Zeitschrift: Allgemeine schweizerische Schulblätter
Band: 1 (1835)
Heft: 1

Artikel: Ueber den Unterrichtsgang im Rechnen
Autor: Heer, Jakob
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-865764

Ueber den Unterrichtsgang im Rechnen.

Bruchstücke aus der Einleitung zu einem neuen arithmetischen Werke von Jakob Heer, Pfarrer in Matt.

Vorbemerkung.

Schon vor zwanzig Jahren bearbeitete ich einen Leitfaden für den Rechnungsunterricht, der seither von vielen Lehrern abgeschrieben und mit dem besten Erfolge in ihren Schulen gebraucht wurde. Aufgefordert von mehrern Freunden und veranlaßt durch das Ausschreiben des löbl. Erziehungsrathes in Zürich vom 12. Febr. 1834, entschloß ich mich zur Umarbeitung dieses Leitfadens. Im Oktober 1834 übergab ich den druckfertigen Theil des Manuscriptes der benannten Behörde, welche dasselbe durch eine Kommission von Experten prüfen ließ. In Folge der sehr günstigen Berichterstattung dieser Kommission erklärte der löbl. Erziehungsrath unterm 27. Dezember 1834: „Diese Arbeit entspreche im Wesentlichen „vollkommen der in einem Ausschreiben vom 12. Febr. aus„gesprochenen Idee; der Umfang des Exempelbuches“ (das nicht bloß für Zürich, sondern für alle Kantone der Schweiz berechnet ist) „sei einziges Hinderniß, daß es nicht für obli„gatorisch erklärt werden könne. In Anerkennung der Treff„lichkeit dieses Werkes subscribire er auf vierzig Exemplare „und werde den Gebrauch desselben seiner Zeit allen Schul„lehrern des Kantons empfehlen.“ Diese Abhandlung ist also als vorläufige Ankündigung dieses neuen Werkes anzusehen, das unter dem Titel: Methodisches Lehrbuch des Denkrechnens, sowohl im Kopfe als mit Ziffern, für Volksschulen, gegen Ende dieses oder im Anfang des künftigen Jahres erscheinen wird, und zwar auf Subscription, wovon eine Anzeige gleichzeitig mit dem Erscheinen dieser Abhandlung ausgegeben wird.

§. 1. Wichtigkeit des Rechnungsunterrichtes.

Nächst dem Sprachunterrichte ist die Größenlehre (im weitesten Sinne genommen), und von letzterer insbesondere das Rechnen wohl unstreitig das Hauptfach der Volksschule, schon um des praktischen Zweckes willen. Kein Stand kann bei seinen Geschäften das Rechnen entbehren; die Magd, welche Gemüse einkauft, so wenig, als der Kaufmann, der mit der halben Welt verkehrt, und der Bauer, der seine Feldwirthschaft und Viehzucht gut besorgen will, so wenig, als der Gelehrte, der die Bahnen der Himmelskörper berechnet. — Je besser insbesondere die niederen Stände das Rechnen verstehen, desto mehr Ordnung wird auch in ihre Geschäfte kommen. — Eben so wichtig ist aber der Rechnungsunterricht auch in formeller Beziehung für Entwickelung der Verstandeskraft. Wenn der Sprachunterricht als das allgemeinste aller Bildungsmittel (denn all unser Wissen bewegt und gestaltet sich in der Form der Sprache) die ganze innere und äussere Welt zum Objekte hat, also ein unermeßliches Gebiet umfaßt; so ist der Rechnungsunterricht auf das bestimmte Gebiet der Zahlen beschränkt. — Aber gerade auf diesem Gebiet wird sich der Mensch der Gesetze, nach welchen er beim Denkgeschäft verfährt, am klarsten bewußt. Hier ist alles Schwanken und Zweifeln ausgeschlossen. Hier ist entweder nur ein Resultat möglich, oder wenn mehrere möglich sind, so sind sie innerhalb bestimmter Grenzen eingeschlossen. Sind auch noch verschiedene Ausdrucksformen möglich, so lassen sie sich alle auf eine Einheit, auf eine Urform zurückführen. — Besonnene Klarheit und strenge Konsequenz in allem Denken sind zwei Haupteigenschaften, zu denen ein gehörig geleiteter Rechnungsunterricht führt

— Eigenschaften, die für den Gang der übrigen Unterrichtsfächer, für die Wissenschaft und das Leben von unendlicher Wichtigkeit sind.

§. 2. Wichtigkeit einer gründlichen, guten Methode.

Diese wichtigen Zwecke können aber sowohl für das praktische Leben, als für eine glückliche, naturgemäße Entwickelung der Verstandeskraft nur dann erreicht werden, wenn die bei diesem Unterrichte angewandte Methode dem angeführten Zwecke entspricht. Eine schlechte Methode würdigt das Rechnen — ein reines Denkgeschäft — zum geisttödtenden Mechanismus herab, macht den denkenden Menschen zur Rechenmaschine, so daß er mit den Ziffern (Zahlen genannt) gerade so umgeht, wie in einer Buchdruckerei der Setzer mit den Lettern, wenn er ein ihm unverständliches, vielleicht gar in einer fremden Sprache geschriebenes Werk setzen soll. Er bringt das Resultat nach den mechanischen Regeln und Handgriffen ganz richtig heraus, so gut als der Setzer den Satz, aber von dem, was er gethan, hat er gar nichts begriffen.

Der Verfasser hatte schon vor dreiunddreißig Jahren in einer Stadtschule und nachher in manchen Landschulen Anlaß, die gewöhnliche Unterrichtsmethode des Rechnens zu beobachten, und wie man sagt, soll diese Methode noch jetzt nicht aus allen Schulen verschwunden sein. Man führte sechsjährigen Kindern die Ziffern vor, schrieb sie an die Wandtafel, ließ sie die Kinder anschauen, nachmalen und als Zahlen benennen. Die Vorstellung der Zahl knüpfte sich nur an das Zifferzeichen; man meinte, wenn sie diese Zeichen von 1 bis 10 ablesen und nachher auswendig sagen konnten, so haben sie auch die dadurch bezeichneten Zahlenbegriffe inne.

Nun ging man sogleich zum Numeriren über, wobei man sich ebenfalls nur an die Ziffern hielt. So z. B. wurde das Kind gewöhnt, sich 25 als das Zeichen 2 verbunden mit dem angehängten 5 zu denken; eben so knüpfte sich die Vorstellung von 136 an die Vorstellung der in gegebener Ordnung zusammengereihten drei Zifferzeichen 1, 3 und 6. So fuhr man fort und lehrte die Kinder ellenlange Zahlenreihen aussprechen, ehe sie auch nur den klaren Begriff der zehn Grundzahlen inne gehabt hätten. Nun folgten die vier sogenannten Spezies. Papageienartig wurde das 1 und 1, das 1 von 1, das 1 mal 1 und das 1 in 1 auswendig gelernt, die Regel vorgesagt, dem Gedächtniß eingeprägt und dann operirt. So ging es durch das ganze Rechnen. Sage ich zu viel, wenn ich behaupte, dies heiße nicht denkende Menschen bilden, sondern denkfähige Menschen zu gedankenlosen Rechenmaschinen abrichten?*)

Als Eigenschaften einer guten Methode bezeichne ich folgende:

1) Sie muß von der unmittelbaren Anschauung ausgehen und sich zur Versinnlichung solcher Realzeichen bedienen, die der Natur unseres Zahl- und Zählsystems so vollkommen als möglich entsprechen. Vermittelst derselben lernt das Kind zuerst die Zahlen und ihre einfachsten Kombinationsgesetze und dann erst die symbolischen Zahlzeichen (die Ziffern) kennen. So wie sich das Abstraktionsvermögen des Kindes bildet und stärkt, lernt es die Realzeichen von selbst entbehren.

2) Sie muß allmälig und lückenlos von Stufe zu Stufe fortschreiten. Jede neue Uebung muß auf die

*) Man sehe auch, was Pöhlmann von dieser Methode und ihren Früchten, mit Beispielen belegt, in seiner Anleitung zum Rechnen sagt.

vorhergehende aufgebaut werden, gleichsam aus ihr hervorwachsen. Nichts übereilend oder überspringend, die Altersstufe und Fassungskraft der Kinder wohl im Auge behaltend, steigt sie allmählig vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Besondern zum Allgemeinen, vom Konkreten zum Abstrakten auf.

3) Hieraus folgt nothwendig ein vollkommen klares Sichselbstverstehen bei jeder Rechnungsoperation. Das Kind darf keinen Schritt thun, ohne daß es sich von den Gründen seines Verfahrens Rechenschaft zu geben vermöchte.

4) Eine richtige Methode trägt die Gesetze, nach welchen beim Rechnen verfahren wird, nicht etwa von außen in die Köpfe der Kinder hinein, sondern sie läßt diese Gesetze und Regeln vor den Augen der Kinder gleichsam von selbst entstehen. Im ächt sokratischen Sinn und Geiste leitet der Lehrer bloß die Uebungen und führt die Kinder durch zweckmäßige Fragen so, daß sie die Gesetze, Regeln und Auflösungen von selbst finden, wobei es sich von selbst versteht, daß er die nöthigen Sacherklärungen gibt und durch Zwischenfragen nachhilft. Durch einen solchen Gang muß die Zahlenkunde im Geiste der Kinder ein organisch zusammenhängendes Ganzes werden, aus dem kein einzelnes Glied herausfallen kann, weil es von den übrigen Theilen des Ganzen gehalten und getragen wird, mit ihnen zusammengewachsen ist.

5) Bei den Auflösungen muß auf Vielseitigkeit, Konsequenz und Präzision gehalten werden. Die Vielseitigkeit ergibt sich schon aus dem Gange eines richtig geordneten, methodischen Unterrichtes, indem die spätern Uebungen immer wieder neue Auflösungen der früher schon vorgekommenen Beispiele mit sich bringen, und ist von besonderer Wichtigkeit. Das einseitige Fest-

rennen in irgend einer, wenn auch rationell erfaßten, Auflösungsform artet nur gar zu leicht wieder in einen geistlosen Mechanismus aus. Davor bewahrt jene Vielseitigkeit der Auflösungen. Sie verschafft zugleich eine Uebersicht des Gebietes der Zahlen, eine Einsicht in ihre Verhältnisse und eine Sicherheit und Gewandtheit in ihrer Behandlung, die für die Wissenschaft, wie für die Praxis höchst vortheilhaft sind. Sie lehrt selbstdenkende Köpfe die einfachsten, leichtesten, kürzesten Auflösungsmethoden von selbst erfinden. Auch Konsequenz und Präzision dürfen bei den Auflösungen nicht unbeachtet bleiben. Es dürfen keine wesentlichen Zwischenglieder übersprungen, aber auch keine überflüssigen Worte und Sätze hineingeflickt werden.

6) Eine richtige Methode behandelt nicht etwa das Kopfrechnen und Zifferrechnen als zwei besondere Rechnungsarten, sondern verbindet beides so mit einander, daß sie zwar den technischen Theil der Rechnungsoperationen mit Ziffern in besondern Uebungen darlegt, im Uebrigen aber den Gebrauch der Ziffern so behandelt, daß das Zifferrechnen nur eine verkürzte, algebraisch symbolische Darstellung des rationellen, im Kopfe vollzogenen Denkrechnens erscheint. Man sehe, was ich noch unten §. 6 darüber sage.

7) Eine richtige Methode bringt endlich auch den formellen und praktischen Zweck des Rechnens in eine solche Verbindung, daß beide nur durch einander gewinnen können. Schon in den Uebungen der reinen Zahlenlehre wird alles das weggelassen, was bloßes Gedankenspiel ist, und diejenigen Uebungen werden hervorgehoben, die für das angewandte Rechnen besonders wichtig und brauchbar sind. Die Uebungen des angewandten Rechnens sind dagegen so beschaffen, daß sie nicht nur auf das Gebiet des praktischen Rechnens hin-

führen und tüchtige Rechner bilden, sondern auch den menschenbildenden Zweck dieses Unterrichtszweiges auf vielfache Weise, besonders aber durch Uebung der praktischen Urtheilskraft, mit befördern helfen.

§. 3. Versinnlichungsmittel.

Alle unsere Erkenntnisse sind durch die Sinne vermittelt. Dies gilt auch in vollem Maße von den Zahlenbegriffen. Es gibt daher keine verkehrtere Methode, als wenn man den Rechnungsunterricht (wie in §. 2 berichtet ist) mit den Zifferzeichen beginnt. Auch die Zahlenbegriffe entstehen nur aus sinnlichen Wahrnehmungen. Die Sinne, welche dabei thätig sind, können sein: Gefühl, Gehör, Gesicht. Durch Geschmack und Geruch (ohnehin nur Modifikation des Gefühlssinnes) können keine Zahlenbegriffe unterschieden werden.

Durch den Gefühlssinn können ganz deutlich Zahlen unterschieden werden. Bei Sehenden ist es aber von sehr geringem Nutzen, den Gefühlssinn für Bildung von Zahlenbegriffen in Anspruch zu nehmen. Hingegen bei Blinden muß dies geschehen. Man bedient sich dabei in Blindenanstalten hölzerner Stäbchen mit 1, 2, 3, 4 bis 10 Spitzen, welche durch das Gefühl, das Betasten mit den Fingerspitzen, unterschieden werden. Nachdem man die Grundeinheiten bis 10 auf solche Weise oder auch vermittelst anderer Gegenstände den Blinden bekannt gemacht hat, geht man zur Einübung der Zehner über, macht sie auch mit dem Zehnersystem (der Reihenfolge der Dezimalstellen) bekannt und bedient sich statt der Ziffern auch jener hölzernen Stäbchen, die in einem mit Löchern versehenen Brette aufgestellt werden. (Mehrere Versinnlichungsmittel für Blinde beschreibt Klein in seinem Lehrbuche zum Unterrichte der Blinden pag. 86. 95).

Der Gehörsinn kann schon weit mehr für Bildung von Zahlenbegriffen in Anspruch genommen werden; z. B. die Schläge einer Uhr, die Schläge mit einem Hammer, Stabe, oder mit der Hand; das Klatschen mit den Händen (wovon man in der Kleinkinderschule in Lausanne Gebrauch macht); das laute Zählen, wobei ja eben durch das Gehör eine Mehrheit von Tönen wahrgenommen wird; die Sylben eines Wortes, eine sehr gute Uebung, die für Zahlen- und Wortlautkenntniß zugleich benutzt werden kann.

Der Hauptsinn für Veranschaulichung der Zahlenbegriffe ist aber unstreitig der Gesichtssinn. Durch diesen Sinn können wir nicht nur die Grundeinheiten als Einheiten, sondern auch mehrfach gegliederte Einheiten — und selbst größere Zahlen als Kollektiveinheiten geordnet, uns veranschaulichen. — Man bedient sich daher beim Rechnungsunterrichte vorzugsweise solcher Realzeichen, die durch das Gesicht wahrnehmbar sind. Diese Realzeichen sind:

a) natürliche: die Finger unserer Hände, sehr brauchbar, aber doch nicht ausreichend; — Steinchen, Nüsse, Erbsen, Bohnen. Diese letztern sind beim Privatunterrichte sehr zu empfehlen. Lehrer oder Eltern müssen aber bei ihrem Gebrauche Folgendes in Acht nehmen: 1) Gewöhnen sie die Kinder bei den Zählübungen, so wie auch später bei den Additions- und Subtraktionsübungen, die Bohnen ordentlich als eine in gerader Linie fortschreitende Reihe aufzustellen und mit 10 allemal die Reihe abzubrechen, und mit 11 eine neue Reihe anzufangen *). Es ist höchst wichtig, daß Kinder schon von vorne herein die Zahlen nach dem Zehnersystem ordnen

*) Z. B. 23 kommt so zu stehen:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○

lernen. 2) Thut man recht gut, für verschiedene Uebungen, namentlich für die Gliederungen und bei dem Addiren und Subtrahiren, Bohnen von verschiedener Farbe zu nehmen, um die Summanden und Subtrahenden gehörig zu unterscheiden. 3) Bei den Multiplikationsübungen lasse man die Bohnen (nach der im Lehrbuche gegebenen Anweisung) ebenfalls geometrisch reihen. *)

b) Künstliche. Sehr mannigfaltig sind die künstlichen Hülfsmittel, durch welche man seit Pestalozzi das Rechnen zu veranschaulichen suchte. Pestalozzi bediente sich der Einheitstafel, welche ich als bekannt voraussetze, also nicht weiter beschreiben will. Diese Einheitstafel hatte, so wie seine Elementarhefte, große Mängel. Denn erstens diente sie bloß zur Veranschaulichung des Einmaleins, keineswegs aber der Additions- und Subtraktionsübungen und des Bildens und Ordnens der Zahlen nach dem Zehnersystem. Zweitens diente sie auch nur sehr unvollkommen für den genannten Zweck. Die Striche in den einzelnen Reihen verschwammen in einander. Nur das vorsprechende und zeigende Kind war dabei thätig; die übrigen lallten meistens gedankenlos nach und sahen gar nicht an die Tafel. Ich wundere mich sehr, daß dieses unpassende Hülfsmittel nicht längst antiquirt ist, und daß mehrere neuere Lehrbücher (Scholz, Diesterweg, Reinhard) dasselbe noch empfehlen können. **)

---

*) z. B. 7 × 3 käme so zu stehen:

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

**) Damit will ich keineswegs die Verdienste Pestalozzi's schmälern. Gott bewahre! Ihm verdanke auch ich meine Ansicht des Rechnungsunterrichtes, und ohne seinen Vorgang hätte ich nie ein Lehrbuch des Rechnens geschrieben. Er gab die jetzt noch allein gültige Idee und brach die

Schmied schlug in seinen Elementen der Zahl die *Striche* als Veranschaulichungsmittel vor und ließ die Kinder vermittelst derselben die Zahlen selbst auf ihren Tafeln darstellen. Unstreitig war dieses Hülfsmittel der Einheitstafel weit vorzuziehen. Man konnte durch sie wenigstens die verschiedenen Uebungen weit besser darstellen; auch die Selbstthätigkeit der Kinder war dabei weit mehr in Anspruch genommen. Aber für Darstellung des Zehnersystems und der geometrischen Reihenfolge der Zahlen passen sie ganz und gar nicht; ebenso können sie auch für die Umwechslung der Faktoren, die sich aus der geometrischen Reihung so natürlich und von selbst ergibt, nicht gebraucht werden.*) Als Universalmittel könnte ich sie nicht empfehlen.

Tillich schlägt in seinem trefflichen Lehrbuche Stäbe vor, deren Grundeinheit 1 Kubikzoll ist. Der Einer wird also hier repräsentirt durch einen würfelförmigen Körper von 1 Zoll Länge, Höhe und Dicke, die Zweier, Dreier, Vierer durch Stäbe (Parallelepipeden) von gleicher Höhe und Dicke, und 2, 3, 4 Zoll Länge u. s. w. Die Idee ist ganz vortrefflich, und ich werde in der Folge zeigen, daß unläugbar der Würfel der Bildung unsers Numerirsystems zum Grunde liegt. Jene Stäbe aber haben das Unbequeme, daß sich die Einheiten, auch wenn

---

Bahn. Er ist der Columbus auf dem Gebiet der neuen Pädagogik. Aber damit ist nicht gesagt, daß seine Nachfolger sich des gleichen unvollkommenen Fahrzeuges, wie er, bedienen müssen.

*) Wenigstens muß man hier einen viel weitläufigern Weg zur Veranschaulichung dieser Umwechslung einschlagen, etwa so: 5 × 3 = 3 × 5

. ||| . ||| . ||| . ||| . ||| . denn 5 × 3 ist 5 × 1 + 5 × 1 + 5 × 1 = 1 × 5 + 1 × 5 + 1 × 5 = 3 × 5.

sie durch Linien abgezeichnet sind, nicht mehr gehörig unterscheiden lassen, was auf der ersten Stufe, wo es sich um Bildung der Zahlenbegriffe und um die Urform der Zahlenkombinationen handelt, höchst nothwendig ist. Wie der Kubus für Darstellung des Dezimalsystems zu gebrauchen sei, davon unten.

Pöhlmann, der auf dem Gebiet der Arithmetik und Geometrie durchaus keinen neuen Stufengang aufstellt, sondern sich ganz an das Althergebrachte hält, aber dabei höchst verständig verfährt und sich insbesondere in der sokratischen Kunst als einen unübertroffenen Meister darstellt, bedient sich der Bohnen zur Bildung der ersten Zahlenbegriffe und läßt dann zur versinnlichten Darstellung des Dezimalsystems die Zehner und die Hunderter und Tausender als Päckchen von 10, 100, 1000, Einheiten erscheinen. Recht brav! Nur möchte die Mühe des Zählens und Zusammenpackens das Rechnen sehr aufhalten. Werden sie nur als Päckchen von Zehnern und Hundertern ungezählt hingegeben, so ist der Inhalt ziemlich gleichgültig. Eine Haupteigenschaft fehlt, daß nämlich jeder Zehner sogleich wieder als 10 Einer fassend, jeder Hunderter als 10 Zehner oder 100 Einer fassend, in der Vorstellung soll erfaßt werden können. — Ganz ähnlich diesen Pöhlmannischen Päckchen sind die Bündel von Hölzchen, welche im Taubstummeninstitute in Zürich gebraucht werden. 10 einzelne Hölzchen repräsentiren die Einer, Bündel von 10 Hölzchen die Zehner; Bündel, jedes 10 kleinere Zehnerbündel enthaltend, die Hunderter u. s. w.

In einigen Schulen des Kantons St. Gallen wurden in den Jahren 1808 bis 1810 zylinderförmige kleine Rollen gebraucht, welche in der Mitte durchbohrt und an der Wandtafel befestigt waren, so daß sie leicht hin- und hergeschoben werden konnten. Für manche Uebungen waren sie recht brauchbar — sie hatten die Eigenschaft der leichten Beweglichkeit (für Zahlenbildung, als etwas in der Zeitsuccession Begründetes, nicht unwichtig) —; für manche andere Uebung (namentlich für Darstellung des Dezimalsystems) waren sie ganz unbrauchbar; auch konnten, wenn sie gruppirt wurden, die einzelnen Einheiten nicht mehr unterschieden werden.

Aehnlich diesen Röllchen, aber weit brauchbarer, ist die sogenannte russische Maschine, die in den Kleinkinderschulen in Genf und Lausanne gebraucht wird. Sie besteht aus einem großen Rahmen, in welchem mehrere Eisendrähte eingefügt sind, an denen ziemlich große hölzerne Kugeln (an ihrer Axe durchbohrt) angebracht sind, so daß sie auch ganz leicht hin- und hergeschoben werden können. Wegen ihrer runden Gestalt können die einzelnen Kugeln nie in einander verfließen, wie dies bei den Röllchen und Würfeln der Fall ist; das Auge kann sie immer ganz gut unterscheiden. Man bedient sich dieser Maschine auch in Blindeninstituten. (Man sehe Klein's Lehrbuch zum Unterricht der Blinden pag. 89.) Aber sowohl ihre Einrichtung, als auch die Art ihres Gebrauches, wie Klein sie beschreibt, und wie ich sie im Blindeninstitute in Zürich gesehen habe, ist auf der Elementarstufe des Unterrichts ganz unpassend. Denn vermöge derselben sollen die 10 Kugeln der ersten Reihe die Einer, die 10 Kugeln der zweiten Reihe die Zehner, die der dritten die Hunderter, die der vierten die Tausender u. s. w. vorstellen. Dies ist aber schon nicht mehr eine Real-, sondern eine symbolische Darstellung der höhern Einheiten, wodurch die richtige Vorstellung derselben getrübt wird. Auf dieser Stufe kann eine einzelne, dem Einer vollkommen gleiche Kugel unmöglich auch den Zehner und Hunderter repräsentiren; die rothe oder grüne Farbe, wodurch man den Unterschied bemerklich zu machen sucht, stempelt sie noch nicht zum Zehner oder Hunderter. Auf dieser Stufe muß ohne anders der Zehner noch als eine aus 10 Grundeinheiten zusammengesetzte Kollektiveinheit, und eben so der Hunderter als eine aus 10 Zehnern zusammengeordnete höhere Kollektiveinheit vor die Augen der Kinder gebracht werden, was bei einer zweckmäßigen Einrichtung und Anordnung auch an dieser Maschine erzielt werden kann. Ein Uebelstand bei dieser Maschine scheint mir auch darin zu bestehen, daß den Kindern bei den ersten Zähl- und Additionsübungen auf einmal zu viele Kugeln vor die Augen kommen, wodurch sie leicht verwirrt und am Auffassen der gegebenen einzelnen Einheiten gehindert werden können. Jenem Uebelstande könnte aber leicht abgeholfen werden, wenn der Rahmen so eingerichtet würde, daß die Eisendrähte sammt den Kugeln leicht herausgenommen werden könnten. Man würde dann auf einmal nur so viele Kugeln einsetzen, als man für die vorhabende Uebung bedürfte, z. B. zuerst 10, dann wieder 10 u. s. w. Auch sollte die Länge der Eisendrähte etwas mehr, als das Doppelte des Raumes, den die Kugeln einnehmen, betragen, damit das, was man nicht braucht, gehörig entfernt und überhaupt die Gruppen gehörig auseinander gehalten werden könnten.

Als Haupteigenschaften eines guten Veranschaulichungsmittels bezeichne ich folgende:

1) Wahrnehmbarkeit. Die einzelnen Einer, und die zusammengeordneten Kollektiveinheiten, Zehner, Zweier, Dreier u. s. w., so wie auch die einzelnen zusammengestellten Gruppen (bei den Additions-Uebungen) müssen mit den Augen sehr leicht wahrgenommen und unterschieden werden können, so daß das Auge gleich auf den ersten Blick den Inhalt der Kollektivzahlen und

Gruppen, so wie auch ihre Menge erfassen kann. Hier hilft die verschiedene Färbung auch noch.

2) Reihbarkeit. Die Einer müssen leicht so aneinander gereiht werden können, daß sich aus ihrer Zusammenordnung das Zehnersystem ganz analog unseren Zahlausdrücken beim Zählen, gleichsam von selbst ergibt. Eben so müssen auch die Kollektivzahlen geometrisch gereiht werden können, wodurch das natur- und sachgemäße Erfassen der Faktoren und Produkte ungemein erleichtert wird, auch am beßten nachgewiesen werden kann, wie die Faktoren gegen einander umgewechselt werden können. Man sehe §. 12, was ich über die meistens ganz mißverstandene und mißbrauchte Tafel des Pythagoras sagen werde.

3) Beweglichkeit. Die Bildung der Zahl geschieht successive im menschlichen Vorstellungsvermögen; zuerst Eins, und dann noch Eins, dann noch Eins u. s. w.; ebenso die Bildung der Kollektivzahlen. Das Gleiche findet auch beim Rückwärtszählen statt. Es ist eine successive Vernichtung der Zahl. Dieses allmälige, successive Vor- und Rückwärtsschreiten erfordert bewegliche Zeichen, wo wir auf einmal nur geben, was uns im Sinn liegt, und dann durch allmäliges Zusetzen und Wegthun oder Auslöschen das Folgende finden. Ebenso ist diese Beweglichkeit für alle Uebungen des einfachen, wie des maligen Zu- und Abzählens wichtig. Durch sie werden die Zahlen im Vorstellungsvermögen gleichsam zu lebendigen Dingen.

4) Eine solche Beschaffenheit, daß Kinder diese Zeichen selbst handhaben und damit selbstthätig operiren können. Das passive Hinschauen auf eine Tafel reicht nicht aus — ist wenigstens ein bequemes Ruhekissen für die Trägen.

5) Tillich verlangt auch noch die Fähigkeit, abstrakte Zahlenverhältnisse zu veranschaulichen, und will daher auch das Bruchrechnen, wo

man sich allerdings auf dem Gebiete der Abstraktion befindet, durch das gleiche Veranschaulichungsmittel dargestellt wissen. Ich möchte ihm entgegen behaupten, es müsse so beschaffen sein, daß sich die Kinder vermittelst desselben leicht und bald zur Abstraktion erheben, so daß sie desselben nach und nach entbehren lernen und es von selbst wegwerfen. Dieser Moment kommt bei dem einen Kinde früher, beim andern später; aber einmal muß er bei jedem kommen, sonst ist der ganze Unterricht verfehlt. Was insbesondere das Bruchrechnen anbetrifft, so soll das Abstraktionsvermögen des Kindes so weit herangereift sein, daß es dabei in der Regel der Versinnlichung entbehren kann und den Bruch rein als ein abstraktes Zahlenverhältniß aufzufassen vermag. Ist es noch nicht so weit, kann es z. B. den Bruch $\frac{1}{4}$ noch nicht anders, denn als den vierten Theil eines Apfels ꝛc. sich vorstellen, so sollte man das Bruchrechnen noch nicht mit ihm anfangen. Eine Veranschaulichung kann man allerdings auch hier noch bisweilen eintreten lassen. Das Mittel ist ziemlich indifferent, wenn nur dafür gesorgt wird, daß das Bruchrechnen nicht als ein mechanisches Zerstückeln von räumlichen Ganzen, sondern als ein Operiren mit abstrakt gedachten Zahlenverhältnissen aufgefaßt wird. Nach Tillichs Vorschlag mag immerhin der Bruch $\frac{2}{3}$ an den Zahlen 2 und 3 oder 4 und 6 ꝛc. als eine Verhältnißbezeichnung eines Theils zu seinem Ganzen nachgewiesen werden —; aber eben so gut kann dies auch an einer Linie geschehen, welche in 3 gleiche Theile getheilt worden — vorausgesetzt, daß die Linie nur als Bild dieses Verhältnisses gedacht wird.

Es ist nicht ganz leicht, ein Veranschaulichungsmittel ausfindig zu machen, das alle genannten Eigenschaften in sich vereinigt. Indeß habe ich, durch eine fünfundzwanzigjährige Erfahrung belehrt, folgende Mittel als die zweckmäßigsten befunden:

A. Meine Rechnungsfiguren. Ich werde jedem Exemplare einen Abdruck von 1600 solcher Figuren beifügen, welche der Lehrer, nachdem sie auf Carton aufgezogen, in 4 Hunderter, 10 Zehner, 10 Neuner, 10 Achter, ꝛc. zerschneiden kann. Sie besitzen in vorzüglichem Maße die genannten Eigenschaften. Sie sind leicht wahrnehmbar. Das Auge unterscheidet die einzelnen Einer und die geometrisch-gereihten Kollektivzahlen, die als Quadrate erscheinenden Hunderter, ungemein leicht. Diesem leichten und schnellen Auffassen kann auch durch verschiedene Färbung nachgeholfen werden. Sie lassen sich ungemein leicht an einander reihen. Für Darstellung des Zehnersystems von 1 — 1000 sind sie vortrefflich zu gebrauchen. Die Zehner und Einer — so wie auch die Hunderter und Zehner erscheinen dem Auge sogleich als 3 verschiedene, aber analog gebildete Zahlenordnungen. Gibt man einem Kinde die Aufgabe: Bilde mir die Zahl 245; so vollzieht es diese Aufgabe vermittelst dieser Figuren eben so leicht, als schnell. — Stellt man ihm eine Zahl z. B. 328 auf, so liest es dieselbe beinahe eben so schnell, als wie wenn es Ziffern wären. Die geometrischen Zahlenreihen, ihre Composition und Decomposition, so wie auch die Verwechslung der Faktoren, die Umwandlung des Mehrfachen in andere Mehrfache und Zerlegung in mehrere Faktoren lassen sich durch dieselben ebenfalls ganz vortrefflich darstellen.

Bei ihrem Gebrauche in großen Klassen lasse man ein langes Bret in der Form eines Pultes unten an der Wandtafel anbringen, auf dem diese Figuren sehr leicht zur Veranschaulichung aufgestellt werden können. Beim Monitorensystem gebe man 5 bis 6 Kindern zusammen die erforderliche Anzahl von Figuren, um sie von ihnen selbst auf den Pulttischen aufstellen und aneinander reihen zu lassen. Mit dem besten Erfolge bedienten wir uns letzten Winter dieser Figuren beim Rechnungsunterrichte in der Schule zu Matt, die 140 Alltagsschüler zählt, und es war höchst bewundernswerth, mit welcher Leichtigkeit und Klarheit Kinder von 6 bis 8 Jahren sowohl das Decimalsistem, als auch die arithmetischen und geometrischen Zahlenverhältnisse vermittelst derselben auffassen lernten. Die Kosten der Anschaffung sind unbedeutend. Für wenige Batzen kann ein hinreichender Apparat für die größte Schule angeschafft werden. Für gewöhnliche Schulen werden schon die jedem Exemplar meines Lehrbuchs beizugebenden 1600 Stücke ausreichen.

Noch verdient angemerkt zu werden, daß diese Figuren auch in der Formenlehre für Darstellung der Rechtecke und Quadrate und ihres Inhalts ganz vortrefflich zu gebrauchen sind, wozu in meinem Lehrbuche ebenfalls Anleitung gegeben wird.

B. Anstatt dieser Figuren habe ich mich in großen Klassen mit gutem Erfolge der Punkte oder Nullen bedient, welche sich gerade so, wie die Figuren, geometrisch reihen lassen. Sie gewähren beinahe dieselben Vortheile, wie die Figuren, und können von Kindern ohne Mühe selbstthätig auf ihren Schiefertafeln aufgestellt werden. Nur muß der Lehrer bei den arithmetrischen Reihen sorgfältig darauf achten, daß die Kinder mit 10 die Reihen abbrechen und eine neue beginnen, und bei diesen, so wie auch bei den geometrischen Reihen auf eine wohlgeordnete Zusammenstellung halten. Um diese zu erleichtern, thut er wohl, wenn er die eine Seite der Schiefertafeln mit feinen Linien in beiden Dimensionen überzieht, wodurch kleine Quadrate entstehen, in welche die Punkte eingereiht werden können. Diese Linien erleichtern später beim schriftlichen Numeriren, Addiren u. s. w. die richtige Stellung der Ziffern nach ihren verschiedenen Ordnungen.

C. Für die vollständige Darstellung des Dezimalsystems empfehle ich vorzugsweise den Würfel. Die Gründe und das dabei zu beobachtende Verfahren werden umständlich im Lehrbuche angegeben. Die Gestaltung dieser kubischen Compositionen ist folgende: Man läßt sich von einem Schreiner verfertigen a) 10 kleine Würfel von Laubholz, von 1 Zoll in allen Dimensionen. Ein solcher kleiner Würfel repräsentirt die Grundeinheit. — b) 9 Stäbe, jeder 10 kleine zöllige Würfel enthaltend und durch schwarze Linien auch so eingetheilt. Ein solcher Stab repräsentirt den Zehner. Mit den 10 kleinen Würfeln vereinigt, bilden sie in quadratischer Form 100 Einheiten, oder 1 Hunderter. — c) 9 Schichten, jede 100zöllige Würfel oder 10 Stäbe enthaltend. Eine solche Schicht repräsentirt den Hunderter. Sie ist durch Linien ebenfalls in 100 Einheiten abgetheilt. Die 9 Schichten mit den 9 Stäben und den 10 kleinern Würfeln vereinigt, bilden, wieder in kubischer Form, den Tausender. Es würde mich zu weit führen, wenn ich hier schon umständlich nachweisen wollte, wie vermittelst dieses Kubus eine ganz klare Vorstellung unsers in Triaden fortschreitenden Numerirsystems gewonnen werden kann. Ich muß also die Leser auf das hoffentlich bald erscheinende Lehrbuch verweisen. Ein so componirter Würfel sollte, schon der Formenlehre wegen, in jeder Schule vorhanden sein. Vermittelst desselben lassen sich auch am allerbesten die kubischen Maße, und die Berechnung der Körper veranschaulichen.

§. 4. Erste Entstehung und Entwicklung der Zahlenbegriffe.

(Einige Winke für Eltern und Kleinkinderlehrer.)

Der Erzieher ist auch gleichsam Naturforscher; er hat zum Objekte seiner Wissenschaft die edelste aller Naturen, die menschliche. So wie es nun eine der angenehmsten Beschäftigungen für den Botaniker ist, den uranfänglichen Entwicklungsgang der Pflanze aus dem ersten Keime bis zur Bildung ihrer wesentlichen Theile zu beobachten; so ist es auch vom höchsten Interesse für den Erzieher, den Gang der menschlichen Natur auf ihrer ersten Entwicklungsstufe zu belauschen, die Art und Weise zu erforschen, wie sich in dem dunkeln Chaos des kindlichen Geistes allmählig Lichtpunkte bilden, wie aus denselben sich allmählig Vorstellungen und Begriffe entwickeln. Dies gilt auch in vollem Maße von der Entstehung der Zahlenbegriffe. Dem aufmerksamen Beobachter dieses Entwickelungsganges kann die Wahrnehmung nicht entgangen sein, daß die Zahlenbegriffe sich langsamer und später entwickeln, als die der übrigen wahrnehmbaren Gegenstände. Kinder, die alle Gegenstände, die in den sie zunächst umgebenden sinnlichen Wahrnehmungskreis fallen, ordentlich unterscheiden, benennen und Vorstellungen aus diesem Kreise mit Worten bezeichnen können, haben oft noch keine Vorstellung von Zahlen. Nach meinen vieljährigen Erfahrungen, die ich theils an eigenen, theils an fremden Kindern machte, nimmt die Entwickelung der Zahlbegriffe folgenden Gang: Während das Kind Gegenstände unterscheiden und kennen lernt, stellen sich ihm schon häufig Gegenstände *Einer Art* dar. Es lernt diese Gegenstände gleich benennen. Es hört und lernt sprechen: *Baum*, *Bäume*, *Nuß*, *Nüsse*, *Haus*, *Häuser* u. s. w. Es zählt die Gegenstände noch nicht, aber es entsteht doch nach und nach eine dunkele Vorstellung einer Einheit und Vielheit. Nach und nach lernt es diese Einheit und Vielheit ganz deutlich unterscheiden. Ein Finger, viele Finger; ein Schaf, viele Schafe u. s. w. Durch diese Unterscheidung des einmaligen und mehrmaligen Vorhandenseins gleichartiger Gegenstände scheidet sich allmählig im menschlichen Vorstellungsvermögen die eine und untheilbare Eins als die Mutter aller Zahlen aus dem Chaos der Vielheit aus, und dadurch ist der erste Schritt zur Bildung der Zahlbegriffe geschehen. — So wie dieser Akt — schon eine Art von Abstraktion — einmal vollzogen ist, so wie sich der Begriff einer Einheit im Gegensatz zur Vielheit im kindlichen Vorstellungsvermögen klar festgestellt hat, so reihen sich nach nnd nach auch die Begriffe der übrigen Zahlen an denselben an. Durch das Setzen einer Eins ist die Möglichkeit gegeben, eine zweite Eins zu setzen; durch das wirkliche Setzen derselben entsteht die Zwei — und wird auch richtig als eine Eins und Eins gedacht. An die Zwei reiht sich allmählig die Drei, als eine Zwei und Eins — oder als eine Eins und Eins und Eins vorgestellt. Ihr folgt allmählig die Vier und endlich die Fünf. — Nach den an meinen Kindern angestellten Beobachtungen verging eine sehr geraume Zeit, bei einigen ein volles Halbjahr, vom ersten klaren Erfassen der Eins bis zum Erfassen der Fünf. So wie sie es aber einmal bis zur Fünf gebracht hatten, ging es mit den übrigen Zahlen bis 10 weit schneller. Es liegt also etwas ganz Wahres in dem bekannten Sprüchwort: er kann noch nicht Fünf zählen. Die Bildung der Zahlbegriffe von 1 bis 5 geht am langsamsten. Ist ein Kind so weit, daß es 5 mit Bewußtsein zählen und sich zugleich den Inhalt aller Zahlen von 1 bis 5 klar vorstellen kann; so wird es sich auch ohne sonderliche Mühe — freilich auch nur allmählig — die Zahlenbegriffe bis 10 aneignen.

Müttern und Kleinkinderlehrern gebe ich daher für Mittheilung der ersten Zahlenbegriffe folgende Räthe:

1) Vor Allem aus hüte man sich vor allem Uebereilen. Es ist nichts verkehrter, als durch künstliche Mittel, durch beständiges Vorsagen und dgl. es erzwingen wollen, daß ein Kind irgend eine Vorstellung fasse, für welche sein Vorstellungsvermögen noch nicht reif ist. Hier gilt: Eile mit Weile! Man sondire und probire, und man wird bald merken, wie weit die Kraft reicht.

2) Ganz besonders hüte man sich, den Kindern die Zahlenkenntniß durch das bloße Auswendighersagen der Zahlenreihen beibringen zu wollen. Kinder mit einer starken Gedächtnißkraft werden zwar auf diese Weise jene Reihen gar bald wie das liebe „Vater Unser" schnell und fertig hersagen lernen. Aber diese Worte sind für sie bloße hohle, inhaltsleere Schälle, denen gar keine Vorstellung zum Grunde liegt.

3) Vor allem Zählen trachte man den Begriff der Einheit im Gegensatze der Vielheit festzustellen. Während man ihnen gleichzeitige Gegenstände zeigt, mache man ihnen bemerklich: Das sind viele Bäume, und das ist ein Baum; das sind viele Aepfel, und das ist ein Apfel u. s. w.

4) So wie man merkt daß allmählig der Begriff einer Einheit sich aussondert und feststellt, so gehe man zur Bildung der Zwei über — versteht sich immer zunächst an wirklichen Gegenständen — eine Hand! noch eine Hand! Zwei Hände! u. s. w. Zuletzt darf man auch, aber immer auf wirkliche Gegenstände hinweisen, den Namen des Gegenstandes auslassen und sprechen: Eins und noch Eins! Zwei! dann in der Zählform: Eins,

Zwei. So geführte Kinder werden gewöhnlich, was über die Zwei geht, mit viel benennen. Wenigstens machten es meine Kinder von selbst so.

5) Erst wenn der Begriff der Zwei sich festgestellt hat, geht man zur Bildung der Drei über. Ein Finger, noch ein Finger, zwei Finger! Zwei Finger, noch ein Finger, drei Finger! Mit der Hand auf den Tisch klopfend: Ein Streich, noch ein Streich, noch ein Streich, drei Streiche! so mit mehreren andern Gegenständen; dann unbenannt, aber immer auf wirkliche Gegenstände zeigend; dann in der Zählform: Eins, Zwei, Drei. So muß sich nach und nach der Begriff der Drei als 2 und 1, und 1 und 1 und 1 feststellen.

6) Auf die gleiche Art bilde man die Begriffe von 4 und 5. Nie gehe man zu einer folgenden Zahl über, bis sich der Begriff der vorhergehenden wenigstens so weit festgestellt hat, daß sie bis zu derselben ohne Anstoß zählen können. Bei meinen Kindern vergingen oft 2 bis 3 Wochen, bis ich zu einer andern Zahl übergehen konnte. So fahre man von 6 bis 10 fort. Bei diesen letzteren Zahlen nehme man Bohnen, Erbsen, u. s. w. zu Hülfe, und gewöhne Kinder schon an ein geregeltes Aneinanderreihen.

7) So wie die Kinder die 10 Grundeinheiten zählen können, kann man sie auch bis 20 zählen lassen. Ueber das dabei zu beobachtende Verfahren, so wie über die ersten schon mit diesen Kindern vorzunehmenden anderweitigen Uebungen wird das Lehrbuch in den ersten §§. nähere Anweisung geben.

§. 5. Der Rechnungsunterricht auf der Elementarstufe. Natur und Gränzen desselben in Beziehung auf Methode, Stoff und Zöglinge.

Die Eigenschaften einer guten, gründlichen, dem Entwicklungsgange des kindlichen Geistes und der Natur des Gegenstandes angepaßten Methode habe ich bereits in §. 2 angegeben. Die Methode der Elementarstufe unterscheidet sich von der wissenschaftlichen Behandlung der Zahl vorzüglich dadurch, daß erstere von dem Einzelnen, Besondern, Konkreten ausgeht und nur langsam und stufenweise mit beständiger Berücksichtigung der allmählig erstarkenden kindlichen Fassungskraft und des gewonnenen Standpunktes vom Anschaulichen zum Begreiflichen, vom Einzelnen und Besondern zum Allgemeinen, vom Konkreten zum Abstrakten fortschreitet, und dann erst nach erstiegener Höhe die Definitionen und allgemeinen Sätze als letztes und selbstgefundenes Resultat hinstellt, während die wissenschaftliche Methode gerade einen umgekehrten Weg einschlägt, von allgemeinen Sätzen und Definitionen ausgeht, dieses Allgemeine schon als ein Gefundenes hinstellt und daraus das Besondere und Einzelne ableitet *). Hieraus ergeben sich von selbst ihre Gränzen. Es sind auf der Elementarstufe des Unterrichtes

*) Die Natur und Beschaffenheit der elementarisch-genetischen Unterrichtsmethode im Gegensatze zur wissenschaftlichen zeichnet Diesterweg mit der ihm eigenthümlichen Klarheit und Schärfe in den trefflichsten Zügen in seinem Wegweiser für Lehrer (Essen bei Bädeker 1834) pag. 115 bis 136. Ueberhaupt kann ich diese treffliche Schrift denkfähigen, hinlänglich gebildeten Lehrern als eines der besten Werke über allgemeine Methodik nicht genug empfehlen.

(der die niedern Volksschulen angehören) die allgemeinen Sätze und Regeln, sowohl der reinen Zahlenlehre, als des angewandten Rechnens für die gewöhnliche Stufe des bürgerlichen Lebens, welche sie dem Kinde als letztes, durch seine eigene Geistesthätigkeit selbsterworbenes Eigenthum übergibt.

Hinsichtlich des der Elementarstufe zuzuweisenden Stoffes kann man ungleicher Meinung sein, je nachdem man diese Stufe selbst je nach dem Alter der Zöglinge und der auf ihr zu erringenden Bildungsstufe, verschieden begränzt. Nach meinem Dafürhalten gehört auf diese Stufe die ganze reine Zahlenlehre, die Dezimalbrüche und Proportionenlehre mit einbegriffen; von dem angewandten Rechnen nur so viel, daß ein Kind bei seinem Austritte aus der Elementarschule alle im alltäglichen, bürgerlichen Leben vorkommenden Rechnungsfälle theils im Kopfe, theils mit Ziffern leicht und fertig auszurechnen versteht. Ausgeschlossen blieben dagegen a) die höhere Arithmetik und Algebra. Die Buchstabenrechnung, die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen gehört noch nicht auf diese Stufe. Eher möchte die Lehre von den einfachen Gleichungen, die sehr leicht und von vielfachem Gebrauche ist, als Anhang mitzunehmen sein. *)

b) Die sogenannten kaufmännischen Rechnungsarten in ihrer vollständigen, ausführlichen und erschöpfenden Darstellung. Dagegen wird auch von diesen Rechnungsarten z. B. der Zinsrechnung, der Gesellschaftsrechnung u. s. w. gelegentlich und den Uebungen selbst angepaßt, alles dasjenige mitgenommen, was allgemein verständlich ist und im alltäglichen Leben selbst häufig vorkommt.

*) Wirklich macht das Kind schon auf der ersten Stufe beständig Gleichungen. Wenn es z. B. sagt $7 + 5 = 12$ oder $20 - 3 = 17$, so sind das schon Gleichungen.

Ausgeschlossen bliebe dagegen Alles, was diesen Kreisen fremd ist.

Als Zöglinge denke ich mir auf der Elementarstufe Kinder von 6 bis 12 Jahren. Während dieser 6 Jahre sollte der ganze oben angedeutete Cyklus von Uebungen vollständig durchgearbeitet werden können. Im Institute in Glarus kam ich schon in drei Jahren damit zu Ende, freilich mit Knaben von einem höhern Alter.

Aus der Elementarschule (niedern Primarschule) gehen die Kinder über

1. in die Sekundarschule (höhere Primarschule). Hier sollte der Rechnungsunterricht in folgenden zwei Formen vorkommen:

a) die höhere Arithmetik und Algebra, als Vorbereitung für die Industrieschule und das Gymnasium.

b) Das kaufmännische Rechnen — wobei immer auf die einfachsten und kürzesten Auflösungsmethoden zu halten ist, welche Zöglinge, die das elementarische Rechnen nach der oben angegebenen Methode erlernt haben, mit einiger Nachhülfe des Lehrers wohl von selbst finden werden. Hier bestimmt nicht mehr die Form, sondern der Stoff die Anordnung der Uebungen. Hierher gehören in möglichster Vollständigkeit a) die Reduktionen der Münzen, Maße und Gewichte. b) Die Zinsrechnung nach allen hier möglichen Fällen. c) Gewinn und Verlust. d) Rabatt und Disconto. e) Termin. f) Gesellschafts-, g) Wechselrechnung *).

2. Aus der Elementarschule gehen die meisten Kinder des Volks über in die Repetir- oder Fortbildungsschule (Realklasse der Primarschule). Hier würde zu-

*) Ich habe für diese Stufe einen besondern Cursus bearbeitet, der seiner Zeit, wenn das Hauptwerk günstige Aufnahme fände, ebenfalls im Druck erscheinen dürfte.

nächst das Rechnen der Elementarstufe repetirt, wozu das Uebungs- oder Exempelbuch den Stoff gäbe. Außerdem möchte es zweckmäßig sein, für diese Stufe eine auf Mittheilung von Realien berechnete und auch darnach geordnete besondere Beispielsammlung zu bearbeiten; z. B. a) eine geographische, worin die Geographie und Statistik der Schweiz und anderer Länder in Rechnungsbeispiele eingekleidet würden; b) eine naturgeschichtliche und physikalische, worin wieder gar viel Belehrendes aus beiden Fächern angebracht werden könnte; c) eine landwirthschaftliche, mancherlei Belehrendes über Feldbau und Viehzucht enthaltend; d) eine industrielle, worin Beispiele über die Erzeugnisse und Verhältnisse unserer Industrieanstalten gegeben würden.

§. 6. Verhältniß des Kopf- und Zifferrechnens.

In welcher Weise das Zifferrechnen mit dem Kopfrechnen zu verbinden sei, darüber enthält schon §. 2 einige Winke. Wie ich den dort ausgesprochenen Grundsatz verstehe und in Anwendung bringe, wird das Lehrbuch selbst klar machen. Hier möchte ich nur einige über diesen Punkt obwaltende Mißbegriffe berichtigen.

1) Manche meinen, Kopfrechnen heiße mit den Ziffern im Kopfe operiren. Sie stellen sich nicht die Zahlen, sondern die Ziffern vor und verfahren mit ihnen nach den gewöhnlichen Regeln, gerade wie beim schriftlichen Rechnen. Dies ist aber gar kein Kopfrechnen, sondern vielmehr ein ganz mechanisches, bloß auf Gedächtniß beruhendes Zifferrechnen, ohne allen Werth für den Hauptzweck des Rechnungsunterrichtes. Denkfaule, verkehrt geführte Schüler verfallen leicht auf diese verkehrte Methode. Verhütet werden kann dieses vorzüglich dadurch,

daß man das Kopfrechnen immer dem Zifferrechnen vorausgehen läßt.

2) Manche bilden sich ein, nur das Kopfrechnen sei ein Denkrechnen, wo man sich von den Gründen des Verfahrens Rechenschaft zu geben habe; beim Zifferrechnen müsse man nur die einmal eingeführten Regeln sich merken und nach ihnen verfahren lernen, ohne sich um die Gründe zu bekümmern. Auch das ist ganz irrig. Alles Rechnen muß ein Denkrechnen sein. Auch beim Zifferrechnen darf der Schüler keinen Schritt thun, ohne sich Rechenschaft von seinem Verfahren geben zu können. Die technischen Regeln des Zifferrechnens in den sogenannten vier Species bedürfen allerdings eine besondere Entwicklung und Darstellung. Dies abgerechnet, findet gar kein wesentlicher Unterschied zwischen dem Kopf- und Zifferrechnen statt. So wie die Zahlen für das Behalten zu groß werden, nimmt das Kind die Ziffern zu Hülfe. Die Auflösungen der mit Ziffern berechneten Beispiele sind in den meisten Fällen mit den Auflösungen der Kopfrechnungsexempel ganz übereinstimmend.

3) Manche Lehrer setzen einen ganz besondern Werth auf das Behalten und Operiren mit großen Zahlen im Kopfe und meinen, darin bestehe die Hauptstärke des Kopfrechnens. Auch das ist Irrthum. Ich habe unter meinen Zöglingen sehr leere Köpfe, ja sogar Dummköpfe gehabt, die bei einer starken Gedächtnißkraft Exempel mit sehr großen Zahlen ganz leicht im Kopfe abhaspelten, wenn sie sich einmal die Auflösungsformel gemerkt hatten, während sie dagegen ganz verkehrtes Zeug machten, wenn sie eine ihnen unbekannte Zahlencombination zu Stande bringen, oder irgend ein neues Verhältniß selbstthätig suchen, oder auch nur ein gewöhnliches angewandtes Beispiel, worin die Sätze verstellt waren, berechnen sollten. Dagegen hatte ich sehr gute Köpfe, welche die feinsten Zahlencombinationen nicht nur leicht und schnell begriffen,

sondern auch leicht und schnell fanden und mich nicht selten durch ganz neue, sehr wohl ausgedachte Auflösungen überraschten, denen aber das Behalten großer Zahlen sehr schwer fiel.

§. 7. Mein neues Lehrbuch der Arithmetik. Einrichtung desselben.

Nach den in den vorhergehenden §§. ausgesprochenen Grundsätzen bearbeite ich gegenwärtig ein neues Lehrbuch der Arithmetik, welches gegen das Ende dieses Jahres oder im Anfang des künftigen unter dem Titel: „Methodisches Lehrbuch des Denkrechnens sowohl im Kopfe, als mit Ziffern, für Volksschulen“ erscheinen wird. Dasselbe wird aus folgenden drei Abtheilungen bestehen.

1) Die reine Zahlenlehre, von den einfachsten Elementen ausgehend, in ununterbrochener Stufenfolge nach der oben beschriebenen genetisch elementarischen Methode bis zu den Proportionen in ganzen und gebrochenen Zahlen fortschreitend, das Kopf- und Zifferrechnen umfassend, letzteres auf ersteres aufbauend.

2) Das angewandte Rechnen, vorzüglich die sämmtlichen Schweizerkantone und die angränzenden süddeutschen Länder berücksichtigend. Es versteht sich, daß der Lehrer den Gebrauch der zweiten Abtheilung mit demjenigen der ersten verbinden muß, weßwegen auch ihre §§. parallel laufen. Ich trennte beides, einestheils um mich bei der Darstellung der reinen Zahlenlehre durch das Materielle des angewandten Rechnens nicht stören zu lassen; anderntheils auch in der Meinung, daß die reine Zahlenlehre in dieser Gestalt überall, auch in ganz Deutschland gebraucht werden könne, während das angewandte Rechnen nur für die oben angedeuteten beschränkten Kreise bestimmt ist.

3) Ein Exempelbuch für den Schüler, einen

sehr reichen Stoff von Beispielen für das Kopf- und Zifferrechnen enthaltend, nach den §§. der reinen Zahlenlehre und des angewandten Rechnens geordnet und ihren Uebungen angepaßt. Die Beispiele des angewandten Rechnens sind dem alltäglichen Leben entnommen, mannigfach eingekleidet, oft auch mannigfach zusammengesetzt, darauf berechnet, die Urtheilskraft der Kinder vielseitig zu üben und zu schärfen. Berücksichtigt sind im angewandten Rechnen und im Exempelbuche alle Münz-, Maß- und Gewichtsverhältnisse der Schweiz und der angränzenden Länder; vorzüglich aber a) Zürich, b) die östlichen Kantone mit dem Reichsfuße, c) die westlichen Kantone mit dem Frankenfuße, d) Glarus. Auch Luzern und Bünden sind mit ihren Eigenthümlichkeiten noch mit berücksichtigt, ebenso auch das französische Münz-, Maß- und Gewichtssystem. Vergleichende Tabellen werden dem Lehrer neuen Stoff zu Beispielen darbieten, auch dem Geschäftsmanne das Buch werth, aber auch zugleich das Bedürfniß eines gemeinsamen schweizerischen Münz-, Maß- und Gewichtsystemes recht fühlbar machen.

Die ersten beiden Abtheilungen sind für den Lehrer bestimmt. Die Lehrgänge sind sehr genau angegeben, aber keineswegs in der Meinung, ihm das Denken zu ersparen, oder ihm eine stabile Lehrform vorzuschreiben. Zum Verstehen dieses Lehrbuches wird eben kein gelehrter, wohl aber ein denkender und denkfähiger Lehrer vorausgesetzt.

§. 8. Ueber die Anordnung des Lehrstoffs.

A. Die reine Zahlenlehre.

Das Ganze zerfällt in 5 Kapitel oder Hauptstücke, von denen das Vte, die Brüche behandelnd, wieder aus 3 Unterabtheilungen besteht.

Jeder Hauptübung ist ein besonderer §. gewidmet. Zuerst wird für den Lehrer der Gang der Uebung umständlich entwickelt und begründet. Dann folgt die Uebung selbst für die Kinder. Jeder Uebung sind eine Reihe von Musterfragen angehängt, welche der Lehrer und seine Gehülfen (Monitoren) vorzüglich zu beachten haben.

Ich will hier nur kurz den Unterrichtsgang in den drei ersten Kapiteln durch Angabe des Inhalts ihrer §§. andeuten.

I. Das erste Kapitel behandelt die erste Bildung der Zahlen, das einfache Zu- und Abzählen, oder die arithmetischen Zahlenreihen. Ueber die Terminologie sehe man unten §. 11.

§. 1. Hier lernen die Kinder vor- und rückwärts zählen A. von 1 bis 10. B. von 10 bis 20. C. von 20 bis 100. Letzteres wird aber bei schwächern Kindern bis nach §. 2 verspart. Durch diese Uebung lernen die Kinder die Ordnung und Folge der Zahlen kennen. Dieses Ordnen geschicht nach den schon oben §. 2 dieser Abhandlung gegebenen Regeln.

§. 2. Das Trennen und Verbinden der Grundzahlen von 1 bis 10 a) in 2 Glieder, b) in 3 Glieder. Die gleiche Uebung in der Form des Zu- und Abzählens. Durch diese Uebung wird den Kindern der Inhalt der Grundzahlen zum klarsten Bewußtsein gebracht und das Wesen der Addition und Subtraktion mitgegeben.

§. 3. Fortsetzung von §. 2. Addition- und Subtraktionsreihen bis 100, jedoch ohne Ueberspringung des Zehners.

§. 4 und 5. Additions- und Subtraktionsreihen mit Ueberspringung der Zehner (nach den Formeln für die Addition: $8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 13$; für die Subtraktion: $14 - 6 = 14 - 4 - 2 = 10 - 2 = 8$).

§. 6. Vergleichung der Zahlen hinsichtlich des Mehr und Weniger. Bestimmung ihres Unterschiedes.

§. 7. Auffassung und Behandlung der Zahlen von

10 bis 100 als Zehner. Einleitung zur schriftlichen Darstellung der Zahlen.

§. 8. Schriftliche Bezeichnung der Zahlen von 1 bis 100 durch Ziffern. — Anwendung der frühern Uebungen auf die schriftliche Darstellung. Einfache Additions- und Subtraktionsreihen mit Ziffern dargestellt.

§. 9. Auffassung und Behandlung der Zahlen von 100 bis 1000 als Zehner und Hunderter. Fortsetzung von §. 7. Das Zu- und Abzählen der Zehner und Hunderter.

§. 10. Anwendung des §. 9 auf die schriftliche Darstellung und Behandlung.

§. 11. Vollständige Entwicklung des Dezimalsystems aus dem Würfel, in eigenthümlicher Weise.

§. 12. Anwendung des §. 11 auf die schriftliche Darstellung. Vollständige Entwicklung des Numerirens.

§. 13. Vollständige Darstellung der Addition. Definitionen, Regeln und allgemeine Sätze, als Ergebnisse der frühern Uebungen.

§. 14. Vollständige Darstellung der Subtraktion. Definitionen, Regeln und allgemeine Sätze.

Anmerkung. Die Uebungen §. 9 bis 14, die ein schon erstarktes Abstraktionsvermögen voraussetzen, können bei schwächern Kindern verspart werden, bis sich durch die im zweiten Kapitel §. 15 bis 17 vorkommenden Uebungen die Ansicht der Zahl erweitert und insbesondere der Begriff von Kollektivgrößen durch die Vorstellung der Vielfachen aller Zahlen von 1 bis 10 festgestellt hat.

II. Das zweite Kapitel behandelt das malige Zu- und Abzählen oder die geometrischen Zahlenreihen. Man sehe unten §. 11.

§. 15. Aufstellung der Zahlen nach dem Gesetze des maligen Nehmens, als Kollektivgrößen, unter den Ausdrücken: Einer, Zweier, Dreier; Mal; fach.

§. 16. Verwandlung der Einer in Mehrfache und umgekehrt. Das sogenannte Einmaleins. Das Wesen der Multiplikation und Division. Zwei Formen der Aufstellung: a) Reihenfolge der Kollektivgrößen vom Einfachen bis zum Zehnfachen fortschreitend. Multiplikand gleichbleibend; Multiplikator fortschreitend. b) Reihenfolge der Gleichfachen aller Kollektivzahlen von 1 bis 10. Multiplikator gleichbleibend; Multiplikand fortschreitend.

§. 17. Umkehrung der Faktoren; aus der Aufstellungsweise der Kollektivgrößen in geometrischer Form nachgewiesen.

§. 18. Allgemeine Betrachtung der Multiplikation. Erklärung der dabei gebräuchlichen Ausdrücke. Einige allgemeine Sätze als Ergebniß dieser Betrachtung.

§. 19. Allgemeine Betrachtung der Division; a) als ein Aufsuchen des einen Faktors aus dem gegebenen andern Faktor und dem Produkte. Erklärung der Benennungen.

§. 20. Fortsetzung von §. 19. b) Betrachtung der Division als ein mehrmaliges Abzählen, oder als eine Untersuchung über das Enthaltensein einer Zahl in einer andern. Definitionen und allgemeine Sätze, als Ergebniß dieser Betrachtung.

§. 21. Fortsetzung von §. 16 und 17. Verwandlung der Mehrfachen einer Zahl in Mehrfache einer andern; a) unmittelbar durch Auflösung in Einer; b) durch Bestimmung des Mehr oder Weniger; c) durch Zerlegung in mehrere Faktoren.

§. 22. Anwendung der vorhergehenden Uebungen auf die Behandlung der Zehner, Hunderter, Tausender u. s. w. A. Multiplikation a) der Einer mit dem einfachen Zehner; b) der Einer mit mehrfachen Zehnern; c) der Hunderter und Tausender mit Einern; d) der Zehner mit Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w., Hunderter mit Hundertern, Tausendern u. s. w. e) Zusammengesetzte Beispiele.

§. 23. Fortsetzung. B. Division. a) Einer in Zehner und Hunderter; b) Zehner in Zehner und Hunderter; c) allgemeine Regel für Verkleinerung des Divisors und Dividenden.

§. 24. Vollständige, entwickelnde Darstellung des schriftlichen Multiplizirens.

§. 25. Abkürzungen beim Multiplizîren.

§. 26. Vollständige, entwickelnde Darstellung des schriftlichen Dividirens.

§. 27. Abkürzungen beim Dividiren. Verschiedene Methoden.

III. Kapitel. Hier kommt das Dividiren unter einer neuen Form, derjenigen des Theilens vor, man sehe darüber die besondere Abhandlung unten in §. 11.

Die Ordnung der §§. ist hier folgende:

§. 28. Begriff des Theilens als eines Zerlegens in mehrere gleiche Theile. Aufsuchen der Zahlen, die in 2, 3 u. s. w. gleiche Theile getheilt werden können. Erste Form des Theilens: der Theiler als Multiplikator und der Antheil als Multiplikand erfaßt. Beisp. In 5 gleiche Theile können getheilt werden alle Fünffachen. 35 ist 5×7. Theilt man 5×7 in 5 gleiche Theile, so kommt auf einen Theil 1×7.

§. 29. Zweite Form des Theilens. Der Theiler umgekehrt als Multiplikand erfaßt. Obiges Beisp. In 5 gleiche Theile können getheilt werden alle Vielfachen von 5. $35 = 7 \times 5$. Theilt man 1×5 in 5 gleiche Theile, so kommt auf einen Theil 1×1. Theilt man 7×5 in 5 gleiche Theile, so kommt auf 1 Theil 7×1.

Anmerkung. Die erste Form ist die Hauptform des Theilens, da der Theiler immer Multiplikator ist; das Festhalten dieser Ansicht ist für das angewandte Rechnen nicht unwichtig. Durch die zweite Form kann das Theilen auf das Messen oder Enthaltensein zurückgeführt werden. Sie liegt dem gewöhnlichen schriftlichen Dividiren zum Grunde.

§. 30. Untersuchung, auf wie vielerlei Arten und in wie viele gleiche Theile alle Zahlen von 1 bis 100 getheilt werden können, und Bestimmung der Größe dieser gleichen Theile.

§. 31. Benennung der Theile als Hälften, Drittel u. s. w. Das Theilen unter dieser Benennung. Bestimmung der Ganzen aus der Menge der Theile und ihrer Größe.

§. 32. Bestimmung des wievielsten Theils aus dem Ganzen und der Größe des Antheils. Eine vorbereitende Uebung für das folgende Kapitel von den Verhältnissen und Proportionen.

§. 33. Allgemeine Betrachtung des Theilens. In den vorhergehenden §§. wurden alle Operationen genetisch aus konkreten Fällen und Beispielen entwickelt. Hier wird nun das früher Gegebene zusammengefaßt, und daraus die allgemeinen Definitionen, Gesetze und Regeln abgeleitet, und insbesondere auch der Zusammenhang des Theilens mit dem Messen nachgewiesen.

§. 34. Das schriftliche Theilen mit Ziffern.

Anmerkung. Von hier an machen die schriftlichen Beispiele nicht mehr eine besondere Abtheilung des Unterrichtsganges aus, sondern sie schließen sich unmittelbar an das Kopfrechnen an.

§. 35. Das Theilen der Theile. Zerlegung der Divisoren.

§. 36. Das mehrmalige Nehmen der Theile. Bestimmung der mehrfach genommenen Theile.

§. 37. Das Nehmen des mehrfachen Theils als ein Nehmen des einfachen Theils aus dem mehrfach wiederholten Ganzen. Diese Uebung bedarf einer sorgfältigen Entwicklung, ist aber für das angewandte Rechnen sehr wichtig.

§. 38. Vergleichung der mehrmals genommenen Theile mit der ganzen Zahl. Vorübung zum Bruchrechnen.

Anmerkung. Es kommen in diesem Kapitel wirklich schon Uebungen des Bruchrechnens vor; aber sie unterscheiden sich von den erst im fünften Kapitel vorkommenden Uebungen des eigentlichen Bruchrechnens dadurch, daß hier die Ganzen und ihre Theile bestimmte konkrete Zahlen, hingegen im Bruchrechnen abstrakte Größen sind, worunter wir uns jede beliebige theilbare Größe vorstellen können.

IV. Kapitel. Dieses Kapitel behandelt die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen in ganzen Zahlen. Ich bedachte mich anfänglich, ob es nicht besser wäre, diese Lehre erst später für ganze und gebrochene Zahlen im Zusammenhange zu geben. Nach Erwägung aller Gründe entschloß ich mich, sie hier einzuschalten. Durch das Theilen ist diese Lehre hinlänglich vorbereitet. Sehr leicht lernen Kinder den Exponenten des Verhältnisses zweier ganzer Zahlen auch in der Bruchform bestimmen und dann durch das Zusammenstellen gleicher Verhältnisse Proportionen bilden. Dadurch wird das Bruchrechnen selbst vorbereitet. Es ist dann um so leichter, klar zu machen, daß der Bruch nichts anders, als eine Verhältnißbezeichnung der Theile zu ihrem Ganzen ist.

Das V. Kapitel behandelt das Bruchrechnen in drei Abtheilungen. 1) Die gemeinen Brüche. 2) Die Dezimalbrüche. 3) Die Lehre von den Proportionen, auf die Brüche übergetragen und vollständig entwickelt und dargestellt. Um nicht gar zu weitläufig zu werden, enthalte ich mich, hier noch den Inhalt der §§. dieser zwei Kapitel besonders anzugeben.

§. 9. B. Das angewandte Rechnen.

Durch die Anwendung der Zahl soll der Schüler befähigt werden, alle im gewöhnlichen alltäglichen Leben vorkommenden Rechnungsfälle theils im Kopfe, theils mit Ziffern schnell und sicher, mit klarem Bewußtsein der Gründe seines Verfahrens, auszurechnen. Der hier zu verarbeitende Stoff muß also den Kreisen des gewöhnlichen, alltäglichen Lebens entlehnt und so vielseitig, als möglich sein. Eine sorgfältige, dem Gange der reinen

Zahlenlehre angepaßte Behandlung des angewandten Rechnens ist sehr wichtig, nicht bloß wegen des praktischen, sondern auch wegen des formellen Zweckes, als eine treffliche Uebung der Urtheilskraft durch das Subsumiren der gegebenen Exempel unter die Gesetze und Regeln der reinen Zahlenlehre und durch das Auffinden der in jedem gegebenen Falle besten Auflösungsmethode.

Das angewandte Rechnen behandelt die zweite Abtheilung meines Lehrbuchs sehr ausführlich in der schon in §. 7 angedeuteten Weise und Ausdehnung. Die §§. laufen parallel mit denjenigen der reinen Zahlenlehre, und überall ist angezeigt, wo die Anwendung beginne. Auch hier gilt Mannigfaltigkeit der Auflösungen als Regel. So finden die Kinder die einfachsten Auflösungsmethoden selbst, wofür überall Andeutungen gegeben sind. Auch findet der Lehrer überall Anleitung, wie die stillen Pensen sowohl für das Kopf- als Zifferrechnen einzurichten seien. Die Einrichtung ist so getroffen, daß Kinder, welche auch nur die ersten drei Kapitel vollständig durchgemacht haben, beinahe alle im täglichen Leben vorkommenden Rechnungsfälle, auch ohne die Bruchlehre mitgemacht zu haben, berechnen können. Eine ausführliche Inhaltsanzeige würde dieser Abhandlung eine gar zu große Ausdehnung geben. Nur so viel füge ich noch bei, daß alle Lehrer, welche mein Manuskript sahen und zum Theil auch Gebrauch davon machten, sich durch diese Abtheilung ganz besonders befriedigt fanden. —

§. 10. C. Das Uebungs- oder Exempelbuch.

Unmittelbar an die genannten zwei Abtheilungen des Methodenbuchs schließt sich ein Exempelbuch für die Schüler an. Ueber die Einrichtung desselben walteten anfänglich einige Zweifel. Es war nämlich die Frage, ob dieses Uebungsbuch bloß ein Stoffbuch oder nicht auch zugleich eine Art Lehrbuch der Rechenkunst für Elementarschüler sein sollte. Es wäre mir etwas sehr Leichtes, aus der reinen Zahlenlehre und dem angewandten Rechnen ein solches Lehrbuch, nur die Resultate der lebendigen Uebungen, die Gesetze und Regeln als ein Gefundenes hin- und den Beispielen voranstellend, herauszuziehen. Aber nach einer sorgsamen Ueberlegung fand ich, daß ein solches Lehrbuch für den Gang einer elementarisch genetisch verfahrenden Methode mehr hinderlich, als förderlich wäre.

Für akademische Vorlesungen, auch allenfalls für Gymnasien, haben solche Kompendien ihren guten Nutzen. Es findet hier nicht mehr ein Aufsteigen von dunkeln Vorstellungen zu klaren Begriffen, ein allmähliges Uebergehen vom Konkreten zum Abstrakten statt. Diese Stufe hat bereits der Zögling erstiegen. Hier darf die objektive, rein wissenschaftliche Betrachtung und Behandlung der Disziplin als die vorherrschende sich schon geltend machen. Anders auf der Elementarstufe. Hier ist die subjektive elementarische Ansicht und Behandlung die vorherrschende. Es werden hier nicht Sätze hingegeben, dann erklärt und bewiesen; nicht allgemeine Begriffe hingestellt, zersetzt, ihre Merkmale und Unterordnungen angegeben. Es werden hier vielmehr konkrete Vorstellungen nach und nach verbunden, und zu allgemeinen Begriffen gesteigert. Es werden durch Combination die Urtheile, Gesetze und Regeln erst erfunden. Auf dieser Stufe muß also der Unterricht des Lehrers das lebendige Buch sein, aus dem der Schüler seine Begriffe und Urtheile bilden, Sätze und Regeln selbst erfinden lernt. Gibt man ihm diese Gesetze und Regeln als ein schon Gefundenes in die Hände, so wird einestheils die Freude des eigenen Findens gestört; anderntheils gewöhnt er sich nur gar zu leicht, die Regeln bloß mechanisch mit dem Gedächtnisse zu erfassen. Der wesentlichste Theil des geistbildenden Elementes geht darüber verloren.

Das von mir bearbeitete Uebungsbuch enthält daher nur:

a) die nothwendigsten Erklärungen zum Verstehen der Beispiele;

b) einen reichen Stoff von Beispielen nach den §§. des reinen und angewandten Rechnens geordnet, sowohl für das Kopf- als Zifferrechnen;

c) hinsichtlich der Auflösungen und ihrer Darstellungsform einige Andeutungen;

d) hinsichtlich der Definitionen, Gesetze und Regeln erst am Schlusse der Uebungen einige Fragen, welche das Kind veranlassen sollen, die aus dem Unterrichte des Lehrers gefaßten allgemeinen Sätze und Regeln schriftlich auf seiner Tafel auszusprechen. Diese Fragen sind gleichsam ein Examen über die gefundenen Resultate; das Kind soll durch die schriftlich abgefaßten Antworten zeigen, ob es den Unterricht des Lehrers gefaßt habe, und die Antwort auch gewöhnlich durch ein Beispiel erläutern.

§. 11. Ueber das Dividiren.

Die meisten Lehrer des Rechnens erfassen das Dividiren, durch den lateinischen Namen verleitet, als ein Theilen in gleiche Theile, und stellen diese Ansicht als die alleinige, oder doch als die Haupt- und Grundansicht dieser Operation dar. Dieses ist aber irrig und führt zu Irrthümern. Denn

1) gibt es viele Fälle im angewandten Rechnen, auf welche der Begriff des Theilens nicht paßt. Haben z. B. 4 Personen 24 kr. unter sich zu theilen, so sage ich ganz richtig: Theile ich 24 kr. in 4 gleiche Theile, so kommt auf 1 Theil 6 kr. Wäre aber die Frage: wie viele Batzen machen 24 kr., deren 4 auf 1 Batzen gehen? so findet auch hier eine Division statt, aber ich kann nicht sagen: ich muß die 24 kr. in 4 gleiche Theile theilen,

denn der vierte Theil von 24 kr. wäre wieder 6 kr. und nicht 6 Batzen. Ich muß hier vielmehr untersuchen: wie viel mal 4 kr. sind 24 kr., d. h. ich muß die 24 kr. als ein Produkt betrachten, dessen einer Faktor 4 kr. ist. So finde ich, daß 24 kr. = 6 × 4 kr. sind, und da 1 × 4 = 1 Batzen ist, so sind 6 × 4 kr. = 6 × 1 Batzen = 6 Batzen.

Eben so, wenn 5 Pfund Fleisch mit 35 kr. bezahlt werden, und ich den Preis von 1 Pfd. wissen will, so sage ich ganz richtig: 1 Pfd. ist der fünfte Theil von 5 Pfund; also ist der Preis eines Pfundes auch gleich dem fünften Theil des Preises der 5 Pfd. Ich muß also den fünften Theil von 35 kr. suchen = 7 kr. Wäre aber die Frage: Ich lasse mir Fleisch für 35 kr. holen, und muß für jedes Pfund 7 kr. bezahlen, wie viele Pfunde sind es? so findet auch hier eine Division statt, aber den Begriff einer Theilung kann ich hier nicht in Anwendung bringen. Ich kann nicht sagen: ich muß die 35 kr. in 7 gleiche Theile theilen, denn der siebente Theil von 35 kr. ist nicht 5 Pfd., sondern 5 kr. Ich muß vielmehr auch hier die 35 kr. als ein Produkt betrachten, das durch Multiplikation von 7 kr. mit einem mir unbekannten und unbenannten Multiplikator entstanden ist; ich muß also untersuchen: wie viel mal 7 kr. sind die 35 kr. Ich finde, es sind 5 × 7 kr. Da ich nun für 1 × 7 kr. = 1 Pfd. Fleisch erhalte, so bekomme ich für 5 × 7 kr. = 5 × 1 Pfd. = 5 Pfd.

2) Beim Theilen wird immer ein Ganzes vorausgesetzt, das aus mehrern und zwar gleichen Theilen zusammengesetzt ist, und man will die Größe des Antheils wissen, der auf jeden Theil fällt. Ich kann also eine Größe oder ein Ganzes in 2, 3, 4 gleiche Theile — überhaupt in so viele gleiche Theile, als ich nur immer will, theilen, aber immer muß der Theiler oder der Divisor beim Theilen größer als 1 und eine ganze Zahl

sein. Wird der Divisor $= 1$, so ist ja der Theil dem Ganzen gleich, was widersinnig ist, da der Theil immer kleiner als das Ganze sein muß. Eine Zahl durch 1 *getheilt* hat also gar keinen Sinn. Eben so muß der Theiler allemal eine ganze Zahl sein. Denn welchen Sinn hätte wohl die Aufgabe, man soll 10 in 2½ gleiche Theile theilen?? *) Man könnte zwar diese Aufgabe so fassen: Man solle 10 eigentlich in 3 Theile theilen, und zwar so, daß 2 Theile gleich und der dritte nur halb so groß, als jeder der beiden andern würde. Um diese Theilung zu bewerkstelligen, muß ich zuerst die Theile selbst unter sich ausgleichen, so daß ich lauter gleiche Theile bekomme. Dieß geschieht, indem ich jeden der beiden ersten Theile doppelt, und den dritten einfach nehme; dann bekomme ich 5 gleiche Theile. 10 in 5 gleiche Theile getheilt, kommt auf 1 Theil 2. Davon kommt auf den ersten Theil $2 \times 2 = 4$; auf den zweiten auch $2 \times 2 = 4$, und auf den dritten 1×2. Wer sieht aber nicht, daß der Ausdruck „in 2½ *gleiche* Theile theilen" ganz unpassend ist, und daß es vielmehr heißen sollte: es soll die Zahl 10 in 3 *ungleiche* Theile getheilt werden, so daß ein Theil nur halb so groß sei, als jeder der beiden andern. Noch weniger anwendbar

*) In der Bruchlehre kommt allerdings auch der Ausdruck $^{12}/_{1}$ vor. Mit Recht nennt man dies einen *Scheinbruch*, indem man dadurch bloß zum Scheine eine Anzahl von Ganzen unter der Bruchform dargestellt werden soll. Eben so kann auch ein ächter oder unächter Bruch als Nenner erscheinen, z. B. $\frac{4}{2/3}$ oder $\frac{8}{2\frac{1}{2}}$. So wie aber der Nenner als Divisor (Theiler) behandelt und eine wirkliche Theilung vollzogen werden soll, so muß der Bruch im Divisor durch Multiplikation weggeschafft werden, wodurch obige Brüche die Form $^{12}/_{2}$ und $^{16}/_{5}$ bekommen, woraus sich ergibt, daß nicht $^{2}/_{3}$ oder $2\frac{1}{2}$, sondern 2 und 5 die wahren Divisoren oder Theiler sind.

wäre dieser Ausdruck, wenn der Theiler ein ächter Bruch wäre. Was für ein Sinn läge in der Aufgabe: es soll 6 in ⅓ gleiche Theile getheilt werden??

Betrachten wir das Wesen des Dividirens näher, so ergibt sich als Hauptansicht desselben: es ist das Umgekehrte der Multiplikation; es ist ein Produkt, und der eine Faktor gegeben, und daraus soll der andere Faktor gebildet werden. In diesem Falle heißt das gegebene Produkt Dividend, der gegebene Faktor Divisor und der unbekannte erst zu suchende Faktor Quotient. Nun kann aber der gegebene Faktor (Divisor) Multiplikand oder Multiplikator sein. Ich kann fragen: wie viele Male muß 5 genommen (wiederholt) werden, um 35 zu erhalten? oder welche Zahl muß 5 Mal genommen werden, um 35 zu erhalten? Im ersten Fall ist der gegebene Faktor (Divisor) Multiplikand und der Quotient Multiplikator. Im zweiten Falle ist der gegebene Faktor Multiplikator, und der Quotient Multiplikand. Hieraus ergeben sich also zwei verschiedene einander entgegengesetzte Hauptformen der Division, die sich zwar gegenseitig bedingen und bestimmen, auch auf eine gemeinschaftliche Form zurückgeführt werden können, aber keineswegs verwechselt werden dürfen, indem jeder, auch in der Praxis, eine besondere Ansicht zum Grunde liegt. Die erstgenannte Hauptform kann man füglich ein Messen, die andere ein Theilen nennen, obgleich letzteres, als eine eigenthümliche Ansicht und Operation, die zweite Hauptform noch nicht vollständig erschöpft und erst aus derselben abgeleitet werden muß. Beim Messen wird immer gefragt: wie viel Mal faßt eine gegebene Zahl (der Dividend oder das Produkt) eine andere gegebene, die wir das Maß (Divisor = Multiplikand) nennen können? Der Quotient ist ein Multiplikator, welcher anzeigt, wie viel Mal das Maß genommen werden müsse, um das gegebene Produkt zu erhalten. Das Messen läßt sich zurückführen auf die Vorstellung des maligen Abzählens (Wegthuns) oder des Enthaltenseins. Ich kann auch fragen: wie viel Mal kann 5 von 60 weggethan (abgezählt) werden, bis die Zahl 60 vernichtet ist? oder wie viel Mal ist die Zahl 5 in 60 enthalten? Ich finde als Quotienten (hier Multiplikator) 12; denn 60 ist 12×5. 1×5 kann von 12×5 12 $\times$ weggethan werden, oder 1×5 ist in $12 \times 5 = 12 \times$ enthalten. Wir werden unten finden, daß das Messen die Hauptansicht der Operation des Dividirens ist, und daß auch das Theilen in gleiche Theile auf dieselbe zurückgeführt und aus derselben abgeleitet werden kann. Auch kann beim Messen der Divisor (das Maß) jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein. Ich finde nicht das geringste Anstößige in den Aufgaben: es soll untersucht werden, wie viel Mal die Zahl 1 oder $\frac{2}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$ von 24 weggethan werden können, oder wie viel Mal diese Divisoren in 24 enthalten seien? Beim Theilen ist, wie schon erinnert, ein Ganzes gegeben, das in mehrere gleiche Theile zerlegt werden soll. Daraus soll die Größe des Antheils bestimmt werden. Man fragt hier: Es soll die Zahl 60 in 5 gleiche Theile zerlegt werden; wie viele Einheiten kommen auf jeden der 5 gleichen Theile? Offenbar ist das Ganze auch ein Produkt, entstanden durch Multiplikation des Antheils mit der Menge der Theile. Denn der Antheil, so viel Mal genommen, als Theile vorhanden sind, muß = dem Ganzen werden. In obigem Beispiel muß der noch unbekannte Antheil 5 $\times$ genommen = 60 sein. Es ist also hier die Frage: 60 ist 5 $\times$ welche andere Zahl? Ich finde $60 = 5 \times 12$. Daraus leite ich die Größe des Antheils ab und sage: der fünfte Theil von $5 \times 12 = 1 \times 12$. Offenbar ist hier der gegebene Faktor (Divisor, Theiler) ein Multiplikator und der Quotient (Antheil) ein Multiplikand.

Indeß kann, wie schon erinnert, das Theilen in gleiche Theile auf die erste Hauptform des Dividirens, das Messen, zurückgeführt und aus derselben abgeleitet werden. In obigem Beispiele kann der Divisor (Theiler), der hier Multiplikator ist, auch als Multiplikand betrachtet und behandelt werden, da sich die Faktoren immer gegen einander umwechseln lassen. Ich kann also untersuchen: wie viel Mal muß 5 wiederholt werden, um 60 zu erhalten? Ich finde, daß dieß $12 \times$ geschehen müsse, oder daß $60 = 12 \times 5$ sei. Nun kann ich a) hieraus unmittelbar die Größe des Antheils ableiten. Ich kann sagen: der fünfte Theil von $1 \times 5 = 1 \times 1$, von $12 \times 5 = 12 \times 1$, oder b) ich kann die Faktoren umkehren und sagen: 12×5 ist $= 5 \times 12$. Der fünfte Theil von $5 \times 12 = 1 \times 12$.

Bringt man die Division auf den Ausdruck des maligen Wegthuns oder des Enthaltenseins, so kann man das Verfahren beim Theilen sich folgendermaßen vorstellen: Es soll wieder 60 in 5 gleiche Theile getheilt werden. Soll auf jeden Theil 1 kommen, so muß ich 5 auf Ein Mal von den 60 wegthun. Es fragt sich also, wie viel Mal kann ich die 5 von 60 wegthun, oder wie viel Mal ist 5 in 60 enthalten; dann weiß ich auch, wie viel Mal 1 auf jeden Theil kommt. Nun finde ich, daß 5 von 60 $12 \times$ weggethan werden könne, oder daß 5 in 60 $12 \times$ enthalten sei; folglich kommt auf jeden Theil 12×1. Allgemein: Beim Theilen in gleiche Theile kommt auf jeden Theil so viel Mal 1, als die Zahl, welche die Menge der Theile angibt (der Divisor), in der zu theilenden Zahl (Dividend) enthalten ist. — Gerade so würde auch ein verständiger Knabe, der von unsern künstlichen Divisionsmethoden noch Nichts versteht, verfahren, wenn er einen Korb voll Nüsse unter 8 Knaben zu vertheilen hätte. Er würde die 8 Knaben in eine Reihe stellen, und auf einmal 8 Nüsse aus dem Korb nehmen und jedem eine geben. Dann würde er wieder 8 Nüsse daraus nehmen und wieder jedem eine geben. So würde er fortfahren, jedesmal 8 Nüsse aus dem Korb herauszunehmen, bis der Korb leer wäre. Es wäre also auch hier die Frage: wie viel Mal 8 Nüsse befinden sich in dem Korbe? Jeder der 8 Knaben bekäme so viel Mal 1 Nuß, so viel Mal 8 Nüsse sich in dem Korbe befänden. — Um jedoch den Unterschied jener zwei Hauptformen der Division und ihre Eigenthümlichkeiten recht klar zu machen, füge ich noch folgende Betrachtung hinzu.

1) Beide Operationen bestimmen und bedingen einander gegenseitig. Wird beim Messen nach dem Maße gefragt, so wird das Messen ein Theilen; und umgekehrt, wird beim Theilen nach der Menge der Theile gefragt, so wird das Theilen ein Messen. Es sei z. B. die Frage: welche Zahl ist 8 × in 40 enthalten, so ist hier der Divisor nicht das Maß (der Multiplikand), sondern vielmehr die Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal das Maß im Dividenden enthalten sei (also ein Multiplikator). Ich kann hier sagen: Ist eine Zahl 8 × in 40 enthalten, so ist diese Zahl = dem achten Theile von 40. Der achte Theil von 40 ist = 5. Ist hingegen die Frage: der wievielste Theil von 48 ist 6? oder was einerlei ist: in wie viele Theile ist 48 getheilt worden, wenn auf einen Theil 6 kommt? so ist hier der gegebene Divisor ein Multiplikand, und der zu suchende Quotient ein Multiplikator; ich kann hier sagen: es sind so viele Theile vorhanden, als der Antheil 6 im Ganzen 48 enthalten ist; 6 ist in 48 8 × enthalten; folglich sind 8 Theile vorhanden, oder 6 ist der achte Theil von 48.

2) Das Theilen erschöpft die zweite Hauptform der Division nicht vollständig. Beim Multipliziren kann nicht bloß der Multiplikand, sondern auch der Multiplikator ein Bruch sein. Folglich kann auch beim Dividiren der gegebene Multiplikator ein Bruch sein. Ich kann fra-

gen: 10 ist $\frac{1}{4} \times$ welche andere Zahl? Aber, wie schon oben erinnert, niemals kann der Theiler ein Bruch sein. Ohne allen vernünftigen Sinn wäre die Frage: was kommt auf einen Theil, wenn 10 in $\frac{1}{4}$ gleiche Theile getheilt wird? — Um dieser Frage einen vernünftigen Sinn zu geben, müßte ich sie so stellen: wie groß ist eine Zahl, wenn $\frac{1}{4}$ derselben gleich 10 ist? Offenbar hat aber diese Frage einen ganz andern Sinn, als in den gewöhnlichen Theilungsbeispielen. Es ist hier nicht ein Ganzes gegeben, das in mehrere Theile zerlegt werden soll. Umgekehrt ist hier ein aliquoter Theil eines Ganzen gegeben und daraus soll das Ganze selbst gesucht werden. In dem vorliegenden Beispiele ist der gegebene aliquote Theil 10 $\frac{1}{4}$ des Ganzen; also das Ganze $4 \times 10 = 40$. Einen ganz richtigen Sinn hat aber die oben gestellte Frage: welche andere Zahl muß $\frac{1}{4}$ Mal genommen werden, um 10 zu erhalten? Ich finde, diese andere Zahl ist $= 40$. Denn 40 ist diejenige Zahl, welche $\frac{1}{4} \times$ genommen $= 10$ wird *).

3) Im angewandten Rechnen kommt die erste Divisionsform, das Messen, überall da vor, wo Reduktionen zu machen, oder aus dem gegebenen Werthe der Einheit und dem gegebenen Werthe einer noch unbekann-

*) Es läßt sich nicht läugnen, daß auch der Ausdruck $\frac{1}{4}$ Mal ein uneigentlicher Ausdruck ist, indem hier nicht multiplizirt, sondern dividirt wird. Er läßt sich aber rechtfertigen und hat richtig verstanden einen richtigen Sinn. $\frac{1}{4}$ Mal ist $=$ dem vierten Theil eines ganzen Mals. Eben so $\frac{3}{4}$ Mal $= 3$ Mal dem vierten Theil eines ganzen Mals, oder $=$ dem vierten Theil von 3 ganzen Malen. Es liegt gar nichts Widersinniges in den Ausdrücken: eine Größe ein ganzes Mal, oder $\frac{1}{2}$ Mal, oder $\frac{1}{3}$ Mal nehmen. (Man sehe in meinem Lehrbuche die Bruchlehre.) Hingegen $\frac{1}{4}$ gleiche Theile, oder $\frac{3}{4}$ gleiche Theile, sind ganz unstatthafte Ausdrücke, in die in dieser Form kein vernünftiger Sinn gelegt werden kann.

ten Menge diese Menge gesucht werden soll. Das Theilen findet hingegen da statt, wo eine Menge benannter Gegenstände auf mehrere Theilnehmer gleich vertheilt, oder aus dem gegebenen Werthe einer Menge der Preis der Einheit gesucht werden soll. Diese Formen unterscheiden sich durch mehrere beachtenswerthe Umstände, deren Darstellung ich aber durch eine Bemerkung über das Multipliziren in benannten Zahlen einleiten muß. Bei jeder Multiplikation benannter Zahlen sind eigentlich nur der Multiplikand und das Produkt benannt, und zwar gleich benannt; hingegen der Multiplikator ist allemal eine unbenannte Zahl, welche erst durch einen (gewöhnlich bewußtlos vollzogenen) Schluß aus einer benannten meistens mit dem Multiplikand ungleichnamigen abgeleitet wird. Es sei z. B. die Frage: 1 Pfund Waare kostet 16 kr., was 10 Pfd.? Hier werden nicht etwa 16 kr. mit 10 Pfd., sondern mit einem unbenannten Faktor multiplizirt, den ich erst durch folgenden Schluß finde: 10 Pfd. sind 10 × so groß, als 1 Pfd.; folglich wird der Preis der 10 Pfd. auch 10 × so groß sein, als der Preis von 1 Pfd. Wenn also 1 Pfd. 16 kr. kostet, so kosten 10 Pfd. 10 × 16 kr. = 160 kr. So ist in jedem vorkommenden Multiplikationsexempel der Multiplikator alle Mal eine unbenannte, erst durch einen Schluß gefundene Zahl *). Diese Betrachtung,

*) Dies gilt auch von den Aufgaben in der Geometrie. Es werden auch hier nicht Linien mit Linien, Flächen mit Flächen, sondern Linien, Flächen, Körper mit unbenannten Zahlen multiplizirt, welche ebenfalls durch einen Schluß gefunden werden. Wenn ich z. B. den Inhalt eines Parallelogrammes von 7′ Grundlinie und 3′ Höhe berechnen will, so sage ich allerdings: der Quadratinhalt eines □ogramms ist = dem Produkt der Grundlinie und der Höhe. Allein, wenn ich mir eine deutliche Vorstellung von dem hier zu beobachtenden Verfahren machen

von der Multiplikation auf die Division übergetragen, liefert folgende Resultate:

---

will, so muß ich, nachdem ich das □ogramm, wenn es schiefwinkelig war, in ein rechtwinkliges verwandelt, die Grundlinie in 7 und die Höhe in 3 gleiche Theile theilen, wovon jeder = 1 Schuh wird. Nun ziehe ich in beiden Richtungen Theilungslinien. Dadurch bekomme ich in der Richtung der Grundlinie 7 □, jedes = 1 □schuh, und in der Richtung der Höhe 3 Reihen solcher □, also 3 × 7 □schuhe, oder in umgekehrter Ordnung 7 × 3 □schuhe = 21 □'. Aus dieser Betrachtung ergibt sich also, daß der Multiplikand hier nicht eine Linie, sondern eine Reihe von □schuhen ist, und daß der Multiplikator ebenfalls keine Linie, sondern eine unbenannte Zahl ist, welche die Anzahl jener Reihen von □schuhen angibt. Man sagt also in allen diesen Fällen nur uneigentlich: multiplizire Grundlinie und Höhe mit einander. Diese Linien können nur darum als Faktoren angesehen werden, weil die eine allemal die Menge der □te, die in einer Reihe liegen, und die andere die Anzahl dieser Quadratenreihen angibt. Dies gilt auch von der Berechnung des □inhalts des △, der bekanntlich durch Multiplikation der Grundlinie mit der halben Höhe gefunden wird. Will ich mir auch hiervon eine ganz deutliche Vorstellung verschaffen, so muß ich vorerst das △ in ein rechtwinkliges □ogramm von gleichen Grundlinien und halb so großer Höhe verwandeln, und dann wie oben verfahren. Eben das gilt auch von der Berechnung des Kubikinhalts der Körper. Habe ich z. B. den Inhalt eines □epipeds von 18 Zoll Länge, 5 Z. Breite und 4 Z. Höhe zu berechnen, so darf ich mir ja nicht vorstellen, daß der Kubikinhalt durch Multiplikation dieser Linien entstehe. Ich muß mir vielmehr vorstellen, daß die Länge 18 Z. eine Reihe von 18 Würfeln (jeder = 1 Kubikzoll) bezeichne, die Breite, 5 Z., 5 Reihen solcher Würfel = 5 × 18 Kubikzoll = 90 Kubikzoll, welche die Grundschicht dieses Körpers bilden. Die Höhe 4 Zoll deutet an, daß 4 solcher Grundschichten über einander liegen, also der ganze Inhalt des Körpers = 4 × 90 Kubikzoll sei. Es ist wichtig, daß

a) In der ersten Hauptform der Division, dem Messen, ist der Divisor als Multiplikand benannt und gleichnamig mit dem Dividend (= dem Produkt); hingegen der Quotient ist als Multiplikator zunächst eine unbenannte Zahl und bekommt erst durch einen meistens bewußtlos vollzogenen Schluß eine Benennung. Es seien 600 Zoll in Schuhe zu verwandeln. Hier ist der Divisor (die Reduktionszahl 12 Z. = 1 Sch.) gleichnamig mit dem Dividenden; ich untersuche hier: 600 Zoll sind wie viel × 12 Z., und finde 600 Z. = 50 × 12 Z. (oder 12 Z. sind in 600 Z. 50 × enthalten). Offenbar ist der Quotient 50 hier zunächst unbenannt. Er zeigt bloß an, daß 600 Z. 50 × so groß sind, als 12 Z. Aber durch einen Schluß bekommt er den Namen Schuhe. 12 Z. = 1 Sch.; folglich 50 × 12 Z. = 50 Sch. Eben so sei die Frage: wie viel Ellen Zeug erhalte ich für 20 Franken, wenn ich für die Elle 8 Batzen zu bezahlen habe? Hier verwandle ich zuerst die 20 Fr. in Batzen, sind = 200 Btz.; nun untersuche ich: wie viel × sind 8 Btz. in 200 Btz. enthalten? Ich finde 25 ×. Auch hier ist der Quotient zuerst unbenannt. Er zeigt bloß an, daß 200 Btz. = 25 × 8 Btz. seien. Erst durch einen Schluß bekommt er den Namen Ellen. Für 1 × 8 Btz. bekomme ich 1 Elle; folglich für 25 × 8 Btz. = 25 Ellen.

b) In der zweiten Hauptform der Division, dem Theilen, ist der Divisor, als Multiplikator, unbenannt; hingegen der Dividend und Quotient (als Multiplikand) benannt und gleichnamig. Der unbenannte Divisor wird ebenfalls durch einen Schluß aus einer benannten Zahl abgeleitet. Z. B. 6 Arbeiter verdienen mit einander

---

auf der Elementarstufe solche Vorstellungen durch die unmittelbare Anschauung zur möglichsten Klarheit erhoben werden, um alles hohle, inhaltsleere und darum auch so oft zu irrigen Vorstellungen führende Lernen zu verhüten.

84 Bz., was triffts auf jeden? Es sind 6 Personen als Theilhaber vorhanden; folglich muß ihr Verdienst in 6 gleiche Theile getheilt werden. Der sechste Theil von 84 Bz. ist = 14 Bz. Eben so: 9 Ellen Zeug kosten 45 Bz., was 1 Elle? Auch hier leite ich den unbenannten Divisor 9 aus der Menge der Ellen ab. Ich sage: 1 Elle ist der neunte Theil von 9 Ellen; folglich wird der Preis von 1 Elle auch gleich sein dem neunten Theil des Preises der 9 Ellen; also = 1/9 von 45 Bz. = 5 Bz.

4) In der ersten Divisionsform, dem Messen, kann auch im angewandten Rechnen der Divisor ein Bruch sein. Z. B. ich habe 2 Zuckerhüte für 10 fl. gekauft. Wie viel Pfund wiegen sie, wenn für 1 Pfd. 5/8 fl. bezahlt werden mußte. Hier ist 5/8 fl. Divisor, 10 fl. Dividend. Ich untersuche hier, wie viel × 5/8 fl. sind 10 fl.? oder wie viel × sind 5/8 fl. in 10 fl. enthalten? 10 fl. = 80/8. 5/8 sind in 80/8 16 × enthalten, oder 80/8 sind 16 × 5/8 fl. Für 1 × 5/8 fl. erhalte ich 1 Pfd.; folglich für 16 × 5/8 fl. bekomme ich 16 Pfd.

5) In der zweiten Divisionsform, dem Theilen, darf auch im angewandten Rechnen der Divisor oder Theiler niemals ein Bruch sein. Kommt also im Theiler wirklich ein Bruch vor, so ist derselbe vorerst wegzuschaffen. Z. B. 5/8 Pfd. irgend einer Waare kosten 10 Bz., was kostet 1 Pfd.? Hier ist der Divisor (Theiler) scheinbar 5/8. Allein ich kann nicht, wie oben 3. b. sagen: 1 Pfd. ist der 5/8ste Theil von 5/8 Pfd.; folglich u. s. w., weil diese Ausdrucksform ganz sinnlos wäre. Ich muß mir also anders und auf folgende Weise zu helfen suchen:

a) 1/8 ist der fünfte Theil von 5/8 Pfd.; folglich wird 1/8 Pfd. auch den fünften Theil von 10 Bz. und 8/8 oder das ganze Pfund 8 × den fünften Theil von 10 Bz. kosten. 1/5 von 10 Bz. = 2 Bz.; 8/5 von 10 Bz. = 8 × 2 Bz. = 16 Bz.

b) 5/8 sind der achte Theil von 5 ganzen Pfunden, oder 5 ganze Pfund sind 8 × so groß als $\frac{5}{8}$ Pfd.; folglich werden 5 ganze Pfund auch 8 × so viel kosten als $\frac{5}{8}$ Pfd.; also 8 × 10 Bz. = 80 Bz. Kosten 5 Pfd. 80 Bz., so kostet 1 Pfd. $\frac{1}{5}$ von 80 Bz. = 16 Bz.

In beiden Auflösungen ist bloß der Zähler des Bruchs die theilende Zahl, oder der eigentliche Divisor.

Diese Erklärung des Dividirens durch Brüche mag auch dem Rezensenten von Wörles Kopfrechnungsschule (man sehe allgemeine Schulzeitung 1834 Nr. 24 pag. 199) als Antwort auf seine Frage dienen. Rezensent hat über die daselbst angegebenen Rechnungsfälle ganz richtig geurtheilt. Er sagt: „Es ist ein eigenes Ding, das Di„vidiren mit Brüchen; wir kennen nur wenige Schrif„ten, worin es ganz zweckmäßig behandelt ist. Nach„dem Herr Wörle gesagt hat: Wie oft steckt $2\frac{1}{2}$ in „$\frac{5}{8}$ u. s. w., gibt er ohne alle Erklärung Aufgaben, „wie folgende: $\frac{3}{5}$ Pfd. kosten $20\frac{1}{4}$ kr., was 1 Pfd.? „Um den Preis eines Pfundes zu finden, muß man frei„lich $20\frac{1}{4}$ durch $\frac{3}{5}$ dividiren; aber welche Vor„stellung verbindet man mit dieser Divi„sion? (??) Darüber sagt der Verfasser kein Wort, „und doch ist es außerordentlich schwer, dem Schüler „die Sache einsichtlich zu machen. Bei folgender Auf„gabe: Aus $20\frac{1}{4}$ Pfd. Brot sollen Portionen gemacht „werden, jede zu $\frac{3}{5}$ Pfd.; wie viele Portionen erhält „man? — sagt der Schüler allerdings ganz einfach: so „viel Mal als $\frac{3}{5}$ in $20\frac{1}{4}$ Pfd. stecke, so viele Portio„nen gibt es u. s. w. Aber wie sagt man in der von „Hrn. Wörle gegebenen Aufgabe? Welchen Sinn hat „in diesem Falle die Untersuchung, wie viel Mal $\frac{3}{5}$ in „$20\frac{1}{4}$ stecke? Hier war Belehrung nothwendig. Viel„leicht gefällt es Hrn. Wörle oder einem andern Leser „der allgemeinen Schulzeitung, über die zweckmäßigste „Behandlung solcher Aufgaben etwas mitzutheilen.“ Die Antwort auf diese Anfrage ist in diesem §. schon gegeben.

Die Verwirrung, welche in der Lehre vom Dividiren in den meisten Lehrbüchern der Arithmetik vorherrscht, kann nur dadurch gehoben werden, daß man die beiden Hauptformen der Division in ihrer Eigenthümlichkeit und in ihrem Verhältniß zu einander richtig erfaßt. Die vom Rezensenten angeführten zwei Beispiele: a) Es sollen aus $20\frac{1}{4}$ Pfd. Portionen zu $\frac{3}{5}$ Pfd. gemacht werden; b) $\frac{3}{5}$ Pfd. kosten $20\frac{1}{4}$ kr.; was 1 Pfd.? sind zwar beide Divisionsexempel, aber verschiedener Art. Das erste Beispiel gehört dem Messen, das zweite dem Theilen an. Das erste Beispiel wird ganz richtig so gefaßt: Wie viel Mal sind $\frac{3}{5}$ Pfd. in $20\frac{1}{4}$ Pfd. enthalten? Ich finde bei der wirklichen Ausführung der Division, daß der benannte Divisor im Dividenden $33\frac{3}{4}$ Mal enthalten sei, und schließe daraus, daß es 33 ganze Portionen und $\frac{3}{4}$ einer Portion gebe. Im zweiten Beispiel kann ich den Bruch $\frac{3}{5}$ nicht als Theiler behandeln und sagen, man müsse den $\frac{3}{5}$ Theil von $20\frac{1}{4}$ kr. suchen. Ich muß daher die Aufgabe wie oben so fassen: a) Wenn $\frac{3}{5}$ Pfd. Brod $20\frac{1}{4}$ kr. kosten, so kostet $\frac{1}{5}$ Pfd. $\frac{1}{3}$ von $20\frac{1}{4}$ kr., und $\frac{5}{5}$ Pfd. oder 1 Pfd. $\frac{5}{3}$ von $20\frac{1}{4}$ kr. $\frac{1}{3}$ von $20\frac{1}{4}$ kr. $= 6\frac{3}{4}$ kr., und $\frac{5}{3} = 5 \times 6\frac{3}{4} = 33\frac{3}{4}$ kr., — oder b) $\frac{3}{5}$ Pfd. sind der fünfte Theil von 3 ganzen Pfunden, oder 3 ganze Pfd. sind $5 \times$ so groß als $\frac{3}{5}$ Pfd.; folglich werden 3 ganze Pfd. auch $5 \times$ so viel kosten als $\frac{3}{5}$ Pfd.; also $5 \times 20\frac{1}{4} = 101\frac{1}{4}$ kr., und 1 Pfd. nur $\frac{1}{3}$ von $101\frac{1}{4} = 33\frac{3}{4}$ kr. In beiden Auflösungen erscheint nur der Zähler des Bruches, nämlich 3 als der eigentliche Divisor. Etwas verschieden würde die Auflösung lauten, wenn sie aus der Lehre von den Proportionen abgeleitet würde. In diesem Falle würde man sagen: Wie sich die erste Waarenmenge zur zweiten Waarenmenge verhält, so muß sich auch der Preis der ersten Waarenmenge zum Preise der zweiten Waarenmenge verhalten. Nun verhält sich $\frac{3}{5}$ Pfd. zu 1 Pfd.

wie 3 : 5. Die zweite Waarenmenge ist also $1\frac{2}{3} \times$ so groß als die erste; folglich muß der gesuchte Werth der zweiten Waarenmenge auch $1\frac{2}{3} \times$ oder $\frac{5}{3} \times$ so groß sein, als der gegebene Werth der ersten; also $1\frac{2}{3} \times 20\frac{1}{4}$ kr., oder $\frac{5}{3} \times 20\frac{1}{4}$ kr. u. s. w. Hier war es aber vorzüglich darum zu thun, das Wesen der Division auch in Beziehung auf die Anwendung so vollständig als möglich zu beleuchten.

§. 12. Ueber die Terminologie der Arithmetik.

Arithmetische und geometrische Zahlenverhältnisse. Die Tafel des Pythagoras. Als allgemeinen Grundsatz möchte ich empfehlen: Wo ganz entsprechende, die Sache genau bezeichnende deutsche Benennungen möglich sind, wähle man diese; wo dies nicht der Fall ist, bleibe man bei den hergebrachten lateinischen Namen. In jedem Falle gebe man die letzteren neben den erstern.

Das erste Kapitel meines Lehrbuches, welches die erste Bildung der Zahlen, das Addiren und Subtrahiren behandelt, habe ich „einfaches Zu- und Abzählen", und das zweite Kapitel, welches das Multiplizíren und Dividiren behandelt, „maliges Zu- und Abzählen" überschrieben — Ausdrücke, welche, wie ich glaube, die Sache richtig bezeichnen und auch Kindern verständlich gemacht werden können, so daß sie keiner Rechtfertigung bedürfen. Das erstere nenne ich auch arithmetische und das zweite geometrische Zahlenverhältnisse; Ausdrücke, die freilich mehr für den Lehrer, als für Kinder gehören, und hinsichtlich welcher ich mich rechtfertigen muß. Ich wählte sie schon vor 25 Jahren in dem für mich bearbeiteten Lehrkurse, und habe sie seitdem wohlbedächtlich beibehalten, weil ich sie sprach- und sachgemäß und mit meiner Ansicht von den dadurch bezeichneten Zahlenverhältnissen übereinstimmend finde.

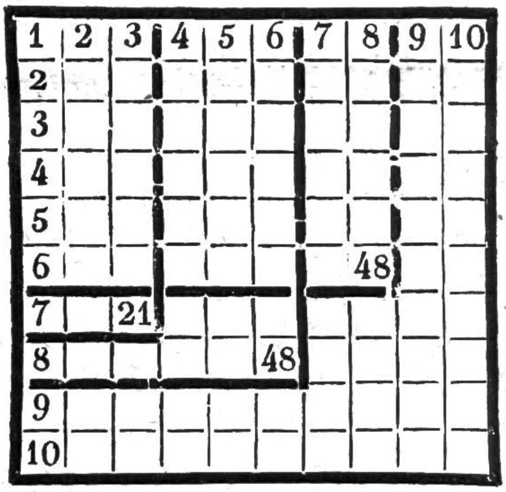
Die arithmetischen Zahlenreihen (Zahlenkombinationen = Verbindungen) entstehen aus dem allmähligen, allmählig fortschreitenden Aneinanderfügen gleicher oder ungleicher Zahlen, und werden eben so in entgegengesetzter Richtung durch ein allmähliges Ablösen des Aneinandergefügten wieder aufgehoben oder vernichtet. Nun stammt ἀριϑμος (Zahl) von ἀρω anfügen, ἀρϑμος = ἀριϑμος ist nichts anders, als ein Aneinandergefügtes, und ἀριϑμειν heißt ursprünglich: Zahlen zusammenfügen, eine allmählig an die andere anreihen. Mit Recht kann man daher das Zählen, Addiren und Subtrahiren, arithmetische Zahlenverbindungen nennen.

Eben so getraue ich mir den Ausdruck geometrische Zahlenreihen (Zahlenverhältnisse = Kombinationen) für die Multiplikation und Division zu rechtfertigen. Es findet hier ein Aneinanderfügen gleicher Größen statt; es entstehen also Reihen von gleicher Größe, die zwar auch wie die arithmetischen behandelt, successive zu- und abgezählt werden können, aber, eben wegen ihrer Gleichheit, als Kollektiveinheiten gezählt und unter dem Ausdruck Mal zusammengefaßt werden. Für die Darstellung dieser gleichen Reihen in der Form des maligen Nehmens eignet sich ganz vorzüglich die geometrische Reihung von Punkten, Quadraten oder Würfeln. Dadurch lassen sich alle Probleme der Multiplikation und Division auf eine ganz natur- und sachgemäße Weise auflösen und auf unmittelbare Anschauung begründen, was in meinem Lehrbuche §. 15 bis 17 umständlich und klar nachgewiesen werden soll. Auch behaupte ich, daß gerade dieselbe Ansicht, welche ich hier ausspreche, der Welt berühmten Tafel des Pythagoras zum Grunde liege. Diese Tafel wird meistens ganz mißverstanden und mißbraucht. Man betrachtet dieselbe bloß als eine bequeme Einfassung und kompendiöse Darstellung des Einmaleins. Man lehrte die Schüler: willst du das Produkt von 6 und 4 wissen, so suche in der vordersten perpendikularen Reihe die Zahl 6 und in der obersten horizontalen die Zahl 4. Fahre mit dem Finger in der ersten Reihe von der Linken zur Rechten, und in der zweiten von oben nach unten; da, wo sich beide Reihen begegnen, findest du das Produkt verzeichnet *). Die Linien, glaubte man, seien bloß dafür da, um zu verhindern, daß man nicht verirre; die Quadrate betrachtete man als eine bloße Einfassung der Produkte.

Ich glaube nicht, daß der große Mathematiker Pythagoras, der Erfinder jenes berühmten Satzes von der Gleichheit des Quadrates der Hypothenuse mit den Quadraten der Katheten, bei der Verfertigung jener Tafel an ein so mechanisches Verfahren gedacht habe. Er wollte vielmehr die Produkte der Zahlen von 1 bis 10 durch die geometrische Aneinanderreihung von Quadraten gerade so veranschaulichen,

*) Auch die auf dem Gebiete der Mathematik sonst streng rationell verfahrende französ. Encyclopédie des sciences gibt von der Tafel des Pythagoras keine andere als die eben genannte Erklärung. Sie sagt: cette table est un quarré, formé de cents autres petits quarrés ou cellules, contenant le produit des différens chiffres ou nombres simples, multipliés les uns par les autres. Supposé, qu'il faille chercher le produit de 6 multipliés par 8, cherchez le chiffre 6 dans la première colonne horizontale, qui commence par 1.; ensuite cherchez le chiffre 8 dans la première colonne perpendiculaire, qui commence également par 1. Le quarré ou la cellule de rencontre, c'est à dire où la colonne horizontale de 6 se rencontre avec la colonne perpendiculaire de 8, contient le produit qu'on cherche, Savoir 48. Eben so sprechen sich alle Lehrbücher der Arithmetik aus, die mir zu Gesicht gekommen sind.

wie solches auch nach meiner Methode geschieht. Man fasse nur einmal diese Tafel recht ins Auge! Man nehme die dadurch veranschaulichten einzelnen Reihen von Quadraten aus der Einschachtelung, in der sie dargestellt sind, heraus, betrachte sie vereinzelt für sich und vergesse die in den Quadraten eingetragenen Ziffern.



Es handelt sich z. B. um das Produkt von 7 und 3. Nun findet man in der Pythagoräischen Tafel in der perpendikulären Richtung eine Reihe von 7 aneinander gefügten kleinen Quadraten, welche den Multiplikand 7 repräsentiren. Dieser Multiplikand wird durch das im 7ten Quadrate angebrachte Zifferzeichen 7 angedeutet. Ferner finden wir drei solcher Reihen von Quadraten neben einander gestellt, 3 ist also hier der Multiplikator; die ihn bezeichnende Ziffer steht im obersten □ der dritten Reihe. Das Produkt dieser 3 Reihen von □en ist 21 □; die dasselbe bezeichnende Ziffer kommt in das letzte □ der dritten Reihe zu stehen. Schauen wir die gleiche Zusammenstellung in umgekehrter Ordnung von oben nach unten an, so haben wir zu oberst eine Reihe von 3 □ als Multiplikand und dann 7 Reihen solcher □ = 7 × 3 □ = 21 □. Eben so finde ich, wenn ich das Produkt von 6 und 8 zu suchen habe, in perpendikulärer Richtung eine Reihe von 6 □ und in horizontaler 8 Reihen solcher □ = 8 × 6 □ = 48 □; oder ich bekomme ein Rechteck, dessen Seite = 6 und 8 irgend eines Längenmaßes, dessen Inhalt also = 8 × 6 = 48 □ Einheiten desselben Maßes sind. Ganz dasselbe Rechteck, nur in umgekehrter Stellung, bekomme ich, wenn ich die 8 in perpendikulärer und die 6 in horizontaler Richtung fasse. Ich bekomme in diesem Falle 6 Reihen □, jede 8 □ enthaltend, also 6 × 8 = 48 □. So dachte sich, nach meinem Dafürhalten, der in geometrischen Anschauungen lebende Erfinder jenes berühmten Lehrsatzes seine Tafel; so lehrte er sie seine Schüler anschauen, und so muß sie noch heute angeschaut werden, wenn man sich eine richtige Vorstellung von derselben machen will. Alle Produkte sind hier nicht bloß auf eine kompendiöse Art tabellarisch zusammengestellt, sondern wirklich realiter dargestellt, als Reihen von geometrisch zusammengeordneten □ten, kompendiös in einander geschachtelt, Rechtecke bildend, deren Seiten gleich den Faktoren sind, vollkommen übereinstimmend mit der Art und Weise, wie ich die Produkte vermittelst meiner Figuren oder der Punkte darstelle, nur mit dem Unterschiede, daß hier die Reihen vereinzelt und ohne die Schriftzeichen gegeben werden. So angeschaut, wird diese Tafel etwas ganz anders, als gewöhnlich; nicht bloß ein tabellarisches Einmaleins, sondern eine lebendige, ganz sachgemäße Veranschaulichung des maligen Zu- und Abzählens, oder der geometrischen Reihen *).

Diese Art von Zahlenkombination glaube ich mit Recht eine geometrische nennen zu dürfen. Was heißt Geo-

*) Daß dies die ursprüngliche Ansicht und Bedeutung der Tafel des Pythagoras war, scheint mir außer allem Zweifel zu liegen. Daß dieselbe verloren ging, beweist nur, wie weit sich die Neuern auch auf diesem Gebiete von der Naturanschauung der Alten entfernt haben.

metrie in ihrer ursprünglichen Gestalt und nach dem griechischen Wortsinn? Es heißt die Erdoberfläche messen, γεωμετρειν = μετρειν την γην. Nun ist bekanntlich das Quadrat das Maß für diese Flächen. In der Pythagoräischen Tafel und nach meiner Darstellungsweise werden die Produkte der Zahlen veranschaulicht durch das Zusammenstellen von □ in der Form von Rechtecken, deren Seiten = den Faktoren sind. Ich bitte meine Leser, mich nicht mißzuverstehen. Ich bin weit entfernt, diese Zahlenverhältnisse vom Räumlichen der Geometrie abhängig machen zu wollen. Sie sind eine vom Räumlichen unabhängige Ansicht der diskreten Größe; aber im Räumlichen bildet sich diese Ansicht am vollkommensten ab. Alle Gegenstände, die in den Gesichtssinn fallen, lassen sich in das Räumliche der Geometrie, in die Quadrate, welche die Meßkunst angibt, einreihen. Man denke sich Reihen von Bäumen, Soldaten, Ziegel, Münzen, Maße, Gewichte u. s. w., man kann sie alle, so wie von einem Maligen Vorhandensein derselben die Rede ist, in Quadrate einreihen, oder doch in dieselben eingereiht sich denken. Nicht mehr eigentlich ist dies mit den Zeitverhältnissen und den Gegenständen, die in den Gehörssinn fallen, möglich. Aber bildlich kann ich auch die Stunden und Wochentage in solche □ einreihen, wie sie zum Theil in Kalendern bisweilen wirklich so eingereiht erscheinen. Z. B. nach einer bekannten kompendiösen Kalendereinrichtung erscheinen die Tage des Junius 1834 nach Wochen in Quadrate eingereiht in nebenstehender Gestalt als 4 × 7 Tage + 2 Tage. Ich glaube daher, daß die Benennung „geometrische Zahlenverhältnisse“ in der Natur der Sache gegründet, also durch das Gesagte hinlänglich gerechtfertigt sei.

Juni 1834.

Sonnt.	1	8	15	22	29
Mont.	2	9	16	23	30
Dienst.	3	10	17	24	
Mittw.	4	11	18	25	
Donst.	5	12	19	26	
Freit.	6	13	20	27	
Sanst.	7	14	21	28	

Ueber einige wesentliche Gebrechen des muttersprachlichen Unterrichts in den Volksschulen.

(Aus dem Aargau.)

Wirft man einen Blick auf Alles, was seit zehn bis zwanzig Jahren für Hebung des Volksschulwesens gethan worden ist, so muß man zugestehen, daß die Summe aller Bestrebungen nicht unbedeutend ist. Fassen wir zunächst nur den Unterricht selbst ins Auge, so begegnet uns da ein rastloses Ringen nach dem Bessern. Sachkundige Männer, deren lebenslängliches Wirken dem Schulwesen gewidmet war, haben uns mit einer zahllosen Reihe von Schriften beschenkt, in welchen sie die Mängel und Verkehrtheiten bestehender Unterrichtsweisen aufdeckten, Vorschläge zur Abstellung und Verbesserung derselben machten und naturgemäßere Methoden aufstellten. Der ganze Unterrichtsstoff wurde gesichtet, geordnet, in anschaulicher und faßlicher Form dargestellt. Von Jahr zu Jahr macht man Fortschritte. Hat sich auch nur der zehnte Theil des hierdurch gewonnenen Guten bis in die Volksschulen Bahn gebrochen, so müssen ihre Leistungen sicherlich alle billigen Anforderungen befrie-