Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 59 (1968)

Heft: 21

Rubrik: Communications ASE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

Die dritte grosse Krise in der Mathematik

51 (091)

[Nach *C. K. Gordon*, jr.: The third great crisis in mathematics. IEEE Spectrum, May (1968), S. 47...52]

Die moderne Mathematik durchläuft wiederum eine Phase gewaltiger Umwandlung, um mit dem Prozess der technologischen Entwicklung schrittzuhalten. Die hervorstechendste Manifestation dieser «neuen Mathematik» ist die zunehmende Betonung und vermehrte Anwendung der Gruppentheorie.

Die erste Krise in der Mathematik bahnte sich etwa 600 v. Chr. an, als man feststellte, dass sich vergleichbare geometrische Grössen nicht mit identischen Maßstäben messen liessen. Diese Krise wurde erst 310 n. Chr. gelöst, als Eudoxus den Begriff der Grössen und Proportionen revidierte. Seine Analyse der irrationalen Zahlen hielt jeder Prüfung stand, bis dieser Begriff in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch *Dedekind* in ein neues Licht gerückt wurde.

Die zweite Krise bahnte sich im 17. Jahrhundert an. Die neu entwickelten Rechenmethoden führten zu Widersprüchen und Paradoxen, welche die Grundlagen der Mathematik erschütterten. Erst *Gauss* und *Gauchy* [1]) brachten anfangs des 19. Jh. eine Wendung, als es ihnen gelang, den vagen Begriff des Infinitesimals durch die präzise Methode des Grenzübergangs zu ersetzen. Ihrem Werk folgte die «Arithmetisierung» der Analysis durch *Weierstrass, Bolzano, Dedekind, Cantor* und andere.

Die dritte Krise erschütterte die Grundpfeiler der Mathematik um die Jahrhundertwende. Sie konnte bis heute noch nicht zur Zufriedenheit aller Mathematiker gelöst werden. Die Ursache bildete die Entdeckung von Widersprüchen an den Grenzen von Cantors allgemeiner Gruppentheorie.

Nach *Cantor* ist eine Gruppe «jedwelche Zusammenfassung von definierten unterscheidbaren Objekten m unseres Denk- und Erfassungsvermögens zu einem Ganzen M». (Beispiele: Die m Musiker eines Orchesters M. Die Gruppe M aller m 50jährigen. Die Gruppe M aller lebenden Menschen m, die über 500 Jahre alt sind; eine durchaus legitime Gruppe, allerdings mit Inhalt null. Demgegenüber die Gruppe M aller geraden Primzahlen m, die bloss aus einem Mitglied, der Zahl 2, besteht usw.)

Cantors Theorie der transfiniten Ordinal- und Kardinalzahlen ist wohl eines der genialsten und originellsten Postulate dieser modernen Mathematik: Die Kardinalität einer Gruppe M ist im grossen ganzen ein Mass für die darin enthaltene Anzahl Mitglieder m. So beträgt die Kardinalität der Gruppe gerader Primzahlen 1, die Kardinalität der Gruppe aller Punkte eines Linienzuges ist interessanterweise grösser als beispielsweise diejenige aller positiven ganzen Zahlen.

Wenn eine Gruppe aus N Mitgliedern besteht und N eine beliebig grosse ganze positive Zahl bedeutet, hat sie eine endliche Kardinalzahl, und man nennt deshalb die Gruppe endlich. Was ist nun die Kardinalzahl der Gruppe aller positiven ganzen Zahlen? Da keine positive ganze Zahl N gross genug ist, um die Kardinalität dieser Gruppe zu beschreiben, erfand *Cantor* hierfür ein neues Symbol, das Aleph Null, die erste transfinite Kardinalzahl. («Erste» deshalb, weil deren noch beliebig viele andere denkbar sind: grösser als die vorgenannte, ist die transfinite Kardinalzahl *aller* positiven ganzen Zahlen!) *Cantor* stellte das Theorem auf, dass es keine *grösste* transfinite Kardinalzahl gibt. (Äquivalent dem bekannten Theorem, dass es keine grösste positive ganze Zahl gibt.) Zugleich entdeckte er auch folgenden Widerspruch: Ebenso berechtigt wie die genannten Beispiele ist eine «Supergruppe», eine Gruppe, die als Mitglieder alle Gruppen einschliesst. Die transfinite Zahl dieser Übergruppe ist grösser, als alle anderen transfiniten Zahlen, was aber obgenanntem Theorem widerspricht! Die Schwierigkeiten jedoch gingen weiter.

Bertrand Russel entdeckte um 1902 das Paradoxon der Gruppen, indem er zwei verschiedene Arten unterschied. Jene, die sich selber als Mitglieder beinhalteten, nannte er ausserordentlich. Die Gruppe aller Konzepte ist selbst ein Konzept und deshalb eine ausserordentlichen Gruppe. Die meisten Gruppen sind jedoch ordentlich und enthalten sich selbst nicht. Die Gruppe der geraden Zahlen ist selber keine gerade Zahl und darum ordentlich.

Man bilde nun eine Gruppe O aus allen Gruppen, die sich selbst nicht enthalten. Gehört nun O zu der Art der ordentlichen oder der ausserordentlichen Gruppen? Wäre O ordentlich, dann gehörte O zu O, der Gruppe aller ordentlichen Gruppen, und wäre deshalb ausserordentlich. Wenn aber O zur Sammlung der ausserordentlichen Gruppen gehört, wollen wir es mit E bezeichnen. O gehört dann zu E und nicht zu O, weshalb es also ordentlich wäre! Die Quintessenz lautet somit: O ist dann und nur dann ordentlich, wenn es ausserordentlich ist.

Russel versuchte diese Widersprüche durch ein Verbot der impredikativen, selbstbezüglichen Definitionen zu beseitigen, was jedoch nicht befriedigte.

Zermelo wählte einen anderen Weg und legte der Gruppentheorie ein System von Axiomen zugrunde, das durch *Fraenkel, Bernais, von Neumann* und anderen verbessert wurde. So entstanden verschiedene Theorien mit spezifischen Eigenheiten.. Alle vermeiden die Widersprüche, welche ursprünglich zur Krise geführt hatten, doch keine ist die Beste.

Die weitreichendsten Folgen hatte Zermelos Axiom der Auswahl. Mit ihm lässt sich eine Vielzahl unwidersprochener Theoreme beweisen, wie beispielsweise das Theorem, dass jede Gruppe wohlgeordnet werden kann. Borel zeigte später, dass in diesem Fall Theorem und Axiom gleichbedeutend sind, doch zeigten sich bald ganz unwahrscheinliche Konsequenzen. Das Hausdorff-Theorem (1914) besagt, dass die Hälfte einer Kugeloberfläche mit einem Drittel kongruent ist. Das allgemeinere Banach-Tarski-Theorem erscheint noch viel unglaubwürdiger. Es kann daraus gefolgert werden, dass es theoretisch möglich ist, die Sonne in kleine Stückchen zu zerschneiden und aus diesen eine Erbse zu arrangieren, ohne auch nur eines wegzulassen, zu komprimieren oder sonstwie zu deformieren!

So paradox diese Aussage auch klingt, im Beweis des Theorems, aus dem sie abgeleitet wurde, hat man bis heute keinen Fehler entdeckt. Auch das Axiom der Auswahl führte noch nie zu einem Widerspruch, und es wurden aus ihm schon eine sehr grosse Zahl gültiger Resultate abgeleitet.

Nach den Arbeiten von *Cohen* (1963) scheint es heute so zu sein, dass das Axiom der Auswahl ein unabhängiges Axiom darstellt. Es liegt eine ähnliche Situation vor, wie seinerzeit in der Geometrie, als die Ablehnung des fünften Postulats von *Euklid* (Parallelen . . .) zur nicht-Euklidschen Geometrie führte. Man spricht denn auch heute von Cantorscher und nicht-Cantorscher Gruppentheorie.

M. S. Buser

[1]) Man erinnere sich an die didaktische Entwicklung des Integrals über die Riemannsche Summe.

Fortsetzung auf Seite 1023

Plasmaschweissverfahren

621.791.755

[Nach *A. H. Wagenleitner:* Plasmaschweissverfahren. Bull. Sécheron –(1967)35d, S. 14...25]

Im vergangenen Jahrzehnt sind an die Schweisstechnik eine Menge neuer Anforderungen gestellt worden, zu deren Lösung in erster Linie eine Erhöhung der bisherigen Lichtbogentemperatur von 6000 °K notwendig war. Das Prinzip der Einengung eines Hochstromlichtbogens bietet hiezu die beste Möglichkeit. Die Einschnürung wird durch einen Gasstrahl erzielt.

Die ohne besondere Vorbereitungsarbeiten miteinander zu verschweissenden zwei Blechkanten werden durch den Plasmastrahl aufgeschmolzen und seitlich verdrängt, wobei ein durchgehendes Loch gebildet und der Stossfuge entlang geführt wird. Der Kern des Lichtbogens und die ihn unmittelbar umschliessendenen heissen Gase schmelzen die obere Partie des Werkstoffes auf. Der untere Bereich wird nur schmal aufgeschmolzen, weshalb die Naht wegen der typischen Form auch Weinglas-Form genannt wird.

Ein wesentlicher Vorteil des Plasmaschweissens liegt darin, dass die zu verschweissenden Blechkanten keiner speziellen Vorbereitung bedürfen. Gegenwärtig können 12 mm dicke Bleche ohne Zusatzdraht stumpf in einer Lage durchgeschweisst werden. Eine Mindestblechdicke von 2...3 mm ist aber immer erforderlich. Oft müssen auch Dünnbleche verschweisst werden. Hiezu werden Schwachstromlichtbogen von 0,5...15 A verwendet.

A. Baumgartner

Suite voir page 1023