Zeitschrift: Allgemeine schweizerische Schulblätter

Band: 7 (1841)

Heft: 1-2

Artikel: Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien [Fortetzung]

Autor: [s.n.]

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-865825

„gerne. Ist es aber zu geringe, so habe ich doch ge-
„than, so viel ich vermocht.“

„Allezeit Wein oder Wasser trinken, ist nicht lustig;
„sondern zuweilen Wein und zuweilen Wasser trinken,
„das ist lustig: also ist es auch lustig, so man Mancher-
„lei lieset. Das sei das Ende.“ Maccab. II. 39 und 40.

Lehrgang der Geometrie für höhere Volksschulen und Schullehrer-Seminarien.

Zweiter Abschnitt.

§. 24.

Einleitung.

I. Die Sätze, welche in den vorhergehenden und nachfolgenden §§. vorkommen, sind hinsichtlich ihres Inhaltes oder hinsichtlich der Art, wie man ihre Wahrheit einsieht oder verstehen lernt, sehr verschieden.

a) Der Satz: „Ein Viereck mit 4 gleichen Seiten ist eine Raute,“ gibt an, was man unter dem Begriff „Raute“ zu verstehen habe, oder was dieses Wort bedeute.

b) Andere Sätze enthalten eine Behauptung, z. B.: Jede g. L. läßt sich verlängern; in einem Vieleck ist die Zahl der Gehren aus einer Winkelspitze um 3 kleiner als die Seitenzahl; zwei g. L., die sich in einem Punkte durchschneiden, bilden 4 W.

Die Behauptung im ersten Satze ist Jedem sogleich einleuchtend. Dies ist bei dem zweiten Satze nicht der Fall: er muß durch Gründe unterstützt werden, um ihn einzusehen; man muß zuerst untersuchen, nach welchen Punkten Gehren möglich sind, und nach welchen nicht. — Den dritten Satz sieht man sogleich ein, wenn man weiß, daß 2 g. L. sich nur in einem Punkte durchschneiden können.

c) Noch andere Sätze geben an, daß man Etwas thun soll, z. B.: Man soll eine Gerade in 2 beliebige Theile theilen; man soll eine Gerade halbiren. — Wie das im ersten Satze Verlangte auszuführen ist, leuchtet von selbst ein; die Theilung geschieht durch einen Punkt zwischen den beiden Enden der Geraden. — Nicht so ist es bei dem zweiten Satze. Die Halbirung geschieht zwar auch durch einen Punkt; aber es muß zuerst ausgemittelt werden, wohin der Punkt falle; und wenn man ihn gefunden hat, so bleibt noch darzuthun, daß die Halbirung richtig ist.

II. Die Geometrie baut sich aus verschiedenen Sätzen auf, welche Erklärungen oder Behauptungen oder Verrichtungen ausdrükken. Ein Satz, welcher das Wesen eines Begriffes bezeichnet (oder die Bedeutung eines Wortes angibt), ist eine Erklärung. — — Ein Satz, dessen Wahrheit unmittelbar selbst einsichtlich ist, heißt Grundsatz (Axiom). — Ein Satz, dessen Wahrheit erst vermittelst anderer, schon als richtig anerkannter Sätze zur Einsicht gebracht werden muß, ist ein Lehrsatz (Theorem). Die Sätze, welche dazu gebraucht werden, machen den Beweis des Lehrsatzes aus. — Ein Satz, dessen Wahrheit sich unmittelbar aus einem schon bewiesenen Lehrsatze ergibt, ist eine Folgerung (Corollarium). — — Ein Satz, welcher eine für sich selbst klare Verrichtung vorschreibt, ist ein Forderungssatz (Postulat). — Ein Satz, der eine geometrische Verrichtung vorschreibt, für welche ein Verfahren erst noch gesucht werden muß, ist eine geometrische Aufgabe (ein Problem, abgekürzt: G. A.). Die Aufsuchung des Verfahrens für die vorgeschriebene Verrichtung ist die Auflösung der Aufgabe. Die Auflösung erfordert einen Beweis ihrer Richtigkeit.

1. Anm. Die Schüler suchen (in §. 1—23) noch mehr Beispiele zu den vorstehenden Sätzen.

2. Anm. Von den geometrischen Aufgaben sind die Uebungsaufgaben (Ue. A.) zu unterscheiden. Bei diesen Letzteren ist das Verfahren für die vorgeschriebene Verrichtung schon bekannt und soll bloß zur besseren Einübung in besonderen Fällen angewandt werden.

§. 25.

Bestimmung eines Punktes in einer Ebene.

I. In der Ebene ABCD fig. 30 seien a u. b zwei feste Punkte; es sei ac der Abstand eines dritten Punktes von a, und bc der Abstand desselben von b; läßt sich nun die Lage des Punktes c bestimmen? — Betrachtet man ac u. bc als Kreishalbmesser, so muß der

Punkt c. erstlich in einem aus a mit ac beschriebenen Bogen, und dann auch in einem aus b mit bc beschriebenen Bogen liegen. Es ist aber der Durchschnittspunkt beider Bogen der einzige Punkt, den sie gemein haben; also ist c der durch ac und bc bestimmte Punkt.

II. Es sei fig. 31 und 32 a ein fester Punkt; aus a gehe die liegende Gerade ab von bestimmter Länge, so bestimmt sie den Punkt b; ist auch der W. x bestimmt, so gibt er die Richtung von bc; und ist die Länge von bc bestimmt, so erhält man dadurch den Punkt c. Es ist also die Lage des Punktes c durch die Länge der Geraden ab und bc mit ihrem Richtungswinkel bestimmt.

Anm. Wenn man die Gerade ab verlängert, und auf ihr von a aus bestimmte Stükke abschneidet, an die Abschnittspunkte W. von bestimmter Größe trägt und den steigenden Schenkeln ebenfalls eine bestimmte Länge gibt; so lassen sich dadurch Punkte in beliebiger Anzahl bestimmen. Die erste Gerade, die von einem bestimmten Punkte ausgeht und eine bestimmte Lage hat, heißt Abschnittslinie (Abscissenlinie); die zweite, mit jener unter einem bestimmten W. verbundene Gerade heißt Richtungslinie (Ordinate). Jeder einzelne bestimmte Theil der Abschnittslinie heißt Abschnitt (Abscisse). Die zusammengehörigen Abschnitte und Richtungslinien heißen auch Verbindungslinien (Koordinaten). Der Punkt a ist ihr Anfangspunkt, der Punkt b ihr Richtungspunkt. Der W. x ist der Richtungsw. der Verbindungslinien (oder der Koordinatenw.). Derselbe kann ein schiefer oder ein rechter W. sein, d. h. die Verbindungslinien können schief- oder rechtwinklig sein. Der letzte Fall ist der gewöhnliche.

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich nun folgender Lehrsatz:

1) Die Lage eines Punktes in einer Ebene wird bestimmt:
   a. durch zwei g. L. von bestimmter Länge, deren jede von einem bestimmten Punkte ausgeht;
   b. durch zwei schief- oder rechtwinklige Verbindungslinien.

Uebungsaufgaben. 1) Es seien m und n zwei bestimmte Punkte; man sucht einen dritten Punkt q. Dabei sei im 1000fach verjüngten Maßstabe: 1) Der Abstand mn = 5^0, mq = 3^0, nq =

4^0; 2) mn $= 4^0$, mq $= 5^0$, nq $= 6^0$; 3) mn $= 6^0$, mq $= 7^0$, nq $= 4^0$; 4) mn $= 8^0\ 4'$, mq $= 5^0\ 6'$, nq $= 7^0\ 2'$; 5) mn $= 9^0\ 3'$, mq $= 6^0\ 8'$, nq $= 10^0\ 4'$.

2) Einen Punkt durch 2 rechtwinklige Verbindungslinirn zu bestimmen. a) der Abschnitt sei $= 4^0$, die Richtungslinie $= 7^0$; b) die Absciffe $= 5^0$, die Ordinate 9^0; c) jene $8^0\ 4'$, diese $6^0\ 5'$; d) jene $10^0\ 2'$, diese $8^0\ 6'$.

1. Anm. Zu vorstehenden Aufgaben, besonders zu denen unter Nro. 2, bedarf der Schüler zwei kleine Dreiekke von Holz, welche zusammen ein Rechtekk bilden. Erklärung ihres Gebrauches.

2. Anm. Wie hier durch rechtwinklige Koordinaten die Lage eines Punktes, so wird in ähnlicher Weise auf Landkarten jeder Ort durch seine geographische Länge und Breite bestimmt.

§. 26.

Winkel.

I. Sind fig. 33 die Schenkel ab und ac des W. a bestimmt (d. h. haben sie eine bestimmte Länge), so ist die Spitze a ein zur Bestimmung ihrer Richtung gemeinschaftlicher Punkt; es wird also für jeden zur Bestimmung seiner Richtung noch ein Punkt erfordert. Die Lage der Punkte b und c hangt nur noch von der Weite bc ab. Ist aber die Weite bc bestimmt, so gibt sie die Punkte b und c; die Punkte a und b bestimmen nun die Richtung von ab, und die Punkte A und C die Richtung ac; folglich ist der W. a bestimmt.

II. Es seien umgekehrt die Schenkel ab und ac nebst dem W. a bestimmt. — Der W. a bestimmt von der Spitze a aus die Richtung beider Schenkel; die Länge von ab gibt den Punkt b, und die Länge von ac den Punkt c; die Punkte b und c bestimmen die Weite bc.

III. Es sei fig. 33 und 34 bei den W. a und A Schenkel AB $=$ ab, AC $=$ ac, und AC $=$ bc. — Da nun (nach I). ein W. durch die Länge seiner Schenkel und durch den Abstand ihrer Endpunkte bestimmt ist; so kann der W. A nur eine Wiederholung des W. a sein, also muß W. A $=$ W. a sein.

2) a. Wenn die Schenkel eines Winkels nebst der

Weite ihrer Endpunkte bestimmt sind; so ist auch der W. selbst bestimmt.

b. Wenn ein W. nebst seinen beiden Schenkeln bestimmt ist; so ist auch die Weite ihrer Endpunkte bestimmt.

c. Sind die Schenkel zweier W. nebst der Weite ihrer Endpunkte wechselweise gleich; so sind die W. selbst gleich.

IV. Es seien ABC und ABD fig. 35 schiefe Nebenw. — Man fälle auf CD die Senkrechte LB. Nimmt man nun von dem stumpfen W. ABD den W. ABL weg, so bleibt noch der rechte W. LBD; zählt man dann den W. ABL zu dem spitzen W. ABC, so entsteht der rechte W. LBC; mithin sind die zwei W. ABC und ABD zusammen so groß, als die beiden rechten W. LBC und LBD, oder betragen zusammen 180^0.

V. Liegen nun fig. 36 über der Geraden CD bei B mehrere W. in einer Ebene, so kann man sie als Theile der Nebenw. ABC und ABD betrachten; weil nun die W. ABC und ABD zusammen 180^0 betragen, so sind auch $m + n + o + p + q = 180^0$.

VI. Es sei fig. 35 von den W. ABC und ABD, oder fig. 36 von den W. m, n, o, p, q bloß bekannt, daß sie zusammen 180^0 betragen. — Dies kann nur die Folge davon sein, daß sie über einer Geraden CD liegen; es müssen also die Schenkel BC und BD zusammen eine Gerade bilden.

VII. Es durchschneiden sich fig. 11 zwei Gerade. Nun ist $d + e = 180^0$, und $f + h = 180^0$, also $d + e + f + h = 360^0$.

VIII. Es liegen fig. 37 mehrere W. um den Punkt C in einer Ebene. Verlängert man den Schenkel AC nach B hin; so betragen sowohl die W. über als unter AB zusammen 180^0, also betragen alle diese W. zusammen 360^0.

IX. In fig. 11 ist ferner $d + e = 180^0$, und auch $e + h = 180^0$; somit ist $d + e = e = h$, folglich $d = h$. — Ebenso ist $d + e = 180^0$, und $d + f = 180^0$, mithin $d + e = d + f$, folglich $e = f$. — Hieraus folgt:

3) a. Zwei schiefe Nebenw. betragen zusammen 180^0.
b. Alle schiefen W. mit gemeinschaftlicher Spitze auf einer Seite einer Geraden betragen zusammen 180^0.
c. Wenn schiefe W. mit gemeinschaftlicher Spitze zusammen 180^0 betragen, so bilden ihre zwei äußern Schenkel eine g. L.
d. Die vier W. beim Durchschnitt zweier Geraden betragen znsammen 360^0.
e. Alle W. um einen Punkt in einer Ebene betragen zusammen 360^0.
f. Scheitelwinkel sind einander gleich.

§. 27.

Gleichlaufende Linien.

Werden fig. 17 die beiden gleichlaufenden Geraden AB und CD von der Linie EF durchschnitten; so fragt es sich: wie die übereinstimmenden W., die innern Wechselw., und die innern Gegenw. beschaffen sind.

I. AB und CD haben gleiche Richtung; also muß AB mit EF solche W. bilden, wie wenn AB an der Stelle von CD läge, folglich ist $m = u$, $n = x$, $o = y$, $p = z$.

Da nun $m = u$, und $m = p$ ist (No. 3 f.), so ist auch $u = p$. Ebenso läßt sich darthun, daß $o = x$ ist.

Anm. Wie die Gleichheit der W. p und u mit Hilfe des W. m erwiesen worden ist, so kann es auch mit Hülfe des W. z geschehen. Aehnliches findet in Bezug auf die W. o und x Statt.

Es ist ferner $m + o = 180^0$ (No. 3, a); weil aber $m = u$, so ist auch $u + o = 180^0$. Auf gleiche Weise findet man $p + x = 180^0$.

Anm. Der Schüler zeige auch mit Hilfe des W. y, oder p oder x, daß $o + p = 180^0$, dann mit Hilfe des W. n, oder z, oder o, oder u, daß $p + x = 180^0$.

Anm. Die bewiesenen drei Eigenschaften gleichlaufender Linien sind von einander unzertrennlich; keine findet ohne die beiden anderen Statt.

II. Es seien umgekehrt die Geraden AB und CD von EF durchschnitten, und es sei $m = u$, oder $o = x$ oder $o + u = 180^0$. Ist aber eine dieser drei Eigenschaften vorhanden, so kann es nur daher rühren, daß AB # CD ist.

Anm. Die Eigenschaften gleichlaufender L. sind also umgekehrt auf wieder Kennzeichen der Parallelität.

III. Es seien fig. 38 die Geraden AB und CD senkrecht zu EF. — Dann ist $x = 90^0$, und $y = 90^0$, also $x + y = 180^0$, mithin ist AB # CD (II).

IV. Es sei umgekehrt AB # CD, und AB senkrecht zu EF. — Dann ist $x + y = 180^0$, und $x = 90^0$, also auch $y = 90^0$ und demnach CD ebenfalls senkrecht zu EF.

V. Es sei fig. 39 AB # CD, und AB # EF; ist dann auch CD # EF? — Man ziehe GH; nun ist $m = n$, und $m = p$, also $n = p$, daher CD # EF.

VI. In fig. 40 seien die Schenkel der W. u und x wechselweise #, und zwar AB # DE, und AC # DF; wie sind die W. u und x beschaffen? — Verlängere AC und DE bis zum Treffpunkt G; dann ist $u = m$, und $x = m$, folglich $u = x$.

4) a. Werden zwei gleichlaufende Gerade von einer dritten Linie durchschnitten: so sind die übereinstimmenden W. einander gleich, die innern Wechselw. sind gleich, und die innern Gegenw. betragen zusammen 180^0.

b. Zwei g. L. sind gleichlaufend: wenn die übereinstimmenden oder die innern Wechselw. gleich sind, oder wenn die innern Gegenw. zusammen 180^0 betragen.

c. Wenn zwei g. L. zu einer dritten senkrecht stehen, so sind sie unter sich gleichlaufend.

d. Ist eine von zwei Parallelen zu einer dritten Geraden senkrecht, so ist auch die zweite Parallele zu derselben senkrecht.

e. Sind zwei Gerade wechselweise mit einer dritten Linie gleichlaufend, so sind sie auch unter sich selbst gleichlaufend.

f. Wenn die Schenkel zweier W. (nach derselben

Seite hin) wechselweise unter sich gleichlaufend sind; so sind die W. gleich.

§. 28.

Die Winkel geradliniger Figuren.

I. Es sei fig. 41 das Dk. ABC ohne besondere Eigenschaften. Verlängert man die Seite AC nach E, wie verhält sich dann der W. BCE zu den W. des Dk.? — Man ziehe die Gerade CD # AB; dann ist W. A = Wx, und W. B = W. u (No. 4, a), also A + B = x + u; weil aber x + u = W. BCE, so ist auch A + B = W. BCE.

II. Es ist ferner BCE + m = 180⁰ (No. 3, a); weil aber A + B = BCE, so kann man A + B für W. BCE setzen, also ist auch A + B + m = 180⁰.

III. Ist nun ein W. eines Dk. = 90⁰, so sind seine beiden andern W. zusammen = 90⁰, also muß jeder derselben spitz sein. — Beträgt ein W. des Dk. mehr als 90⁰, so sind die beiden andern zusammen kleiner als 90⁰, folglich ist jeder spitz. — Jeder der 3 W. eines Dk. kann kleiner als 90⁰ sein. — Kein W. des Dk. kann über 180⁰ betragen oder erhaben sein.

IV. Ist z. B. der W. A = 42⁰; so ist B + m = 180⁰ — 42⁰ = 138⁰. — Ist aber umgekehrt z. B. B + m = 126⁰, so ist A = 180⁰ — 126⁰ = 54⁰.

V. Ist in jedem von zwei Dken. ein W. = 42⁰; so sind in jedem derselben auch die beiden andern W. zusammen = 180⁰ — 42 = 138. — Sind in jedem von zwei Dken 2 W. zusammen = 126⁰, so ist auch in jedem derselben der 3te W. = 180⁰ — 126⁰ = 54⁰. — Hieraus folgt:

5) a. Zwei W. eines Dk. sind zusammeu dem äußern Nebenw. des dritten Dreiecksw. gleich.
   b. Die drei W. eines Dk. betragen zusammen 180⁰.
   c. Die beiden W. an der Hypotrause des rechtwinkligen Dk. betragen zusammen 180⁰.
   d. Ein Dk. kann nur einen rechten, nur einen stumpfen, aber drei spitze, keinen erhabenen,

nur einen rechten und stumpfen W. zugleich enthalten.

e. Ein W. des Dk. bestimmt die Summe der beiden andern W.; die Summe zweier W. bestimmt den dritten.

f. Haben Dke. einen W. gleich, so haben sie auch die Summe der beiden andern W. gleich; und haben Dke. die Summe zweier W. gleich, so haben sie auch den dritten W. gleich.

Anm. Ein Dreieckw. betrage 27^0, 39^9, 56^0, 65^0, 84^0, 97^0, 109^0, $32^0\ 16'$, $43^0\ 25'$, $62^0\ 48'$, 78^0, $36'$, $117^0\ 15'$; wie groß ist die Summe der beiden andern W.? — — Es sei in einem Dk. der erste W. $= 27^0$, der 2te $= 88^0$; der 1ste $= 46^0$, der 2te $= 73^0$; der 1ste $= 54^0$, der 2te $= 67^0$; der 1ste $= 34^0\ 20'$, der 2te $= 76^0\ 12'$, der 1ste $= 25^0\ 42'$, der 2te $= 94^0\ 53'$, der 1ste $= 88^0\ 45'$, der 2te $= 37^0\ 18'$; wie groß ist in jedem Fall der dritte W.?

VI. Es sei fig. 42 das Vk. ABCD ohne besondere Eigenschaften. Man ziehe die Gehre AC; sie zerlegt das Vk. in 2 Dke. Die W. eines jeden dieser beiden Dke. betragen 180^0. Die W. beider Dke. sind also zusammen $= 2 \times 180^0$, sie machen aber zusammen die W. des Vks. aus, folglich betragen auch die W. des Vks. zusammen $2 + 180^0 = 360^0 = 4$ R.

VII. Es sei fig. 43 das Fk. ABCDE ohne besondere Eigenschaften. Man ziehe die Gehren AC und AD; sie zerlegen dasselbe in 3 Dke. Die W. der Letzteren betragen zusammen 3×180^0; sie machen aber zusammen die W. des Fks aus; folglich betragen auch alle W. des Fks. zusammen $3 \times 180^0 = 6$ R. $= 540^0$.

VIII. Es sei fig. 44 das Sechseck ABCDEF ohne besondere Eigenschaften Die Gehren AC, AD, AE, theilen dasselbe in 4 Dke., deren W. zusammen 4×180^0 betragen. Da aber die sämmtlichen W. der 4 Dke. die W. des Sechsecks ausmachen, so sind auch die Letzteren zusammen $4 \times 180^0 = 8$ R. $= 720^0$.

6) a. Die W. eines Vks. betragen zusammen 4 R. oder 360^0.

b. Die W. eines Fks. betragen zusammen 6 R. oder 540^0.

c. Die W. eines Sechsekks betragen zusammen 8 R. oder 720°.

IX. In einem Vielekk, z. B. in dem Siebenekk fig. 45 kann man aus A nach B und G keine Gehren ziehen. Es fallen also 3 Punkte (der erste, zweite und letzte) außer Rechnung, und es sind nur nach den übrigen 4 Punkten Gehren möglich. — Die nämlichen 3 Punkte geben auch bei jedem andern Vielekk keine besondere Gehre. Die Anzahl der Gehren ist also um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten.

Anm. Der Schüler zeichne ein 8, 9, 10ekk und ziehe die möglichen Gehren.

X. Die Gehre AC schneidet das erste Dk. ABC ab; die zweite Gehre AD erzeugt ebenso das 2te Dk. ACD, die 3te AE das 3te Dk. ADE, die 4te AF aber das 4te und 5te Dk. AEF und AFG. Da das Siebenekk 4 Gehren hat, so theilen sie dasselbe in 4 + 1 = 5 Dke. — So schneidet auch in jedem Vlk. jede Gehre ein Dk. ab, und nur die letzte Gehre erzeugt 2 Dke. Da nun ein Vlk. 3 Gehren weniger als Seiten hat, und die Theilung ein Dk. mehr erzeugt, als es Gehren sind; so ist die Anzahl der Dke. um 2 kleiner als die Anzahl der Seiten.

Anm. Dies ergibt sich auch so: Außer der ersten und letzten Seite AB und AG liegt jede Seite des Vlks. in einem besondern Dk; mithin sind es 2 Dke. weniger als Seiten.

XI. Da die W. jedes Dks. 180° betragen und die W. aller Dke., in welche das Vlk. durch die Gehren zerlegt ist, die W. des Vlks selbst ausmachen; so muß man 180° mit der (unter X angegeben) Anzahl der Dke. vervielfachen, um den Betrag sämmtlicher W. des Vlks. zu finden.

7) a. In jedem Vielekk ist die Anzahl der aus einer Winkelspitze möglichen Gehren um 3 kleiner als die Anzahl seiner Seiten.

b. Die Anzahl der durch diese Gehren entstehenden Dke. ist um 2 kleiner als die Anzahl der Vielekksseiten.

c. Der Betrag aller W. eines Vlks. wird gefunden, wenn man 180^0 mit der Zahl vervielfacht, welche um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Vielekksseiten.

Anm. Bezeichnet n die Anzahl der Seiten eines Vlks.; so ist die Anzahl der aus einer W.Spitze möglichen Gehren $= n - 3$, die Anzahl der dadurch entstehenden Dke. $= n - 2$, der Betrag aller W. des Vlks. $= (n - 2).180^0$

Anm. Der Betrag aller W. eines Vlks. läßt sich auch auf folgende Weise finden. Aus einem beliebigen Punkte, z. B. fig. 46 im Siebenekk aus dem Punkte q ziehe man g. L. nach allen Wspitzen. Dadurch entstehen 7 Dke.; ihre W. sind zusammen $= 7 . 180^0$; davon sind abzuzählen die W. um den Punkt q mit $360^0 = 2 \times 180^0$, also erhält man alle W. des Siebenekks $= 7 . 180^0 - 2 . 180^0$ 5 $= . 180^0$.

§. 29.

Bestimmung und Einerleiheit geradliniger Figuren.

Wenn alle W. und Seiten einer geradlinigen Figur (ihrer Größe nach festgesetzt, d. h.) bestimmt sind; so hat auch die Figur eine bestimmte Gestalt und Größe, d. h. es ist dann nur eine Figur möglich. — Es fragt sich nun, ob zur Bestimmung einer Figur die Bestimmung aller ihrer Stükke (Seiten und W.) erforderlich ist, oder ob schon eine gewisse Anzahl der Letzteren dazu hinreicht.

I. Es seien fig. 47 die Seiten AB, AC, BC des Dk. ABC bestimmt. — Die Seite AB gibt 2 Punkte A und B; aus A und B gehen die Seiten AC und BC mit bestimmter Länge, bestimmen also den Punkt C (No. 1, a). Der Punkt C bestimmt mit den Punkten A und B die Richtung der Seiten AC und BC zur Seite AC und unter sich, und dadurch die W. A, B, C. Mithin ist das ganze Dk. bestimmt.

II. Es seien die Seiten AB und AC mit dem W. A bestimmt. — Die Seite AB gibt 2 Punkte, A und B; der W. A bestimmt die Richtung von AC, und die Länge von AC gibt den Punkt C; die Punkte B und C bestimmen die Größe von BC und ihre Richtung zu BA und CA, dadurch aber die W. B und C. Somit ist das ganze Dk. bestimmt.

III. Es sei die Seite AB mit den W. A und B bestimmt. — Die Seite AB gibt wieder 2 Punkte A und B; der W. A bestimmt die Richtung von AC, und der W. B die Richtung von BC. Da nun die Schenkel AC und BC eine Zusammenrichtung haben, so müssen sie, genugsam verlängert, in einem Punkte C sich treffen. Dadurch ergibt sich die Länge der Seiten AC und BC nebst dem W. C; folglich ist das ganze Dk. bestimmt.

Es sei die Seite AB mit den W. A und C bestimmt. — Die W. A und C bestimmen den W. B (No. 5, e.); dadurch ergibt sich der vorige Fall, und somit ist das Dk. ABC ebenfalls völlig bestimmt.

IV. Es seien fig. 49 in dem rechtwinkligen Dk. ABC die Kathete AB und die Hypotenuse BC bestimmt. — Die Kathete AB gibt die Punkte A und B; der rechte W. A gibt die Richtung der Kathete AC. Aus dem Punkte B geht die Hypotenuse BC mit bestimmter Länge, trifft deßhalb die Kathete AC und bestimmt den Punkt C. Dadurch erhält man die Länge von AC nebst den W. B und C; folglich ist das ganze Dk. bestimmt. — H. f.

8) Das Dreiekk ist bestimmt:
  a. Durch seine drei Seiten;
  b. durch 2 Seiten mit dem eingeschlossenen W.;
  c. durch eine Seite mit 2 W. (den beiden anliegenden, oder einem anliegenden und einem gegenüberliegenden W.)
  d. Das rechtwinklige Dk. ist durch die Hypotenuse und eine Kathete bestimmt.

V. Es sei fig. 47 und 48 in den Dken. ABC und DEF nun AB = DE, AC = DF, BC = EF. — Da ein Dk. durch seine drei Seiten völlig bestimmt ist (No. 8 a), also die 3 bestimmten Seiten nur ein Dk. von bestimmter Gestalt und Größe möglich machen; so kann das Dk. DEF vom Dk. ABC gar nicht verschieden, sondern nur eine Wiederholung des Letzteren sein, und es ist daher auch W. A = W. D, W. B = W. E, W. C = W. F. (No. 2, c). Die gleich gefundenen W. liegen den gleich angenommenen Seiten gegenüber.

Dreiekke, in welchen alle Seiten und W. wechselweise gleich sind, heißen einerlei (identisch, kongruent). Ebenso heißen auch alle übrigen geradlinigen Figuren einerlei, wenn sie alle Seiten und W. in der gleichen Reihenfolge wechselweise gleich haben.

VI. Es sei in den nämlichen Dken. AB = DE, AC = DF, W. A = W. D. — Da nun jedes Dk. durch die angegebenen 3 Stükke bestimmt ist (No. 8, b). so kann das Dk. DEF nur eine Wiederholung des Dks. ABC sein; es ist daher zunächst BC = EF, und deßhalb auch W. B = W. E, und W. C = W. F (§. 29. V.); folglich sind die Dke. ABC und DEF einerlei.

VII. Es sei ferner AB = DE, W. A = W. D, W. B = W. E. — Zunächst ist nun W. C = W. F (No. 5, f.). Dann ist jedes Dk. durch die angenommenen 3 Stükke bestimmt (No. 8, c), also ist das Dk. DEF eine Wiederholung des Dks. ABC. Es wird aber in beiden Dkn. durch die gleich angenommenen Stükke das Seitenpaar AC und DF auf gleiche Weise bestimmt, also ist AC und DF. Aus gleichem Grunde ist BC = EF. Beide Dke. sind sonach einerlei, und dabei haben sich die Seiten als gleich ergeben, welche den gleich angenommenen W. gegenüber liegen.

Ist hingegen AB = DE, W. A = W. D, W. C = W. F; so ergibt sich zunächst W. B = W. E (No. 5. f.), wonach wieder der vorige Fall eintritt, also wie vorhin die Dke. einerlei sind.

VIII. Fig. 49 und 50 in den rechtw. Dken. ABC und DEF sei AB = DE, BC = EF. — Weil das rechtw. Dk. durch die angenommenen Stükke bestimmt ist (No. 8, d), so ist das Dk. DEF eine Wiederholung des Dk. ADC; mithin ist zunächst AC = DF, und nun wegen der Gleichheit aller Seiten auch W. B = W. E, und W. C = W. F. Beide rechtw. Dke. sind folglich einerlei. —

IX. Man ziehe fig. 47 und 48 in den einerlei Dkn.

ABC und DEF die Senkrechten CG und FH. Es haben die rechtw. Dke. ACG und DEG nun AC = DF, W. A = D, und die rechten W. bei G und H gleich, sind also einerlei, daher CG = FH. H. f.

9) Dreiekke sind einerlei, wenn sie wechselweise gleich haben:
   a. alle drei Seiten,
   b. zwei Seiten mit dem eingeschlossenen W.,
   c. eine Seite mit den 2 entsprechenden W. (d. h. mit den beiden anliegenden W., oder einem anliegenden und einem gegenüberliegenden W.)
   d. Rechtwinklige Dke. sind einerlei, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete wechselweise gleich haben.
   e. Einerlei Dke. haben in Bezug auf die entsprechenden Seiten gleiche Höhe.

Anm. In diesen 4 Säzen hat sich jedes Mal aus der Gleichheit der 3 angenommenen Stükke die Gleichheit der 3 übrigen Stükke ergeben, und es wurde somit die Einerleiheit erwiesen. In der Anwendung dieser 4 Säze wird nunmehr immer aus der Gleichheit der 3 Bedingungsstükke auf die Einerleiheit der Dke. geschlossen, welche dann auch die Gleichheit der übrigen 3 Stükke einschließt. Dabei ist als Haupteigenschaft der Einerleiheit zu bemerken, daß den gleichen Seiten gleiche W., und den gleichen W. gleiche Seiten gegenüberliegen oder entsprechen.

X. Es seien fig. 51 in dem Trapezoid ABCD die 4 Seiten mit dem W. A bestimmt. — Die Seite AD gibt 2 Punkte A und D; der W. A bestimmt die Richtung von AB, und die Länge von AB den Punkt B. Aus B und D gehen die Seiten BC und DC mit bestimmter Länge, treffen sich also und bestimmen den Punkt C; dadurch erhält man die Richtung der Seiten BC und DC unter sich und zu den Seiten AB und CD, also die W. B, C, D; folglich ist das Trapezoid völlig bestimmt.

Anm. Die Seiten BC und DC bilden im Vk. einen hohlen W.; sie könnten aber mit ihrer nämlichen Länge auch einen erhabenen W. bilden. In einem einzelnen Falle, wo die zur Bestimmung des Vks. erforderlichen Stükke aufgenommen werden sollen, ist die Beschaffenheit der W. bekannt.

XI. Es seien die Seiten AB, AD, DC mit den W. A und D bestimmt. — Die Seite AD gibt die Punkte A und D; der W. A gibt die Richtung von AB, und die Länge von AB den Punkt B; der W. D gibt die Richtung von DC, und die Länge von DC den Punkt C; die Punkte B und C bestimmen die Länge und Richtung von BC; durch die Richtung von BC zu BA und CD ergeben sich die W. B und C; folglich ist das ganze Vk. bestimmt.

XII. Es seien die Seiten AB und AD nebst den W. A, B, D bestimmt. — Die Seite AD gibt die Punkte A und D, der W. A die Richtung von AB und die Länge von AB den Punkt B; die W. B und D bestimmen die Richtung von BC und DC, diese müssen sich also in einem Punkte treffen, bestimmen so den Punkt C, und dadurch gegenseitig ihre Länge nebst dem W. C. Es ist folglich das ganze Vk. bestimmt.

XIII. Es seien fig. 52 in dem Fünfekk ABCDE alle 5 Seiten nebst den W. A und B bestimmt. — Die Seite AB gibt die Punkte A und B; der W. A gibt die Richtung von AE, und die Länge von AE den Punkt E, der W. B die Richtung von BC und die Länge von BC den Punkt C. Aus den Punkten C und E gehen die Seiten CD und ED mit bestimmter Länge, treffen sich also und bestimmen den Punkt D; dadurch ergibt sich die Richtung der Seiten CD und ED, somit erhält man die W. C, D und E; folglich ist das ganze Fünfekk bestimmt.

XIV. Es seien die Seiten AE, AB, BC, CD nebst den W. A, B, C bestimmt. — Die Seite AB gibt die Punkte A und B; der W. A gibt die Richtung von AE, die Länge von AE den Punkt E; der W. B gibt die Richtung von BC und die Länge von BC den Punkt C; der W. C gibt die Richtung von CD und die Länge von CD den Punkt D; die Punkte D und E bestimmen die Länge und Richtung von DE, und Letztere führt zu den W. D und E; folglich ist das ganze Fünfekk bestimmt.

XV. Es seien die Seiten AB, AE, BC nebst den W. A, B, C, E bestimmt. — Die Seite AB gibt die

Punkte A und B; der W. A mit der Länge von AE führt zu dem Punkt E, der W. B mit der Länge von BC zu dem Punkte C. Die W. C und E geben die Richtung von CD und ED, die sich in D treffen; dadurch erhält man die Länge von CD und ED und den W. D; folglich ist das ganze Fünfekk bestimmt.

XVI. In X, XI, XII, so wie in XIII, XIV, XV wurden alle Punkte mit Ausnahme des letzten auf die nämliche Weise gefunden; der letzte Punkt aber ließ sich auf dreifachem Wege bestimmen. In dem Sechsekk fig. 53 kann man ebenso durch die Seite AB die Punkte A und B, durch den W. A und die Länge von AF den Punkt F, durch den W. B und die Länge von BC den Punkt C, durch den W. C und die Länge von CD den Punkt D finden. So weit bedurfte es der 4 Seiten AF, AB, BC, CD und der 3 W. A, B, C. Nun bleibt noch der letzte Punkt E zu bestimmen. Dieser ergibt sich entweder durch die Länge der von D und F ausgehenden und sich treffenden Seiten DE und FE, wodurch man zugleich die W. D, E, F erhält; oder durch den W. D und die Länge von DE, womit man zugleich die Seite EF und die W. E und F erhält; oder durch die W. D und F, deren obere Schenkel in E sich treffen, wodurch man zugleich die Seiten DE und FE nebst dem W. E erhält. —

10) a. Das Vk. ist bestimmt durch 4 Seiten und 1 W., oder durch 3 Seiten mit den 2 eingeschlossenen W., oder durch 2 aneinander liegende Seiten mit dem eingeschlossenen und den 2 anliegenden W.

b. Das Fk. ist bestimmt durch 5 S. und 2 an einer Seite liegende W., oder durch 4 S. mit den 3 eingeschlossenen W., oder durch 3 an einander liegende S. mit den 2 eingeschlossenen und 2 anliegenden W.

c. Das Sechsekk ist bestimmt durch 6 S. mit 3 auf einander folgenden W., oder durch 5 S. mit den 4 eingeschlossenen W., oder durch 4 an einander liegende S. mit den 3 eingeschlossenen und 2 anliegenden W.

1. Anm. Aus Obigem, namentlich aus der Darlegung in XVI ergibt sich, wie zur Bestimmung jedes Vielekks alle seine Stükke mit Ausnahme von dreien erforderlich sind. Diese 3 Stükke sind: 3 auf einander folgende W., oder 1 Seite mit den 2 anliegenden W., oder 2 S. mit dem eingeschlossenen W.

2. Anm. Wie die zur Bestimmung des Dks. erforderlichen Stükke die Einerleiheit (Indentität, Kongruenz) der Dke. bedingen; so läßt sich leicht nachweisen, daß auch die zur Bestimmung der übrigen geradlinigen Figuren erforderlichen Stükke die Einerleiheit derselben bedingen.

3. Anm. Aus den allgemeinen Sätzen kann der Schüler leicht auffinden, welche Stükke die besonderen Dke. und Vke. bestimmen.

Unter die Bestimmungsstükke der in No. 10 angegebenen Figuren lassen sich statt der W. auch Gehren aufnehmen.

XVII. Man kann in dem Vk. fig. 42 durch die Seite AD die Punkte A und D, durch die Gehre AC und die Seite DC den Punkt C (No. 1, a), durch die Seiten AB und CB den Punkt B bestimmen.

Oder die Punkte A, D, C ergeben sich in fig. 54 wie vorher, und man bestimmt den Punkt B durch die Seite AB und die Gehre DB.

XVIII. In dem Fk. fig. 43 kann man durch die Seite AE die Punkte A und E, durch AD und ED den Punkt D, durch AC und DC den Punkt C, durch AB und CB den Punkt B bestimmen.

Oder fig. 55. der Punkt C läßt sich durch die Gehren AC und EC bestimmen. Alles Uebrige bleibt wie vorher.

Oder der Punkt B wird fig. 56 durch AB und EB bestimmt. Im Uebrigen bleibt das vorige Verfahren unverändert.

XIX. Im Sechsekk fig. 44 gibt AF die Punkte A und F. Dann bestimmt man den Punkt E durch AE und FE, den Punkt D durch AD und ED, den Punkt C durch AC und DC, den Punkt B durch AB und CB.

Es läßt sich auch der Punkt D durch AD und FD, der Punkt C durch AC und FC, der Punkt B durch AB und FB bestimmen. — H. f.

11) a. Das Vk. ist bestimmt durch 4 S. und 1 Gehre, oder durch 3 S. und 2 Gehren.
b. Das Fk. ist bestimmt durch 5 S. und 2 G. oder durch 4 S. und 3 G., oder durch 3 an einander liegende S. und 4 G.
c. Das Sechsekk ist bestimmt durch 6 S. und 3 G., oder durch 5 S. und 4 G., oder durch 4 an einander liegende S. und 5 G.

1. Anm. Die Wahl der Gehren ist nicht willkürlich, sondern muß so geschehen, daß sie mit Hilfe der Seiten alle Winkelpunkte der Figur bestimmen. Außer den Endpunkten der ersten Seite sind für jeden der übrigen Punkte 2 Linien erforderlich. Es wäre z. B. das Fk. fig. 55 nicht bestimmt, wenn neben den andern obigen Stükken statt AD die G. BD gegeben wäre; denn der Punkt D ließe sich nicht finden.

2. Anm. Die Schüler zeichnen Dke., Vke., u. s. w. im 1000fach oder 10000fach u. s. w. verkleinerten Maßstabe, wozu ihnen die Bestimmungsstükke in bestimmter Größe angegeben werden.

XX. Vermittelst der nach Lsz. 8, 10 und 11 erforderlichen Stükke, die gemessen werden müssen, lassen sich geradlinige Ebenen im verjüngten Maßstabe abbilden. Soll aber eine Ebene von unregelmäßiger Form wie fig. 57 abgebildet werden; so untersuche man zuerst, welche geradlinige Figur ihr am nächsten kommt. Hier ist es das Fünfekk. Dieses wird nun zunächst bestimmt. Hierauf betrachtet man die Seiten des Fks. als Abscissenlinien (§. 25) und mißt die Abscissen A 1, A 2, A 3,... mit ihren Ordinaten a 1, b 2, c 3 u. s. w., um in hinreichender Zahl solche Punkte zu erhalten, durch welche die Gestalt der Ebene sich bestimmen läßt.

XXI. Einerlei Figuren heißen symmetrisch, wenn ihre einander entsprechenden Punkte nicht auf der nämlichen, sondern auf der entgegengesetzten Seite (also nicht links oder rechts zugleich, sondern je links und rechts) liegen. So wären die Dke. fig. 47 und 48 symmetrisch, wenn der Punkt D nicht links wie A, sondern rechts von E läge.

§. 30.

Besondere Eigenschaften der Dreiekke.

I. In fig. 58 sei LMP ein gleichschenkliges Dk., und und zwar ML = MP; wie sind die W. L und P beschaffen? — Man ziehe als Hilfslinie die Gerade MO in die Mitte von LP. In den Dken. LMO und PMO ist dann LM = MP, LO = OP, MO = MO, also sind sie einerlei (No. 9, a), folglich W. L = W. P. — Da beide W. zusammen weniger als 180^0 betragen (No. 5, b), so ist jeder kleiner als 90^0, also ein spitzer W.

Anm. Die Gleichheit der S. LM und PM bedingt die Gleichheit der W. L und P; oder die Gleichheit der S. LM und PM ist der Grund (die Annahme), und die Gleichheit der W. L und M ist die daherige Folge. Diese Folge hat aber keinen andern Grund, folglich läßt sich aus der Folge auch wieder der Grund erkennen; oder wo die Folge vorkommt, da muß auch der Grund als vorhanden vorausgesetzt werden. — Aus dem Steigen oder Fallen des Barometres (als Folge) schließt man auf eine Veränderung in der Luft (als Grund). Hierauf gründet sich das Folgende.

Es sei umgekehrt von dem Dk. LMP bloß angenommen, daß W. L = W. P ist. — Dies kann nur daher rühren, (oder nur die Folge von dem Grunde sein) daß LM = PM ist.

II. Im gleichseitigen Dk. müssen daher (nach I). auch alle W. gleich sein; und da sie zusammen 180^0 betragen, so ist jeder derselben = 60^0.

Hat aber umgekehrt ein Dk 3 gleiche W., so müssen (nach II). auch seine Seiten gleich sein.

III. Im gleichschenklig=rechtwinkligen Dk. müssen (wegen I). auch die beiden W. an der Hypotenuse einander gleich sein. Da sie aber zusammen 90^0 ausmachen (No. 5, c), so beträgt jeder derselben 45^0. — H. f.

12) a. Sind 2 S. eines Dks. gleich, so liegen ihnen gleiche spitze W. gegenüber, oder an der Grundlinie des gleichschenkligen Dks. liegen gleiche spitze W. — Umgekehrt gleichen W. eines Dks. liegen gleiche Seiten gegenüber.

b. Jeder W. des gleichseitigen Dks. beträgt 60^0;

und umgekehrt ein gleichwinkliges Dk. ist auch gleichseitig.

c. Jeder W. an der Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dks. beträgt 45^0.

IV. In dem gleichschenkligen Dk. ABC fig. 59 gehe aus dem Scheitel B die Gerade BD senkrecht zur Grundlinie AC. — Die rechtwinkligen Dke. ABD und CBD haben nun AB = BC und BD = BD, sind also einerlei (No. 9, d), daher ist AD = CD, und W. o = W. p.

Umgekehrt werde die Grundlinie AC von der Geraden BD halbirt. Dies kann nur eine Folge davon sein, daß BD zu AC senkrecht ist; dann muß aber auch wieder wie vorhin W. o = W. p sein.

Es halbire BD den W. B, oder es sei W. o = W. p. — Dies kann ebenfalls nur eine Folge davon sein, daß BD zu AC senkrecht ist; dann muß aber auch wieder wie oben AD = CD sein. — H. f.

13) a. Geht im gleichschenkligen Dk. eine Senkrechte aus dem Scheitel auf die Grundlinie; so halbirt sie dieselbe und den W. am Scheitelpunkt.

b. Halbirt im gleichschenkligen Dk. eine Gerade vom Scheitel aus die Grundlinie; so ist sie senkrecht zu derselben und halbirt auch den W. am Scheitelpunkt.

c. Halbirt eine Gerade den W. am Scheitel des gleichschenkligen Dks; so ist sie senkrecht zur Grundlinie und halbirt dieselbe.

Anm. Die Beweise für die Sätze unter b und c können auch unmittelbar auf ähnliche Weise wie für den Satz a geführt werden. Die Schüler mögen diese Beweise aufsuchen. —

V. Im rechtwinkligen Dk. fig. 60 theile die Gerade EL den rechten W. so, daß W. m = W. F und W. n = W. H ist. — Im Dk. EIL ist dann EL = FL und im Dk. ELH ebenso EL = LH (No. 12, a), folglich ist FL = LH; also ist FH in L halbirt, und EL = $1/2$ FH.

VI. Die Gerade EL halbire nun umgekehrt die Hypotenuse FH. Dies kann aber (nach V) nur Statt finden, wenn EL den rechten W. E so theilt, daß W. m = W. F, und W. n = W. H ist. Theilt aber EL in dieser Weise den W. E, so muß auch EL = $1/2$ FH sein (nach V).

VII. Es sei vom Dk. EFH keine weitere Eigenschaft bekannt, als daß EL aus der Mitte der Seite FH nach E gehe, und daß zugleich EL = $1/2$ FH sei. — Da nun EL = FL, und EL = FH, so ist W. m = W. F, und W. n = W. H (No. 12, a), daher m + n = F + H, oder E = F + H, also E = 90^0.

VIII. In dem rechtwinkl. Dk. ABC fig. 61 sei der W. C = 30^0. — Man ziehe aus dem rechten W. A die Hilfslinie AD in die Mitte der Hyp. BC. Weil W. C = 30^0, so ist W. B = 60^0; und weil AD = BD (oben VI oder No. 14 b), so ist W. u = W. B, also auch u = 60^0, es ist daher im Dk. ABD auch der 3te W. x = 60^0, folglich AB = BD = $1/2$ BC.

IX. Ist umgekehrt im Dk. ABC die Kathete BC = $1/2$ BC; so muß dies die Folge davon sein, daß der ihr gegenüberliegende W. C = 30^0 ist. — H. f.

14) a. Wenn im rechtw. Dk. eine Gerade den rechten W. so theilt, daß jeder Theil dem andern an der nämlichen Kathete liegenden W. gleich ist; so halbirt sie die Hypot. und ist halb so groß als dieselbe.

b. Wenn im rechtw. Dk. eine Gerade aus dem rechten W. die Hypot. halbirt; so ist sie halb so groß als dieselbe.

c. Wenn eine Gerade aus einem Dreieckśw. die gegenüberliegende Seite halbirt und halb so groß ist als dieselbe; so ist jener W. = 90^0.

d. Beträgt ein W. an der Hyp. 30^0; so ist die ihm gegenüberstehende Kathete der halben Hypotenuse gleich.

e. Ist eine Kathete halb so groß als die Hyp., so beträgt der ihr gegenüberliegende W. 30^0.

X. In fig. 62 gehen im gleichseitigen Dk. ABC aus den W. A und B die Senkrechten AD und BE nach den Seiten BC und AC; sie durchschneiden sich im Punkte G; geht nun eine 3te Senkrechte aus C nach AB ebenfalls durch G? Man ziehe zunächst aus C durch G die Gerade CF. Die Seiten AC und BC sind gleich und werden von BE und AD halbirt (No. 13, a), also ist CE = CD;

und weil CG = CG, so sind die rechtwinkl. Dke. CEG und CDG einerlei (No. 9, d), mithin ist GE = GD, und W. m = W. n, somit CF senkrecht zu AB (No. 13, c). Die Richtung der Senkrechten aus C ist durch den Punkt G bestimmt; wenn also aus C eine Senkrechte nach AB gehen soll, so muß sie auch immer durch den Punkt G gehen. Somit durchschneiden sich die 3 Senkrechten aus A, B und C in einem Punkte.

XI. Ferner sind die rechtwinkl. Dke. AGE und AGF einerlei, weil AG = AF und AG = AG (No. 9, d), also ist GE = GF; weil aber (aus X) auch GD = GE, so ist GD = GE = GF, und somit ist G der Mittelpunkt der Dksseiten. — Weiter sind die W. A, B, C gleich (No. 12, b) und werden von den Senkrechten halbirt (No. 13, a), also sind ihre Hälften gleich, nämlich o = m und p = u, mithin ist GA = GC, und GA = GB (12, a), daher GA = GB = GC, demnach ist G der Mittelpunkt der Winkelspitzen.

Da nun G der Mittelpnnkt der Seiten und Winkelspitzen ist, heißt er Mittelpunkt des ganzen Dks. Die Geraden GD, GE, GF als gleiche Abstände des Mittelpunkts von den Seiten heißen Seitenhalbmesser; die Geraden GA, GB, GC als gleiche Abstände des Mittelpunkts von den Winkelspitzen heißen Winkelhalbmesser.

XII. Endlich ist W. A = 60° (No. 12, b), daher seine Hälfte o = 30°; im rechtw. Dk. AEG ist also EG = ½ AG (No. 14, d),; es ist aber AG = BG, folglich auch EG = ½ BG. Denkt man sich nun BG in 2 gleiche Theile getheilt, so erhält BE dadurch 3 gleiche Theile, und es ist dann EG = ⅓ BE, und BG = ⅔ BE. — H. f.

15) a. Wenn aus den W. des gleichseitigen Dks. Senkrechte auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt werden, so durchschneiden sie sich in einem Punkte.

b. Der Durchschnittspunkt jener 3 Senkrechten ist der Mittelpunkt des gleichseitigen Dks.

c. Der Seitenhalbmesser des gleichseitigen Dks. beträgt ein Drittel, und der Winkelhalbmesser zwei Drittel der ganzen Dkshöhe.

XIII. Da sich in einem Dk. gleiche Seiten und W. gegenseitig bedingen (No. 12); so fragt es sich, wie sich die Seiten und W. im ungleichseitigen Dk. verhalten.

Es sei fig. 63 das Dk. ABC ungleichseitig und zwar BC > AB. — Man schneide von BC ein Stükk BD = AB ab und ziehe AD; dann ist W. u = W. x + W. C (No. 5, a); es ist aber W. u = W. m (No. 12, a), also auch W. m = W. x + W. C, mithin m > C, um so mehr ist m + x > C, od. W. A > W. C.

Es sei umgekehrt W. A > C. — Dies kann nur eine Folge davon sein, daß BC > AB ist. Wenn also W. A > W. C ist, so muß als Grund vorausgesetzt werden, daß BC > AB ist.

XIV. Der größte W. eines Dk. ist ein stumpfer (No. 5, d), ihm liegt also auch die größte Seite gegenüber.

XV. **Im rechtwinkl. Dk. ist der rechte W. der größte** (No. 5, d); also liegt ihm auch die größte Seite gegenüber, nämlich die Hypotenuse.

XVI. Geht daher fig. 64 aus dem Punkte A die Senkrechte AB nebst den Schiefen AC und AD auf die Gerade CD; so sind die Schiefen AC und AD als Hypotenusen größer als AB, oder es ist AB die kleinste von allen Linien, welche aus A nach CD gehen können.

XVII. Es kann aber nur eine der Geraden, die aus A nach CD gehen, die kleinste sein; da nun die Senkrechte AB eben diese kleinste ist, so ist auch aus A auf CD nur eine Senkrechte möglich.

XVIII. Es sei endlich fig. 64 ABC ein Dk. ohne besondere Eigenschaften. Man verlängere AB, mache die Verlängerung BD = BC und ziehe CD. Nun ist W. D = W. u (No. 12, a), also u + x oder W. C > W. D, also im Dk. ADC auch AD > AC (oben XIII), oder AB + BD > AC; weil aber BD = BC, so ist auch AB + BC > AC. H. f.

16) a. Der größern Seite eines Dk. liegt der größere, der kleineren auch der kleinere W. gegenüber, und umgekehrt.

b. Dem stumpfen W. eines Dk. entspricht die größte Seite desselben.
c. Die Hypotenuse ist die größte Seite des rechtwinkl. Dk.
d. Die Senkrechte ist die kleinste unter allen Geraden, welche aus einem Punkte nach einer Geraden gehen.
e. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden ist nach derselben nur eine Senkrechte möglich.
f. Zwei Seiten eines Dks. sind zusammen immer größer als die dritte Seite.

Anm. Der Schüler soll zur Uebung statt der Seiten BC fig. 63 und AB fig. 65 auch andere Seiten für die Beweisführung wählen.

§. 31.

Besondere Eigenschaften der Vierekke.

I. Es sei fig. 66 das Vk. ABCD ein Parallelogramm. Man ziehe AC. Die Dke. ABC und ACD haben nun AC = AC, m = u, n = q (No. 4, a), sind also einerlei (No. 9, c), daher ist AB = CD, AD = BC, W. B = W. D; ferner ist m + n = q + u oder W. A = W. C.

II. Es sei umgekehrt im Vk. ABCD fig. 66 nun W. A = W. C, und W. B = W. D. — Dann ist A + B = C + D; da aber alle 4 W. des Vks. 360^0 betragen, so muß A + B, so wie C + D = 180^0 sein; somit ist AD # BC. — Ebenso ist A + D = B + D = 180^0, also AB # CD (No. 4, b). Mithin ist das Vk. ABCD ein Parallelogramm.

III. Es sei ferner AB = CD, und AD = BC. — Man ziehe AC. Nun sind die Dke. ABC und ACD einerei (No. 9, a), also m = u, und n = q, mithin AB # CD, und AD # BC, folglich das Vk. ABCD ein Parallelogramm.

IV. In dem Vk. ABCD fig. 66 sei endlich AB = und # CD. — Man ziehe AC. Die Dke. ABC und ACD haben nun AB = CD, AC = AC, m = u, sind also einerlei (No. 9, b), daher AD = BC, und

$n = q$, deßhalb auch $AD \# BC$, und also das Vk. $ABCD$ ein Parallelogramm.

V. Man ziehe fig. 66 in dem Parallelogramm $ABCD$ die Gehren AC und BD. — Die Dke. ADG und BCG haben dann $AD = BC$, $n = q$, $x = p$, sind also einerlei, daher ist $AG = CG$, und $BG = DG$. — Ebenso sind die Dke. ABG und CDG einerlei. — H. f.

17) a. Eine Gehre theilt das Parallelogramm in 2 einerleie Dke.;

b. die einander gegenüber liegenden Seiten und W. desselben sind gleich, oder: parallele Linien zwischen parallelen Linien sind gleich.

c. Wenn die einander gegenüberliegenden W. eines Vks. gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

d. Wenn die einander gegenüberliegenden Seiten eines Vks. gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogram, oder: gleiche Linien zwischen gleichen Linien sind parallel.

c. Wenn zwei Seiten eines Vks. perallel und gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm, oder: Linien zwischen gleichen Parallelen sind selbst parallel und gleich.

f. Die Gehren theilen das Parallelogramm in 4 Dke., deren je 2 an den Parallelen einerlei sind, und halbiren sich in ihrem Durchschnittspunkte.

VI. Es sei fig. 67 das Vk. $MNOP$ ein Rechtekk. — Weil dasselbe lauter rechte W. hat, so ist auch W. M = W. O und W. N = W. P, folglich ist dasselbe ein Parallelogramm. (No. 17, c).

Man ziehe nun die Gehren MO und NP. Dieselben halbiren sich (No. 17, f.); im rechtwinkl. Dk. MNP geht also die Gerade MG aus G nach der Mitte der Hypotenuse NP (No. 14, b, daher ist die halbe Gehre $MG = NG = PG$, folglich sind auch die ganzen Gehren MO und NP gleich.

Anm. Ein anderer Beweis für $MO = NP$ ist: die rechtwinkl. Dke. MNP und MOP haben $MP = MP$, $MN = PO$, W. M = W. P, sind also einerlei, daher $MO = NP$.

VII. Das Vk. DEFG fig. 68 sei eine Raute. — Wegen der Gleichheit aller Seiten ist auch GF = DE, und GD = FE, mithin die Raute ein Parallelogramm (No. 17, d).

Man ziehe nun beide Gehren. Dann haben die entstandenen 4 Dke. alle Seiten wechselweise gleich (No. 17, f), sind mithin einerlei, also sind die 4 W. bei H gleich und jeder derselben ist = 90⁰; dann sind die W. a, b, m, n, gleich, also die W. G und E halbirt; ebenso sind die W. o, u, x, y gleich, also die W. D und F halbirt.

Denkt man sich aus H Senkrechte auf die Seiten der Raute, so sind sie als Höhen von einerlei Dkn. ebenfalls gleich (No. 9, e).

VIII. Das Vk. ABCD fig. 69 sei ein Quadrat. — Da dasselbe lauter gleiche W. und Seiten hat, so ist es ein Rechtekk und eine Raute zugleich, hat also auch alle Eigenschaften dieser beiden Figuren. — Zieht man die Senkrechte FG, so halbirt sie AB (No. 13, a), daher ist FG = ½ AB (No. 14, b). — H. f.

18) a. Das Rechtekk ist ein Parallelogramm mit gleichen Gehren; ihr Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt der Winkelspitzen.

b. Die Raute ist ein Parallelogramm; 2 Gehren theilen sie in 4 einerleie Dke., durchschneiden sich senkrecht und halbiren ihre W., der Durchschnittspunkt der Gehren ist der Mittelpunkt der Seiten.

c. Das Quadrat hat gleiche Gehren, die sich senkrecht durchschneiden und seine W. halbiren; ihr Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt des Quadrats; der Abstand dieses Mittelpunktes von einer Seite ist der halben Seite gleich.

IX. Die Vke. fig. 70 und 71 seien Halbrauten, und zwar sei AB = AD, und BC = CD. Man ziehe die Gehre AC. Sind nun AB und AD größer als BC und CD, so ist in den Dkn. ABC und ACD deßhalb u > m, und x > n, also u + x > m + n, oder W. C > W. A.

Die Dke. ABC und ACD haben alle Seiten gleich, sind also einerlei, mithin ist W. B = W. D, m = n, u = x, also sind die W. A und C halbirt.

Man ziehe noch die Gehre BD. Da nun AG (oder AC) den W. A halbirt, so ist AG senkrecht zu BD und halbirt BD (No. 13, c). H. f.

19) a. In einer Halbraute ist der W. zwischen den kleineren Seiten größer als der W. zwischen den größeren Seiten; die W. zwischen den ungleichen Seiten derselben sind gleich.

b. Die Gehre, welche durch die ungleichen W. geht, halbirt dieselben und die andere Gehre.

c. Beide Gehren durchschneiden sich senkrecht.

X. Es sei endlich fig. 71 das Vk. ABCD ein Trapez, und zwar AD # BC. Aus der Mitte E von AB gehe die Gerade EF # AD und BC nach CD; halbirt sie auch CD? — Man verlängere BC und ziehe durch den Treffpunkt F die Gerade GH # AB. Nun ist GF = AE (No. 17, a), AE = EB nach der Annahme, und EB = HF (Nro. 17, a), mithin GF = HF; weil auch W. D = W. u, und W. x = W. H (No. 4, a), so sind die Dke. DFG und CFH einerlei, also DF = CF.

XI. Wenn aber umgekehrt die Gerade EF aus der Mitte E nach der Mitte F geht, so kann Letzteres nur eine Folge der vorigen Bedingung sein, daß auch wieder EF # AD und BC ist.

Anm. Dies läßt sich auch direkt beweisen. Der Schüler soll es versuchen.

XII. Es ist EF = AG und EF = BH. Nun ist BH = BC + CH, aber weil wegen der vorhin (bei X) bewiesenen Einerleiheit der Dke. DGF und CHF auch CH = DG, so ist BH = BC + DG, mithin ebenfalls EF = BC + DG. Zählt man hiezu noch EF = AG, so wird 2 EF = BC + DG + AG = BC + AD, folglich EF = $\frac{1}{2}$ × (AD + BC). — Die Gerade EF heißt die mittlere Breite des Trapezes.

Anm. Dies läßt sich auch beweisen, wenn man durch E und F Senkrechte zu AD und BC zieht. Der Schüler versuche es. — H. f.

20) a. Wenn eine Gerade die eine Nichtparallele des Trapezes halbirt und mit den Parallelen des-

selben gleichlaufend ist; so halbirt sie auch die andere Nichtparallele.

b. Wenn eine Gerade die beiden Nichtparallelen des Trapezes halbirt, so ist sie mit dessen Parallelen gleichlaufend.

c. Die mittlere Breite des Trapezes ist der halben Summe seiner beiden Parallelen gleich.

§. 32.

Ordentliche Vielekke.

I. Es sei BCDEF fig. 73 ein ordentliches Fünfekk und BCDEFG fig. 74 ein ordentliches Sechsekk. — Man halbire die W. B und C, verlängere die Halbirungslinien bis zum Treffpunkt A und ziehe AD, AE, AF, AG. — Da die W. B und C gleich und halbirt sind, so ist a = b, also AB = AC. Die Dke. ACD und ACB haben AC = AC, CD = CB, c = b, sind also einerlei, mithin ist AD = AB; da aber AB = AC, so ist auch AD = AC, also d = c. Es ist aber W. D = W. C, und c = 1/2 W. C, somit auch d = 1/2 W. D = e. — Die Dke. ADE und ADC haben AD = AD, DE = DC, e = d, sind also einerlei, mithin ist AE = AC; da aber AC = AD, so ist auch AE = AD, also f = e. Es ist aber W. E = W. D, und e = 1/2 W. D, somit auch f = 1/2 W. E = g. — Auf gleiche Weise ergibt sich die Einerleiheit der Dke. AEF und AED, daraus AF = AD = AE, und h = i; ferner fig. 74 die Einerleiheit der Dke. AFG und AFE, daraus AG = AE = AF, und m = n. Es sind sonach die sämmtlichen W. der beiden Vielekke halbirt.

Da nun das erste Dk. mit dem 2ten, dieses mit dem 3ten u. s. w. einerlei ist, so sind die sämmtlichen Dke. einerlei; daher sind auch alle W. bei A gleich, so wie alle Geraden aus A oder Winkelhalbmesser.

Zieht (oder denkt) man aus A Senkrechte auf die Vielekksseiten, so sind sie als Höhen von einerlei Dken. ebenfalls gleich (No. 9, e) und heißen deßhalb Seitenhalbmesser. Sie halbiren die W. bei A (No. 13, a). Da nun der Punkt A theils von den Winkelspitzen, theils von den Seiten gleich weit absteht, so ist er der **Mittelpunkt** des Vielekks. Die W. um A herum heißen **Mittelpunktsw.**, und die W. B, C, D u. s. w. im Gegensatze von jenen **Umfangsw.**

II. Ferner ist $a + b + x = 180^0$. Allein $a + b$ machen zusammen einen ganzen Umfangsw. aus, daher ist W. $B + x$ oder W. $C + x = 180^0$.

Das bisher Bewiesene bleibt sich auch bei allen übrigen ordentlichen Vielekken gleich, gilt daher auch für dieselben.

III. In fig. 73 sind alle W. um A $= 360^0$, also $x = \frac{1}{5} \times 360^0 = 72^0$; darum ist W. $B = 180^0 - 72^0 = 108^0$. — **Oder:** Alle Umfangsw. des Fks. sind zusammen $= 3 . 180^0$ (No. 7, c), also z. B. W. B $= \frac{1}{5} \times 3 . 180^0 = 108^0$.

IV. In fig. 74 sind alle W. um A $= 360^0$, also $x = \frac{1}{6} \times 360^0 = 60^0$; daher ist W. $B = 180^0 - 60^0 = 120^0$. — **Oder:** alle Umfangsw. des Sechsekks sind zusammen $= 4 \times 180^0$ (No. 7, c), also W. $B = \frac{1}{6} \times 4 . 180^0 = 120^0$.

In dem Dk. ABC ist $x = 60^0$, und $a = b = \frac{1}{2} . 120^0 = 60^0$; also ist AB oder AC = BC (No. 12, b). H. f.

21) a. Wenn man 2 auf einander folgende W. eines ordentlichen Vlks. halbirt und die Halbirungslinien genugsam verlängert, so ist ihr Treffpunkt der Mittelpunkt des ordentlichen Vlks.

b. Die Winkelhalbmesser halbiren die Umfangsw. des ordentlichen Vlks. und theilen dasselbe in lauter einerlei Dke.

c. Die Mittelpunktsw. sind gleich und werden von den Seitenhalbmessern halbirt.

d. Der Mittelpunktsw. und der Umfangsw. jedes ordentlichen Vlks. betragen zusammen 180^0.

e. Im ordentlichen Fk. beträgt der Mittelpunktsw. 72^0 und der Umfangsw. 108^0.

f. Im ordentlichen Sechsekk beträgt der Mittelpunktsw. 60^0 und der Umfangsw. 120^0; und der Winkelhalbmesser ist der Seite gleich.

1. Anm. Zieht man fig. 73 den Seitenhalbmesser AM, so sind

die W. $x + CAD + DAM = 72^0 + 72^0 + 36^0 = 180^0$, also sind AB und AM eine Gerade BM (No. 3, c); also je ein Winkel- und Seitenhalbmesser, die einander gerade entgegengesetzt sind, bilden eine Gerade; dieselbe heißt Durchmesser. Der Durchmesser BM theilt das ordentliche Fk. in 2 Vke. BCDM und BFEM, welche alle Seiten und W. wechselweise gleich haben, also einerlei sind.

In fig. 74 sind aus gleichem Grunde AB und AE eine Gerade BE; also 2 einander entgegengesetzte W. Halbmesser bilden eine Gerade, und dieselbe heißt Winkeldurchmesser. Dieser theilt das ordentliche Sechsekk in einerlei Hälften, welche Trapeze sind; denn $x = c = i = 60^0$, also BE ≠ CD und FG. –

Ebenso bilden auch je zwei entgegengesetzte Seitenhalbmesser, wie AH und AL eine Gerade, welche daher Seitendurchmesser heißt. HL theilt das Sechsekk in einerlei Hälften, welche Fke. sind.

2. Anm. Wie das Fünfekk, so hat jedes ordentliche Vlk. von ungerader Seitenzahl so viele Durchmesser als Seiten. Jeder Durchmesser besteht aus einem Seiten- und Winkelhalbmesser und theilt das Vlk. in einerlei Hälften.

Wie das Sechsekk, so hat jedes ordentliche Vlk. von gerader Seitenzahl so viele Seiten- und eben so viele Winkeldurchmesser, als Seiten. Jeder derselben theilt ebenfalls das ordentliche Vlk. in einerlei Hälften.

3. Anm. Jedes ordentliche Vlk. ist durch den Winkel- oder Seitenhalbmesser bestimmt. Warum?

4. Anm. Da der Umfangs- und Mittelpunktsw. zusammen 180^0 betragen, Letzterer aber abnimmt, wie die Seitenzahl wächst; so nimmt jener gleichmäßig zu. Dabei muß der Seitenhalbmesser ebenfalls wachsen, also dem Winkelhalbmesser sich immer mehr nähern. Warum?

§. 33.

Der Kreis.

I. Man denke, die Seitenzahl des ordentlichen Vlks. wachse so (unendlich) an, daß der Seitenhalbmesser dem Winkelhalbmesser gleich wird; als letztes ordentliches Vlk. entsteht dann der Kreis mit lauter gleichen Halbmessern, also auch mit lauter gleichen Durchmessern.

Wegen der Gleichheit aller Halbmesser steht jeder

Punkt der Kreislinie vom Mittelpunkt gleichweit ab; deßhalb ist der Kreis durch den Halbmesser oder den (aus zwei Halbmessern bestehenden) Durchmesser bestimmt.

Wie jedes ordentliche Vlk., so wird auch der Kreis von einem Durchmesser in einerlei Hälften getheilt.

Anm. Man kann sich dies versinnlichen. Denkt man fig. 82, den Halbkreis ACD drehte sich um den Durchmesser AD über den Halbkreis ABD hin, so fällt jeder Punkt jener Halbkreislinie wegen des gleichen Abstandes von M in einen Punkt von dieser. Da beide von Anfang bis zu Ende in einander fallen, so sind sie gleich lang.

Zu den Mittelpunktsw. eines ordentl. Vielekks gehörten die Seiten des Letzteren als gleiche Theile des Umfangs. Auch zu entsprechenden Theilen der Mittelpunktsw. eines Vlks. gehören gleiche Theile der Seiten oder des Umfangs. Gleiches findet beim Kreise Statt. Sind fig. 75 die W. m und n gleich, und zieht man die Sehnen BC und DE; so haben die Dke. ABC und ADE zwei Seiten mit dem eingeschlossenen W. gleich, sind also einerlei, daher ist BC = DE. Also stehen die Endpunkte B und C gleich weit von einander ab, wie die Endpunkte D und E; auch ist jeder Punkt des Bogens BC gleich weit von A entfernt, wie jeder Punkt des Bogens DE, also müssen beide Bogen gleich sein.

Anm. Zur Veranschaulichung denke man den Ausschnitt ADE auf den Ausschnitt ABC gelegt, so daß AD in AB fällt. Weil m = n, so muß AE auf AC sich legen. Es trifft also der Punkt D mit B, und E mit C zusammen. Da beide Bogen allenthalben von A gleichweit abstehen, so müssen sie in ihrer ganzen Ausdehnung zusammenfallen, also gleich sein.

Ist umgekehrt BC = DE, so ist als Grund vorauszusetzen, daß m = n ist. Ist aber m = n, so muß auch wieder Bog. BC = Bog. DE sein.

Ist Bog. BC = Bog. DE; so ist als Grund vorauszusetzen, daß m = n ist. Hat man aber m = n, so muß auch wieder Sehne BC = Sehne DE sein. H. f.

22) a. Der Kreis hat gleiche Halbmesser und gleiche Durchmesser.

b. Er ist durch seinen Halbmesser oder Durchmesser bestimmt.

c. der Durchmesser theilt den Kreis in einerlei Hälften.

d. Gleichen Mittelpunktsw. entsprechen gleiche Sehnen und gleiche Bogen; und umgekehrt.

Anm. Auf dem Satze lit. d beruht die Einrichtung des Transporteurs.

II. Aus der Spitze des Mittelpunktsw. AMB fig. 76 gehe der Halbmesser MD senkrecht zur Sehne AB. — Dann ist $AC = BC$, und $u = x$ (No. 13, a), also ist Bogen $AD =$ Bogen BD (No. 12, d).

Halbirt MD die Sehne AB; so ist als Grund vorauszusetzen, daß MD zu AB senkrecht ist; dann muß auch wieder $u = x$ und Bogen $AD =$ Bogen BD sein. — (Anderer Beweis nach No. 13, b).

Halbirt MD den W. AMD; so ist als Grund vorauszusetzen, daß MD zu AB senkrecht ist; dann muß aber auch wieder $AC = BC$ und Bogen $AD =$ Bogen BD sein. — (Anderer Beweis nach No. 13, c).

Halbirt MD den Bogen ADB; so ist als Grund vorauszusetzen, daß MD zu AB senkrecht ist; dann muß aber auch wieder $AC = BC$, und $u = x$ sein.

Die Gerade DM sei senkrecht zur Sehne AB und halbire sie. — Nach dem Vorhergehenden liegen der Halbirungspunkt der Sehne und der Mittelpunkt des Kreises in einer Geraden, die zur Sehne senkrecht ist. Da aber die Richtung von DM dadurch, daß Letztere in C zu AB senkrecht steht, völlig bestimmt ist; so muß DM (nöthigenfalls verlängert) durch M gehen. — H. f.

23) a. Ist der Halbmesser zu einer Sehne senkrecht; so halbirt er dieselbe, den zugehörigen Mittelpunktsw. und Bogen.

b. Halbirt der Halbmesser eine Sehne; so ist er zu ihr senkrecht und halbirt den zugehörigen Mittelpunktsw. und Bogen.

c. Halbirt der Halbmesser einen Mittelpunktsw.; so ist er zur Sehne senkrecht und halbirt sie und den Bogen.

d. Halbirt der Halbm. einen Bogen, so ist er zur

Sehne senkrecht und halbirt sie und den Mittelpunktsw.

e. Steht eine Gerade auf der Mitte einer Sehne senkrecht; so geht sie (verlängert) durch den Kreismittelpunkt.

III. Die Sehnen AB und CD fig. 77 seien gleich. — Man fälle aus dem Mittelp. auf sie die Senkrechten ME und MF, ziehe MB und MC. Beide Sehnen werden von den Senkrechten halbirt (Nro. 23, a), und da sie gleich sind, so sind auch ihre Hälften gleich, also ist BE = CF. Da auch MB = MC ist, so sind die Dke. BEM und CFM einerlei (No. 9, d), mithin ME = MF.

Es sei umgekehrt ME = MF. Dann ist als Grund vorauszusetzen, daß AB = CD ist.

IV. Es sei fig. 78 AB $>$ AC; wie sind die senkrechten Abstände MD und ME vom Mittelp. beschaffen? — Man ziehe DE. Weil AB $>$ AC, und Beide in D und E halbirt sind (No. 23, a), so ist W. u $>$ W. o; da aber die ganzen W bei D und E rechte sind, so ist z $<$ x, folglich MD $<$ ME. (No. 16, a).

Es sei umgekehrt MD $<$ ME. Dann ist als Grund vorauszusetzen, daß AB $>$ AC ist.

Da nun die Sehne desto größer ist, je näher beim Mittelpunkt sie liegt; so muß der Durchmesser die größte Sehne sein.

24) a. Gleiche Sehnen stehen vom Kreismittelp. gleich weit ab; und wenn umgekehrt Sehnen vom Mittelpunkt gleich weit abstehen, so sind sie gleich.

b. Die größere Sehne liegt dem Kreismittelp. näher als die kleinere; und umgekehrt wenn eine Sehne dem Kreismittelpunkt näher liegt als eine andere, so ist sie größer als diese. Der Durchmesser ist die größte Sehne des Kreises.

Anm. Die umgekehrten Sätze in a und b lassen sich, statt aus dem Verhältniß zwischen Grund und Folge, auch anf ähnliche Weise wie ihre vorangehenden Sätze beweisen. Der Schüler soll es versuchen.

V. Es seien fig. 79 ABC ein Umfangsw. und AMC ein Mittelpunktsw. über demselben Bogen ADC. Man ziehe den Durchmesser BD. Nun ist A + x = p, und C + y = q (No. 5, a); es ist aber A = x, und C = y (No. 12, a), mithin 2 x = p und 2 y = q, daher 2 x + 2 y = p + q, oder 2 W. ABC = W. AMC, folglich W. ABC = $1/2$ W. AMC.

Anm. Die Schenkel AB und BC haben den Mittelp. zwischen sich. Es kann aber auch ein Schenkel durch den Mittelpunkt gehen, oder beide Schenkel können auf der nämlichen Seite vom Mittelp. liegen. Der Schüler suche auch für die beiden letzteren Fälle den Beweis.

VI. Es seien u, x, y Umfangsw. über demselben Bogen AB fig. 80. — Man ziehe die Halbmesser MA und MB. Dann ist jeder der genannten W. die Hälfte des Mittelpunktsw. m, also u = x = y.

Es seien o und u fig. 81 Umfangsw. über gleichen Bogen AB und CD. — Man ziehe die Halbmesser MA, MB, MC, MD. Dann sind die W. AMB und CMD gleich (No. 22, d); ihre Hälften aber sind o und u (V), also ist o = u. — Nimmt man umgekehrt o = u an, so muß auch wieder Bogen AB = Bogen CD sein.

VII. Wenn fig. 82 der Schenkel MC mit AM in die gerade Richtung MD kommt, so wächst der W. AMC auf 180° an; dann muß der zu W. AMC gehörige Umfangsw. ABC, indem sein Schenkel BC in BD übergeht, auf 90° anwachsen, also ist W. ABD = 90°.

Anm. Zieht man fig. 82 den Halbmesser MB, so folgt auch aus (No. 14, c), daß W., ABD = 90° ist.

25) a. Der Umfangsw. im Kreise ist die Hälfte des Mittelpunktsw. über demselben Bogen.

b. Umfangsw. über demselben Kreisbogen oder über gleichen Kreisbogen sind gleich, und umgekehrt gleiche Umfangsw. haben gleiche Kreisbogen.

c. Der Umfangsw. im Halbkreise beträgt 90°.

Geradlinige Figuren im Kreise sind solche, deren Winkelspitzen in der Kreislinie liegen.

VIII. Es sei ABC fig. 83 ein gleichseitiges Dk. im Kreise. — Man ziehe aus A, B, C Senkrechte auf die Seiten BC, AC, AB; dann ist M der Mittelpunkt des Dks. (No. 15, b). Da nun AM = BM = CM, so sind diese 3 Linien auch Halbmesser des Kreises, also M auch sein Mittelp. Und es ist ferner MD = ½ MA = ½ MG = DG.

IX. Es sei fig. 84 das Vk. ABCD ein Trapezoid im Kreise. — Man ziehe die Gehren AC und BD. Dann ist m = p, n = u, q = z, x = o (No. 25 b), also m + n + q + x = p + u + z + o, oder W. A + W. C = W. B + W. D; da aber die W. A + B + C + D = 360° sind, so folgt A + C und B + D = 180°.

X. Es sei das Vk. im Kreise fig. 85 ein Trapez, und zwar DG ♯ EF. Dann ist W. D + W. E = 180°, und W. D + W. F = 180°, also W. D + W. E = W. D + W. F, folglich W. E = W. F. — Auf gleiche Weise findet man W. D = W. G. — — Zieht man die Gehre DF, so ist u = x, also Bogen DE = Bogen GF (No. 25, b), folglich auch Sehne DE = Sehne FG.

Anm. Leicht ist zu zeigen, daß auch DF = EG, DH = GH, und EH = FH ist.

XI. Es sei fig. 86 ABCD ein Parallelogramm und ABCD fig. 87 eine Raute im Kreise. Dann ist W. A = W. C; da aber W. A + W. C = 180° (VIII), so ist A = C = 90°. Das Gleiche gilt von den W. B und D. Ihre Gehren müssen daher Kreisdurchmesser sein.

XII. Das Vk. ABCD fig. 88 sei eine Halbraute im Kreise. Nun ist W. B = W. D fig. (No. 19, a); weil aber W. B + W. D = 180° (VIII), so ist W. B = W. D = 90°. — Die Gehre AC muß somit ein Kreisdurchmesser sein.

XIII. Es enthalte fig. 89 ein ordentliches Sechseck im Kreise; und M sei der Mittelpunkt des Sechsecks. Das nun alle Winkelhalbmesser desselben gleich sind, und ihre Endpunkte in der Kreislinie liegen, so sind sie auch Halbmesser des Kreises, und daher M auch Mittelpunkt desselben. — Aus gleichen Gründen verhält es sich eben so bei jedem andern ordentlichen Vlk. im Kreise.

Da nun ferner MA als Winkelhalbmesser des ordentl. Sechsekks = AB ist; so ist auch der Kreishalbmesser der Seite des Sechsekks gleich, und erscheint daher sechs Mal als Sehne. — H. f.

26) a. Das gleichseitige Dk. im Kreise hat den Mittelpunkt mit diesem gemeinschaftlich, und sein Seitenhalbmesser beträgt die Hälfte des Kreishalbmessers.

b. Zwei entgegengesetzte W. eines Vks. im Kreise betragen zusammen 180^0.

c. Das Trapez im Kreise ist gleichschenklig; die Parallelen schließen gleiche Bogen ein, und jede hat gleiche anliegende W.

d. Jedes Parallelogramm im Kreise ist ein Rechtekk, und jede Raute ein Quadrat; ihre Gehren sind Kreisdurchmesser.

e. Die ungleichen Seiten der Halbraute im Kreise sind senkrecht zu einander.

f. Jedes ordentliche Vielekk im Kreise hat den Mittelp. mit demselben gemeinschaftlich; und der Kreishalbmesser läßt sich sechs Mal am Umfang herumtragen.

XIII. Aus A fig. 90 gehen die Sekanten AB und AC; wie wird der Sekantenw. A bestimmt? — Man ziehe die Gerade BD. Dann ist W. A + W. B = W. m (No. 5, a), demnach W. A = W. m — W. B.

Aus A fig. 91 gehen gleiche Sekanten AB und AC. — Man ziehe BE und CD. Nun haben die Dke. ABE und ACD W. A = W. A, und W. B = W. C (No. 25, b), und AB = AC, sind also einerlei, mithin ist AE = AD. Da aber AB = AC, so muß auch BD = CE sein, folglich auch Bog. BD = Bog. CE (No. 22, d). H. f.

27) a. Ein Sekantenw. ist gleich dem Unterschied der beiden Umfangsw. über den Bogen zwischen den Sekanten.

b. Wenn zwei gleiche Sekanten von einem Punkt außerhalb des Kreises ausgehen, so haben sie gleiche Abschnitte innerhalb und außerhalb desselben und schneiden gleiche Bogen von ihm ab.

XIV. Es sei fig. 92 die Gerade BC in A zum Halbmesser AM senkrecht. Alle andern Linien, die aus M nach BC gehen, wie MB und MC, sind daher Hypotenusen, also > MA (No. 16, c). Alle Punkte der Linie BC, wie B und C, liegen daher außerhalb des Kreises mit Ausnahme des Punktes A, den sie allein mit der Kreislinie gemeinschaftlich hat, folglich ist BC eine Tangente.

Es sei umgekehrt BC eine Tangente. Dies läßt als Grund voraussetzen, daß BC im Berührungspunkt A zum Halbmesser MA senkrecht ist.

Es ist aber in A zu MA nur eine Senkrechte möglich; und da die Tangente eben eine Senkrechte ist, so ist auch in A nur eine Tangente möglich.

XV. Da die Tangente zum Halb- (und Durch-) Messer senkrecht steht; so fragt es sich, was für einen W. sie mit einer andern Sehne bilde. Es sei fig. 93 AB die Tangente und AC die Sehne. — Man ziehe den Durchmesser AD und die Sehne CD. Nun ist W. x + W. u = 90⁰, und W. u + W. D = 90⁰, also W. x + W. u = W. u + W. D, folglich ist W. x = W. D.

XVI. Aus A gehen fig. 94 die Tangenten AB und AC. — Man ziehe die Halbmesser MB und MC, und die Linie AM. Die rechtwinkligen Dke. ABM und ACM haben nun AM = AM und BM = CM, sind also einerlei, daher ist AB = AC. — H. f.

28) a. Wenn eine Gerade zum Halbmesser in seinem Ende senkrecht steht, so ist sie eine Tangente. Umgekehrt ist jede Tangente im Berührungspunkte zum Kreishalbmesser senkrecht; und in jedem Punkte der Kreislinie ist nur eine Tangente möglich.

b. Der Tangenten-Sehnenwinkel ist gleich dem Umfangswinkel über dem Bogen zwischen der Tangente und Sehne.

c. Wenn zwei Tangenten von einem Punkte aus nach einem Kreise gehen, so sind sie gleich.

§. 34.

Zwei Kreise.

I. In fig. 95 gehe aus A die Tangente AB an 2 Kreise. Dann sind die Halbmesser MB und mb in den Streifpunkten B und b zu ihr senkrecht (No. 29, a), also unter sich gleichlaufend.

II. Aus A gehe noch die Streiflinie AC. Man ziehe AM, Am, MC, mc, BC, bc. Die Vke. ABMC und abmc sind nun Halbrauten (No. 28, c); der W. A wird also von AM, so wie von Am halbirt (No. 19, b), also muß AM von A bis m mit Am zusammenfallen und durch den Punkt m gehen.

Weil AM zu BC und bc senkrecht ist (No. 19, c), so ist BC $\#$ bc.

Weil ferner die Halbrauten bei B, C, b, c rechte W. haben, so ist W. A + W. BMC = 180^0, und W. A + W. bmc = 180^0, also W. BMC = W. bmc.

Weil endlich AB = AC, und Ab = Ac (No. 28, c), so ist AB — Ab = AC — Ac, oder Bb = Cc. — H. f.

29) a. Wenn eine Tangente 2 aus einander liegende Kreise trifft, so sind die Halbmesser nach den beiden Streifpunkten unter sich parallel.

b. Wenn zwei Tangenten aus einem Punkte nach 2 Kreisen gehen; so liegt ihr Ausgangspunkt mit den beiden Kreismittelpunkten in einer Geraden;

c. Die Sehnen, welche zu den von den Tangenten eingeschlossenen Bogen gehören, sich parallel und die dazu gehörigen Mittelpunktsw. in beiden Kreisen gleich;

d. die Theile beider Tangenten zwischen den Streifpunkten sind gleich.

III. In fig. 96 und 87 berühren sich 2 Kreise im Punkte E. Man ziehe die Halbmesser ME und mE. Da nun der Punkt E beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, so läßt sich in E auch für beide eine Tangente errichten; diese sei DE. Sie muß zu ME, so wie zu mE senkrecht sein (No. 28, a); in fig. 96 ist daher W. MED + W. mED = 190^0, also sind ME und mE eine Gerade. — Soll fig. 97 DE in E zu ME und mE senkrecht sein, so muß mE in ME fallen.

Man ziehe MF und mF. In fig. 96 ist dann $MF + mF > Mm$; oder $MF + mF > ME + mE$; es ist aber $MF = ME$, also $mF > mE$; mithin liegt jeder Punkt des Umfangs vom Kreise M, mit Ausnahme von E, außer dem Kreise von m, und beide Kreise haben nur den Punkt E gemein.

In fig. 97 ist $MF < mF + Mm$, aber auch $MF = ME = Mm + mE$, also $Mm + mE < mF + Mm$, folglich $mE < mF$. Es liegt also, mit Ausnahme von E, jeder andere Pnnkt des äußern Kreises, wie F, außer dem Kreise des Mittelpunkts m.

IV. Es durchschneiden sich fig. 98 zwei Kreise. Man ziehe Mm und AB. Zieht man die Halbmesser mA, mB, MA, MB; so entsteht die Halbraute AmBM, worin AB von mM halbirt wird.

Geht fig. 99 der Kreis von M durch den Mittelpunkt m des andern Kreises, und zieht man die Geraden mMB, mA, AB; so ist W. $mAB = 90^0$ (No. 25, c), also BA eine Tangente des Kreises von m. — H. f.

30) a. Zwei auseinander oder ineinander liegende Kreise können sich nur in einem Punkte berühren, der mit ihren Mittelpunkten in einer Geraden liegt, und haben in ihrem Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente.

b. Wenn zwei Kreise sich durchschneiden, so ist ihre Mittelpunktslinie zu ihrer gemeinschaftlichen Sehne senkrecht und halbirt dieselbe.

c. Wenn ein Kreis durch den Mittelpunkt des andern geht, so ist die Sehne des erstern, die aus dem Ende seines durch beide Mittelpunkte gehenden Durchmessers nach einem Durchschnittspunkte beider Kreise gezogen wird, eine Tangente des andern.

Fortsetzung folgt.