Zeitschrift: Coup-d'oeil sur les travaux de la Société jurassienne d'émulation

Herausgeber: Société jurassienne d'émulation

Band: - (1852)

Artikel: Mathématiques : note sur les caractères de divisibilité par un nombre premier quelconque

Autor: Durand, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-684249

N. 6.

MATHÉMATIQUES.

Note sur les caractères de divisibilité par un nombre premier quelconque,

présentée

Par J. Durand.

Dans le dernier siècle, la partie des mathématiques que l'on appelle plus particulièrement *la théorie des nombres*, était beaucoup plus cultivée dans les écoles que de nos jours. Elle renferme, en effet, une foule de propriétés plus curieuses qu'utiles, et en présence du grand développement que prenait la science, forcé qu'on était d'en restreindre le cadre, il était naturel, que l'on éliminât de l'arithmétique et de l'algèbre tout ce qui n'était pas nécessaire à l'intelligence de la géométrie analytique et de l'analyse pure, devenues désormais la base et le faîte des mathématiques modernes. Ainsi, par exemple, tout ce qui, dans les livres élémentaires, est resté de la divisibilité des nombres, se réduit aux caractères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 et 11. La méthode donnée dans les traités d'algèbre est bien générale, mais son application au-delà des nombres cités devient si compliquée, qu'on ne s'en sert jamais. J'en ai donné une particulière aux nombres 7 et 13, et je l'ai dictée quelquefois comme note à ajouter à mes cahiers d'arithmétique; mais, outre qu'elle n'est pas très-simple, elle ne s'applique qu'à ces deux nombres, ce qui la rend peu élégante.

Il y a quelques années, dans l'une des premières séances ordinaires de la Société d'émulation, notre honorable président m'engagea à revoir cette partie à propos d'un théorême non démontré qu'il avait retrouvé dans d'anciennes notes, et relatif à un caractère de divisibilité applicable à tout nombre premier, jusqu'à 101, et que l'on pourrait facilement étendre au-delà, si l'on voulait.

Ce théorême, le voici, tel à peu près qu'il m'a été fourni, sans démonstration :

Si un nombre donné quelconque est multiple d'un certain nombre premier, il existe toujours un facteur tel, qu'en le multipliant par les unités du nombre donné et ajoutant le produit aux dizaines de ce nombre, le nombre résultant sera aussi un multiple du même nombre premier.

Ainsi, pour en donner tout de suite une application qui fera plus facilement saisir le sens de cet énoncé général, le facteur correspondant au nombre premier 29 étant 3, pour vérifier, par exemple, si le nombre 16878 est un multiple de 29, on en détachera le chiffre des unités 8, puis, multipliant ce chiffre par 3, et ajoutant le produit 24 aux 1687 dizaines du nombre donné, on trouvera pour résultat 1711 qui devra être un multiple de 29, si le nombre donné 16878 en est un lui-même. Mais ce nombre 1711 n'étant pas beaucoup plus facilement reconnaissable comme multiple de 29 que le nombre donné, on pourra lui appliquer aussi le théorème, en séparant le chiffre 1 des unités, en multipliant ce chiffre par 3, et ajoutant le produit 3 aux 171 dizaines, ce qui donne pour résultat le nombre 174, qui devra être un multiple de 29, si 1711, et par suite, si 16878 en est un. Ce nombre 174 est déjà beaucoup plus facilement reconnaissable comme multiple de 29 que les précédents; mais on peut aller encore plus loin, par une nouvelle application du théorème sur ce nombre 174, et séparant les 4 unités, les multipliant par 3, et ajoutant le produit 12 aux 17 dizaines, on obtient pour résultat le nombre 29, qui étant évidemment un multiple de 29 nous apprend que 174 en est un aussi, par suite le nombre 1711 et enfin le proposé lui-même 16878.

Mais comment trouver le facteur 3 qui nous a servi pour reconnaître la divisibilité du nombre 16878 par le nombre premier 29? C'est là précisément l'objet du petit travail que je viens vous soumettre.

Supposons d'abord, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de déterminer le facteur correspondant au nombre premier 7; nous généraliserons ensuite.

En désignant par u, d, c, m, etc., respectivement les chiffres des unités, des dizaines, des centaines, des mille, etc., d'un nombre quelconque, on peut représenter algébriquement ce nombre par l'expression

$$\ldots\ldots 1000\,m + 100\,c + 10\,d + u \qquad (1)$$

Soit x le facteur cherché; le produit de ce facteur par les u unités de ce nombre étant ux, et les dizaines de ce nombre formant un nouveau nombre représenté par

$$\ldots\ldots 100\,m + 10\,c + d$$

(comme il est facile de le reconnaître, puisque les dizaines, centaines, mille, du premier, deviennent respectivement les unités, dizaines, centaines, du second), si l'on ajoute le produit ux aux $(100\,m + 10\,c + d)$ dizaines du nombre donné, on obtiendra la nouvelle expression

$$\ldots\ldots 100\,m + 10\,c + d + ux \qquad (2)$$

qui, suivant le théorème, doit être un multiple de 7, lorsque le nombre donné en est un.

Or, en multipliant cette expression par 10, elle restera évidemment encore un multiple de 7, si elle l'est déjà, et elle ne changera pas non plus, si on y ajoute et en soustrait à la fois la même quantité u; ces deux opérations ramènent l'expression (2) à la forme

$$(\ldots\ldots 1000\,m + 100\,c + 10\,d + u) + (10\,ux - u) \qquad (3)$$

et cette expression (3) tout comme l'expression (2) doit être un multiple de 7 en même temps que l'expression (1). Mais l'expression (1) formant la première partie de l'expression (3), et étant supposée un multiple de 7, pour que l'expression (3) tout entière le soit, il faut et il suffit que la seconde partie ($10\,ux - u$) le soit aussi ; et celle-ci pouvant se séparer en deux facteurs u ($10\,x - 1$), dont le premier est un chiffre quelconque, pour que cette partie soit un multiple de 7 quelque soit u', il faut et il suffit encore que l'autre facteur ($10\,x - 1$) en soit un.

Posons donc $$10\,x - 1 = 7\,k \qquad (4)$$
k représentant un nombre entier quelconque.

A la seule inspection de cette formule, on reconnaît que $7\,k$ augmenté de 1 doit être un multiple de 10, c'est-à-dire que ($7\,k + 1$) doit être terminé par un 0, ce qui exige que $7\,k$ soit terminé par un 9, condition qu'on ne peut remplir qu'en faisant $k = 7$, $k = 17$, etc., d'où résulte $x = 5$, $x = 12$, etc. Mais cette méthode ne donnant pas directement toutes les solutions dont la question est susceptible, nous allons traiter l'équation (4) à la manière des équations indéterminées du premier degré.

En la résolvant d'abord par rapport à k, on aura
$$k = \frac{10\,x - 1}{7} = x + \frac{3\,x - 1}{7}$$

La fraction complémentaire devant pouvoir se réduire à un nombre entier, si x et k le sont en même temps, ce qui est exigé par la question, nous la représenterons par e, et l'on aura
$$k = x + e \qquad (5)$$

Avec $\dfrac{3\,x - 1}{7} = e$ ou $3\,x - 1 = 7\,e$ ou $x = \dfrac{7\,e + 1}{3} = 2\,e + \dfrac{e + 1}{3}$

Désignant par $é$ la fraction complémentaire $\dfrac{e+1}{3}$ qui doit pouvoir se ramener à un nombre entier, on aura
$$x = 2\,e + é \qquad (6)$$
$$\text{Avec } \frac{e + 1}{3} = é \text{ ou } e = 3\,é - 1 \qquad (7)$$

Cette dernière substituée dans (6) donnera
$$x = 7\,é - 2 \qquad (8)$$
équation dans laquelle $é$ représente un nombre entier quelconque, et x le facteur propre à vérifier la divisibilité d'un nombre donné par 7, au moyen du théorême cité plus haut.

$é = 1$ donne $x = 5$, comme nous l'avons déjà trouvé.
$é = 2$ donne $x = 12$, etc. On voit que le nombre des solutions est illimité mais il est clair que dans la pratique la première doit être préférée.

Pour vérifier, par exemple, si 1176 est un multiple de 7, on opèrera ainsi.

117.6	Séparant les 6 unités par un point, on posera sous les 117
+ 30 [5]	dizaines le produit 30 des 6 unités par le facteur [5] et on
14.7	additionnera, ce qui fournit le nouveau nombre 147, sur
+ 35 [5]	lequel on opère de même.
49	

On retombe par ce calcul sur le nombre 49, qui étant connu comme multiple de 7, nous apprend que 1176 en est un aussi.

Si dans l'équation (8) on fait $é=0$, il vient $x=-2$, et il est facile d'interpréter cette solution négative qui serait comprise dans l'équation (4) en y faisant $k=-3$. En effet, en suivant la règle littéralement, on devrait multiplier les unités du nombre donné par -2, ce qui donnera un produit négatif, et ajouter ce produit négatif aux dizaines du nombre, ce qui revient évidemment à soustraire ce produit considéré comme positif. Le calcul se disposerait alors de la manière suivante.

$$
\begin{array}{rl}
117.6 & \\
-\ 12 & {\scriptstyle 2} \\
\hline
10.9 & \\
-\ 10 & {\scriptstyle 2} \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Et 0 devant être considéré comme un multiple de 7, savoir (0×7), il est reconnu par là que 1176 en est un aussi.

Ce facteur -2, ou si l'on veut ce facteur 2, en remplaçant dans la règle l'addition par une soustraction, est encore préférable au facteur 5 pour deux raisons; 1° parce qu'il est plus petit; 2° parce que, en suite du remplacement de l'addition par une soustraction, les résultats successifs diminuent plus rapidement, ce qui est le principal objet de la méthode.

On pourrait répéter les mêmes calculs pour les nombres premiers 13, 17, 19, 23, etc, et obtenir ainsi les facteurs correspondants à chacun de ces nombres premiers; mais nous allons chercher maintenant une formule générale qui contienne tous les cas.

Reprenons l'équation (4) $10\,x-1=7\,k$ particulière au nombre premier 7. Si nous voulons la rendre applicable à un nombre premier quelconque p, il suffira d'y substituer p à 7, et l'on aura $10\,x-1=pk$, d'où l'on tire

$$x=\frac{pk+1}{10} \qquad (9)$$

Or x devant être un nombre entier et k aussi, on voit que pour que cette condition soit remplie, il faut et il suffit que le produit pk soit terminé par un 9, ce qui sera toujours possible lorsque p sera un nombre premier, puisque excepté 2 et 5 tous les nombres premiers sont terminés par 1, 3, 7 ou 9, lesquels chiffres multipliés respectivement par 9, 3, 7 ou 1, donnent un produit terminé par 9. Ainsi

Pour les nombres premiers terminés par 1, tels que 11, il faudra prendre $k=9$, d'où l'on tirera $x=10$ pour le facteur correspondant.

Pour les nombres premiers terminés par 3, comme 13, il faudra prendre $k=3$ d'où $x=4$;

Pour les nombres premiers terminés par 7, comme 17, il faudra prendre $k=7$ d'où $x=12$;

Et pour les nombres premiers terminés par 9, comme 19, il faudra prendre $k=1$ d'où $x=2$.

On reconnait que par cette formule, l'on trouve les facteurs correspondants aux nombres premiers terminés par 1 et 7 beaucoup plus forts que les facteurs correspondants aux nombres premiers terminés par 3 et 9; c'est donc pour ces derniers que les facteurs obtenus par la formule (9) sont le plus avantageux. Mais en cherchant ce que devient la formule (4) lorsqu'on remplace dans l'énoncé du théorème général l'addition par une soustraction, on voit, en répétant, sauf cette modification, le raisonnement établi plus haut pour le cas particulier du nombre 7, que le produit ux d'additif devenant soustractif, cette formule (4) deviendra en y remplaçant en outre 7 par p, et k par $-k$, (puisque c'est un nombre quelconque positif ou négatif, mais entier) $-10x-1=-pk$, d'où l'on tire

$$x=\frac{+pk-1}{10} \qquad (10)$$

Et pour que x soit entier en même temps que k, il faut et il suffit maintenant que le produit pk soit terminé par 1, ce qui aura lieu si l'on prend $k=1, 3, 7, 9$, suivant que p sera terminé par 1, 7, 3 ou 9.

Ainsi pour $p=11$, on prendra $k=1$ d'où $x=1$;
pour $p=13$, on prendra $k=7$ d'où $x=9$;
pour $p=17$. on prendra $k=3$ d'où $x=5$;
Et pour $p=19$, on prendra $k=9$ d'où $x=17$.

On retrouve ici à faire la même observation que celle déjà fournie par l'emploi de la formule (9), mais dans un ordre inverse, en sorte que, avec la soustraction, ce sont les nombres premiers terminés par 1 et 7 qui ont les plus petits facteurs correspondants, par suite les plus avantageux.

La formule (9) qui se rapporte à l'addition du produit, devra donc être employée de préférence pour les nombres premiers terminés par 3 et 9; et la formule (10) qui se rapporte à la soustraction devra être préférée pour les nombres premiers terminés par 1 et 7. En opérant ainsi on obtient les plus petits facteurs possibles, conformément au tableau suivant.

Nombres premiers.	Facteurs correspondans moyennant addition.	Nombres premiers.	Facteurs correspondants moyennant soustraction.
3	1	7	2
13	4	11	1
19	2	17	5
23	7	31	3
29	3	37	11
43	13	41	4
53	16	47	14
59	6	61	6
73	22	67	20
79	8	71	7
83	25	97	29
89	9		