Zeitschrift: Actes de la Société jurassienne d'émulation
Herausgeber: Société jurassienne d'émulation
Band: 101 (1998)

Artikel: Peut-on entendre la forme d'un tambour ?
Autor: Jolissaint, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-684437

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Peut-on entendre la forme d'un tambour?

Par Paul Jolissaint

Le titre de l'article est la traduction de celui de Mark Kac [4]: «Can one hear the shape of a drum?» qui eut dans la communauté mathématique un succès certain. Il ne s'agit toutefois pas de proposer ici une traduction de cet article, mais de rappeler quelques résultats qu'il contient et de présenter et commenter la réponse à la question du titre, connue depuis 1992 seulement. Afin d'éviter tout malentendu, la forme des tambours dont il sera question ici est la forme des **membranes vibrantes**, et non pas la forme tridimensionnelle des tambours comme on pourrait le croire *a priori*.

PRÉLIMINAIRES

Lorsqu'on frappe la membrane d'un tambour, on la déforme momentanément, et elle cherche à retrouver sa position d'équilibre sous l'effet de la tension qu'elle subit. C'est analogue au mouvement d'un pendule que l'on dévie de sa position d'équilibre. La déformation de la membrane est très petite, c'est pourquoi on supposera que le déplacement de chaque point de celle-ci est *perpendiculaire* au plan contenant la membrane.

Nous allons rappeler la description mathématique du mouvement de la membrane:

la surface sera désignée par Ω et représentée par une région bornée dans un système d'axes Oxy; on désignera par Γ le bord de Ω (cf figure 1).

On désigne également par $u(x, y, t)$ l'écart à l'équilibre du point (x, y) de la membrane au temps t. Nous allons rappeler les contraintes (équations) imposées à la fonction u:

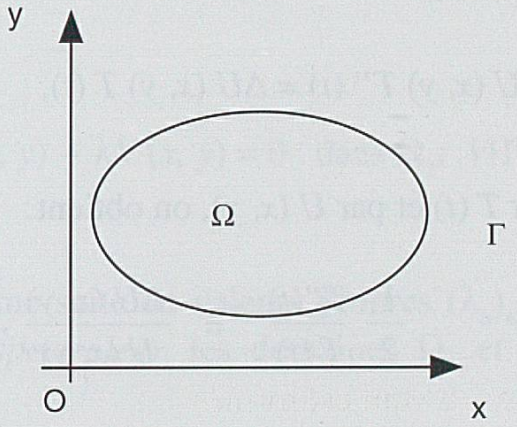

Fig. 1

(1) Puisque la membrane est fixée au bord du tambour, on a

$$u \mid \Gamma = 0.$$

(Lire: «la restriction de u à Γ est égale à 0».)

(2) Un point (x, y) de la membrane subit une force de rappel qui, intuitivement, sera d'autant plus grande que la tension de la peau sera importante, et que la courbure de la membrane au voisinage de (x, y) sera grande.

De façon précise, en appliquant la loi de Newton, u obéit à l'équation d'onde:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

où $v = \sqrt{F/\rho}$, F désignant la tension de la membrane (force/unité de longueur) et ρ la masse spécifique superficielle (masse/unité d'aire). Ainsi, v a les dimensions d'une vitesse.

Dans cet exposé, on choisit les unités de sorte que $v^2 = 2$. Donc $u(x, y, t)$ satisfait:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ s'appelle le laplacien (de dimension 2), avec la condition au bord: $u \mid \Gamma = 0$.

De même que pour une corde vibrante, seules certaines fréquences (= nombre de vibrations/unité de temps) sont possibles. Pour les déterminer, on cherche les solutions de l'équation ci-dessus qui sont de la forme: $u(x, y, t) = U(x, y)\, T(t)$. L'équation d'onde devient:

$$\frac{1}{2} U(x, y)\, T''(t) = \Delta U(x, y)\, T(t),$$

et en divisant par $T(t)$ et par $U(x, y)$, on obtient:

$$\frac{1}{2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta U(x, y)}{U(x, y)},$$

qui est une constante puisque le membre de gauche est indépendant de (x, y) et que le membre de droite est indépendant de t. En posant:

$$T''(t)/T(t) = -\lambda,$$

nous sommes donc amenés à résoudre le système:

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Delta U(x, y) + \lambda U(x, y) = 0,$$

sans oublier la condition au bord: $U|\Gamma = 0$.

Pour chaque solution λ, la fréquence correspondante est: $\nu = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

On démontre alors que les valeurs possibles de λ forment une suite croissante:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots,$$

et il est possible que pour un λ_n donné, plusieurs fonctions linéairement indépendantes U existent. Les vibrations effectives de la membrane sont des superpositions des modes propres, solutions de l'équation ci-dessus multipliées par des fonctions du temps adéquates faisant intervenir les fréquences associées. Nous n'insistons pas sur cette question car elle ne joue pas de rôle significatif ici.

Ainsi, la traduction mathématique du titre de l'exposé est la suivante:

soient Ω_1 et Ω_2 deux régions planes, bornées, dont les bords Γ_1 et Γ_2 sont suffisamment réguliers. Si les équations:

$$\frac{1}{2}\Delta U(x, y) + \lambda U(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad U|\Gamma_1 = 0$$

et

$$\frac{1}{2}\Delta V(x, y) + \lambda V(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \quad V|\Gamma_2 = 0$$

admettent la même suite de valeurs propres $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ (on dit alors que Ω_1 et Ω_2 sont *isospectrales*), les domaines Ω_1 et Ω_2 sont-ils isométriques?

DEUX EXEMPLES

Nous allons discuter deux cas de formes simples et classiques: les tambours rectangulaire et circulaire.

Tambour rectangulaire

Dans ce cas, on prend pour Ω:

$$\Omega = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq A \text{ et } 0 \leq y \leq B\}:$$

En utilisant la méthode de séparation des variables (on considère des fonctions U de la forme: $U(x, y) = X(x)\,Y(y)$), on obtient:

$$\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k^2}{A^2} + \frac{l^2}{B^2}\right),$$

avec k, l entiers ≥ 1. (Les solutions U correspondantes sont des produits de fonctions sinus.)

Tambour circulaire

Appelons R le rayon du tambour. Ainsi,

$$\Omega = \{(x, y);\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq R\}.$$

On écrit les solutions U à l'aide des coordonnées polaires (r, θ); l'équation devient:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + 2\lambda U = 0,$$

et

$$U(R, \theta) = 0 \quad \forall \theta.$$

On écrit $U(r, \theta) = T(\theta)\,F(r)$, et on trouve une suite de fonctions de $\theta(T_n)_{n \geq 0}$ avec n entier, et pour chaque valeur de n fixée,

$$F_n(r) = C_n J_n(\sqrt{2\lambda}\, r),$$

où C_n est une constante et où J_n désigne la n-ième fonction de Bessel (ces fonctions présentent de nombreuses analogies avec les fonctions trigonométriques). La condition $F_n(R) = 0$ devient:

$$J_n(\sqrt{2\lambda}\ R) = 0,$$

donc les valeurs possibles de λ correspondent dans ce cas aux racines positives de l'équation:

$$J_n(z) = 0.$$

Il y en a une infinité pour chaque $n \geq 0$: $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots$ Les premières valeurs approximatives des $z_j^{(n)}$ sont données dans le tableau suivant, où les lignes décrivent l'indice n et les colonnes l'indice j:

$j \backslash n$	0	1	2	3
1	2,404	3,832	5,135	6,379
2	5,520	7,016	8,417	9,760
3	8,654	10,173	11,620	13,017
4	11,792	13,323	14,796	16,224

Pour $n \geq 0$ fixé et $j >> 1$, on a la formule asymptotique:

$$z_j^{(n)} \sim \frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4j) - \frac{4n^2 - 1}{\pi(2n - 1 + 4j)}.$$

Enfin, de $\sqrt{2\lambda_j^{(n)}}\ R = z_j^{(n)}$, on déduit:

$$\lambda_j^{(n)} = \frac{\left(z_j^{(n)}\right)^2}{2R^2},$$

pour $n \geq 0$ et $j \geq 1$.

QUE PEUT-ON «ENTENDRE»?

Le problème posé par M. Kac est très intéressant car, en étant un peu moins ambitieux, il signifie ceci: à partir d'une information **analytique** sur Ω (la connaissance des λ_n), que peut-on obtenir comme information **géométrique** sur Ω?

Nous allons voir que l'on obtient au moins deux informations géométriques:

a) On peut entendre l'aire $|\Omega|$:

En fait, en posant $N(\lambda)$ = *nombre de* $\lambda_n < \lambda$, on a la formule asymptotique:

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi}\lambda \text{ pour } \lambda \to +\infty,$$

ce qui signifie:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{2\pi}.$$

Cette formule a été conjecturée en 1910 par le physicien H. A. Lorentz; Hilbert prédit alors qu'elle ne serait sans doute pas démontrée de son vivant. Malheureusement pour lui, moins de deux ans plus tard, Herman Weyl démontra cette formule en utilisant la théorie des équations intégrales mise au point par Hilbert lui-même!

Nous allons la vérifier dans le cas d'un rectangle. Pour cela, voyons ce que signifie l'inégalité $\lambda_{k,l} < \lambda$ pour λ donné: ici,

$$\lambda_{k,l} = \frac{\pi^2}{2}\left(\left(\frac{k}{A}\right)^2 + \left(\frac{l}{B}\right)^2\right),$$

donc

$$\begin{aligned}\lambda_{k,l} < \lambda \quad &\Leftrightarrow \left(\frac{k}{A}\right)^2 + \left(\frac{l}{B}\right)^2 < \frac{2\lambda}{\pi^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{k}{A}\right)^2 + \left(\frac{l}{B}\right)^2} < \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{k}{A}, \frac{l}{B}\right) \in \mathrm{D}\left(0, \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}\right),\end{aligned}$$

où $\mathrm{D}\left(0, \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}\right)$ désigne le quart de disque de centre 0 et de rayon $\frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}$.

A chaque point $\left(\frac{k}{A}, \frac{l}{B}\right)$, associons le rectangle de côtés $1/A$ et $1/B$ situé en dessous et à gauche de ce point. On obtient, en considérant l'aire de $\mathrm{D}\left(0, \frac{\sqrt{2\lambda}}{\pi}\right)$:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\lambda}{\pi^2} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$= N(\lambda) \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{B} + O(\sqrt{\lambda}),$$

où $O(\sqrt{\lambda})$ représente l'aire des rectangles incomplets touchant l'arc de cercle. Par suite,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{AB}{2\pi} \cdot$$

b) On peut entendre la longueur L de Γ:

On démontre que l'on a la formule asymptotique, valable lorsque $t \to o$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot$$

Cette formule est plus difficile à obtenir, même dans le cas d'un rectangle. Nous allons cependant voir une application des deux résultats ci-dessus dans le paragraphe suivant.

CONSÉQUENCE

Si un tambour produit la même suite de fréquences qu'un tambour circulaire de rayon R, alors il est lui aussi circulaire (et de rayon R): autrement dit, on peut entendre si un tambour est circulaire! Cela découle du paragraphe précédent et de l'**inégalité isopérimétrique** que nous présentons maintenant:

si C est une courbe fermée, simple, suffisamment régulière de longueur L, l'aire $A(C)$ de la région bornée délimitée par C satisfait:

$$A(C) \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

et de plus $A(C) = \frac{L^2}{4\pi}$ si et seulement si C est un cercle (de rayon $L/2\pi$).

Nous allons donner une preuve géométrique très jolie de cette inégalité; elle est due au mathématicien suisse Jacob Steiner (1796-1863).

On fixe la longueur L et on considère une courbe C telle que $A(C)$ soit maximale. Ensuite, on procède en trois étapes:

1re étape: C est convexe.

Sinon, en utilisant des symétries axiales appropriées, on obtiendrait une courbe C' de longueur L enfermant une région telle que $A(C') > A(C)$.

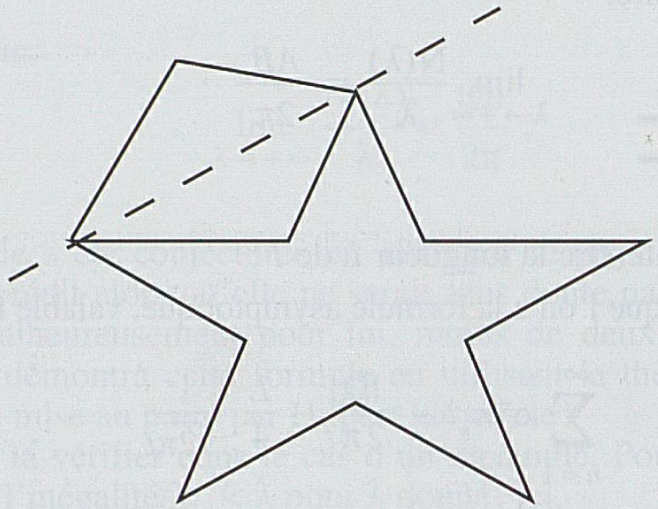

Fig. 2.

2e étape: Fixons deux points A et B sur C de sorte que la longueur de chaque portion de courbe entre A et B vaille $L/2$. Alors les deux régions séparées par la corde AB ont la même aire: en effet, sinon on construit une nouvelle courbe de longueur L en gardant la demi-région ayant la plus grande aire et en prenant son image par la symétrie d'axe AB (figure 3).

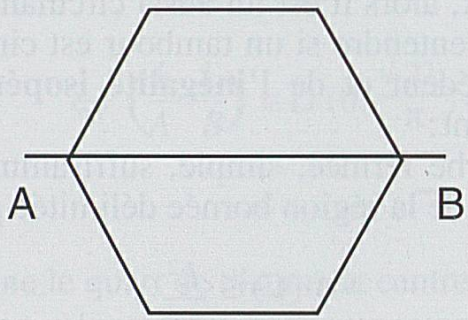

Fig 3.

3e étape: C est un cercle.

Pour établir cela, considérons une moitié de la région délimitée par C et AB (figure 4). Soit P un point quelconque de la portion de courbe correspondante.

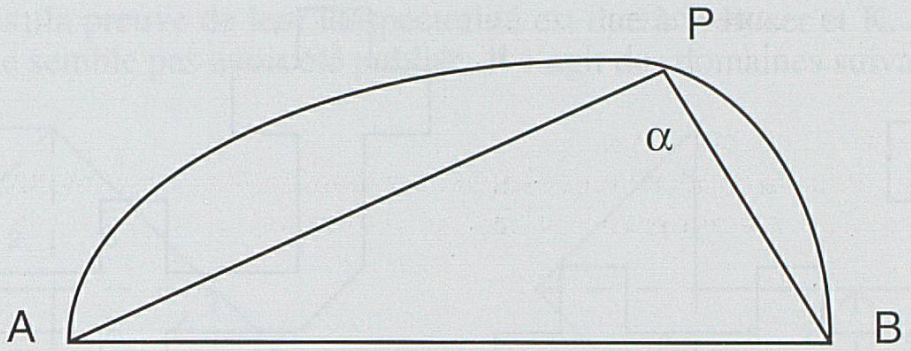

Fig. 4.

On peut modifier l'aire de la région en faisant pivoter l'arc $\widehat{AP}$ autour de P. Or, l'aire maximale (de la demi-région) est atteinte exactement lorsque l'angle α en P est droit car l'aire du triangle APB ($= 1/2 \cdot AP \cdot PB \sin(\alpha)$) est maximale dans ce cas. Ceci devant être vrai pour tout P, l'arc $\widehat{AB}$ est un demi-cercle.

Il découle de cela que si une région Ω a le même spectre qu'un disque de rayon R, alors la longueur de son bord vaut $2\pi R$, et comme son aire vaut aussi πR^2, par l'inégalité isopérimétrique, Ω est un disque (de rayon R).

RÉPONSE ET COMMENTAIRES

La réponse – négative – à la question de M. Kac a été apportée en 1992 par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert dans [3]. Les auteurs exhibent deux domaines plans non isométriques mais isospectraux (figure 5).

Ce résultat n'est pas très étonnant: remarquons d'abord que la question de Kac se généralise sans difficulté au cas des variétés riemanniennes compactes (sphères, tores,...), car celles-ci admettent un analogue du laplacien Δ appelé aussi opérateur de Laplace-Beltrami. En 1964 déjà, John Milnor avait exhibé dans l'article [5] ne contenant qu'une seule page deux tores de dimension 16 isospectraux non isométriques (alors que deux tores plats isospectraux de dimension 2 sont automatiquement isométriques: un tel tore s'obtient en recollant les paires de côtés opposés d'un parallélogramme, et celui-ci est déterminé à isométrie près par son aire et les longueurs de ses côtés, grandeurs calculables au moyen des λ_n).

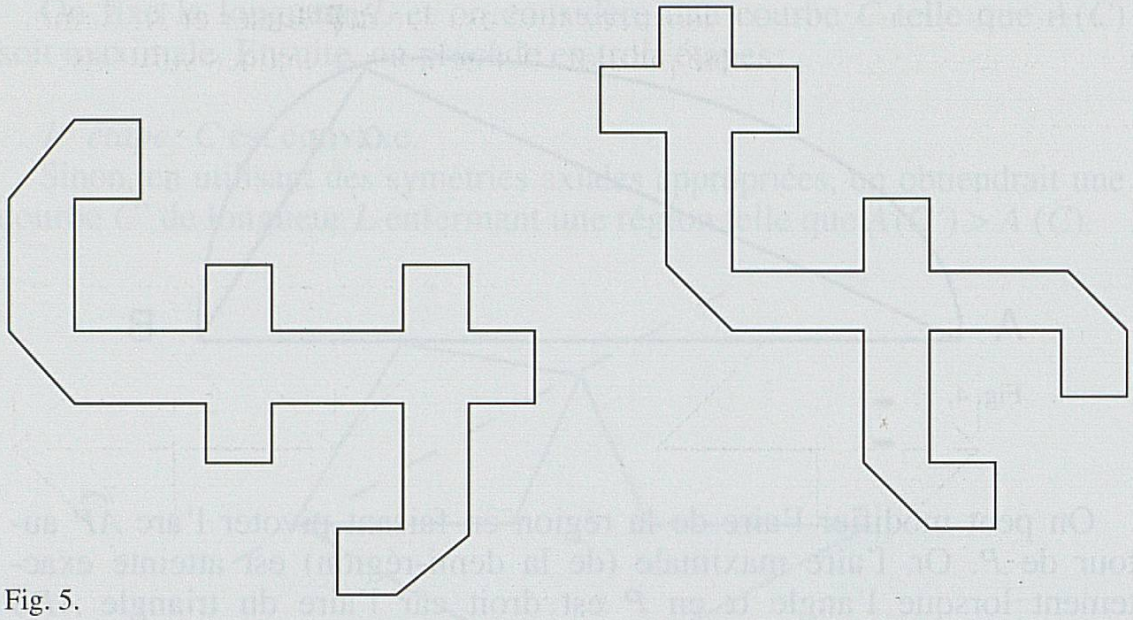

Fig. 5.

Des surfaces de Riemann isospectrales non isométriques avaient été également construites par différentes personnes, par exemple:

– M.-F. Vignéras (1980), [7];

– P. Buser (1986), [2].

C'est en s'appuyant sur les exemples de Buser que C. Gordon et ses coauteurs construisirent leurs exemples. Le lecteur peut raisonnablement se demander comment Carolyn Gordon et ses collègues ont vérifié l'isospectralité des domaines ci-dessus; ont-ils calculé explicitement les valeurs propres des laplaciens associés? En fait, non: ils ont utilisé une méthode générale due à T. Sunada, appelée **transplantation**, et qui consiste en ceci: les solutions U du **problème de Dirichlet**

$$\frac{1}{2}\Delta U(x, y) + \lambda U(x, y) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad U|\Gamma = 0$$

appartiennent toutes à un espace vectoriel noté $W^1(\Omega)$, et dans le cas des domaines Ω_1 et Ω_2 ci-dessus, on démontre qu'il existe une transformation isométrique (la transplantation)

$$T: W^1(\Omega_1) \to W^1(\Omega_2)$$

qui fait correspondre à chaque solution $U_1 \in W^1(\Omega_1)$ associée à la valeur propre λ une solution $U_2 = T(U_1) \in W^1(\Omega_2)$ associée à la même valeur propre λ et cela sans avoir besoin de connaître explicitement la liste des λ! Ceci démontre une fois de plus la puissance d'abstraction des mathématiques. Dans [3], deux autres domaines plans isospectraux et non isométriques plus simples que ceux ci-dessus sont brièvement

discutés; la preuve de leur isospectralité est due à P. Buser et K. Semmler et ne semble pas avoir été publiée. Il s'agit des domaines suivants:

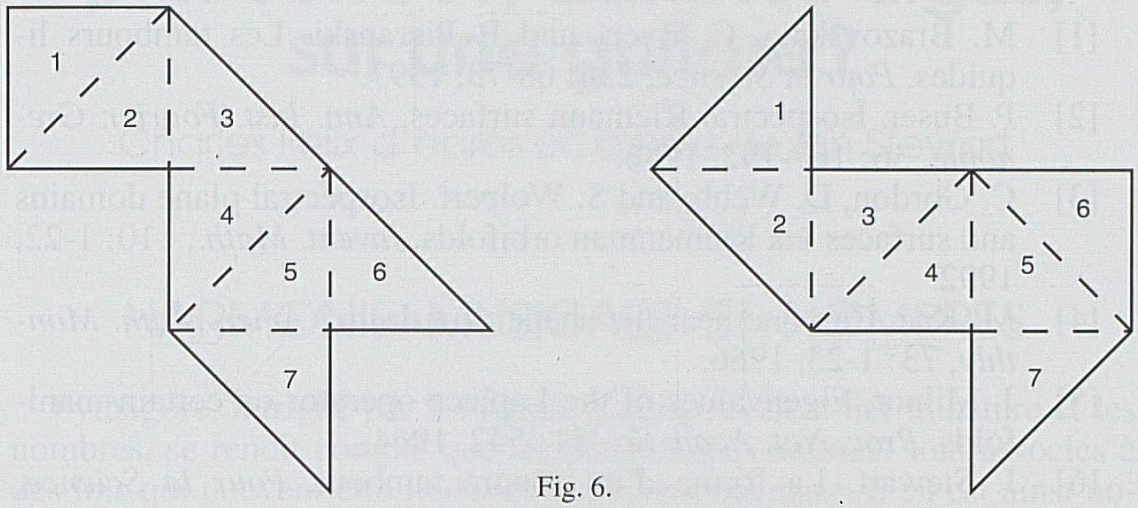

Fig. 6.

L'avantage de ces exemples réside dans le fait que la transplantation peut être décrite explicitement: divisons chaque domaine en 7 triangles isocèles rectangles comme sur la figure; soit U une solution au problème de Dirichlet pour le domaine de gauche, et désignons par U_j la restriction de U au triangle numéro j. On construit alors une solution V au problème de Dirichlet du domaine de droite de la façon suivante (où V_j désigne la restriction de V au triangle numéro j):

$$
\begin{aligned}
V_1 &= U_5 - U_4 - U_7 \\
V_2 &= U_6 - U_3 + U_7 \\
V_3 &= U_5 - U_2 - U_6 \\
V_4 &= U_6 - U_1 + U_4 \\
V_5 &= U_1 + U_3 + U_5 \\
V_6 &= U_2 - U_3 + U_4 \\
V_7 &= -U_1 + U_2 + U_7
\end{aligned}
$$

Mentionnons pour terminer que des physiciens ont réalisé des membranes vibrantes ayant les formes ci-dessus à l'aide de films smectiques (cristaux liquides) et ont vérifié expérimentalement leur isospectralité; leurs résultats sont expliqués dans [1]. Le lecteur intéressé pourra également consulter l'article amusant de Ian Stewart [6] sur le sujet.

RÉFÉRENCES

[1] M. Brazovskaia, C. Even, and P. Pieranski. Les tambours liquides. *Pour la Science*, 234: 68-73, 1997.

[2] P. Buser. Isospectral Riemann surfaces. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 36: 167-192, 1986.

[3] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110: 1-22, 1992.

[4] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer. Math. Monthly*, 73: 1-23, 1966.

[5] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 51: 542, 1964.

[6] I. Stewart. La forme d'un sonore tambour. *Pour la Science*, 179: 92-96, 1992.

[7] M. F. Vignéras. Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques. *Ann. of Math.*, 112: 21-32, 1980.

Paul Jolissaint (Porrentruy) est professeur de mathématique et de physique au Lycée cantonal de Porrentruy et chargé de cours à l'Université de Neuchâtel.