanten geschnitten und vom Körper abgelöst, so daß sie nur noch in den nöthigen Kantenlinien zusammenhängen, und denkt man sie dann in einer Ebene ausgebreitet; so entsteht eine Figur, welche Körpernetz heißt. — Die Netze der regelmäßigen Körper ent-

halten figg. 158–162, nämlich Tetraeder fig. 158, Würfel fig. 159, Oktaeder fig. 160, Dodekaeder fig. 161, Ikosaeder fig. 162. Diese Netze veranschaulichen die Berechnung der Oberfläche. — Mit Hilfe der Netze kann man die verschiedenen Körperformen aus Pappdeckel bilden.

3. Anm. Daß es nur die 5 genannten regelmäßigen Körper gebe, beruht besonders auf Satz No. 60, b.

§. 49.

I. Die Oberfläche eines senkrechten Kegels besteht aus der kreisförmigen Grundfläche und der Seitenfläche. Es bleibt hier nur noch Letztere zu berechnen.

Man denke die Seitenfläche in einer Geraden (Seitenlinie) vom Scheitel bis zu einem Punkte des Umfangs der Grundfläche durchschnitten, vom Kegel abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet. Dann gleicht sie einem Kreisabschnitt, welcher die Kegelseitenlinie zum Halbmesser und den Umfang der Kegelgrundfläche zum Bogen hat. Bezeichnet nun S die Seitenlinie und D den Durchmesser der Grundfläche, so ist in No. 43, a das dortige $r = S$, und $b = D \times 3,14$, also die

$$\text{Kegelseitenfläche} = \frac{1}{2} \times S \cdot D \cdot 3,1416.$$

II. Die Oberfläche eines abgestumpften senkrechten Kegels enthält 2 Kreisebenen und die einfach gekrümmte Seitenfläche, welche Letztere hier allein in Betracht kommt.

Die Seitenfläche eines abgestumpften senkrechten Kegels gleicht einem Theile eines Kreisringes (§. 41, XVI), der die Seitenlinie des abgestumpften Kegels zur Breite, und die Umkreise seiner parallelen Flächen zu Bogen hat. Man setze nun die Seitenlinie $= s$, die Durchmesser der größern und kleinern Kreisebene $= D$ und $= d$; danach wird in No. 44, b hier $w = s$, dann $B = D \cdot 3,1416$ und $b = d \cdot 3,1416$, mithin

$$\begin{aligned} \text{Seitenfl. des abgest. Kegels} &= \frac{1}{2} \times s \times (D + d) \\ &\times 3,1416. \end{aligned}$$

III. Die Oberfläche eines vollständigen Zylinders enthält 2 einerlei Kreisebenen und eine einfach gekrümmte Seitenfläche. Letztere gleicht, wenn man sie abgewickelt und in einer Ebene ausgebreitet denkt, einem Rechtecke, welches den Umkreis des Zylinders zur einen

und die Höhe desselben zur anderen Abmessung hat. Ist d der Durchmesser und h die Höhe des Zylinders, so ist seine

$$\text{Seitenfläche} = h \cdot d \cdot 3,1416.$$

IV. Kugeloberfläche. Man denke eine Kugel im Innern einer Walze, deren Durchmesser und Höhe dem Kugeldurchmesser gleich sind. Die Kugel berührt dann den Mittelpunkt der beiden Kreisebenen der Walze und in der Mitte auch die Seitenfläche der Letzteren.

Es sei nun fig. 163 ein Durchschnitt der Walze in der Richtung ihrer Achse; derselbe ist ein Quadrat, der Durchschnitt der Kugel ein größter Kreis derselben, der die Seiten des Quadrats in der Mitte berührt.

Ein abgestumpfter Kegel von der Höhe PQ berühre in der Mitte seiner Seitenfläche die Oberfläche der Kugel; so berührt er in b und B , der Mitte seiner Seitenlinien, den Durchschnittskreis, und es sind Gg und Kk die Durchmesser seiner Kreisebenen. Nun ist die Seitenfläche des abgestumpften Kegels

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot KG \times (gG + kK) \times 3,14 \\ &= KG \times bB \times 3,14 = 2 \cdot KG \cdot BF \times 3,14. \end{aligned}$$

Man ziehe nun $AL \parallel GK$ und den Halbmesser MB ; so sind die rechtwinkligen Dreiecke BFM und AHL ähnlich; denn $\angle MBF = \angle BCG = 90^\circ - \angle BGC = 90^\circ - \angle LAC = \angle LAH$; dann $\angle F = \angle H = 90^\circ$, und $\angle BMF = \angle ALH$. Daher ist $BF : BM = AH : AL$, also $BF \cdot AL = BM \cdot AH = AP \cdot AH$. Es ist aber $AL = KG$, somit $BF \cdot KG = AP \cdot AH$.

Setzt man nun letzteres Produkt für's erstere in der obern Gleichung, so ist die Seitenfläche des abgestumpften Kegels

$$= 2 \cdot AP \cdot AH \times 3,14 = Aa \cdot AH \times 3,14$$

Das letzte Produkt ist die Seitenfläche der walzenförmigen Scheibe, deren Durchschnitt $AahH$ ist. Sonach gleicht die Seitenfläche des abgestumpften Kegels, dessen Durchschnitt $GgkK$ ist, der Seitenfläche des Zylinders, dessen Durchschnitt $AahH$ ist. Daraus folgt: Berühren abgestumpfte Kegel in ihrer Mitte die Kugeloberfläche, so daß sie die Kugel ganz einschließen; so ist die Summe der Seitenflächen jener abgestumpften Kegel gleich der

Seitenfläche der Walze, deren Durchmesser und Länge dem Durchmesser der Kugel gleich sind.

Es kommt dabei nicht auf die Dicke der abgestumpften Kegel und der Scheiben an; und man kann sie demnach so dünn annehmen, als man will, so daß die Seitenflächen der Kegel mit der Oberfläche der Kugel zusammenfallen. Folglich ist die Kugeloberfläche selbst gleich der Seitenfläche einer Walze von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe, also $= d \times d \cdot 3,14 = d^2 \cdot 3,14$.

V. Ferner ist aus gleichen Gründen die Kugelzone, deren Höhe $PQ = AH$ ist, $= Aa \cdot PQ \cdot 3,14$. Ebenso ist die Kugelschale von der Höhe $QN = Hh \times QN \cdot 3,14$. Oder setzt man $Aa = Hh = d$ und PQ und $QN = h$, so ist die Zone $= d \cdot h \cdot 3,14$, und die Schale ebenfalls $= d \cdot h \times 3,14$. — H. f.

61) Es ist die Seitenfläche:

- a. des senkrechten Kegels $= \frac{1}{2} \times S \cdot D \cdot 3,1416$
- b. des abgest. senkr. Kegels $= \frac{1}{2} \times s \cdot (D + d) \times 3,1416$
- c. des Zylinders $= h \times d \cdot 3,1416$
- d. die Kugeloberfläche $= d^2 \times 3,1416$
- e. die Kugelzone und Schale $= d \cdot h \times 3,1416$.

Anm. Aus No. 42, b und No. 61, d ergibt sich, daß die Oberfläche der Kugel 4 Mal so groß ist, als der Flächeninhalt eines größten Kreises derselben.

Uebungsaufgaben.

- a. Berechne die Seitenfläche eines senkrechten Kegels, wenn $D = 2''$, $S = 5''$, oder $D = 8''$, $S = 15''$, oder $D = 2'$, $S = 4' 5''$, oder $D = 4' 2''$, $S = 12' 6''$ ist.
- b. Suche die Seitenfläche des abgestumpften senkr. Keg., wenn $D = 3''$, $d = 2''$, $s = 6''$, oder $D = 7''$, $d = 5''$, $s = 12''$, oder $D = 3' 2''$, $d = 2' 8''$, $s = 18' 5''$ ist.
- c. Wie groß ist die Seitenfläche einer Walze, wenn $d = 4''$, $h = 15''$, oder $d = 16''$, $h = 25''$, oder $d = 18''$, $h = 45''$, oder $d = 24''$, $h = 68''$ ist?
- d. Wie groß ist die Kugeloberfläche, wenn $d = 5''$, oder $12''$, oder $2' 4''$, oder $3' 2''$, oder $8' 5''$, oder $5' 4''$ beträgt?

e. Was beträgt eine Kugelzone oder Kugelschale, wenn $d = 8''$, $h = 3''$, oder $d = 15''$, $h = 4''$, oder $d = 5' 2''$, $h = 8''$, oder $d = 12'$, $h = 15''$ ist?

§. 50.

I. In der 3seitigen Pyramide $ABCD$ fig. 164 sei eine Durchschnittsebene $bed \#$ zur Grundfläche BCD . — Dann sind auch die Durchschnittslinien der Erstern zu denen der Letztern $\#$, nämlich $bc \# BC$, $bd \# BD$, $cd \# CD$ (54, e), daher sind die entsprechenden W. der Dfe. bed und BCD gleich (54, f), also Letztere selbst ähnlich (No. 32, c) und daher $BCD : bed = BD^2 : bd^2$ (No. 45, c).

Es sind aber, weil $bd \# BD$, auch die Dfe. ABD und Abd ähnlich (31, e), also ist $BD : bd = AD : Ad$. Man fälle nun aus A auf die parallelen Ebenen die Senkrechte AE , welche dieselben in E und e trifft, und ziehe DE und de ; so ist auch $DE \# de$ (54, e), daher Df. $ADE \sim$ Df. Ade , mithin $AD : Ad = AE : Ae$, daher auch $BD : bd = AE : Ae$, und folglich Df. $BCD : bed = AE^2 : Ae^2$.

Dies gilt auch von der vielseitigen Pyramide. Es durchschneide fig. 165 die Ebene $bedef$ den Körper parallel zur Grundfläche. Man ziehe die Gehren CF , DF , cf , df ; so ist aus gleichen Gründen wie vorher Df. $BCF \sim$ Df. bcf , Df. $CDF \sim$ Df. cdf , Df. $DEF \sim$ Df. def , also sind auch die Vielecke $BCDEF$ und $bedef$ selbst ähnlich (33, a) und es kommt dabei nicht auf die Seitenzahl an; daher $BCDEF : bedef = FE^2 : fe^2$ (45, d).

In den ähnlichen Dfn. AFE und Afe ist ferner $FE : fe = AE : Ae$. Geht nun die Senkrechte AM aus A und trifft die Vielecke in M und m , und zieht man ME und me ; so ist $AE : Ae = AM : Am$, daher auch $FE : fe = AM : Am$, folglich $BCDEF : bedef = AM^2 : Am^2$.

Das Gleiche ergibt sich auch beim senkrechten Kegel fig. 166. Es sei der Durchschnitt $bedh \#$ zur Grundfläche $BCDH$. Man ziehe die Achse AM (§. 23, I.), welche den Durchschnitt in M trifft. Es seien ferner AB und AC zwei beliebige Seitenlinien, man ziehe die Halbmesser MB , MC , und die Linien mb , mc . Nun ist

$MB \# mb$, und $MC \# mc$ (54, e), also $\text{Df. } ABM \sim \text{Df. } Abm$, und $\text{Df. } ACM \sim \text{Df. } Acm$, daher $MB : mb = AM : Am$, und $MC : mc = AM : Am$, mithin $MB : mb = MC : mc$; weil aber $MB = MC$ ist, so ist auch $mb = mc$. Es sind aber mb und mc zwei Gerade aus m nach beliebigen Punkten des Durchschnittsumfangs, Daher müssen alle solche Geraden aus m gleich sein, folglich ist der Durchschnitt ein Kreis und der Grundfläche ähnlich.

Endlich ist $BCDH : bedh = BM^2 : bm^2$; in den Dfen. ABM und Abm aber ist $BM : bm = AM : Am$, also $BCDH : bedh = AM^2 : Am^2$.

II. Es seien nun fig. 164 und 167 die Grundflächen beider Körper, nämlich BCD und GHL , so wie ihre Höhen AE und FM gleich; in beiden Körpern seien die Durchschnitte bed und ghl zur Grundfläche parallel, und ihre Durchschnitsabstände vom Scheitel, nämlich Ae und Fm gleich. Dann ist (nach I)

$$BCD : bed = AE^2 : Ae^2 \text{ und}$$

$$GHL : ghl = FM^2 : Fm^2$$

$$\text{also } BCD : bed = GHL : ghl.$$

Wegen der Gleichheit der Vorderglieder sind auch die Hinterglieder gleich, also ist $bed = ghl$. Die Gleichheit dieser Durchschnitte ist nicht von ihrer Form, also auch nicht von der Anzahl der Seitenflächen beider Körper abhängig, gilt deßhalb auch unter gleichen Bedingungen von vielseitigen Pyramiden und Kegeln.

III. Da nun allenthalben der Umfang beider Körper (von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe) in gleicher Entfernung vom Scheitelpunkte gleich ist; so nehmen beide Körper auch gleichen Raum ein, oder sind gleich. — H. f.

62) a. Wird eine Pyramide oder ein Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten; so sind der Durchschnitt und die Grundfläche ähnlich und verhalten sich wie die Quadrate ihrer senkrechten Abstände vom Scheitel.

b. Werden Pyramiden und Kegel von gleicher Höhe und Grundfläche in gleicher Entfernung

vom Scheitel parallel zur Grundfläche geschnitten; so sind die Durchschnittsebenen gleich.

c. Pyramiden und Regel von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

IV. In dem 3seitigen Prisma fig. 168 ziehe man die Gehren AF und EF, und durchschneide dasselbe in der Dreiecksebene ABF; so fällt die 3seitige Pyramide ABCF ab. Zieht man die Gehre BD und schneidet den Körper in der Ebene DFB, so entsteht die 3seitige Pyramide DEFB, und es bleibt noch die 3seitige Pyramide ADFB. Es hat nämlich

die Pyr. ABCF die Grenzflächen ABC, ABF, ACF, BCF
 „ „ ADFB „ „ „ ADF, ADB, AFB, DFB
 „ „ DEFB „ „ „ DEF, DEB, DFB, EFB.

Die erste und 2te Pyramide haben die gleichen Grundflächen ACF und ADF, dann die gleiche Höhe, nämlich eine Senkrechte vom gemeinschaftlichen Scheitel B auf die Seitenfläche ACFD, sind also gleich. Die erste und 3te Pyramide haben einerlei Grundflächen ABC und DEF, und die gleiche Höhe (mit dem Prisma), sind also ebenfalls gleich, folglich sind auch die 2te und 3te, und somit alle 3 Pyramiden gleich.

1. Anm. Die Einerleiheit der Dke. ABC und DEF ergibt sich leicht; denn da die Seitenflächen des Prisma Parallelogramme sind, so ist $AC = DF$, $AB = DE$, und $BC = EF$. — Die Gleichheit der Höhe der ersten und 3ten Pyramide ergibt sich auch noch so: Weil $AC \parallel DF$, und $BC \parallel EF$, so sind auch die Ebenen ABC und DEF $\parallel$, eine Senkrechte zwischen Beiden ist die Höhe beider Pyramiden. —

2. Anm. Was hier von dem schiefen Prisma fig. 168 bewiesen worden ist, läßt sich ebenso von dem senkrechten Prisma fig. 169 darthun.

V. Jede 3seitige Pyramide, wie ABCF fig. 168 und abcf fig. 169, kann als Abschnitt eines 3seitigen Prisma betrachtet werden, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat, und beträgt den 3ten Theil desselben. Da aber alle Pyramiden und Regel von gleicher Grundfläche und Höhe gleich sind (62, c), so ist auch jede Pyramide und jeder Regel der 3te Theil eines 3seitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.

VI. Haben nun 2 Prismen (oder Cylinder) gleiche Grundfläche und Höhe, so nehmen sie den 3fachen Raum zweier Pyramiden (oder Kegel) ein, die mit ihnen gleiche Grundfläche und Höhe besitzen. Da diese Letzteren aber gleich sind, so sind auch jene beiden Prismen (oder Cylinder) gleich.

- 63) a. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in 3 gleiche 3seitige Pyramiden zerlegen.
 b. Jede Pyramide und jeder Kegel beträgt den 3ten Theil eines 3seitigen Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe.
 c. Prismen oder Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

VII. Der Würfel ist die Einheit zur Ausmessung des Körperinhalts, der auch Volumen genannt wird (§. 21).

Der Quadratinhalt der Grundfläche eines rechtwinkligen Parallelopipedums (fig. 170) bestimmt die Anzahl der Würfel-Einheiten für jede einzelne Längeneinheit der Höhe, und eine Bruchzahl der Längeneinheit am Ende der Höhe bestimmt einen eben solchen Bruchtheil jener Anzahl; folglich ist die Grundfläche mit der Höhe zu vervielfachen, um den Inhalt des Körpers zu erhalten.

Wegen No. 63, c gilt die gleiche Berechnung auch für andere Parallelopipedes, für alle Prismen und Cylinder.

VIII. Da die Grundfläche eines Würfels ein Quadrat, und die Höhe dieses Körpers seinen beiden andern Abmessungen gleich ist; so besteht die Anzahl seiner sämtlichen Körpereinheiten in der Kubikzahl seiner Seitenlinie.

IX. Das Produkt aus der Grundfläche in die Höhe stellt bei der Pyramide den Inhalt eines Prisma, und bei dem Kegel den Inhalt eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe vor (No. VII.), es ist also noch der 3te Theil davon zu nehmen (63, b). — H. f.

- 64) a. Der Körperinhalt jedes Prisma und Cylinders gleicht dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe.

- b. Das Volumen eines Würfels gleicht der Kubikzahl seiner Kantenlinie.
 c. Der Körperinhalt einer Pyramide und eines Kegels beträgt den 3ten Theil des Produktes aus der Grundfläche in die Höhe.

X. Abgestumpfte Pyramide. Es bezeichne G die Grundfläche $BCDE$ und g die Fläche $bede$, und P den Inhalt der abgestumpften Pyramide fig. 171. Man verlängere die Kantenlinien bis zum Scheitel A und fälle zu den genannten beiden Flächen die Senkrechte AM , welche die kleinere Fläche in m durchdringt. Nun ist

$$P = \frac{1}{3} \times G \cdot AM - \frac{1}{3} \times g \cdot Am \\ = \frac{1}{3} \cdot (G \cdot AM - g \cdot Am)$$

Hier müssen nun AM und Am durch Linien an der abgestumpften Pyramide selbst ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \text{Es ist aber } AM &= Am + mM, \text{ also} \\ G \cdot AM - g \cdot Am &= G \cdot (Am + mM) - g \cdot Am \\ &= G \cdot Am + G \cdot mM - g \cdot Am \\ &= G \cdot mM + (G - g) \cdot Am \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Es ist jedoch } Am : AM &= Ab : AB = bc : BC, \text{ also} \\ Am \cdot BC &= AM \cdot bc = (Am + mM) \cdot bc \\ &= Am \cdot bc + mM \cdot bc \end{aligned}$$

$$\text{also } Am \cdot BC - Am \cdot bc = mM \cdot bc$$

$$\text{oder } Am \cdot (BC - bc) = mM \cdot bc$$

$$\text{also } Am = \frac{mM \cdot bc}{BC - bc}$$

Dieser Werth, in obige Gleichung eingeführt, gibt

$$\begin{aligned} G \cdot AM - g \cdot Am &= G \cdot mM + (G - g) \times \frac{bc \cdot mM}{BC - bc} \\ &= mM \times \frac{G \cdot BC - G \cdot bc + G \cdot bc - g \cdot bc}{BC - bc} \\ &= mM \times \frac{G \cdot BC - g \cdot bc}{BC - bc} \end{aligned}$$

Hierdurch erhält man endlich aus der ersten Gleichung

$$P = \frac{mM}{3} \times \frac{G \cdot BC - g \cdot bc}{BC - bc}$$

XI. Es ist ferner (62, a) auch $Am^2 : AM^2 = g : G$, also $Am : AM = \sqrt{g} : \sqrt{G}$, also

$$Am \cdot \sqrt{G} = AM \cdot \sqrt{g} = (Am + mM) \cdot \sqrt{g} \\ = Am \cdot \sqrt{g} + mM \cdot \sqrt{g}$$

$$\text{und } Am \cdot \sqrt{G} - Am \cdot \sqrt{g} = mM \cdot \sqrt{g}$$

$$\text{oder } Am \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = mM \cdot \sqrt{g}$$

$$\text{also } Am = \frac{mM \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

Hiedurch erhält man nun aus der frühern Gleichung (unter X)

$$G \cdot AM - g \cdot Am = G \cdot mM + (G - g) \times \frac{mM \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \\ = mM \times \left(G + \frac{(G - g) \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \right) \\ = mM \times \left(G + \frac{(\sqrt{G} + \sqrt{g})(\sqrt{G} - \sqrt{g}) \times \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \right) \\ = mM \times [G + (\sqrt{G} + \sqrt{g}) \times \sqrt{g}] \\ = mM \times (G + \sqrt{G} \cdot g + g)$$

Hiedurch erhält man endlich:

$$P = \frac{mM}{3} \times (G + g + \sqrt{G} \cdot g)$$

XII. Abgestumpfter senkrechter Kegel. Letzte Berechnungsformel gilt auch für den abgestumpften senkrechten Kegel. Bezeichnen D und d die Durchmesser seiner beiden Kreisebenen und C seinen Körperinhalt, h seine Höhe (statt mM), so ist:

$$G = \frac{1}{4} \times D^2 \cdot 3,14 \text{ und } g = \frac{1}{4} \times d^2 \cdot 3,14$$

$$\sqrt{G} \cdot g = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot D^2 \cdot d^2 \cdot 3,1416^2} = \frac{1}{4} \cdot D \cdot d \cdot 3,1416$$

$$\text{folglich } C = \frac{3,1416 \cdot h}{12} \times (D^2 + d^2 + D \cdot d)$$

Man hat also für das Volumen der genannten abgestumpften Körper:

$$65) \text{ a. } P = \frac{mM}{3} \times \frac{G \cdot BC - g \cdot bc}{BC - bc}$$

$$b. P = \frac{mM}{3} \times (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

$$c. C = \frac{3,1416 \cdot h}{12} \times (D^2 + d^2 + Dd)$$

XIII. Die regelmäßigen Körper lassen sich aus so vielen Pyramiden zusammengesetzt denken, als sie Seitenflächen haben. Diese Pyramiden haben gleiche Höhe, und ihre Scheitel laufen in dem Mittelpunkt des Körpers zusammen. Ist eine Seitenfläche = s , die Höhe einer Pyramide = h , ihre Anzahl = n , und die Oberfläche des Körpers = o , so ist der Inhalt einer Pyramide = $\frac{1}{3} \times h \cdot s$, also der Inhalt des regelmäßigen Körpers = $\frac{1}{3} \times h \cdot s \cdot n = \frac{1}{3} \times h \cdot o$.

Der Kugelinhalt wird daher auf gleiche Weise gefunden. Es ist aber $h = \frac{1}{2} d$, und $o = 3,14 \times d^2$, also der Kugelinhalt = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} d \times 3,14 \cdot d^2 = \frac{1}{6} \cdot 3,1416 \times d^3$.

XIV. Der Kugelfegel beträgt einen gleichen Theil von der Kugel, wie die Kugelschale von der Kugeloberfläche, ist also auch ein Drittel des Produkts aus seiner Oberfläche (Kugelschale) in den Halbmesser; mithin ist (nach No. 61, e) der Kugelfegel = $\frac{1}{3} \times 3,14 \cdot d \cdot h \times \frac{d}{2} = \frac{1}{6} \times 3,14 \cdot d^2 \cdot h$.

XV. Der Kugelkeil beträgt einen gleichen Theil von der Kugel, wie der Richtungsw. seiner beiden Halbkreisebenen von 360° . Ist daher k die Kugel, n der genannte Richtungsw. und b der dazu gehörige Bogen eines größten Kreises, und p dieser Kreis selbst, so ist: Kugelkeil : $\frac{1}{6} \cdot 3,14 \times d^3 = n : 360^\circ = b : p = b : 3,14 \cdot d$

$$\text{also Kugelkeil} = \frac{3,1416 \cdot d^3 \cdot n}{6 \cdot 360} = \frac{0,1309 \cdot d^3 \cdot n}{90}$$

$$\text{oder} = \frac{3,14 \cdot d^3 \cdot b}{6 \cdot 3,14 \cdot d} = \frac{1}{6} \times d^2 \cdot b$$

XVI. Der Kugelabschnitt ist der Unterschied zwischen dem Kugelfegel und einem Kegel, dessen Grundfläche mit der des Abschnitts zusammenfällt, und dessen Scheitel im Mittelpunkt der Kugel liegt. Es sei nun

r (= Qm, fig. 163) der Halbmesser seiner Grundfläche,
 h (= QN) seine Höhe; so ist die Grundfläche des zweiten Kegels $= r^2 \cdot 3,14$, seine Höhe $= \frac{1}{2} d - h$, also dieser Kegel selbst $= \frac{1}{3} \times r^2 \cdot 3,14 \times (\frac{1}{2} d - h)$, so-

$$\begin{aligned} \text{nach ist} \\ \text{der Kugelabschnitt} &= \frac{1}{6} \times 3,14 \cdot d^2 \cdot h - \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot r^2 \\ &\quad \times (\frac{1}{2} d - h) \\ &= \frac{1}{6} \times 3,14 \times (d^2 h - d \cdot r^2 + 2 h \cdot r^2) \end{aligned}$$

Außer es ist $h \cdot (d - h) = r^2$

$$\text{oder } d \cdot h - h^2 = r^2$$

$$\text{also } dh = h^2 + r^2$$

$$\text{und } d = \frac{h^2 + r^2}{h}$$

$$\text{hieraus folgt } d^2 = \frac{h^4 + 2 \cdot h^2 r^2 + r^4}{h^2}$$

$$\text{also } d^2 h = \frac{h^4 + 2 \cdot h^2 r^2 + r^4}{h}$$

$$\text{und } d \cdot r^2 = \frac{h^2 r^2 + r^4}{h}$$

$$\text{folglich } d^2 h - d \cdot r^2 = \frac{h^4 + h^2 \cdot r^2}{h} = h^3 + h \cdot r^2$$

Dieser Werth oben eingeführt, gibt :

$$\begin{aligned} \text{Kugelabschnitt} &= \frac{1}{6} \cdot 3,14 \times (h^3 + 3 h \cdot r^2) \\ &= \frac{1}{6} \times 3,14 \cdot h \cdot (h^2 + 3 r^2) \end{aligned}$$

XVII. In der letzten Gleichung läßt sich für r^2 ein anderer Werth einführen (37, b). Es ist nämlich $r^2 = h \times (d - h) = dh - h^2$, also der

$$\begin{aligned} \text{Kugelabschnitt} &= \frac{1}{6} \times 3,14 \cdot h \times (h^2 + 3 dh - 3 h^2) \\ &= \frac{1}{6} \times 3,14 \cdot h^2 \times (3 d - 2 h) \end{aligned}$$

Hiernach haben wir nun folgende Formeln :

- 66) a. Kugelinhalt $= \frac{1}{6} \times 3,1416 \times d^3 = 0,5236 \times d^3$
 b. Kugelfegel $= \frac{1}{6} \times 3,1416 \times d^2 h = 0,5236 \times d^2 h$
 c. Kugelfeil $= \frac{0,1309 \cdot d^2 \cdot n}{90} = \frac{1}{6} \times d^2 b$
 d. Kugelabschnitt $= \frac{1}{6} \times 3,1416 \times h \cdot (h^2 + 3 r^2) = 0,5236 \cdot h \times (h^2 + 3 r^2)$
 e. oder $= \frac{1}{6} \cdot 3,1416 \cdot h^2 \times (3 d - 2 h) = 0,5236 \cdot h^2 \cdot (3 d - 2 h).$

Uebungsaufgaben.

Zu No 64.

1. Eine Grube ist 15' lang, 12' breit, 16' tief; wie viel Kubikfuß Erde wurde aus derselben gegraben?
2. Wie viel Kub.' enthält ein Stein, der 82'' lang, 54'' breit und 18'' dick ist?
3. Wie viel Kubikflaster hat ein Heubehälter, dessen 3 Abmessungen 7' 4'', 8' 6'', und 10' 5'' betragen?
4. Ein Balken ist 12'' breit, 9'' dick und 24' lang; welchen Kubikinhalte hat er?
5. Es soll ein Graben gemacht werden, der 60' lang, oben 24'' und unten 18'' breit, und 4' tief ist; wie viel Kubikflaster Erde müssen ausgeworfen werden?
6. Suche den Kubikinhalte eines Zylinders, der 8'' lang und 3'' dick, oder 15'' hoch und 4'' dick, oder 6' lang und 12'' dick oder 12' hoch und 15'' dick ist?
7. Ein Zylinder von 15' Länge ist zum Theil hohl. Der ganze Durchmesser beträgt 16'', der Durchmesser der Röhre 12''; wie viel Kubikinhalte hat der Körper?
8. Wie viel Kub.', oder Kub.-Klafter enthält ein Würfel, dessen Kante 4', oder 4' 8'', oder 9', oder 10' 4'', oder 15' mißt?
9. Eine Seite in der Grundfläche einer 3seitigen Pyramide mißt 3' 5'', die Höhe der Grundfläche 2' 8'', die Höhe der Pyramide 12'; berechne den Inhalt.
10. Die Grundfläche einer Pyr. ist ein Quadrat, dessen Seite 4' 2'' mißt, und die Höhe des Körpers beträgt 20' 5''; wie viel Kub.' oder Kub.-Klafter enthält er?
11. Die Grundfläche einer Pyr. ist ein Rechteck von 5' Länge und 4' Breite; was ist der Körperinhalt bei einer Höhe von 15'?
12. Ein Kegel ist 8'' hoch, und der Durchmesser seiner Grundfläche beträgt 5''; man sucht den Körperinhalt.
13. Berechne den Inhalt eines Kegels, der 18' 6'' hoch, und dessen Grundflächen-Durchmesser 3' 5'' mißt.

Zu No. 65.

14. An einer abgestumpften 3seitigen Pyramide sei die Grundlinie der Grundfläche = 8', die Höhe derselben 5', die Grundlinie der obern Fläche = 5' und ihre Höhe = 3' 8'', die Höhe des Körpers = 10'; was beträgt der Körperinhalt?

15. An einer abgestumpften vierseitigen Pyr. von 18' Höhe ist die untere Fläche 75'' lang und 35'' breit, die obere 48'' lang und 22½'' breit; man sucht den Kubikinhalt.

16. Eine Grube ist oben 12' lang und 8' breit, unten 9' lang und 6' breit, und 5' tief; wie viel Kub.' enthält sie?

17. An einem abgestumpften Kegel von 15' Höhe betragen die Durchmesser der beiden Kreisebenen 8' und 5'; oder es sei $D = 2'$ $d = 12''$, $h = 3'$; was ist der Kubikinhalt?

18. Wie viel Kub.' Holz faßt ein Baumstamm von 30' Länge, der unten 25'' und oben 18'' dick ist? Wie viel Klafter Holz gibt er, wenn die Scheiter 35'' lang sind?

19. Ein rundes Kamin ist 25' hoch, unten 20'' oben 15'' weit; wie viel Kub.' enthält der innere Raum desselben?

Zu No. 66.

20. Welches ist der Kubikinhalt einer Kugel, wenn ihr Durchmesser 4'', oder 6'', oder 15'', oder 42'' beträgt?

21. Berechne den Inhalt eines Kugelsegels für $d = 16''$, $h = 2''$, oder $d = 18''$, $h = 3''$, oder $d = 28''$, $h = 2'' 5'''$.

22. Was enthält ein Kugelseil, wenn $d = 15''$, $n = 12^0$, oder $d = 24''$, $n = 15^0$, oder $d = 12''$, $b = 3''$, oder $d = 25''$, $b = 5''$ ist?

23. Es soll ein Kugelabschnitt berechnet werden für $h = 3''$, $r = 5''$, oder $h = 8''$, $r = 15''$, oder $h = 12''$, $r = 25''$, oder $h = 15''$, $r = 84''$; oder für $d = 16''$, $h = 2''$, oder $d = 22''$, $h = 3''$, oder $d = 3'$, $h = 5''$, oder $d = 48''$, $h = 8''$.

24. Ein Gewölbe von 6' Durchmesser ist bis auf eine Höhe von 8' zylinderförmig, der folgende Deckel aber hat die Form einer Kugelschale und ist 15'' hoch; wie viel Kubikinhalt hat das ganze Gewölbe?

25. Die größte Tiefe eines Kessels ist 25''; bis auf die Tiefe von 2' Fuß hat er die Form eines abgestumpften Kegels, dessen größere Seite 32'', und dessen kleinere 28'' beträgt; der untere Theil ist eine Kugelschale. Wie viel Kub.' Wasser faßt der Kessel?

26. Ein steinernes Brunnenbecken von der Form einer Kugelschale hat oben einen Durchmesser von 4', und ist 25'' tief; wie viel Kub.' Wasser faßt es? — Wenn es außerdem allenthalben 4'' dick ist; wie viel Kubikinhalt hat seine Steinmasse?

27. Eine Kugel, ein Cylinder und die Grundfläche eines Kegels haben einen gleichen Durchmesser von 4'; die Höhe der beiden Keg-

teren ist ebenfalls 4'; wie verhalten sich alle 3 Körper hinsichtlich ihres Kubikinhaltcs?

28. Die Schüler sollen suchen: wie verhalten sich Prismen überhaupt? — Wie verhalten sie sich bei gleicher Höhe, oder bei gleicher Grundfläche? — Wie verhalten sich in gleicher Weise Zylinder, Pyramiden, Würfel, Kugeln?

Siebenter Abschnitt.

Geometrische Aufgaben.

I. Geometrische Konstruktionen.

1. Einen Punkt zu finden, wenn seine Entfernung von 2 andern bestimmten Punkten gegeben ist.

Aufl. und Beweis ergeben sich aus §. 25, I.

2. Einen W. zu zeichnen, der einem gegebenen W. gleich ist.

Aufl. (fig. 33 und 34.) Es sei bac der gegebene W. Aus a schneide $ab = ac$ ab, mache $AB = ab$, beschreibe aus A mit dem Halbmesser ab und aus B mit dem Halbmesser bc Bogen, die sich in C schneiden, und ziehe AC ; so ist W. $CAB = W. cab$. — (Der Beweis liegt in §. 26, III.)

Anm. Man kann auch den W. bac mit dem Transporteur messen und an A hintragen.

3. Einen gegebenen W. (ABC fig. 172) zu halbiren.

Aufl. Aus B schneide $BA = BC$ ab, bestimme aus A und C mit gleichem Halbmesser den Punkt D (Aufg. 1) und ziehe BD ; so ist W. ABC durch BD halbirt.

Beweis. Ziehe AD und CD ; dann ist $ABCD$ eine Halbraute, also W. B von BD halbirt. (No. 19, b.)

4. Einen Kreisbogen zu halbiren. (ABC fig. 173.

Aufl. Aus den beiden Enden A und C beschreibe mit gleichem Halbmesser Bogen, die sich in D und E

schneiden, und ziehe DE; so wird diese Gerade den Bog. ABC halbiren.

Bew. Ziehe die Sehne AC, und die Geraden AD, CD, AE, CE. Dadurch entsteht die Raute ADCE; also ist AC, und deßhalb auch Bog. ABC halbirt (23, a).

Anm. Wären nur je zwei sich schneidende Halbmesser gleich, so wäre das Viereck eine Halbraut, also AC ebenfalls halbirt.

5. Eine Gerade zu halbiren, oder auf ihrer Mitte eine Senkrechte zu errichten. (fig. 174.)

Aufl. Aus den Enden A und B der Geraden AB beschreibe über und unter derselben mit gleichem Halbmesser Bogen, die sich in D und E schneiden, und ziehe DE; so muß Letztere die Gerade AB halbiren und zu ihr senkrecht sein. — Bew. No. 18, b.

Anm. Wie bei Aufg. 4.

6. Aus einem bestimmten Punkte innerhalb einer Geraden eine Senkrechte zu errichten.

1. Aufl. (fig. 175.) Man schneide in der Geraden AB von dem gegebenen Punkte C aus $CM = CN$ ab, bestimme aus M und N mit gleichem Halbmesser den Punkt D; so ist die Gerade CD die verlangte Senkrechte. — (Bew. No. 13, b.)

2. Aufl. (fig. 176.) Von C aus beschreibe mit einem Halbmesser CD einen Bogen, in demselben bezeichne mit dem gleichen Halbmesser aus D den Punkt M und aus M den Punkt N, halbire den Bogen MN (wozu hier nach Aufg. 4 nur ein Punkt E zu suchen ist); so ist die Gerade CE senkrecht zu AB.

Bew. Der $\angle DCE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ (No. 21, f und 26, f).

3. Aufl. (fig. 177.) Aus c in ab schneide 5 gleiche Theile ab, bestimme aus c mit dem Halbmesser ce und aus d mit dem Halbmesser cf den Punkt g; so ist die Gerade cg senkrecht zu ab.

Bew. $cd^2 + cg^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, also $cd^2 + cg^2 = dg^2$, somit cg senkrecht zu ab.

7. Im Endpunkte einer Geraden eine Senkrechte zu errichten.

1. Aufl. (fig. 178.) Es sei A der festgesetzte Punkt in AB. Nimm noch auf AB einen beliebigen Punkt F an, bestimme aus A und F mit gleichem Halbmesser den Punkt E, ziehe FE in unbestimmter Länge über E hinaus, mache $ED = EF$; so ist eine Gerade DA senkrecht zu AB. — (Bew. No. 14, c.)

2. und 3. Aufl. wie bei Aufg. 6.

8. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf dieselbe eine Senkrechte zu fallen.

1. Aufl. (fig. 179.) Es seien gegeben die Gerade AB und der Punkt C. Wähle in AB zwei Punkte E und F, bestimme aus E mit dem Halbmesser EC und aus F mit dem Halbmesser FC den Punkt D; so ist die Gerade CD die verlangte Senkrechte. — Bew. No. 19, c.

Anm. Die Punkte E und F kann man auch aus C mit gleichem Halbmesser festsetzen.

2. Aufl. (fig. 180.) Wähle in AB einen Punkt E, beschreibe aus E mit dem Halbmesser EC den Bogen CFD, und bestimme aus F mit dem Halbmesser FC in dem genannten Bogen den Punkt D; so ist CD senkrecht auf AB. — Bew. No. 23, d.

Anm. Die Aufg. 6, 7, 8 können auch auf mechanischem Wege mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks von Holz oder eines Winkelhafens gelöst werden.

9. Durch einen bestimmten Punkt zu einer Geraden eine Parallele zu ziehen.

1. Aufl. (fig. 181.) Es sei M der Punkt und AB die Gerade. Durch M ziehe eine Linie MD, welche die AB schneidet, mache den W. LMN oder den W. DMP = W. BDM; so ist der durch M nach N und P gehende Schenkel # mit AB. — Bew. No. 4, b.

2. Aufl. (fig. 182.) In AB wähle 2 beliebige Punkte D und E, und bestimme aus E mit dem Halbmesser DM und aus M mit dem Halbmesser DE den

Punkt N; so ist die Gerade $MN \parallel AB$. — Bew. No. 17, d.

3. Aufl. (fig. 183 und 184.) Aus einem Punkte C in AB (oder zwischen AB und M) beschreibe mit dem Halbmesser CM einen Bogen, dessen beide Enden auf AB ruhen; mache den Bog. $EN = \text{Bog. DM}$ (d. h. bestimme aus E mit der Länge DM den Punkt N): so ist die Gerade $MN \parallel AB$. — Bew. Umkehrung von No. 26, c.

4. Aufl. (fig. 185.) Durch M ziehe eine Gerade FP; bestimme aus P mit dem Halbm. PF in AB den Punkt H, mache $PN = PM$; so ist die Gerade $MN \parallel AB$. — Beweis No. 31, d.

Anm. Obige Aufgabe kann auch auf mechanische Weise gelöst werden vermittelt eines Parallel-Lineals, oder vermittelt zweier Dreiecke von Holz, die mit einander ein Parallelogramm bilden.

10. Ein Dreieck zu zeichnen, wenn seine 3 Seiten gegeben sind.

Aufl. (Fig. 186.) Die Seiten seien ab, ac, bc . Mache $AB = ab$, bestimme aus A mit dem Halbmesser ac und aus B mit dem Halbmesser bc den Punkt C, ziehe AC und BC; dann ist ABC das verlangte Df.

Bew. Das Df. ABC enthält die gegebenen Seiten; muß also (nach No. 8, a) das durch sie bestimmte, somit das verlangte Df. sein.

Anm. Der Schüler zeichne hienach ein gleichschenkliges und ein gleichseitiges Df.

11. Ein Df. aus 2 Seiten mit dem eingeschlossenen W. zu bilden.

Aufl. (Fig. 186.) Es seien ab und ac die Seiten, m der W. — Mache $AB = ab$, $\angle A = \angle m$, und $AC = ac$, ziehe BC; so entsteht das verlangte Df.

Bew. Das Df. ABC enthält die gegebenen Stücke, u. s. w.

Anm. Der W. kann, statt vorgezeichnet, auch in Graden angegeben sein. — Auf gleiche Weise zeichnet man ein gleichschenkliges Df., wenn der W. am Scheitelpunkt und die ihn einschließenden Sei-

ten, und ein rechtwinkliges Dk., wenn seine beiden Katheten gegeben sind.

12. Ein Dk. zu verfertigen aus einer Seite und den beiden anliegenden W.

Aufl. (fig. 186.) Es sei ab die Seite, m und n seien die anliegenden W. — Mache $AB = ab$, W. $A = m$, W. $B = n$; verlängere die Schenkel der W. A und B , bis sie in C sich treffen. — Bew. wie vorher.

Anm. Ebenso beschreibt man ein gleichschenkliges Dk., wenn die Grundlinie mit dem anliegenden W. gegeben ist, und ein rechth. Dk., wenn eine Kathete und der Hypotenusenw. an ihr gegeben sind.

13. Ein Dk. zu beschreiben mit einer Seite, einem anliegenden und einem gegenüberliegenden W.

1. Aufl. (fig. 186.) Es sei ab die Seite, m der anliegende und p der gegenüberliegende W. — Mache $AB = ab$ und W. $A = W. m$; trage neben p den W. m , verlängere DE nach F , und mache W. $B =$ dem eben entstandenen W. n ; verlängere die Schenkel der W. A und B , bis sie in C sich treffen.

Bew. Weil $A = m$, $B = n$, so ist $C = p$; das Dk. ABC enthält also die gegebenen Stücke u. s. w.

1. Anm. Wenn die W. m und p in Graden angegeben sind, so zählt man ihre Summe von 180° ab, und trägt den Rest nach B hin.

2. Anm. Wie verfährt man, wenn für das gleichschenklige Dk. die Grundlinie und der W. am Scheitelpunkt gegeben sind?

2. Aufl. Mache $AB = ab$, $A = m$, trage an einen Punkt G des Schenkels AC den W. $x = p$, und ziehe aus B die Linie $BC \# GH$.

Bew. $AB = ab$, W. $A = W. m$; und weil $BC \# GH$, so ist W. $C = W. x = W. p$, also u. s. w.

14. Ein gleichschenkliges Dk. zu beschreiben, wenn seine Grundlinie und Höhe gegeben sind. (fig. 187.)

Aufl. Die Grundlinie sei ef , die Höhe gh . Mache

$EF = ef$, errichte in der Mitte von EF die Senkrechte $GH = gh$, ziehe EG und FG .

Bew. Die Df. EGH und FGH sind einerlei (No. 9, b), also $EG = FG$; das Df. EFG enthält auch die gegebenen Stücke, also u. f. w.

15. Ein gleichseitiges Df. von bestimmter Höhe zu zeichnen.

Aufl. (fig. 188.) Auf einer Geraden de errichte eine Senkrechte $ox =$ der gegebenen Höhe; schneide ein Stück xp ab und bestimme aus p mit einem Halbmesser $= 2 \cdot px$ in der Senkrechten den Punkt q ; ziehe aus o die Linie $om \# pq$, mache $mn = mo$, und ziehe no .

Bew. Weil $pq = 2 \cdot px$, so ist im rechth. Df. pqx der W. $q = 30^\circ$ (No. 14, e); und weil $mo \# pq$, so ist auch W. $mox = 30^\circ$, also W. $omx = 60^\circ$; da nun $mn = mo$, so ist W. $mno =$ W. $mon = 60^\circ$, also das Df. gleichseitig. Da es die bestimmte Höhe hat, so ist es das verlangte Df.

Anm. Man kann auch unmittelbar bei o mit Hilfe des Transports den W. $mox = 30^\circ$ hintragen u. f. w.

16. Ein rechtwinkliges Df. zu bilden aus der Hypotenuse und einer Kathete.

Aufl. (fig. 50.) Ziehe eine Gerade DE von unbestimmter Länge, errichte darauf die Senkrechte $DF =$ der gegebenen Kathete, bestimme aus F mit einem Halbmesser $=$ der gegebenen Hypot. den Punkt E , und ziehe FE . — (Bew. wie Aufg. No. 10.)

17. Ein rechtwinkliges Df. zu beschreiben, wenn die Hyp. und eine Kathete, so wie die Lage der Katheten und der Treffpunkt beider Katheten bestimmt sind. (fig. 189.)

Aufl. ab sei die Kathete mit bestimmter Lage und a der Treffpunkt beider Katheten. Bestimme aus a und b mit einem Halbmesser $=$ der halben Hypot. den Punkt m , beschreibe aus m mit demselben Halbmesser einen Kreis, durch b und m ziehe bc , dann ziehe ac ; so ist abc das verlangte Df.

Bew. Das Df. abc ist bei a rechtwinklig (No. 25, c); weil $bm = mc$ die halbe Hyp., so ist bc die gegebene Hyp.; das Df. enthält die gegebenen Stücke u. s. w.

18. Ein Parallelogramm zu beschreiben: a) aus 2 Seiten mit dem eingeschlossenen W., b) aus 2 Seiten und der von ihnen eingeschlossenen Gehre, c) aus 2 Seiten und der Höhe.

Aufl. a) (fig. 66.) Mache $AD =$ der einen Seite, $W. A =$ dem bestimmten W., dann $AB =$ der zweiten Seite; suche endlich den Punkt C (nach Aufg. 9 Aufl. 2); ziehe BC und DC . — Bew. No. 17, d.

Anm. Ebenso zeichnet man das Rechteck, die Raute und das Quadrat.

b) (fig. 66.) Mache $AD =$ der einen Seite, suche aus A mit einem Halbmesser $=$ der andern Seite und aus B mit einem Halbmesser $=$ der Gehre den Punkt C ; im Uebrigen wie vorher.

c) (fig. 117.) Auf einer Geraden errichte die Senkrechte $ed =$ der Höhe, aus d suche mit einem Halbmesser $=$ der einen Seite den Punkt a , mache $ab =$ der andern Seite; im Uebrigen wie vorher.

Uebungsaufgaben.

- a. Ein Quadrat zu beschreiben aus seiner Gehre.
- b. Ein Trapezoid zu beschreiben aus den in No. 10, a und No. 11, a angegebenen Stücken.
- c. Ein Trapez zu beschreiben: 1. aus seinen 4 Seiten; 2. aus den 2 Parallelen, einer Nichtparallelen und einem W. an derselben; 3. ein gleichschenkliges Trapez zu bilden aus seinen gegebenen Seiten.
- d. Eine Halbraute zu zeichnen aus 2 ungleichen Seiten und einem W., oder aus 2 ungleichen Seiten und einer Gehre.
- e. Ein Fünfeck und Sechseck zu zeichnen nach den in No. 10 und 11 lit. b und c angegebenen Bestimmungsstücken.
- f. Ein ordentliches Fünfeck oder Sechseck zu beschreiben: 1. aus der Seite, 2. aus dem Winkelhalbmesser, 3. aus dem Seitenhalbmesser — mit Hilfe des Transporteurs. (No. 21, e und f.)

Anm. zu lit. f. 1. Ist die Seite gegeben: so trage an ihre beiden Endpunkte den halben Umfangsw. des zu bildenden Vielecks;

beschreibe aus dem Begegnungspunkte der Schenkel mit deren Länge (als Halbmesser) einen Kreis, trage dann die gegebene Seite in diesem Kreise herum. — 2. Ist der Winkelhalbmesser gegeben: so zeichne einen $W.$ = dem Mittelpunktsw. des zu beschreibenden Vielecks; mache dessen Schenkel = dem gegebenen Winkelhalbmesser; beschreibe aus der Winkelspitze mit jenem Halbmesser einen Kreis, und trage in demselben die Weite der Schenkelpunkte herum. — 3. Ist der Seitenhalbmesser gegeben: so mache ebenfalls einen $W.$ = dem Mittelpunktsw. des zu zeichnenden Vielecks, halbire ihn, mache die Halbierungslinie = dem gegebenen Seitenhalbmesser, errichte in seinem Ende eine Senkrechte, welche die Schenkel jenes $W.$ trifft; beschreibe aus der Winkelspitze mit der so bestimmten Schenkellänge einen Kreis und trage in demselben die Weite der Schenkelpunkte herum.

g. Im ungleichseitigen $\Delta k.$ einen Punkt zu finden, welcher von den Seiten desselben gleich weit absteht.

h. Im ungleichseitigen $\Delta k.$ einen Punkt zu finden, welcher von den Winkelspitzen gleich weit absteht.

19. Den Mittelpunkt eines Kreises oder Kreisbogens zu finden.

1. Aufl. (fig. 113.) Ziehe eine Sehne AB , errichte in ihrer Mitte eine Senkrechte CD zu beiden Seiten bis an den Umfang, halbire CD ; so ist M der gesuchte Mittelpunkt. — (Bew. No. 23, e.)

2. Aufl. (fig. 78.) Ziehe 2 Sehnen AB und AC , errichte in der Mitte von jeder eine Senkrechte DM und EM ; so ist der Treffpunkt beider Senkrechten der Mittelpunkt des Kreises. — (Bew. No. 23, e.)

3. Aufl. (fig. 88.) Schneide aus A 2 gleiche Bogen AB und AD ab, halbire den Rest des Umfangs in C , ziehe und halbire AC ; so ist M der Kreismittelpunkt. — (Bew. Seite 80, XII.)

20. Durch 3 in verschiedener Richtung liegende Punkte einen Kreis zu ziehen. (fig. 78.)

Aufl. Die Punkte seien A, B, C . Ziehe die Sehnen AB und AC ; errichte in ihrer Mitte die Senkrechten DM und EM , beschreibe aus ihrem Treffpunkt mit dem Halb-

messer MA (oder MB , oder MC) einen Kreis. — Den Beweis suche der Schüler.

Anm. Diese Aufg. kann auch so gestellt werden: a. Es sind 3 Punkte in verschiedener Richtung gegeben; man soll einen 4ten Punkt suchen, der von ihnen gleich weit absteht; oder b. um ein Df. einen Kreis zu beschreiben.

Uebungsaufgaben.

a. Im Kreise ein ordentliches Df., Sechseck, Zwölfeck zu beschreiben. (No. 26, f.)

b. Im Kreise ein Rechteck, ein Quadrat, ein ordentliches Achteck zu beschreiben. (No. 26, d.)

c. Im Kreise ein ordentliches Fünfeck und Zehneck zu beschreiben. (No. 21, e.)

d. Um ein Rechteck, oder ein Quadrat, oder um jedes ordentliche Vieleck einen Kreis zu beschreiben.

21. An einen Punkt des Kreisumfangs eine Tangente zu ziehen.

1. Aufl. (fig. 92.) Der Punkt sei A . Ziehe den Halbmesser MA und errichte in A eine Senkrechte; so ist Letztere die verlangte Tangente. — (Bew. No. 28, a.)

2. Aufl. (fig. 190.) Der Punkt sei a . Bestimme aus a mit dem Halbmesser am im Umfang den Punkt c , ziehe mc über den Umfang hinaus, mache $cd = cm$, ziehe da ; so ist Letztere die verlangte Tangente.

Bew. Ziehe am und ac . Das Uebrige folgt aus No. 14, c und No. 28, a.

3. Aufl. (fig. 99.) Der Punkt im Kreise von m sei A . Bestimme nun aus A und m mit gleichem Halbmesser den Punkt M , beschreibe aus M mit dem Halbmesser Mm (oder MA) einen Kreis, ziehe den Durchmesser mMB , dann BA ; so ist Letztere die verlangte Tangente. — (Bew. Nr. 30, c.)

22. Von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Tangente an seinen Umfang zu ziehen.

1. Aufl. Der Punkt sei a fig. 191. Bestimme aus a mit dem Halbmesser am und aus m mit dem Durch-

messer des Kreises den Punkt b , ziehe bm , dann ac ; so ist Letztere die gesuchte Tangente.

Bew. Man denke hinzu ab und am ; so ist ac senkrecht zu bm (No. 13, b), also eine Tangente.

2. Aufl. (fig. 192.) Der Punkt außer dem Kreise von M sei a . Ziehe aM , beschreibe aus deren Mitte m mit dem Halbmesser ma einen Kreis, der den vorigen in b und c schneidet, und ziehe ab oder ac ; so ist jede dieser Letztern eine Tangente.

Bew. Zieht man noch Mb und Mc ; so sind in Bezug auf den Kreis von m die $W.$ bei b und c $W.$ im Halbkreise, also $= 90^\circ$ (No. 25, c); folglich u. s. w.

23. Zwischen die Schenkel eines $W.$ einen Kreis zu beschreiben, der dieselben an bestimmter Stelle in gleichem Abstände von der Winkelspitze berührt. (fig. 95.)

Aufl. Der $W.$ sei A und die bestimmten Punkte seien b und c , so daß $Ab = Ac$ ist. Errichte in b und c Senkrechte, und beschreibe aus ihrem Treffpunkte m mit dem Halbmesser mb oder mc einen Kreis; so ist er der verlangte.

Bew. Die rechth. Dre. Abm und Acm sind einerlei, also $mb = mc$; somit trifft der Kreis die Punkte b und c , berührt sie aber bloß nach No. 28, a .

Anm. Sind die Punkte b und c nicht bestimmt, also die Aufg. nur allgemein gestellt, so halbirte man den $W.$ A , fällt aus einem Punkte m der Halbirungslinie Senkrechte auf die 2 Schenkel, und beschreibt dann mit mb oder mc den Kreis.

24. Einen Kreis in oder um ein ordentliches Vieleck zu beschreiben.

Aufl. Der Kreis und das ordentliche Vieleck haben einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt. Im ersten Fall gebraucht man daher den Seitenhalbmesser, im andern Fall aber den Winkelhalbmesser des Vielecks.

25. Um einen Kreis ein ordentliches Vieleck zu beschreiben.

Aufl. Man beschreibt das ordentliche Vieleck zuerst

in den Kreis, legt dann an die Treffpunkte der Seiten und der Kreislinie Tangenten, und verlängert dieselben, bis sie sich begegnen.

26. Zwei Kreise von bestimmten Halbmessern zu beschreiben, so daß sie sich außerhalb oder innerhalb berühren.

Aufl. Sie ergibt sich aus No. 30, a, fig. 96 und 97.

27. Drei Kreise von bestimmten Halbmessern zu zeichnen, so daß sie sich außerhalb berühren.

Aufl. (fig. 193.) Die Halbmesser seien ad , be , cf . Mache ein Df., worin $AB = ad + be$, $AC = ad + cf$, $BC = be + cf$ ist; beschreibe aus A mit ad , aus B mit be , aus C mit cf Kreise; so werden sich dieselben berühren.

28. Durch 3 Punkte in verschiedener Richtung 3 Kreise zu ziehen, die sich von außen berühren.

Aufl. 1ster Fall. Die 3 Punkte stehen gleich weit von einander ab. Man ziehe zwischen ihnen 3 gl. L., die ein gleichseitiges Df. bilden, und beschreibe aus jedem der 3 Punkte mit einem Halbmesser = der halben Seite einen Kreis.

2ter Fall. Ihre Verbindungslinien bilden ein gleichschenkliges Df. — Man beschreibe aus den Enden der Grundlinie mit einem Halbmesser = der halben Grundlinie 2 Kreise und aus dem Scheitelpunkt mit einem Halbmesser = dem Unterschiede zwischen einer Schenkelseite und der halben Grundlinie den 3ten Kreis.

3ter Fall. Ihre Verbindungslinien bilden ein ungleichseitiges Df. (fig. 194). Auf der größten Seite AB mache $An = AC$, $Bm = BC$, halbiere mn in u , beschreibe aus A mit dem Halbmesser Au , aus B mit dem Halbmesser Bu , aus C mit um Kreise; so werden sich dieselben auf die verlangte Weise berühren.

Bew. Der Schüler suche ihn.

29. Einen Kreis von bestimmtem Halbmesser zu beschreiben, der einen gegebenen Kreis in 2 bestimmten Punkten schneidet.

Aufl. (fig. 98.) Es sei der Kreis von M gegeben, die Durchschnittpunkte seien A und B . Aus A und B bestimme mit dem gegebenen Halbmesser des zu beschreibenden Kreises den Punkt m und beschreibe aus m mit mA einen Kreis. — Bew.

Anm. Hier ist $mA < MA$; es muß daher, weil A und B links von M liegen, auch der Kreis von m links von M fallen. — Ist $mA > MA$, so kann der 2te Kreis nicht nur links, sondern auch rechts von M fallen.

Uebungsaufgabe.

Es ist ein Kreis gegeben; 2 andere Kreise sollen denselben zugleich in den beiden Enden eines Durchmessers schneiden; die Halbmesser derselben sollen a. bloß unter sich, b. auch dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich sein.

30. Eine Gerade in 3 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. (fig. 195.) Die Gerade sei AB . Ziehe aus A (unter einem nicht allzuspitzen $\angle$) die g. $\angle$. AD , mache $AC = CD$, ziehe BD von unbestimmter Länge, mache $DE = DB$, ziehe EC bis nach F , mache $FG = FA$; so ist AB in 3 gleiche Theile getheilt.

Bew. Ziehe DG . Im Δ ADG ist $CF \parallel DG$ (31, b), oder $EF \parallel DG$; weil im Δ BEF aber $BD = DE$, so ist auch $FG = BG$ (31, a); mithin $AF = FG = GB$.

31. Eine Gerade in 5 gleiche Theile zu theilen.

1. Aufl. Die Gerade sei ab (fig. 196). Ziehe aus a (unter einem nicht allzuspitzen $\angle$) die Gerade ac , trage auf sie von a aus 5 gleiche Theile, ziehe cb und mit ihr $\parallel dh, ei, fk, gl$; so theilen diese die ab in 5 gleiche Theile. — Bew. No. 31, a.

Anm. Ist bh richtig gefunden, so kann man von h aus noch 4 solche Theile abschneiden, ohne die andern Parallelen zu ziehen.

2. Aufl. (fig. 197). Trage auf eine Gerade AB

5 gleiche Theile, AD, DE u. s. w.; beschreibe über AB ein gleichseitiges Df. ABC und mache $Ca = Cb = ab$, ziehe endlich CD, CE, CF, CG: so theilen diese die ab in 5 gleiche Theile.

Bew. $Ca : CA = Cb : CB$, also $ab \# AB$, und folglich $ad : aC = AD : AC$. Es ist aber $AC = AB$ und wegen der Aehnlichkeit der Dfe. aCb und ACB auch das Df. aCb gleichseitig, somit $aC = ab$; daher ist $ad : ab = AD : AB = 1 : 5$, demnach $af = \frac{1}{5} ab$. Ebenso läßt sich zeigen, $ae : ab = AE : AB = 2 : 5$, also $ae = \frac{2}{5} ab$ u. s. w.

3. Aufl. (fig. 198.) In a errichte eine Senkrechte und trage auf sie von a aus 5 gleiche Theile bis c und ziehe bc; zu ab $\#$ ziehe de, fg, hi, kl; so ist ab mittelbar in 5 gleiche Theile getheilt.

Bew. Es ist $de : ab = dc : ac = 1 : 5$, also $de = \frac{1}{5} ab$; ferner $fg : ab = fc : ac = 2 : 5$, also $fg = \frac{2}{5} ab$ u. s. w.

Anm. Diese 3 Auflösungen sind bei jeder Anzahl von Theilen anwendbar. — Soll eine Gerade in 6 gleiche Theile getheilt werden, so halbirt man sie zuerst und theilt dann jede Hälfte in 3 gleiche Theile. — Um 8 gleiche Theile zu erhalten, halbirt man die gegebene Gerade, halbirt dann jede Hälfte, wodurch 4 gleiche Theile entstehen, und halbirt endlich noch jedes Viertel derselben. — Ist die Anzahl der Theile eine in Faktoren zerlegbare Zahl, so läßt sich auch folgendes Verfahren anwenden.

32. Eine Gerade in 10 gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Weil $10 = 2 \cdot 5$ ist, so halbire man die zu theilende Gerade MN in P; errichte in M und N die Senkrechten ML und NE; trage auf jede derselben 5 gleiche Theile, verbinde die gleichvielften Theilpunkte durch Linien, ziehe PL und zu ihr $\#$ dann Ne (oder Ne in die Mitte von EL): dann ist MN mittelbar in 10 gleiche Theile getheilt.

Bew. Wegen No. 31 ist $Aa = \frac{1}{5} NP = \frac{1}{10} MN$; $Bb = \frac{2}{10} MN$; $Cc = \frac{3}{10} MN$; $Dd = \frac{4}{10} MN$; und wegen No. 17 ferner $AF = \frac{1}{2} MN + \frac{1}{10} MN = \frac{6}{10} MN$ u. s. w.

33. Eine Gerade in 3 Theile zu theilen, die sich wie die Zahlen 3, 4, 5 verhalten.

Aufl. (fig. 200). Die Gerade sei MN. Ziehe aus M eine andere Gerade, schneide aus M auf ihr $3 + 4 + 5 = 12$ gleiche Theile ab, so daß Mn an Größe von MN nicht allzusehr abweicht; ziehe Nn, dann Pp und Qq $\perp$ Nn; so ist MN nach der Forderung getheilt.

Bew. Es ist $MP : PQ : QN = Mp : pq : qn = 3 : 4 : 5$ (No. 31, a).

34. Eine Gerade in 3 Theile zu theilen, die sich wie 3 gegebene Linien verhalten.

1. Aufl. Zu theilen sei MN (fig. 201), gegeben seien ab, bc, cd. Aus M ziehe die Gerade Mn, mache auf ihr $Mp = ab$, $pq = bc$, $qn = cd$, ziehe Nn und $\perp$ zu ihr qQ und pP; so ist MN nach Verlangen getheilt. — Bew. No. 31, a.

2. Aufl. (fig. 202.) Auf der Geraden mn mache $mp = ab$, $pq = bc$, $qn = cd$; beschreibe über mn das gleichseitige Df. mno, mache $oM = oN =$ der gegebenen MN und ziehe MN, dann op und oq; so ist MN nach Verlangen getheilt.

Bew. Das Df. MNo ist gleichseitig, also $MN = Mo$ (S. Aufg. 31, Aufl. 2). Sodann ist $MP : mp = oP : op = PQ : pq = oQ : oq = QN : qn$, also $MP : mp = PQ : pq = QN : qn$ oder $MP : PQ : QN = mp : pq : qn = ab : bc : cd$.

35. Zu 3 gegebenen Linien die 4te Proportionallinie zu finden.

Aufl. (fig. 203). Die 3 Linien seien ab, bc, ad und es soll sein $ab : bc = ad : x$. Auf den Schenkeln des spitzen W. A mache $AB = ab$, $BC = bc$, $AD = ad$; ziehe BD und zu ihr $\perp$ CE; so ist DE die gesuchte Linie.

Bew. Es verhält sich $AB : BC = AD : DE$, oder $ab : bc = ad : DE$ (No. 31, a).

Anm. Man versuche eine Auflösung obiger Aufgabe nach No. 37, c.

36. Zu 2 Linien die 3te Proportionallinie zu finden, wenn eine jener beiden die mittlere Proportionale ist.

1. Aufl. (fig. 204). Gegeben seien fg und gh , und es soll sein $fg : gh = gh : x$. Auf der Geraden FL mache $FG = fg$, errichte die Senkrechte $GH = gh$, ziehe FH und senkrecht zu ihr HL ; so ist GL die gesuchte Linie. — Bew. No. 35, b.

2. Aufl. I. Fall. (fig. 205.) Es sei $ab < ac$, und es soll sein $ab : ac = ac : x$. Auf der Geraden AD mache $AB = ab$, errichte in B eine Senkrechte, bestimme in ihr aus A mit dem Halbmesser ac den Punkt C (oder mache $AC = ac$), errichte zu AC in C die Senkrechte CD , welche AD in D schneide: so ist AD die gesuchte Linie.

Bew. In dem rechtwinkligen Δ . ACD ist $AB : AC = AC : AD$ (No. 35, a).

II. Fall. (fig. 206.) Es sei $ab > ac$, und es soll sein $ab : ac = ac : x$. Mache $AB = ab$, halbire AB in E , bestimme aus A mit ac und aus E mit EB den Punkt C , ziehe CD senkrecht zu AB : so ist AD die verlangte Linie.

Bew. Zieht man EC und BC ; so ist das Δ . ACB rechtwinklig (No. 14, c), daher $AB : AC = AC : AD$ (No. 35, a).

Anm. Aus E hätte man auch mit dem Halbmesser EA einen Halbkreis ziehen können. — Wie unterscheidet sich der 2te Fall wesentlich vom ersten? Wie unterscheiden sich diese beiden Auflösungen von der ersten? Welche dieser 3 Auflösungen ist die einfachste? — Läßt sich obige Aufg. nicht auch nach No. 37, d lösen?

37. Zu 2 Linien ihre mittlere Proportionale zu finden.

1. Aufl. (fig. 204.) Gegeben seien fg und gl , und es soll sein $fg : x = x : gl$. Auf einer Geraden mache $FG = fg$ und $GL = gl$, errichte in G eine Senkrechte, bestimme aus der Mitte m von FL mit dem Halbmesser mF ihre Länge in H ; so ist GH die verlangte Gerade. — (Bew. No. 14, c und No. 35, b.)

2. Aufl. (fig. 206.) Gegeben seien ab und ad . Mache $AB = ab$ und $AD = ad$, errichte die Senkrechte

DC, halbiere AB in E, bestimme aus E mit dem Halbm. EA die Länge von DC, und ziehe AC: so ist AC die gesuchte Linie. — (Bew. No. 14, c und No. 35, a.)

Anm. Man versuche, die Aufg. 37 auch nach Anleitung von No. 37, d zu lösen.

38. Durch einen Punkt innerhalb eines W. eine Gerade zwischen dessen Schenkeln zu ziehen, so daß dieselbe in jenem Punkte halbiert ist.

Aufl. (fig. 207.) Es sei gegeben der W. m und der Punkt x. Aus x ziehe $xn \# mq$, mache $np = nm$, ziehe px nach q; so ist pq die gesuchte Gerade.

Bew. Weil $nx \# mq$, so ist $mn : np = qx : xp$; da nun $mn = np$, so ist auch $qx = px$.

39. Ein Df. zu zeichnen, das einem gegebenen Df. ähnlich ist, und dessen Seiten zu denen des Letztern wie 2 bestimmte Zahlen oder Linien sich verhalten.

Aufl. (fig. 208.) Das gegebene Df. sei PQR, und das bestimmte Zahlenverhältniß 5 : 8. — Theile PQ in S so, daß $PS : PQ = 5 : 8$ ist; ziehe $ST \# QR$, mache $ps = PS$ und bilde über ps das Df. pst einerlei mit dem Df. PST; so ist pst das verlangte Df.

Bew. Weil $ST \# QR$, so ist Df. PST $\sim$ Df. PQR; aber Df. PST $\cong$ Df. pst, also auch Df. pst $\sim$ Df. PQR. Weil ferner $PS : PQ = 5 : 8$, und $PS = ps$, so ist $ps : PQ = 5 : 8 = pt : PR = st : QR$.

Anm. Ist das Verhältniß der Seiten durch Linien bestimmt, z. B. $Pu : Px$; so sucht man zu Pu, Px, PQ die 4te Proportionalinie, indem man $uS \# xQ$ zieht, u. s. w.

40. Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen Blf. ähnlich ist, und dessen Seiten zu denen des Letztern wie 2 bestimmte Zahlen oder Linien sich verhalten.

1. Aufl. (fig. 209.) Gegeben sei das Fünfeck ABCDE, und es soll sein $x : AE = AF : AG$. — Suche die 4te Proportionallinie zu AE, AF, AG; sie

ist AH . Mache nun $ae = AH$, ziehe BE und CE ; trage an ae den $W.$ $bae = W. BAE$, und den $W.$ $aeb = W. AEB$ und vollende das $Df.$ abe ; an be trage den $W.$ $cbe = W. CBE$, und den $W.$ $bec = W. BEC$ und vollende das $Df.$ bce ; an ce trage den $W.$ $dce = W. DCE$, und den $W.$ $ced = W. CED$ und vollende das $Df.$ cde : so ist $abcde$ das gesuchte Fünfeck.

Bew. Die $Df.$ ABE und abe , BCE und bce , CDE und cde haben der Auflösung zufolge gleiche $W.$, sind also ähnlich; daher sind auch die Fünfecke selbst ähnlich (No. 33, a). Weil $ae : AE = AF : AG$, so haben auch die entsprechenden übrigen Seiten dieses Verhältniß.

Anm. Die $W.$ aeb , bec , ced kann man unmittelbar nach einander antragen, wodurch sich das Geschäft vereinfacht.

2. Aufl. (fig. 210.) Gegeben sei das Fünfeck $ABCDE$, und es soll sein $x : AB = pq : PQ$. — Mache eine Gerade $AM = PQ$, dann $Ma = pq$, ziehe MB , MC , MD , ME , dann $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, $de \parallel DE$, und ($ae \parallel AE$ oder) verbinde die Punkte a und e : so ist $abcde$ das gesuchte Fünfeck.

Bew. Die beiden $Blk.$ haben gleiche $W.$ (No. 4, f). — Ferner sind je 2 $Df.$, die bei M einen gemeinschaftlichen $W.$ haben, der Parallelen wegen ähnlich. Es ist daher $AB : ab = MA : Ma = MB : Mb = BC : bc = MC : Mc = CD : cd = MD : Md = DE : de = ME : Me = EA : ea$, folglich $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea = MA : Ma = PQ : pq$.

1. Anm. Der Punkt M kann auf gleiche Weise auch im Vieleck selbst genommen werden, wie fig. 211; das Verfahren bleibt im Uebrigen ganz dasselbe.

2. Anm. Ist aber die Entfernung des Punktes M von $A = PQ$ für die Zeichnung nicht passend; so suche man zu AB , PQ und pq die 4te Proportionale ab , ziehe dann in schieflicher Entfernung $ab \parallel AB$, ziehe ferner durch A und a , so wie durch B und b Gerade, die sich in einem Punkte treffen; von diesem Treffpunkte ziehe man Gerade nach C , D , E , und mache dann $bc \parallel BC$ u. s. w.

3. Aufl. (fig. 212.) Gegeben sei das Sechseck $ABCDEF$, und es soll sein $x : AF = Ap : AP$. —

Suche die 4te Proportionale Af; ziehe die Geraden AC, AD, AE, dann fe # FE, ed # ED, dc # DC, cb # CB; so entsteht das verlangte Sechseck Abcdef.

Bew. Die beiden Sechsecke haben den W. A gemeinsam, und wegen der Parallelen die übrigen W. gleich. Je zwei Df., die bei A einen gemeinschaftlichen W. haben, sind ähnlich (31, e), daher haben alle Seiten der beiden Vielecke, wie sich leicht zeigen läßt, das gleiche Verhältniß, nämlich wie $Af : AF = Ap : AP$; folglich sind beide ähnlich.

1. Anm. Die Figur Abcdef läßt sich prüfen. Man sucht die 4te Proportionale zu AB, AP, Ap; ist dieselbe = Ab, so ist die genannte Figur richtig. — Ebenso kann man bei den vorigen Auflösungen verfahren.

2. Anm. Ist das Verhältniß der Seiten beider Vielecke in Zahlen angegeben, so hat man aus einer Seite der gegebenen Figur mittelst des Zahlenverhältnisses bloß die entsprechende Seite der zu beschreibenden Figur zu suchen; im Uebrigen bleibt das Verfahren bei jeder Auflösung der Aufg. 40 unverändert.

II. Verwandlung der Figuren.

41. Ein ungleichseitiges Df. in ein rechtwinkliges oder gleichschenkliges über derselben Grundlinie zu verwandeln (fig. 213).

a. Aufl. Gegeben sei das Df. ABC. Errichte in A eine Senkrechte, ziehe CD # AB, dann BD; so ist ABD das verlangte Df. — Bew. No. 39, b.

b. Aufl. Errichte in der Mitte von AB die Senkrechte FE, ziehe CE # AB, dann AE und BE; so ist ABE das verlangte Df. — Bew. No. 39, b.

42. Ein Df. über derselben Grundlinie in ein anderes zu verwandeln, dessen zweite Seite eine bestimmte Lage hat.

Aufl. (fig. 214.) Gegeben sei das Df. abc; eine Seite des andern Dfs. soll nach ad fallen. — Ziehe cd # ab, dann bd; so ist abd das verlangte Df. — Bew. No. 39, b.

Anm. Statt der Lage von ad kann auch der W. bad gegeben

sein. Dann heißt die Aufg.: ein Df. über derselben Grundlinie in ein anderes mit gegebenem W. an ihr zu verwandeln.

43. Ein Df. in ein anderes mit gegebener Grundlinie zu verwandeln, dessen 2te Seite eine bestimmte Lage hat (fig. 215).

1. Aufl. Zu verwandeln sei das Df. ABC; gegeben sei die Grundlinie ac und die Lage von ab. — Ziehe die Höhe CD, suche zu AB, CD, ac die 4te Proportionale, so daß $x : CD = AB : ac$; mache die Senkrechte $cd =$ der gefundenen Linie, ziehe $bd \# ac$, dann bc ; so ist abc das verlangte Df.

Bew. Weil $cd : CD = AB : ac$, so ist $ac \cdot cd = AB \cdot CD$, also auch $\frac{1}{2} \times ac \cdot cd = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$.

2. Aufl. Die Höhe des Dfs. über ac sei x; dann muß $\frac{1}{2} \times ac \cdot x = \frac{1}{2} \times AB \cdot CD$ sein, daher

$x = \frac{AB \cdot CD}{ac}$. Man berechne nun x, errichte dann die Senkrechte $cd = x$ u. s. w.

Anm. Es sei z. B. $AB = 360'$, $CD = 186'$, $ac = 320'$; so ist $cd = \frac{360 \cdot 186}{320} = 209' 2'' 9'''$.

44. Ein Df. in ein anderes mit gegebener Grundlinie zu verwandeln, das mit jenem einen W. gemeinschaftlich hat.

Aufl. (fig. 216.) Das Df. MNP sei zu verwandeln, die neue Grundlinie sei Mn, und der gemeinschaftliche W. M. — Ziehe nP, dann $Np \# nP$, endlich np; so ist Mnp das verlangte Df.

Bew. Es ist Df. noN = Df. poP (No. 39, c); also Df. MNP = Vf. MnoP + Df. nNo = Vf. MnoP + Df. Pop = Df. Mnp.

1. Anm. Die beiden Aufl. von Aufg. 43 lassen sich hier ebenfalls anwenden.

2. Anm. Wäre Mnp zu verwandeln in ein Df. mit der Grundlinie MN und dem W. M; so ziehe man Np, zu ihr $\# nP$, dann NP. — Beweis wie vorher.

45. Ein Df. in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln, dessen eine Seite eine bestimmte Lage hat.

1. Aufl. (fig. 215.) Zu verwandeln sei Df. ABC, gegeben die Höhe cd und die Lage von ab. — Man ziehe die Senkrechte cd, suche die 4te Proportionale zu cd, CD, AB, so daß $x : AB = CD : cd$, mache $ac =$ der gefundenen Linie, ziehe $db \# ac$, endlich bc.

Bew. wie bei Aufg. 43, Aufl. 1.

2. Aufl. Die Grundlinie des Dfs. von der Höhe cd sei x; dann muß $\frac{1}{2} x \cdot cd = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ sein, daher $x = \frac{AB \cdot CD}{cd}$. Man berechne nun x, mache $ac = x$, errichte die Höhe cd, mache $db \# ac$, ziehe bc; so erhält man das Df. abc.

Anm. Es sei z. B. $AB = 400'$, $CD = 306'$, $cd = 360'$, also $ac = \frac{400 \cdot 306}{360} = 340'$.

46. Ein Df. in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln, das mit jenem einen W. gemein hat (fig. 217).

Aufl. Zu verwandeln sei das Df. ABC, die Höhe des andern sei BH, und der gemeinschaftliche W. B. — Errichte die Senkrechte BH, ziehe $ch \# AB$, dann Ac und zu ihr $\# Ca$, endlich ziehe ac; so ist aBc das verlangte Df.

Bew. Es ist Df. Aae = Df. Cce (39, c), also $ABce + Aae = ABce + Cce$, oder Df. aBc = Df. ABC (39, b).

Anm. Hier lassen sich auch noch die beiden Auflösungen von Aufg. 45 anwenden. — Obige Aufg. könnte auch so gestellt werden: Das Df. ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze in c fällt.

47. Ein Df. in ein gleichhohes Parallelogramm mit bestimmtem W. zu verwandeln.

Aufl. (fig. 218.) Gegeben sei das Df. FGH und W. u. — Halbire FG in I, mache W. KIG = W. u

und $GL \# IK$, dann $HL \# FG$; so ist $IKLG$ das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. hat nur die halbe Grundlinie des Dfs. FGH , aber mit ihm gleiche Höhe, also ist es ihm gleich; auch hat es den vorgeschriebenen W .

1. Anm. Die gleiche Aufg. ist gelöst in fig. 219, wo aber das Prllgrm. $GIKH$ den W . G und die Seite GH mit dem Df. gemein hat; dann in fig. 220, wo die Dreiecksseite FH Gehre des Prllgrms. ist; ferner in fig. 221, wo die Seite IK durch einen bestimmten Punkt der Dreiecksseite GH geht.

2. Anm. Auf gleiche Weise wird das Df. in ein Rechteck verwandelt, indem man den W . des Prllgrms. $= 90^\circ$ macht.

48. Ein Df. in ein Prllgrm. mit der gleichen Grundlinie und einem bestimmten W . an derselben zu verwandeln.

Aufl. (fig. 222.) Gegeben sei das Df. abc , und für das Prllgrm. der W . x . — Ziehe die Höhe cd auf die (hier verlängerte) Grundlinie und halbire sie in e , mache $ef \# ab$, $W. gab = x$, und $bf \# ag$; so ist $abfg$ das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. hat die gleiche Grundlinie, aber nur die halbe Höhe des Dfs. Beide sind also gleich; auch enthält jenes den vorgeschriebenen W .

1. Anm. Löse die gleiche Aufg., so daß: das Prllgrm. mit dem Df. den W . cab , oder den W . abc gemein hat; oder daß der Punkt g in die Seite bc oder ac fällt.

2. Anm. Ebenso wird das Df. in ein Rechteck verwandelt, indem bloß $W. gab = 90^\circ$ gemacht wird.

49. Ein Df. in ein Prllgrm. zu verwandeln, das eine bestimmte Seite und einen gegebenen W . enthält.

1. Aufl. Gegeben sei das Df. mno fig. 223, und für das Prllgrm. die Seite ab nebst dem W . z . — Halbire mn in p , trage an p den W . $tpn = z$, verlängere mn und mache $ns = ab$, ziehe nu und $sv \# pt$, dann $ox \# ps$, ferner durch s und r die Gerade st , endlich $tv \# ps$; so ist $ruvx$ das verlangte Prllgrm.

Bew. Das Prllgrm. $npqr =$ Df. mno (Aufg. 47);

ferner ist Df. pst = Df. sty, Df. nrs = Df. rsx, und Df. rqt = Df. rtu; zieht man daher von Df. pst die Dfe. nrs und rqt, dann von Df. sty die Dfe. srx und rtu ab, so bleibt Prllgrm. npqr = Prllgrm. ruvx; Letzteres aber hat, weil W. urx = W. qpn = z, und rx = ns = ab, die vorgeschriebene Seite und den vorgeschriebenen W.; also ist es das verlangte.

Anm. Das gefundene Prllgrm. ruvx kann nun an jede beliebige Stelle hingetragen werden.

2. Aufl. Man ziehe die Höhe oh, suche zu ab, oh, mn die 4te Proportionallinie; beschreibe dann mit ab als Grundlinie und der halben gefundenen Höhe ein Parallelogramm, das den W. z hat.

3. Aufl. Ist x die Höhe des Prllgrms., so muß $ab \times x = \frac{1}{2} \cdot mn \cdot oh$ sein, daher wird $x = \frac{mn \cdot oh}{2 \cdot ab}$; mit ab und der gefundenen Höhe läßt sich dann das Prllgrm. konstruiren.

50. Ein Prllgrm. in ein gleichhohes Df. von bestimmter Lage zu verwandeln.

Aufl. Gegeben Prllgrm. GIKL fig. 218; eine Seite des Dfs. falle nach GH. Umkehrung von Aufg. 47. Ebenso bei fig. 219, 220 und 221.

51. Ein Prllgrm. in ein Df. mit gleicher Grundlinie zu verwandeln, das eine bestimmte Lage hat.

Aufl. (fig. 222.) Eine Seite des Dfs. falle von b nach c. Umkehrung der Aufl. zu Aufg. 48.

52. Ein Prllgrm. in ein anderes von bestimmter Lage zu verwandeln.

Aufl. (fig. 116.) Gegeben ABCD; eine Seite des andern Prllgrms. falle von A nach F (oder der W. BAF sei bestimmt) u. s. w.

53. Ein Prllgrm. in ein anderes von bestimmter Seite und Lage zu verwandeln.

1. Aufl. (fig. 224.) Gegeben sei abcd; die Grund

linie des neuen Prllgrms. sei ag , und eine Seite desselben falle von a nach e hin (oder der W. eag sei bestimmt). — Fülle die Höhe dh , suche zu ab , dh , ag die 4te Proportionale, mache derselben $= hn$, ziehe durch n nun $ef \# ag$, und $gf \# ae$; so ist $aefg$ das gesuchte Prllgrm.

Bew. Nach der Aufl. ist $ag \cdot hn = ab \cdot dh$.

2. Aufl. Ziehe dh . Ist x die Höhe des 2ten Prllgrms., so ist $ag \cdot x = ab \cdot dh$, also $x = \frac{ab \cdot dh}{ag}$
u. s. w.

54. Ein Trapez in ein gleichhohes Prllgrm. zu verwandeln.

1. Aufl. (fig. 72.) Das Trapez sei $ABCD$. Halbire CD in F ; durch F ziehe $GH \# AB$ und verlängere BC bis H : so ist $ABHG$ das verlangte Prllgrm.

2. Aufl. Auf der größern Parallelen AD mache $AL = BC$, halbire LD in G , ziehe $GH \# AB$, und verlängere BC bis H ; so ist u. s. w.

55. Ein Trapez in ein anderes von bestimmter Grundlinie zu verwandeln.

Aufl. (fig. 225.) Gegeben Trapez $mnop$; die Grundlinie des andern sei pq . — Halbire mn in u , durch u ziehe qx , und verlängere on bis x ; so ist $qxop$ das verlangte Trapez.

56. Ein Trapezoid in ein Df. zu verwandeln, das einen W. und noch eine Winkelspiße mit ihm gemein hat.

Aufl. (fig. 226.) Das Trapezoid sei $abcd$; das Df. erhalte den W. a und die Spitze d . — Ziehe die Gehre bd , zu ihr $\# ce$, endlich ziehe de ; so ist ade das verlangte Df.

Bew. Df. $def =$ Df. hef (No. 39, c); jenes wird vom Trapezoid weggenommen, und dafür dieses zugesetzt, also u. s. w.

57. Ein Fünfeck in ein Viereck zu verwandeln.

Aufl. (fig. 227.) In dem Fünfeck $abcde$ soll der Punkt d wegfallen. Man verbinde die beiden nächsten Punkte durch die Sehne ce , ziehe zu ihr $\#$ df , endlich cf ; so ist $abcf$ das verlangte Viereck. — (Bew. wie bei Aufg. 56.)

1. Anm. Das Wk. $abcf$ läßt sich nun wieder in ein Dk. abg verwandeln. — Auf gleiche Weise kann man jedes Vieleck in eine Figur verwandeln, die eine Seite weniger hat, u. s. w., bis endlich ein Dk. entsteht.

2. Anm. So läßt sich dann auch eine Figur mit erhabenen W. in eine andere mit hohlen W. verwandeln, wie z. B. fig. 228.

3. Anm. Mehrere Figuren lassen sich in ein einziges Rechteck vereinigen. Man verwandelt jede in ein Dk., dieses in ein Rechteck mit bestimmter Seite (Aufg. 49), und setzt zuletzt alle Rechtecke an der gleichen bestimmten Seite zusammen.

4. Anm. Endlich kann man 2 Figuren, die mehrwinklig in einander laufen, eine gerade Grenze geben. Z. B. fig. 229 bringt man zuerst den Punkt n weg und erhält die Grenze qop ; dann bringt man den Punkt o weg und erhält die Grenze pr . — Ist $fg \# hl$, so kann man nun auch noch für pr eine Grenze machen, die mit jenen beiden $\#$ ist; man halbirt pr in u und zieht durch u die Gerade $xz \# gf$.

58. Eine Figur zu beschreiben, die einer gegebenen Figur ähnlich, und deren Inhalt zu dem der andern ein bestimmtes Verhältniß hat (fig. 230).

Aufl. Die neue Figur soll sich zur gegebenen verhalten wie 2 : 5. Auf eine Gerade ab trage $2 + 5 = 7$ gleiche Theile, beschreibe über ab einen Halbkreis, errichte in c die Senkrechte cd , ziehe ad und bd , mache $de =$ einer Seite der gegebenen Figur, ziehe $ef \# ab$; so ist df die der de entsprechende Seite der neuen Figur.

Bew. Bezeichnen P und p den Inhalt der gegebenen und der neuen Figur, so ist $p : P = df^2 : de^2$ (No. 45). Es ist aber $df^2 = ef \cdot fg$ und $de^2 = ef \cdot eg$, also $df^2 : de^2 = ef \cdot fg : ef \cdot eg = fg : eg = ac : bc = 2 : 5$, also auch $p : P = 2 : 5$.

Uebungsaufgaben.

a. Ein Dk. in ein gleich hohes Trapez von bestimmter Grundlinie zu verwandeln.

b. Ein Rechteck in ein Quadrat, und ein Quadrat in ein Rechteck mit bestimmter Seite zu verwandeln. (S. Aufg. 37 u. 36.)

Anm. Man kann jedes Vieleck in ein Dk., dadurch in ein Rechteck, und durch dieses endlich in ein Quadrat verwandeln.

c. Zwei Quadrate zusammen in ein Quadrat zu verwandeln; ein Quadrat zu verdoppeln, zu verdreifachen u.; ein Quadrat zu beschreiben, halb so groß als ein gegebenes.

d. Zwei Kreise in einen Kreis zu verwandeln; einen Kreis zu verdoppeln, zu verdreifachen; einen Kreis zu beschreiben, der die Hälfte eines gegebenen Kreises beträgt (Aufg. c, und No. 45, e).

e. Ein Quadrat zu beschreiben, gleich dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate.

f. Einen Kreisring in einen Kreis zu verwandeln (d. h. einen Kreis zu beschreiben, gleich dem Unterschiede von 2 gegebenen Kreisen).

g. Ein gleichseitiges Dk. zu konstruiren, das doppelt oder halb so groß, als ein gegebenes gleichseitiges Dk. ist.

III. Theilung der Figuren.

59. Ein Dreieck zu halbiren.

Aufl. Hierbei sind folgende Fälle zu unterscheiden:

I. Die Theilungslinie geht aus einer Winkelspitze, z. B. fig. 220 im Dk. FGH aus H. — Man halbire die gegenüberliegende Seite FG in I und ziehe HI; so ist Dk. FHI = Dk. GHI.

II. Die Theilungslinie geht aus einer Seite, z. B. fig. 231 aus dem Punkte m der Seite bc. — Halbire ab in o, ziehe mo und aus der der ab gegenüberliegenden Spitze c die Gerade cn $\parallel$ mo, dann mn; so vollbringt mn die verlangte Theilung.

Beweis. Ziehe co. Nun ist Dk. bco = $\frac{1}{2}$ Dk. abc; nimmt man von Dk. bco das Dk. cmp weg und setzt dazu für Letzteres das ihm gleiche Dk. nop (No. 39, c), so entsteht das Dk. bmn, das also ebenfalls die Hälfte des Dks. abc beträgt.

Anm. Liegt m in der Mitte von bc, so muß die Theilungs-

linie von m nach a gehen (wie bei I); weil hier m mehr nach c hin liegt, so muß mn die Seite ab treffen; liegt aber m näher bei b , so trifft mn die Seite ac (fig. 232).

2. Aufl. (fig. 233.) Die Theilungslinie gehe aus g in der Seite ef . Man ziehe fh und gk senkrecht zu de , und setze den Theil, welchen die Theilungslinie aus g von e an von ed abschneidet, $= ex$; so ist $\mathcal{D}f. def = \frac{1}{2} \cdot de \cdot fh$, und $\mathcal{D}f. egx = \frac{1}{2} \cdot ex \cdot gk$, also $\frac{1}{2} \cdot ex \cdot gk = \frac{1}{4} \cdot de \cdot fh$, folglich $ex = \frac{de \cdot fh}{2 \cdot gk}$. Hat man hienach ex berechnet, und somit den Punkt x bestimmt; so ziehe man gx .

Anm. Ist z. B. $de = 380'$, $fh = 234'$, $gk = 180'$; was beträgt dann ex ?

III. Die Theilungslinie ist zu einer Seite $\#$, z. B. fig. 234 zu BC . — Suche zu AB und ihrer Hälfte AD die mittlere Proportionale AE , mache $AF = AE$, ziehe $FG \# BC$; so bewirkt FG die verlangte Theilung.

Bew. $\mathcal{D}f. AFG : \mathcal{D}f. ABC = AF^2 : AB^2$ (45, c); es ist aber $AF^2 = AE^2 = AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot AB^2$, mithin $AF^2 : AB^2 = \frac{1}{2} \cdot AB^2 : AB^2 = 1 : 2$; folglich auch $\mathcal{D}f. AFG : \mathcal{D}f. ABC = 1 : 2$.

2. Aufl. Gesezt, FG sei die gesuchte Parallele, so ist $\mathcal{D}f. AFG : \mathcal{D}f. ABC = AF^2 : AB^2$; nach der Forderung aber soll $\mathcal{D}f. AFG : \mathcal{D}f. ABC = 1 : 2$, also muß auch $AF^2 : AB^2 = 1 : 2$, daher $AF^2 = \frac{1}{2} \cdot AB^2 = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot AB^2$, also $AF = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 1,4142$. — Auf gleiche Weise ergibt sich $AG = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 1,4142$.

Anm. Ist z. B. $AB = 474'$, so ist $AF = \frac{1}{2} \cdot 474 \cdot 1,4142 = 335' 1'' 6'''$; hienach mißt man AF ab und zieht $FG \# BC$. — Oder man berechnet auch AG . Ist z. B. $AC = 520'$, so wird $AG = \frac{1}{2} \cdot 520 \cdot 1,4142 = 367' 6'' 9'''$, und zieht FG durch die bestimmten Punkte F und G .

IV. Die Theilung geschieht aus einem Punkte im $\mathcal{D}f.$, z. B. fig. 235 aus d . — Ziehe aus d in die Mitte e einer Seite bc die Linie de , und aus dem der bc gegenüberliegenden Punkte a die Linie $af \# de$,

ziehe dann df und da ; so vollbringen diese Letzteren die verlangte Theilung.

Bew. Ziehe ae . Nun ist $Df. abe = \frac{1}{2} \cdot Df. abc$; aber auch $Df. esg = Df. adg$; daher $Df. abe - Df. esg + Df. adg = Df. abfd$, welches Letztere folglich ebenfalls die Hälfte des $Dfs. abc$ ist, so daß $acfd$ die andere Hälfte wird.

60. Ein Parallelogramm zu halbiren.

Aufl. Die Theilungslinie geht durch einen Punkt innerhalb der Figur, z. B. fig. 236 durch m . — Ziehe die Gehre ab , durch ihre Mitte und durch m die Gerade cd .

Anm. Wäre statt m der Punkt e gegeben, so würde man cd ebenfalls durch die Mitte von ab ziehen, oder $df = ce$ machen. — Die Halbierung und jede andere Theilung vermittelt einer Parallelen versteht sich von selbst.

61. Ein Trapez zu halbiren.

I. Die Theilungslinie geht durch die Parallelen. Man halbirt Letztere, und zieht durch ihre Mitte eine Gerade. — Jede andere Theilung geschieht auf ähnliche Art.

II. Sie geht von einem W. aus, z. B. fig. 237 aus n . — Mache $mu = \frac{1}{2} \cdot mp$, und $ux = \frac{1}{2} \cdot no$, ziehe nx , so theilt diese nach der Forderung.

Bew. Ziehe np und nu . Die Gehre np theilt das Trapez in die 2 Dfe. mnp und nop . Nun ist $Df. mnu = \frac{1}{2} Df. mnp$, und $Df. unx = \frac{1}{2} Df. nop$; also betragen die Dfe. mnu und unx zusammen die Hälfte der beiden Dfe. mnp und nop , oder mnx ist die Hälfte des Trapezes $mnop$.

Anm. Wenn man fig. 238 die Gehre bd in o halbirt, dann ao und co zieht, so ist das Trapez durch die Grenze aoc ebenfalls halbirt. Warum?

III. Die Theilungslinie sei $\#$ mit den Parallelen (fig. 239). Gesezt, die richtige Theilungslinie sei ef . Man ziehe die Höhe ch und setze $ad = U$, $bc = u$, $ef = x$, $ch = y$, $gh = z$, so ist:

$$\begin{aligned}\text{Trapez } abcd &= \frac{1}{2} \cdot (U + u) \cdot y \\ \text{und Trapez } aefd &= \frac{1}{2} \cdot (U + x) \cdot z \\ \text{also } (U + u) \cdot y &= 2 \cdot (U + x) \cdot z \\ \text{und } (U + u) : 2 \cdot (U + x) &= z : y.\end{aligned}$$

Zieht man nun $cn \# ab$, so ist in den Dfen. cdn und cfm :

$$\begin{aligned}ch : cg &= dn : fm \text{ oder } y : cg = (U - u) : (x - u) \\ \text{also } (y - cg) : cg &= (U - x) : (x - u) \\ \text{und } cg : z &= (x - u) : (U - x) \\ \text{mithin } (cg + z) : z &= (U - u) : (U - x) \\ \text{oder } y : z &= (U - u) : (U - x).\end{aligned}$$

Hiernach erhält man:

$$\begin{aligned}(U + u) : 2 \cdot (U + x) &= (U - x) : (U - u) \\ \text{also } (U + u) (U - u) &= 2 \cdot (U + x) (U - x) \\ U^2 - u^2 &= 2 \cdot U^2 - 2 \cdot x^2 \\ 2 \cdot x^2 &= 2 \cdot U^2 - U^2 + u^2 = U^2 + u^2 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \times (U^2 + u^2) = \frac{1}{4} \cdot (U^2 + u^2) \\ x &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2 \cdot (U^2 + u^2)}\end{aligned}$$

Hat man hiernach x oder ef berechnet, so kann auch ihr Abstand von ad , nämlich z oder gh , gefunden werden. Setzt man den Inhalt von $abcd = Q$, so ist

$$\text{Trapez } aefd = \frac{1}{2} \times (U + x) \cdot z = \frac{1}{2} \cdot Q,$$

$$\text{also } z = \frac{Q}{U + x}.$$

Ist z. B. $U = 80'$, $u = 60'$ und $y = 20'$; so ist:

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (6400 + 3600)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2 \cdot 10000} = \frac{1}{2} \times 100 \cdot \sqrt{2} \\ &= 50 \times 1,4142 = 70,71.\end{aligned}$$

Ferner ist $q = \frac{1}{2} \times (80 + 60) \cdot 20 = 140 \cdot 10 = 1400$, also

$$z = \frac{1400}{80 + 70,71} = \frac{1400}{150,71} = 9,28.$$

Berechnet man nun wirklich hiernach das Trapez $aefd = q$, so erhält man:

$$q = \frac{1}{2} \cdot (80 + 70,71) \cdot 9,28 = 150,71 \cdot 4,64 = 699,2944,$$

was beinahe ganz genau die Hälfte von 1400, nämlich 700 ausmacht.

IV. Die Theilungslinie sei zu den Parallelen senkrecht, z. B. fg fig. 238. — Man ziehe die Höhe be , und berechne den Inhalt des Dfs. abe ; er sei

$= q$, und der des ganzen Trapezes $= Q$; so ist das Rechteck
 $befg = be \cdot ef = \frac{1}{2} Q - q$, also $ef = \frac{\frac{1}{2} Q - q}{be}$.

62. Ein Trapezoid zu halbiren.

I. Die Theilungslinie gehe aus einem bestimmten Punkte einer Seite, z. B. fig. 240 aus r. Man verwandle das Trapezoid mnop zuerst in das Df. mnq (Aufg. 56); ziehe nr, halbire mq in u, ziehe ux $\parallel$ nr, endlich ziehe rx; so ist rx die gesuchte Theilungslinie.

Bew. Ziehe nu. Es ist Df. mnu $= \frac{1}{2}$. Df. mnq $= \frac{1}{2}$. Trapezoid mnop; im Trapez nrux ist Df. nxz $=$ Df. ruz; nimmt man nun dieses von Df. mnu weg und fügt dafür jenes hinzu, so entsteht das Viereck mnxr, das nun ebenfalls die Hälfte von mnop ist.

II. Die Theilungslinie geht aus einem W., z. B. fig. 241 aus W. a. — Verwandle das Trapezoid abcd in das Df. ade, halbire de in f und ziehe af; so ist af die Theilungslinie.

Bew. Df. adf $= \frac{1}{2}$. Df. ade; aber Df. ade $=$ Trpzd. abcd, also auch Df. adf $= \frac{1}{2}$ Trpzd. abcd.

Anm. Fiele f über e hinaus nach e hin; so müßte ab als Grundlinie des Dfs. angenommen werden.

2. Aufl. Man berechnet den Inhalt des Trapezoids; er sei $= Q$; dann muß sein $\frac{1}{2} \times ad \times fg = Q$, also $fg = \frac{2Q}{ad}$. — Nun mache man die Senkrechte dh = der gefundenen Höhe, ziehe hf $\parallel$ ad, dann af.

III. Die Theilungslinie ist $\parallel$ zu einer Seite, z. B. fig. 242 GH $\parallel$ AD. — Zuerst suche die Höhe eines Dfs. ADE, das die Hälfte von dem Inhalt Q des Trapezoids beträgt, nämlich $\frac{1}{2} \cdot EL \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot Q$, also $EL = \frac{Q}{AD}$.

Nun fragt es sich: in welchem Punkte von EL muß die Gerade GH ($\parallel$ AD) gezogen werden, daß Trapez ADHG $=$ Df. ADE wird? Um LM zu finden, muß man zuerst die Länge von GH selbst kennen.

Man ziehe $EF \parallel AD$, und $EO \parallel CD$, und setze $AD = U$, $EF = u$, $GH = x$, $LM = h$, $EL = H$. Nach der Forderung muß nun sein:

$$\frac{1}{2} \cdot U \cdot H = \frac{1}{2} \cdot (U + x) \cdot h$$

$$\text{also } U : (U + x) = h : H.$$

Es ist aber:

$GN : AO = EM : H$, oder $(x - u) : (U - u) = (H - h) : H$
mithin:

$$(x - u) \cdot H = (U - u)(H - h) = (U - u) \cdot H - (U - u) \cdot h$$

$$\text{also:}$$

$$(U - u) \cdot h = (U - u) \cdot H - (x - u) \cdot H = (U - x) \cdot H$$

$$\text{und } h : H = (U - x) : (U - u).$$

Daher erhält man aus obiger Proportion:

$$U : (U + x) = (U - x) : (U - u)$$

$$U^2 - U \cdot u = U^2 - x^2$$

$$\text{folglich } x^2 = U \cdot u \text{ und } x = \sqrt{U \cdot u}.$$

Es ist also x oder GH die mittlere Proportionale zwischen AD und EF . — Nun kann auch h gesucht werden. Es ist

$$\frac{1}{2} \times (U + x) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot Q$$

$$\text{also } h = \frac{Q}{U + x}.$$

3. B. es sei $Q = 83560 \square'$, $U = 308'$, $u = 280'$; man sucht zuerst H , dann x und h .

63. Von einem Parallelogramm einen Theil von bestimmter Größe durch eine Parallele abzuschneiden.

Aufl. Der Inhalt des Abschnittes sei $= q$, die gegebene Grundlinie desselben und des Parallelogramms $= g$, seine Höhe $= x$; so ist:

$$g \cdot h = q, \text{ also } h = \frac{q}{g}.$$

64. Von einer geradlinigen Figur ein Dreieck von bestimmter Größe abzuschneiden.

Aufl. (fig. 53.) Die Grundlinie des Dfs. sei $AB = g$, seine Höhe $= h$, sein Inhalt $= q$, so ist:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot h = q, \text{ also } h = \frac{2q}{g}.$$

Anm. Um den Punkt m zu bestimmen, errichte man auf AB zwei Senkrechte, nämlich $An = op = h$ und ziehe pn bis m . — Fiele der Punkt m über F hinaus, so könnte der Abschnitt kein Df. sein.

65. Von einer geradlinigen Figur einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden, wenn die Theilungslinie von einem gegebenen Punkte des Umfangs ausgeht.

Aufl. Die Theilungslinie gehe aus a fig. 243. Man ziehe ac , ad , af ; messe und berechne die Df. abc und acd . Kommen sie zusammen dem abzuschneidenden Theile noch nicht ganz gleich, so schneide man für den noch fehlenden Rest über ad ein Df. ade ab (Aufg. 64).

Oder man berechnet zu den vorigen auch noch das Df. adf ; und wenn ihr Gehammtinhalt zu groß ist, so schneidet man für den überschießenden Rest über af das Df. aef ab.

Anm. Auf gleiche Art kann man eine Figur auch in gleiche oder verhältnißmäßige Theile theilen. — Das Verfahren bleibt gleich, wenn die Theilungslinie von der Ecke m ausgeht.

66. Von einer geradlinigen Figur einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden, wenn die Theilungslinie von einem gegebenen Punkte innerhalb derselben ausgeht.

Aufl. Die Theilungslinie gehe aus m fig. 244. Man zieht aus m Gerade nach den Winkelspitzen, und beginnt mit einer derselben als erster Theilungslinie, z. B. mit ma , und berechnet das Df. mab . Ist sein Inhalt zu groß, so schneidet man über ma nach b hin ein Df. von der bestimmten Größe ab (Aufg. 64). Ist es zu klein, so berechnet man das Df. mbc ; sind nun Beide zusammen zu groß, so schneidet man über mc nach b hin den Ueberschuß ab (nach Aufg. 64). Ist ihre Summe aber zu klein, so berechnet man das Df. med u. s. w.

Sieht man aber schon nach dem Augenmaß, daß nicht mehr das ganze Df. med erforderlich ist; so schneidet man über mc nach d hin ein Df. für den noch fehlenden Rest ab.

Anm. Ebenso kann die Figur in eine Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile getheilt werden. Man mißt die ganze Figur aus, berechnet ihren Inhalt und den ersten Theil, schneidet denselben von ma aus ab u. s. w.

67. Von einem Df. mit gegebenem Inhalte Q einen Theil von dem Inhalte q durch eine Parallele abzuschneiden.

1. Aufl. Das Df. sei ABC fig. 101, die Theilungslinie DE, so daß $BCED = q$. Man ziehe die Höhe AH.

Nun ist:

$$(Q - q) : Q = AD^2 : AB^2 = AE^2 : AC^2 = AG^2 : AH^2$$

$$\text{also } AD = AB \times \sqrt{\frac{Q - q}{Q}}$$

$$AE = AC \cdot \sqrt{\frac{Q - q}{Q}}$$

$$AG = AH \cdot \sqrt{\frac{Q - q}{Q}}.$$

Man kann hienach eine der Linien AD, AE, AG berechnen und durch einen der Punkte D, E, G eine Gerade # BC ziehen, oder zwei derselben berechnen und durch ihre Endpunkte die Linie DE ziehen.

2. Aufl. Gesezt, es sei $q = \frac{n}{m} \times Q$, so ist Df.

$$ADE = Q - \frac{n}{m} \times Q = \frac{m - n}{m} \times Q. \text{ Es ist nun aber}$$

$$Q = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC, \text{ und } Q - q = \frac{1}{2} \cdot AG \cdot DE \\ = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC \cdot \frac{m - n}{m}, \text{ also:}$$

$$AG : AH = BC \cdot \frac{m - n}{m} : DE.$$

Es ist ferner $AG : AH = AD : AB$, und $BC : DE = AB : AD$, mithin:

$$AD : AB = AB \cdot \frac{m - n}{m} : AD$$

$$AD^2 = AB^2 \cdot \frac{m-n}{m}$$

$$AD = AB \cdot \sqrt{\frac{m-n}{m}}$$

Ebenso muß sein:

$$AE = AC \cdot \sqrt{\frac{m-n}{m}}$$

Hienach kann man die Punkte D und E ohne den Inhalt der beiden Figuren selbst finden.

68. Ein Df. durch Parallelen in gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man verfährt ganz nach Aufg. 67, Aufl. 2. Das Df. ABC fig. 245 sei z. B. in 4 gleiche Theile zu bringen. Nun ist Df. ADE = $\frac{1}{4}$ ABC, und BCED = $\frac{3}{4}$ ABC, also oben $m = 4$, $n = 3$; mithin:

$$AD = AB \times \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AB \text{ und } AE = AC \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AC.$$

Für AF und AG bemerke man, daß AFG = BCGF = $\frac{1}{2}$ ABC, also $n = 2$ ist, mithin:

$$AF = AB \times \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{2}$$

$$\text{und } AG = AC \cdot \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{2}.$$

Da endlich BCLH = $\frac{1}{4}$ ABC, also $n = 1$ ist, so hat man:

$$AH = AB \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{3}$$

$$\text{und } AL = AC \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{3}.$$

Anm. Auf gleiche Weise kann das Df. auch in eine Anzahl verhältnißmäßiger Theile getheilt werden.

69 Von einem Trapeze oder Trapezoide durch eine Parallele einen Theil von bestimmter Größe abzuschneiden.

1. Aufl. Es sei q die Größe des vom Viereck fig. 246 abzuschneidenden Theiles. Man denke q zuerst in ein Df. ABE verwandelt; da dessen Grundlinie AB bekannt ist, so hat man $\frac{1}{2} \cdot EL \cdot AB = q$, also $EL = \frac{2 \cdot q}{AB}$. Aus dem nun gefundenen Punkte E gehe EF $\parallel$ AB.

Ist nun auch EF gemessen und nimmt man GH als die

gesuchte Theilungsparallele an; so hat man (nach Aufg. 62, III.):

$$GH = \sqrt{AB \cdot EF}$$

und da $\frac{1}{2} \cdot LM \times (AB + GH) = q$ sein muß, so wird:

$$LM = \frac{2q}{AB + GH}.$$

1. Anm. Es sei z. B. $ABHG = 400 \square^0$ und $AB = 50^0$; was ist EL ? Wenn ferner $EF = 32^0$; was ist dann GH und LM ?

2. Anm. Auf gleiche Weise kann man das Viereck nach und nach in eine Anzahl gleicher oder verhältnißmäßiger Theile zerlegen, wobei man jedoch zuerst dessen Inhalt berechnen muß. Man schneidet über AB zuerst den ersten Theil ab, dann über der gefundenen Theilungslinie den 2ten u. s. w.

2. Aufl. Man verwandle den Theil q , der von Q abgeschnitten werden soll, zunächst über AB fig. 247 in ein Rechteck, so daß $Aa \cdot AB = q$, also $Aa = \frac{q}{AB}$ ist.

Dadurch entsteht ein Theil $ABFE$, der um die Dfe. AaE und BbF zu klein ist. Diesen Unterschied verwandle man nun über EF abermals in ein Rechteck, so daß $Ee \cdot EF = Aae + BbF$, also $Ee = (Aae + BbF) : EF$ wird. Nun ist $ABHG$ noch um die Dfe. EeG und FfH zu klein, u. s. w. — Es wird selten nöthig sein, zu hinreichender Genauigkeit das Geschäft fortzusetzen; sondern meistens wird schon GH genügen.

1. Anm. Wenn das Trapezoid nach oben sich erweitert, so entstehen die Unterschiedsdreiecke in demselben, und die vermittelt des ersten Rechtecks erhaltene Theilungslinie schneidet von dem Trapezoid zu viel ab oder ist zu groß. Die Summe der Unterschiedsdreiecke muß also wieder abgezogen werden u. s. w.

2. Anm. Bei der Theilung auf dem Felde zieht man die 2te Aufl. der ersten der Kürze wegen gewöhnlich vor.

V a c h w o r t.

Bei Abfassung eines Lernbuches der „Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrerseminarien“ kann es nicht die Absicht sein, in diesem Gebiete auf Erweiterungen des Stoffes auszugehen, was nur rein wissenschaftlichen Bestrebungen anheim fällt; sondern vielmehr eine dem Zwecke der genannten Anstalten entsprechende Auswahl des Stoffes zu treffen und denselben in einer Gestalt vorzuführen, welche den Forderungen der heutigen Unterrichtswissenschaft genügt. Daß die letztere Absicht noch nicht erreicht ist, davon zeugen die ziemlich zahlreichen Lernbücher der Geometrie. Mancher mag freilich dieses Büchermachen beklagen; allein dasselbe beweist doch, daß Viele sich bemühen, auch die Geometrie als Unterrichtsgegenstand zu fördern, und — von dieser Seite betrachtet — hat es ein Recht auf Anerkennung. Hat sich in Folge dessen einmal ein Buch in einem ausgedehnten Kreise Geltung zu erringen gewußt, dann wird auch die Ebbe des Bücherschreibens in diesem Theile des Unterrichtsgebietes nothwendig und von selbst eintreten. —

Die Forderungen der heutigen Unterrichtswissenschaft an ein Lernbuch der Geometrie für die oben genannten Anstalten vollständig zu erörtern, dazu kann jetzt hier kaum der Ort sein; sondern es dürfte dies vielmehr einmal in einer besondern Abhandlung geschehen. Es genüge, zu bemerken: 1. Die Darstellung habe im Allgemeinen den Lernstoff in der Weise vorzuführen, daß er vor dem Geiste des Schülers gut gegliedert aus seiner Wurzel aufwache: das Lehrverfahren muß also ein genetisches (schaffendes) sein; der Lernstoff darf nicht als ein Fertiges oder Gegebenes vorgefaut werden, damit ihn der Schüler wieder nachfaue. Darin liegt eben der Unterschied zwischen dem Jetzt und dem Einst des mathematischen Unterrichts. (Man lese darüber z. B.: die deutsche Bürgerschule, von Dr. Mager, pag. 167 bis 193.) — 2. Der Unterricht theilt sich in eine Vorschule und in die eigentliche Geometrie. Jene umfaßt der erste Abschnitt, diese liegt in den übrigen Abschnitten. Der erste Abschnitt enthält somit die geometrische

Formenlehre nach einem Plane, der im Allgemeinen zugleich auch den übrigen Abschnitten zu Grunde liegt. — 3. In der eigentlichen Geometrie dürfen die Lehrsätze erst dann ausgesprochen werden, wenn sie dem Schüler zur Einsicht gebracht sind. Das Lehrverfahren muß ihn dahin führen, das durch die vorhergehende Kombination sich herausstellende Ergebniß selbst zu formuliren. — 4. Aufgaben dienen zur Anwendung und Befestigung des Gelernten.

Ich war darauf bedacht, je die in engster Beziehung stehenden Lehrsätze und Folgerungen, die sich gleichsam wie Arten unter eine Gattung reihen, in einer Nummer zusammenzustellen, theils um eben ihre Verwandtschaft auch äußerlich hervorzuheben, theils um dem Schüler die Uebersicht und die Auffassung des Zusammenhangs im Einzelnen zu erleichtern. Den Gesamtplan, wie er im ersten Abschnitte niedergelegt ist, auch für die übrigen Abschnitte im Auge zu behalten und dem Lernenden zum Bewußtsein zu bringen, ist Sache des Lehrers. — Auch die Aufgaben im letzten Abschnitte schließen sich im Wesentlichen diesem Plane an. Gern hätte ich die Anzahl derselben vermehrt, wenn mir nicht der Raum Grenzen gesetzt hätte.

Ueberall habe ich mich der Kürze beflissen, so weit dies, ohne der Deutlichkeit zu schaden, geschehen konnte.

Daß mir die neuere mathematische Literatur nicht fremd ist; daß ich dieselbe benutzt habe, ohne aus ihr abzuschreiben; daß ich vielmehr einen mehr selbständigen Gang eingeschlagen habe: das wird der Sachkenner leicht herausfinden. Damit will ich keineswegs sagen, daß die Ausführung des Ganzen mit dem guten Willen, etwas Gediegenes zu liefern, gleichen Schritt gehalten habe. Es wird mir daher auch angenehm sein, wenn Sachkenner die Punkte bezeichnen wollen, die der Verbesserung fähig und bedürftig sind.

Baden, im August 1841.

Der Verfasser.