**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens
**Band:** 59 (1968)
**Heft:** 14

**Artikel:** Allpässe als Phasenkorrektoren und Gruppenlaufzeitfilter
**Autor:** Mueller, K.H.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1057409

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 06.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

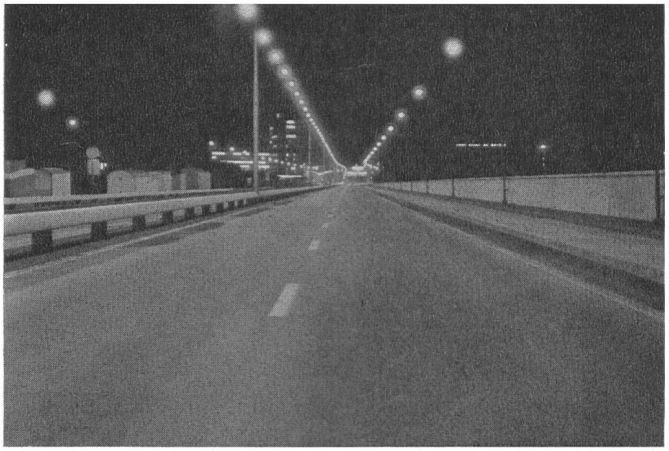


Fig. 9
**Voie centrale et voie latérale Ouest**

Les deux artères ne sont séparées que par une bordurette en plots béton, il est dès lors possible de justifier un aménagement susceptible d'apporter un complément aux différents facteurs de réflexion des revêtements (béton: Voie latérale Ouest bitume: Voie centrale) en créant également un léger contraste de couleur (fig. 9) (après 200 h d'usage).

**Eclairement**

Résultats des mesures d'éclairement (suivant cahier des charges). A 2000 heures de fonctionnement.

Température 22°; Tension R: 226 V; S: 228 V; T: 226 V
Chaussée sèche — temps nuageux couvert.

*Valeurs:* $E_{max}$ : 35 lx $E_{min}$ : 21 lx $E_{med}$ : 28,2 lx

$$\frac{E_{min}}{E_{med}} = 1 : 1{,}6$$

$$\frac{E_{min}}{E_{max}} = 1 : 1{,}66$$

En conclusion, nous pouvons dire que les moyens mis en œuvre pour réaliser l'installation de la Voie centrale donnent de bon résultats.

Des réglages et contrôles seront encore effectués à basse température. Il sera ensuite possible de tirer les conclusions qu'impose une solution qui, sans être un prototype, n'en est pas moins une réalisation particulière sur laquelle des améliorations peuvent être apportées en vue d'obtenir de meilleurs résultats sans augmenter les prestations financières.

**Adresse de l'auteur:**
*R. Serex*, Services Industriels de Genève, Service de l'Electricité, Rue du Stand 12, Case postale 16, 1211 Genève 11.

# Allpässe als Phasenkorrektoren und Gruppenlaufzeitfilter

Von *K. H. Mueller*, Zürich

621.372.553

*Als Phasenkorrektoren und Laufzeitentzerrer von Leitungen und Nachrichtenkanälen werden häufig Allpassnetzwerke verwendet. Die vorliegende Arbeit führt ein in die Grundzüge und wichtigsten Eigenschaften dieser Vierpole und ihrer Übertragungsfunktionen. Vor- und Nachteile verschiedener Realisierungsmöglichkeiten, sowie die Anzahl der jeweils benötigten Reaktanzen werden diskutiert und am Schluss tabellarisch zusammengestellt.*

*On utilise souvent des réseaux passe-tout comme correcteurs de phases et de temps de propagation. Le présent exposé fournit une introduction aux bases et aux propriétés essentielles de ces quadripôles et à leurs fonctions de propagation. Les avantages et les inconvénients des diverses possibilités de réalisation, ainsi que la quantité des réactances indispensables, sont discutés, puis résumés à la fin par un tableau.*

## 1. Einleitung

Allpässe sind Netzwerke, welche eine für alle Frequenzen konstante Dämpfung besitzen. Sie werden überall dort angewendet, wo ohne Beeinträchtigung des Amplitudenganges eine vorgegebene Phasen- oder Laufzeitcharakteristik realisiert werden muss. Insbesondere als nachgeschaltete Korrektoren zur Linearisierung des Phasenganges im Durchlassbereich von Tiefpassfiltern sind die Allpässe in der Impulstechnik ein wichtiges Hilfsmittel. Daneben spielen solche Schaltungen eine zunehmende Rolle für die Entzerrung von Übertragungsleitungen. Während nämlich die Laufzeitcharakteristik einer Telephonleitung für die Sprachübertragung von sekundärer Bedeutung ist, bestehen bei der Übertragung von Daten- oder Fernsehsignalen relativ strenge Forderungen nach einer für alle beteiligten Frequenzen konstanten Laufzeit (Erhaltung der Signalform). In solchen Fällen kann durch ein entsprechend dimensioniertes Korrekturnetzwerk ein in gewissen Grenzen ausgeebneter Verlauf erzielt werden. Als weitere Anwendungsmöglichkeit sei noch auf den Entwurf von Verzögerungsnetzwerken mittels Allpass-Schaltungen hingewiesen, obschon für diesen speziellen Problemkreis noch andere Lösungsmethoden zur Verfügung stehen.

Ausgehend vom symmetrischen Kreuzglied werden zunächst die wichtigsten Eigenschaften der Allpass-Grundglieder hergeleitet. Danach wird die allgemeine Allpass-Übertragungsfunktion und ihre mögliche Zerlegung in einfachere Faktoren untersucht. Schliesslich wird noch eine Anzahl weiterer Schaltungsmöglichkeiten gezeigt, welche sich für die Realisierung besser eignen als das symmetrische Reaktanzkreuzglied. Auch auf eine einfache Methode zur Berücksichtigung der Verluste in den Induktivitäten und Kapazitäten wird hingewiesen.

Der vorliegende Artikel wendet sich nicht primär an den versierten Filterspezialisten. Für ihn sind ja während der letzten Jahre in der einschlägigen Literatur eine Reihe von neuen Arbeiten über Allpass-Schaltungen erschienen (siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes). Trotzdem werden in den meisten Lehrbüchern über Netzwerktheorie die Allpässe nur sehr spärlich oder überhaupt nicht behandelt. Die folgenden Ausführungen möchten daher dem nur mit den Grundzügen der allgemeinen Filterschaltungen vertrauten Ingenieur eine Einführung in das Gebiet der Allpass-Vierpole geben, nicht zuletzt um das Studium neuerer Publikationen zu erleichtern (Allpass-Synthese mittels iterativer Computerverfahren, Realisierung von Übertragungsfaktoren durch aktive *RC*-Schaltungen, usw.).

## 2. Allgemeines zum symmetrischen Kreuzglied

Das in Fig. 1 gezeichnete symmetrische Kreuzglied besitzt die *a*-Matrix:

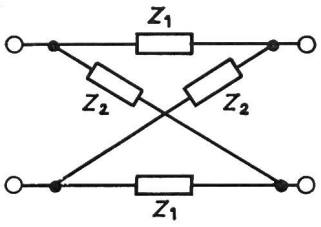



Fig. 1
**Symmetrisches Kreuzglied mit den Brückenimpedanzen $Z_1$ und $Z_2$**

$$(a) = \frac{1}{Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_1 & 2\,Z_1 Z_2 \\ 2 & Z_2 + Z_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Daraus, oder auch direkt aus der Figur ist ersichtlich, dass:

$$Z_{1o} = Z_{2o} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \qquad Z_{1c} = Z_{2c} = \frac{2\,Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \tag{2}$$

woraus sich Wellenimpedanz und Übertragungsmass bestimmen zu:

$$Z_w = \sqrt{Z_{1o} Z_{1c}} = \sqrt{Z_{2o} Z_{2c}} = \sqrt{Z_1 Z_2} \tag{3}$$

$$\operatorname{tgh} \Gamma = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{1o}}} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1 + Z_2} \rightarrow \operatorname{tgh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \tag{4}$$

Durch Übergang auf das halbe Übertragungsmass gewinnt man also einen wesentlich einfacheren Ausdruck; d. h. es ist von Vorteil, sich das Kreuzglied in zwei «imaginäre Halbglieder» zerlegt zu denken (praktisch nicht ausführbar). Für ein solches Halbglied ist zugleich:

$$Z_{1o} = Z_2 \text{ und } Z_{1c} = Z_1$$

Hat man nun $n$ angepasste Kreuzglieder in Kaskade, so addieren sich für den Gesamtvierpol die Einzelübertragungsmasse:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \qquad [\text{falls } Z_{wk} = Z_{w(k+1)}] \tag{5}$$

Kreuzglied mit reinen Reaktanzen (Spezialfall):

$$\left.\begin{matrix} Z_1 = j\,X_1 \\ Z_2 = j\,X_2 \end{matrix}\right\} \; Z_w = j\sqrt{X_1 X_2} \qquad \operatorname{tgh} \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{X_1}{X_2}} \tag{6}$$

Man kann sofort die beiden Fälle unterscheiden:

$X_1 X_2 > 0 \rightarrow$ Sperrbereich;

$Z_w$ imaginär, $\operatorname{tgh} \frac{\Gamma}{2}$ reell (7)

$X_1 X_2 < 0 \rightarrow$ Durchlassbereich;

$Z_w$ reell, $\operatorname{tgh} \frac{\Gamma}{2}$ imaginär (8)

*Zuordnung zwischen Filter- zu Impedanztypen*

Tabelle I

| $X_1$ / $X_2$ | $L$ | $C$ | S | P |
|---|---|---|---|---|
| $L$ | BP | BS[1]) | TP | HP |
| $C$ | BS[1]) | BP | HP | TP |
| S | TP | HP | BP | BS[1]) |
| P | HP | TP | BS[1]) | BP |

$L$ Induktivität; $C$ Kapazität; S Seriekreis; P Parallelkreis; TP Tiefpass; HP Hochpass; BP Bandpass; BS Bandsperre

[1]) Decken sich je die Nullstellen von $X_1$ mit den Polen von $X_2$ und umgekehrt, so besitzen $X_1$ und $X_2$ über den ganzen Frequenzbereich verschiedene Vorzeichen. Man erhält so anstelle der Bandsperre einen Allpass.

Mit Hilfe dieses einfachen Kriteriums lässt sich eine Tabelle angeben über die gegenseitige Zuordnung der Impedanz- und Filtertypen (Tab. I).

### 3. Reaktanzphasenschieber

Wählt man beim symmetrischen Kreuzglied:

$$Z_w^2 = \text{konst.} = R^2 = Z_1 Z_2 = -X_1 X_2 \tag{9}$$

so erhält man durch Einsetzen für das Übertragungsmass:

$$\operatorname{tgh} \frac{A + j\,B}{2} = j\frac{X_1}{R} = -j\frac{R}{X_2} \rightarrow A = 0 \tag{10}$$

Die Betriebsdämpfung verschwindet und das Phasenmass des Allpasses ergibt sich zu:

$$x_1 = \frac{X_1}{R} = \tan\frac{B}{2}; \quad x_2 = \frac{X_2}{R} = -\frac{1}{x_1} = -\cot\frac{B}{2} \tag{11}$$

Bei gegebenem $B(\omega)$ lassen sich aus Gl. (11) die Reaktanzen $X_1$ und $X_2$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmen, da man

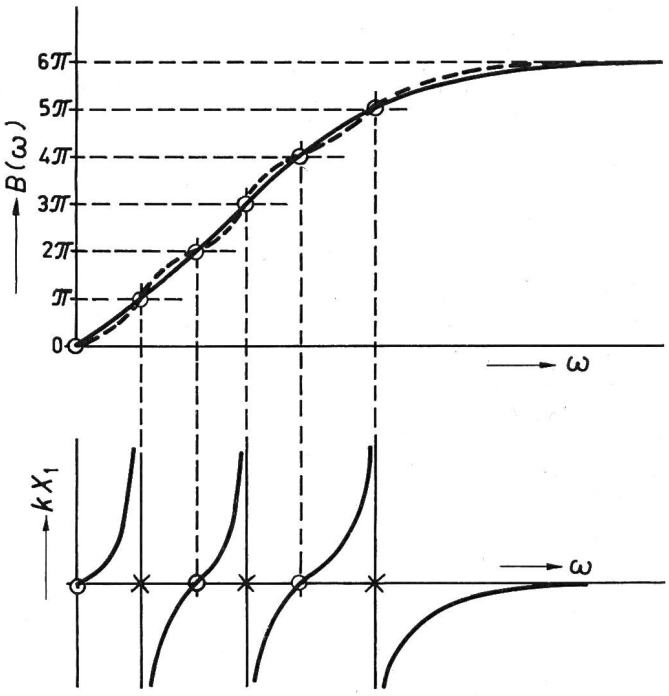



Fig. 2
**Zusammenhang zwischen Phasengang $B(\omega)$ und Reaktanzverlauf $X_1(\omega)$**
Die Stützstellen im Abstand $m\,\pi$ ergeben Pole und Nullstellen der gesuchten Reaktanz. Diese ist allerdings nur bis auf einen konstanten Faktor $k$ bestimmt

die Lage der Pole und Nullstellen gemäss Fig. 2 leicht festlegen kann. Das Verfahren besitzt den Vorteil, dass auf diese Art auch Phasengänge approximiert werden können, die nur in Form einer Kurve vorliegen, also nicht in mathematischer Form gegeben sind. Im allgemeinen Fall [also wenn tan $(B/2)$ nicht eine Reaktanzfunktion ist] wird durch dieses Vorgehen die gegebene $B$-Kurve mit einer gewissen (nicht konstanten) Welligkeit approximiert (gestrichelte Kurve in Fig. 2). Wenn zwischen $B(\omega = 0)$ und $B(\omega = \infty)$ die Phase um $n\,\pi$ ändert, so ergibt das für einen Brückenzweipol des Kreuzgliedes eine aus $n$ Elementen bestehende Reaktanz. Besitzt $X_1$ eine Nullstelle bei $\omega = 0$ (L- oder P-Typ), so ist $B(\omega = 0) = 0$; andernfalls verläuft die Kurve zwischen $B(\omega = 0) = \pi$ und $B(\omega = \infty) = (n + 1)\,\pi$.

Allerdings ist zu bemerken, dass nach dem beschriebenen Verfahren die gesuchte Reaktanzfunktion nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, der so gewählt werden muss, dass eine möglichst kleine Welligkeit entsteht[1]).

In den meisten Fällen wird man jedoch nicht einen bestimmten Phasengang, sondern eine gegebene Gruppenlaufzeit approximieren müssen (z. B. Laufzeitentzerrung von Leitungen für Daten- und Fernsehübertragung). Es gilt:

$$\tau = \frac{dB}{d\omega} \qquad B - B_0 = \int_0^{\omega} \tau(\omega)\, d\omega \tag{12}$$

oder falls nur ein Bereich $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$ interessiert:

$$B - B_1 = \int_{\omega_1}^{\omega} \tau(\omega)\, d\omega\ ; \qquad (\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2) \tag{13}$$

Bei vorgegebener Gruppenlaufzeit $\tau(\omega)$ ist also aus Gl. (12) $B(\omega)$ bis auf eine Konstante ($B_0 = 0$ oder $\pi$) bestimmt. Ist $\tau(\omega)$ empirisch oder in Form einer Kurve gegeben (also nicht als mathematische Funktion), so lässt sich Gl. (12) auch graphisch integrieren, worauf man $Z_1$ und $Z_2$ mit dem bereits beschriebenen Verfahren bestimmen kann. Ein derart bestimmtes Kreuzglied approximiert den $\tau$-Verlauf im allgemeinen nicht mit konstanter Welligkeit. Der korrekte Wert wird immer zwischen den $\pi$-Stellen der Phase durchlaufen, da es dort eine Frequenz gibt, wo in der Figur die Tangenten an die ausgezogene und die gestrichelte Kurve dieselbe Steigung besitzen.

Der erste Teil von Gl. (12) lässt sich übrigens noch durch $x_1$ ausdrücken:

$$\tau(\omega) = \frac{dB}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}(2 \arctan x_1) = \frac{2}{1 + x_1^2} \cdot \frac{dx_1}{d\omega} \tag{14}$$

womit der direkte Zusammenhang zwischen der Reaktanz $X_1$ und der Gruppenlaufzeit $\tau$ hergestellt ist.

### 4. Aufwandabschätzung bei Laufzeitfiltern

Es sei ein bestimmter Verlauf $\tau(\omega)$ vorgegeben, der durch einen Allpass approximiert werden soll. Aus Gl.(12) folgt dann:

$$\int_0^{\infty} \tau(\omega)\, d\omega = B_\infty - B_0 = n\pi \tag{15}$$

Aus der Laufzeitfläche kann also die Ordnung $n$ des Allpasses bestimmt werden. Da nun aber nicht jede beliebige Funktion $\tau(\omega)$ gerade Gruppenlaufzeitfunktion eines Allpasses ist, wird man je nach der gewünschten Approximationsgüte $n$ etwas grösser als den nach Gl. (15) bestimmten Minimalwert wählen müssen.

*Beispiel:* Verzögerungsschaltung.

Im Bereich bis 4 kHz werde eine konstante Verzögerung von 1 ms Dauer gewünscht.

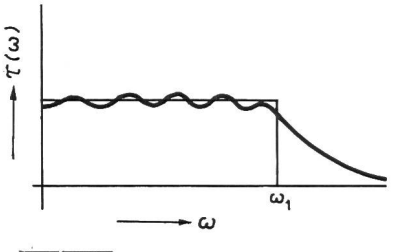



Fig. 3
**Approxamation einer konstanten Verzögerung**
Die praktische Laufzeitfläche wird etwas grösser als die vorgegebene Rechteckfläche
$\tau(\omega)$ Laufzeit;
$\omega_1$ Grenzfrequenz

[1]) Siehe auch Abschnitt 8.

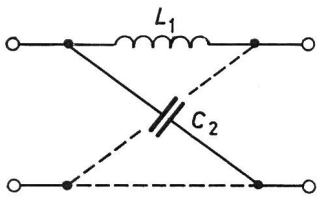



Fig. 4
**Struktur des Grundgliedes 1. Ordnung**

$$n_{min} = \frac{\omega_1 \tau}{\pi} = 2\tau f_1 = 8$$

Praktisch wird man — falls die Welligkeit bis zur Grenzfrequenz vernünftig klein gehalten werden soll — mit etwa $n = 10...12$ rechnen müssen (Fig. 3).

### 5. Das Grundglied 1. Ordnung (Fig. 4)

$$Z_1 = pL \rightarrow x_1 = \frac{\omega L}{R}$$

$$Z_2 = \frac{1}{pC} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{\omega RC} \tag{16}$$

$$R = \sqrt{Z_1 Z_2} = Z_w = \sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow X_1 X_2 = -1 \tag{17}$$

Mit

$$\omega_0 = \frac{R}{L} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

und (18)

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

ergibt sich schliesslich:

$$x_1 = \Omega$$

und (19)

$$x_2 = -\frac{1}{\Omega}$$

und für den Phasenverlauf nach Gl. (11):

$$B = 2 \arctan \Omega \tag{20}$$

woraus sich nach Gl. (14) auch $\tau(\omega)$ ergibt zu:

$$\tau(\omega) = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1 + \Omega^2} \tag{21}$$

Bei Vertauschen von $Z_1$ und $Z_2$ ändert sich die Laufzeitkurve nicht, dagegen wird die $B$-Kurve um den Wert $\pi$ senkrecht zur $\Omega$-Achse verschoben. Wegen des monotonen $\tau$-Verlaufes (Fig. 5) bietet das Glied 1. Ordnung wenig Möglichkeiten zur Approximation einer vorgegebenen Laufzeitfunktion.

### 6. Das Grundglied 2. Ordnung (Fig. 6)

$$x_1 = \frac{\omega L_1}{R} \frac{1}{1 - \omega^2 L_1 C_1} \tag{22}$$

$$x_2 = \frac{\omega L_2}{R}\left(1 - \frac{1}{\omega^2 L_2 C_2}\right) \tag{23}$$

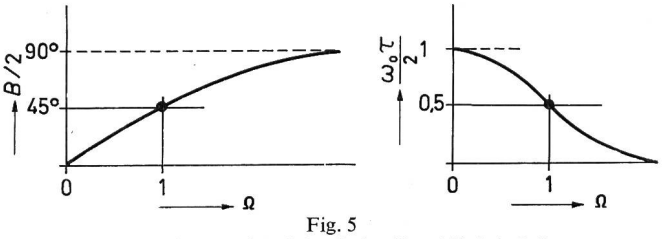



Fig. 5
**Phasen- und Laufzeitfunktion beim Grundglied 1. Ordnung**
$\Omega = \omega/\omega_0$ normierte Frequenz
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 2

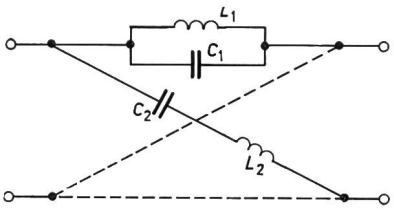



Fig. 6
**Struktur des Grundgliedes 2. Ordnung**

$$x_1 x_2 = -1 \rightarrow \frac{L_2}{C_1} = \frac{L_1}{C_2} = R^2 \tag{24}$$

$$\omega^2 L_1 C_1 = \omega^2 L_2 C_2 = \Omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{25}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{L_2 C_2}$$

Zusätzlich bleibt noch ein Parameter ($K$) frei, nämlich:

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{C_2}{C_1} = K^2 \tag{26}$$

Damit ergeben sich Gl. (22) und Gl. (23) zu:

$$x_1 = \frac{K\Omega}{1-\Omega^2}$$

und (27)

$$x_2 = \frac{\Omega^2 - 1}{K\Omega}$$

Somit kann man auch Phase und Gruppenlaufzeit bestimmen:

$$B(\omega) = 2 \arctan \frac{K\Omega}{1-\Omega^2} \tag{28}$$

$$\tau(\omega) = \frac{dB}{d\omega} = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{K(\Omega^2+1)}{1+\Omega^2(K^2-2)+\Omega^4} \tag{29}$$

Für $K = 2$ geht Gl. (29) über in:

$$\tau(\omega) = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{2}{1+\Omega^2} \tag{30}$$

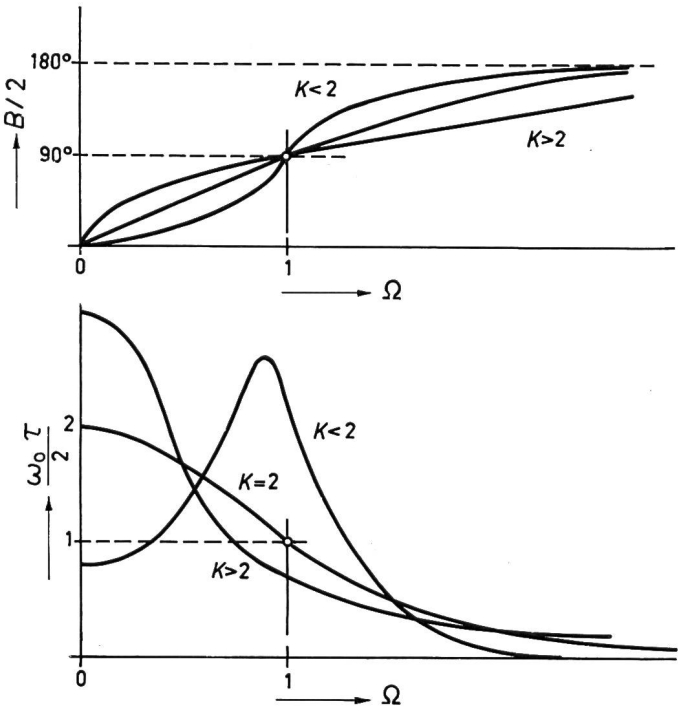



Fig. 7
**Phasen- und Laufzeitfunktion beim Grundglied 2. Ordnung**
Die Laufzeitkurven schliessen (unabhängig vom Parameter $K$) mit den Koordinatenachsen konstante Flächen ein
Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 2

was einer Kaskadenschaltung zweier gleicher Glieder 1. Ordnung entspricht. Allgemein zeigt man leicht, dass sich ein Allpass zweiter Ordnung für $K \geqq 2$ in zwei Allpässe erster Ordnung zerlegen lässt. Für $K < 2$ dagegen entstehen neue Laufzeitkurven, welche für $K < \sqrt{3}$ sogar ein Maximum aufweisen, also nicht mehr monoton verlaufen (Fig. 7). Dieses Maximum tritt auf bei der Frequenz:

$$\omega(\tau_{max}) = \sqrt{\sqrt{4-K^2} - 1} \tag{31}$$

Die zugehörige maximale Laufzeit wird:

$$\tau_{max} = \frac{2}{\omega_0} \cdot \frac{K}{2\sqrt{4-K^2} - (4-K^2)} \tag{32}$$

Das Laufzeitmaximum wächst mit kleiner werdendem $K$ und nähert sich zugleich der Frequenz $\Omega = 1$. Bei den Frequenzen $\Omega = 0$ und $\Omega = 1$ ergeben sich für $\tau$ die einfachen Ausdrücke:

$$\left.\frac{\omega_0 \tau}{2}\right|_{\Omega=0} = K \quad \text{und} \quad \left.\frac{\omega_0 \tau}{2}\right|_{\Omega=1} = \frac{2}{K} \tag{33}$$

Wie bereits erwähnt kann man für $K \geqq 2$ das Glied 2. Ordnung in zwei Glieder 1. Ordnung aufteilen mit den Normfrequenzen $\omega_1$ und $\omega_2$; umgekehrt können zwei solche Glieder wieder zu einem Glied 2. Ordnung zusammengefasst werden. Die Umrechnungsbeziehungen findet man leicht mit Gl. (20) und Gl. (28) oder Gl. (21) und Gl. (29); sie lauten ($\omega_0$ = Normfrequenz des Gliedes 2. Ordnung):

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2}(K + \sqrt{K^2-4})$$
$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2}(K - \sqrt{K^2-4}) \tag{34}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$
$$K = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \tag{35}$$

Wie man noch sehen wird, lassen sich Allpässe beliebiger Ordnung immer zerlegen in Glieder 1. und 2. Ordnung. Durch Kaskadenschaltung sind daher auch kompliziertere Laufzeitkurven realisierbar. Diese Aufteilung ist allerdings nur bei Schaltungen mit konstantem Wellenwiderstand möglich. Andere Netzwerke mit kleinerer Elementenzahl, welche für den praktischen Aufbau vorzuziehen sind, besitzen zum Teil diese Eigenschaft nicht. Eine Zerlegung der phasenbestimmenden Impedanz lässt sich in solchen Fällen nur durch Trennverstärker erreichen.

## 7. Forderungen für verzerrungsfreie Übertragung

Damit die Übertragung in dem in Fig. 8 angedeuteten System verzerrungsfrei ist, muss gelten:

$$U_2(t) = v_0 U_1(t-\tau) \quad \text{[im Zeitbereich]} \tag{36}$$

$$u_2(p) = v_0 u_1(p) \cdot e^{-p\tau} \quad \text{[im Operatorbereich]} \tag{37}$$

Es sind also Übertragungsfaktoren von folgender Form zugelassen:

$$v(p) = \frac{u_2(p)}{u_1(p)} = v_0 e^{-p\tau} \tag{38}$$

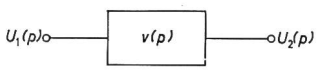



Fig. 8
**Lineares Übertragungssystem mit der Übertragungsfunktion** $v(p)$
$U_1$ Eingangsspannung;
$U_2$ Ausgangsspannung

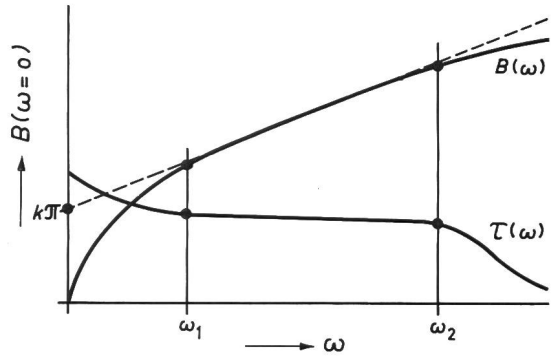



Fig. 9

**Anforderungen an den Phasengang $B(\omega)$ für die verzerrungsfreie Übertragung eines spektral beschränkten Signals**

$\omega_1$ und $\omega_2$ bilden die Bandgrenzen des Übertragungsbereiches

Da $v(p)$ transzendent ist, reale Übertragungsfaktoren aber rational sind, lässt sich Gl. (38) offenbar nur näherungsweise approximieren (ausser im trivialen Fall $\tau = 0$).

Mit $p = j\omega$:

$$|v(j\omega)| = v_0 = \text{konst.} \qquad \text{[Allpass]}$$

$$-\arg v = B = \omega\tau + k\pi \tag{39}$$

Die Bedingungen in Gl. (39) sind für eine verzerrungsfreie Übertragung notwendig und hinreichend ($k$ ganzzahlig). Aus der 2. Zeile ergibt sich:

$$\frac{dB}{d\omega} = \tau = \text{konst.} \tag{40}$$

Man erkennt, dass Gl. (40) zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist; zusätzlich muss nämlich gelten:

$$B(\omega = 0) = k\,\pi \tag{41}$$

Überträgt man nur Signale mit Spektrum $\omega_1 \leqq \omega \leqq \omega_2$, so genügt es, wenn die Bedingungen in Gl. (39) im entsprechenden Frequenzbereich gültig sind (Fig. 9).

*Beispiel:* Laufzeit einer Koaxialkabelstrecke.

Da man mit Allpässen keine negativen Gruppenlaufzeiten realisieren kann, addiert man zur Korrektur einen Verlauf $\Delta\tau$ (Fig. 10). Die Summe ergibt dann einen $\tau$-Verlauf, welcher die Forderungen erfüllt. Dabei ist es oft notwendig, wesentlich mehr Glieder zu nehmen als nach der minimalen Korrekturlaufzeitfläche zunächst nötig erscheint (Addition einer konstanten Zusatzlaufzeit), um über den gesamten Frequenzbereich einen vernünftigen Approximationsfehler zu erhalten. [Extremes Beispiel: Verlauf $\tau(\omega)$, der nach Gl. (15) nur die Fläche kleiner oder angenähert gleich $\pi$ besitzt, aber stark von Gl. (21) abweicht.]

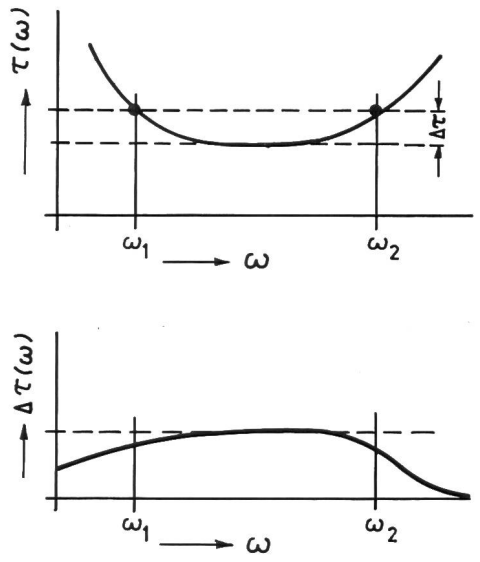



Fig. 10

**Laufzeitentzerrung einer Koaxialkabelstrecke**

Gemäss Vorschrift muss die Laufzeitabweichung $\Delta\tau < 0{,}1$ µs beim Fernsehen betragen. Der untere Teil der Figur bezieht sich auf den Korrekturvierpol

Weitere Bezeichnungen siehe Fig. 9

## 8. Rechenbeispiel

Setzt man die normierte Reaktanz $x$ an als:

$$x = \frac{P(\Omega)}{Q(\Omega)} \qquad (= \text{ungerade Funktion})$$

so erhält man für die Gruppenlaufzeit:

$$\frac{\omega_0\,\tau}{2} = \frac{dx}{d\Omega} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{Q\,P' - P\,Q'}{P^2 + Q^2}$$

Unter anderem ergibt das bei den Polen und Nullstellen die einfachen Ausdrücke:

$$\frac{\omega_0\,\tau}{2} = -\frac{Q'}{P} \qquad \text{bei den Polen von } x$$

$$\frac{\omega_0\,\tau}{2} = \frac{P'}{Q} \qquad \text{bei den Nullstellen von } x$$

Aus dem in Abschnitt 3 angegebenen graphischen Verfahren erhält man $x$ nur bis auf einen konstanten Faktor, da ja von der Phasenkurve nur Stützwerte im Abstand $m\,\pi$ benützt wurden. Praktisch ist es daher wichtig zu wissen, wie sich die Laufzeit ändert bei Multiplikation von $x$ mit einer Konstanten:

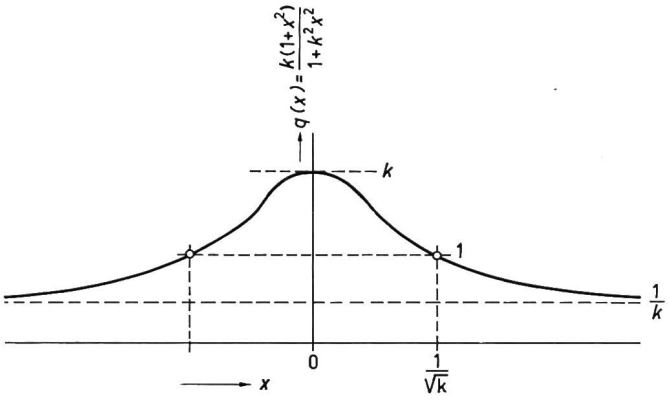



Fig. 11

**Laufzeitkoeffizient $q(x)$ bei Änderung der Reaktanz $x$ und dem Faktor $k$**

Für jedes $k$ erhält man einen andern Verlauf des Korrekturfaktors $q(x)$

$$\frac{\omega_0\,\tau}{2}(k\,x) = k\,\frac{dx}{d\Omega} \cdot \frac{1}{1+k^2\,x^2} = \frac{k\,(1+x^2)}{1+k^2\,x^2} \cdot \frac{\omega_0\,\tau}{2}(x)$$

Speziell gilt:

$$\tau(k\,x) = k\,\tau(x) \qquad \text{bei den Nullstellen von } x$$

$$\tau(k\,x) = \frac{1}{k} \cdot \tau(x) \qquad \text{bei den Polen von } x$$

Über den Verlauf des Multiplikationsfaktors gibt Fig. 11 Aufschluss.

Wie man praktisch vorgeht, soll an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden:

Ein Laufzeitglied mit konstanter Verzögerung (bzw. ein frequenzproportionaler Phasenschieber) soll mit 8 Reaktanzen approximiert werden. Als Näherung wird eine Reaktanz mit äquidistanten Pol- und Nullstellen angesetzt:

$$x(\Omega) = k\,\Omega\,\frac{(2^2-\Omega^2)(4^2-\Omega^2)(6^2-\Omega^2)}{(1^2-\Omega^2)(3^2-\Omega^2)(5^2-\Omega^2)(7^2-\Omega^2)}$$

Die Laufzeit bei den Pol- und Nullstellen berechnet sich zu:

$$\Omega = 0: \quad \frac{\omega_0\,\tau}{2} = k\,\frac{4\cdot 16\cdot 36}{1\cdot 9\cdot 25\cdot 49} = 0{,}20898\,k$$

$$\Omega = 1: \quad \frac{\omega_0\,\tau}{2} = \frac{1}{k}\cdot\frac{2\cdot 8\cdot 24\cdot 48}{1\cdot 3\cdot 15\cdot 35} = 11{,}7028\,\frac{1}{k}$$

$$\Omega = 2: \quad \frac{\omega_0\,\tau}{2} = k\,\frac{2\cdot 4\cdot 12\cdot 32}{3\cdot 5\cdot 21\cdot 45} = 0{,}21672\,k$$

$$\Omega = 3: \quad \frac{\omega_0\,\tau}{2} = \frac{1}{k}\cdot\frac{8\cdot 6\cdot 16\cdot 40}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 27} = 10{,}8360\,\frac{1}{k}$$

usw.

Um einen flachen Verlauf bei tiefen Frequenzen zu erhalten, müsste man $k = 7{,}48$ wählen. Damit wird aber die Welligkeit bei den höheren Frequenzen sehr gross; man wird deshalb einen Kompromiss schliessen und $k$ etwas kleiner wählen. Tabelle II zeigt die Laufzeitwerte bei $k = 6{,}8$. Bis $\Omega = 3$ nimmt die Welligkeit ab; nachher wieder zu. Durch Wahl eines etwas grösseren $k$-Wertes könnte der Verlauf bei tiefen Frequenzen noch beträchtlich linearisiert werden, allerdings würden die Schwankungen bei hohen Frequenzen dafür noch ausgeprägter.

*Laufzeitschwankungen des gerechneten Beispieles für $k = 6{,}8$*

Tabelle II

| $\Omega$ | $\frac{\omega_0\,\tau}{\pi}$ |
|---|---|
| 0 | 0,905 |
| 1 | 1,096 |
| 2 | 0,938 |
| 3 | 1,014 |
| 4 | 1,066 |
| 5 | 0,830 |
| 6 | 1,476 |
| 7 | 0,447 |
| $\infty$ | 0 |

Die praktisch ausnutzbare Laufzeitfläche (bei vorgegebener maximaler Abweichung) ist wesentlich kleiner als bei Tschebyscheff-Approximation. Dafür besitzt die Methode den Vorteil, dass irgendwelche Laufzeitkurven mit geringem Rechenaufwand approximiert werden können (numerische oder graphische Integration ergibt die Phasenkurve).

Die im Beispiel bestimmte Impedanz lässt sich durch eine Partialbruchzerlegung leicht in eine Serieschaltung einzelner Parallelschwingkreise zerlegen (Nachteil: Die $LC$-Verhältnisse der einzelnen Kreise sind um Grössenordnungen verschieden) oder nach Ausmultiplizieren von Zähler und Nenner in einen Kettenbruch entwickeln. Eine solche Realisierung (z. B. als Kreuzglied in Sparschaltung) ist jedoch sehr empfindlich, in Bezug auf Verluste und Einhaltung der Dualität. Besonders bei Impedanzen mit relativ viel Reaktanzen treten daher im Amplitudengang starke Schwankungen auf. Zum Glück stehen aber für den Schaltungsentwurf noch weitere Möglichkeiten offen.

Bei einer ungeraden Zahl von Schaltelementen kann die Gruppenlaufzeit in zwei Anteile aufgespalten werden mit entgegengesetzter Welligkeit. Die beiden Einzelallpässe werden dann in Kette geschalten. Da die Einzelwelligkeiten aber grösser und das ausnutzbare Band bei den einzelnen Schaltungen kleiner sind, ist der Gewinn unbedeutend.

## 9. Die Übertragungsfunktion eines Allpasses

Für die Übertragungsfunktion wird der, zunächst noch allgemeine Ansatz:

$$v(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{G_1(p) + U_1(p)}{G_2(p) + U_2(p)} \tag{42}$$

gemacht. $G$ und $U$ bedeuten den geraden, bzw. ungeraden Teil des Zähler- bzw. Nennerpolynoms. Soll $v(p)$ die Übertragungsfunktion eines Allpasses sein, so muss gefordert werden, dass:

$$|v(\mathrm{j}\omega)| = v_0 = \text{konst.}$$
$$v(\mathrm{j}\omega) = v_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B(\omega)} \tag{43}$$

Klammert man in Gl. (42) aus dem ungeraden Teil $p$ aus, so verbleibt noch ein gerader Teil $G'$ und man bekommt bei $p = \mathrm{j}\omega$:

$$|v(\mathrm{j}\,\omega)|^2 = \frac{G_1^2 + \omega^2 G_1'^2}{G_2^2 + \omega^2 G_2'^2} \cdot v_0^2 \tag{44}$$

Dies ist aber nur möglich, falls:

$$\frac{G_1}{G_2} = \pm\frac{G_1'}{G_2'} \tag{45}$$

Das obere Vorzeichen gibt den trivialen Fall $B = k\pi$. (Idealer Verstärker, bzw. Ohmsches Dämpfungsglied.) Das untere Vorzeichen dagegen führt auf die Übertragungsfunktion:

$$v(p) = v_0\,\frac{G_2 - p\,G_2'}{G_2 + p\,G_2'} = v_0\,\frac{G_2 - U_2}{G_2 + U_2}$$

Damit kann man folgenden Satz formulieren:

Eine rationale Funktion $v(p)$ ist dann und nur dann Übertragungsfunktion eines Allpasses, wenn sie folgende Form besitzt:

$$v(p) = v_0\,\frac{H(-p)}{H(+p)} = v_0\,\frac{G(p) - U(p)}{G(p) + U(p)} = v_0\,\frac{1 - R(p)}{1 + R(p)} \tag{46}$$

Dabei wurde noch folgender Quotient eingeführt:

$$R(p) = \frac{U(p)}{G(p)} = \frac{H(p) - H(-p)}{H(p) + H(-p)} \tag{47}$$

Man erkennt, dass $R(p)$ offenbar eine Reaktanzfunktion ist [ungerade, Grad von $G$ und $U$ um eins verschieden, dazu die weiter unten erwähnten Eigenschaften von $H(p)$[2])].

Die Übertragungsfunktion eines Allpasses ist also durch ein einziges charakteristisches Polynom $H(p)$ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Ist $H(p)$ $n$. Grades, so nennt man das zugehörige Netzwerk einen Allpass $n$. Ordnung. Verlangt man, dass das System stabil ist, so darf die Übertragungsfunktion bekanntlich keine Pole in der rechten Halbebene besitzen, d. h. $H(p)$ ist ein Hurwitz-Polynom. Ausgeschrieben lautet die Übertragungsfunktion (46):

$$v(p) = v_0\,\frac{H(-p)}{H(p)} = \frac{1 - A_1 p + A_2 p^2 - \ldots + A_n p^n}{1 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots + A_n p^n} \tag{48}$$

[2]) Tatsächlich erhält man zwar, wie erwähnt eine Reaktanzfunktion, falls $R(p)$ nach Gl. (47) gebildet wird. Wie im 12. Abschnitt noch gezeigt wird, ist es dagegen umgekehrt nicht notwendig, dass $R(p)$ eine Reaktanzfunktion ist, damit Gl. (46) Übertragungsfaktor eines Allpasses wird.

Alle Koeffizienten $A_k$ von $H(p)$ sind positiv. Der Vollständigkeit halber seien auch noch die Zusammenhänge zwischen $U(p)$, $G(p)$ und $H(p)$ angegeben:

$$U(p) = -U(-p) = \frac{1}{2}\{H(p) - H(-p)\} \quad (49)$$

$$G(p) = \quad G(-p) = \frac{1}{2}\{H(p) + H(-p)\} \quad (50)$$

$$H(p) = G(p) + U(p)\,; \quad H(-p) = G(p) - U(p) \quad (51)$$

Aus der Beziehung

$$v(\mathrm{j}\omega) = v_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B} = v_0\,\frac{1 - R(\mathrm{j}\omega)}{1 + R(\mathrm{j}\omega)} \quad (52)$$

folgt für die Phase $B$:

$$R(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\,x(\omega) = \mathrm{tgh}\,\frac{\mathrm{j}B}{2} = \mathrm{j}\,\mathrm{tg}\,\frac{B}{2} \quad (53)$$

$$\mathrm{j}B = 2\,\mathrm{artgh}\,R(\mathrm{j}\omega) \rightarrow B(\omega) = 2\,\mathrm{arctg}\,x(\omega) \quad (54)$$

Vergleicht man Gl. (53) mit Gl. (11), so stellt man fest, dass die mit Gl. (47) eingeführte Reaktanzfunktion $R(p)$ — welche sich sehr einfach aus der Übertragungsfunktion des Allpasses bestimmen lässt — offenbar gerade die (auf den Wellenwiderstand normierte) Impedanz $Z_1(p)$ ist, falls der Allpass in Form eines symmetrischen Kreuzgliedes mit den Brückenreaktanzen $Z_1$ und $Z_2$ ausgeführt wird. [Entsprechend: $x(\omega)$ in Gl. (54) ist gleich $x_1(\omega)$ in Gl. (11).] Da zur Reaktanzfunktion das zugehörige Netzwerk relativ einfach gefunden werden kann (Entwicklung nach Polen oder Kettenbruch), kann somit bei gegebener Übertragungsfunktion eine erste Realisierungsmöglichkeit für den Allpass angegeben werden.

Aus Gl. (47) und Gl. (48) sieht man noch:

$$U(0) = 0\,; \quad G(0) \neq 0 \quad R(0) = 0 \quad (55)$$

[Auch $v(\mathrm{j}\omega,\ \omega \rightarrow 0) = v_0$ ; d. h. $\arg v(0) = \arg v_0$]

Man findet für die Phasengrenzen des Allpasses:

$$\left.\begin{aligned} B(0) &= \nu\pi \\ B(\infty) &= (n + \nu)\,\pi \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 0{,}1) \text{ für Allpass } n.\text{ Ordnung} \quad (56)$$

### 10. Bestimmung der Gruppenlaufzeit aus $H(p)$:

$$\tau(\omega) = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{j}B)}{\mathrm{d}p}\bigg|_{p = \mathrm{j}\omega} \quad (57)$$

Durch logarithmieren von Gl. (43):

$$\mathrm{j}B = \ln v_0 - \ln v \quad (58)$$

$$\tau^*(p) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln v = -\frac{v'}{v} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln H(-p) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln H(p) \quad (59)$$

Durch geringfügige Umformung erhält man schliesslich:

$$\tau(\omega) = 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{H'(p)}{H(p)}\right\}\bigg|_{p = \mathrm{j}\omega} \quad (60)$$

Statt durch das Hurwitz-Polynom $H(p)$ kann man die Gruppenlaufzeit $\tau$ natürlich auch durch die Reaktanz $R(p)$ ausdrücken:

$$\tau^*(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\,2\,\mathrm{arctg}\,R(p) = \frac{2}{1 - R^2(p)} \cdot \frac{\mathrm{d}R(p)}{\mathrm{d}p} \quad (61)$$

Für das in diesem Abschnitt verwendete Symbol $\tau^*(p)$ gilt:

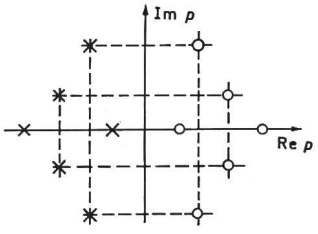



Fig. 12
**Pol- und Nullstellenlage eines Allpasses in der komplexen $p$-Ebene**

$$\tau^*(p = \mathrm{j}\omega) = \tau(\omega) \quad (62)$$

$\tau^*(p)$ und $\tau(\omega)$ sind gerade Funktionen von $p$ bzw. $\omega$.

### 11. Zerlegung des Allpasses in Glieder 1. und 2. Art

Bestimmt man die Wurzeln $p_k$ der Gleichung $H(p) = 0$, so lautet die Faktorzerlegung des charakteristischen Polynoms:

$$H(p) = 1 + A_1 p + A_2 p^2 + \ldots + A_n p^n = \\ = A_n (p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p^n) \quad (63)$$

Dabei können sowohl reelle Nullstellen (mindestens eine falls $n$ ungerade ist) als auch Paare von konjugiert komplexen Nullstellen auftreten. Fig. 12 zeigt eine mögliche Pol- und Nullstellenverteilung der Übertragungsfunktion eines Allpasses 6. Ordnung.

Die in Faktoren zerlegte Übertragungsfunktion lautet:

$$v(p) = v_0\,\frac{H(-p)}{H(p)} = v_0\,\frac{(-p - p_1)(-p - p_2)\ldots(-p - p_n)}{(p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n)} \quad (64)$$

Man kann nun $v(p)$ in zwei Arten von Teilübertragungsfaktoren zerlegen:

a) Solche, die von reellen Nullstellen herrühren (Glieder 1. Ordnung):

$$p_k = -\alpha_k \rightarrow v_k(p) = v_{0k}\,\frac{-p_k - p}{-p_k + p} = v_{0k}\,\frac{\alpha_k - p}{\alpha_k + p} \quad (65)$$

$$\text{Zugehörige Phase:} \quad B_k = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\alpha_k} \quad (66)$$

$$\text{Gruppenlaufzeit:} \quad \tau_k = \frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2 + \omega^2} \quad (67)$$

b) Solche, die von einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen herrühren (Glieder 2. Ordnung):

$$p_k = -\alpha_k \pm \mathrm{j}\,\beta_k \rightarrow v_k(p) = v_{0k}\,\frac{(-p_k - p)(-\overline{p_k} - p)}{(-p_k + p)(-\overline{p_k} + p)} = \\ = v_{0k}\,\frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2 - 2\,\alpha_k p + p^2}{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + 2\,\alpha_k p + p^2} \quad (68)$$

$$\text{Zugehörige Phase:} \quad B_k = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\,\alpha_k\,\omega}{\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \omega^2} \quad (69)$$

$$\text{Gruppenlaufzeit:} \quad \tau_k = \frac{4\,\alpha_k(\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \omega^2)}{(\omega^2 + \alpha_k^2 - \beta_k^2)^2 + 4\,\alpha_k^2\,\beta_k^2} \quad (70)$$

Da alle Polstellen $p_k$ in der linken Halbebene liegen, ist $\alpha_k = -\,\mathrm{Re}\,p_k$ immer positiv; die $\tau_k$ in Gl. (67) und Gl. (70) sind daher auf jeden Fall positiv. Die Gesamtlaufzeit setzt sich aus der entsprechenden Summe der Einzellaufzeiten zusammen, denn:

$$v = \Pi\,v_k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B_K} = v_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}B}$$

$$B = \sum B_k\,; \qquad \tau = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\omega} = \sum\frac{\mathrm{d}B_k}{\mathrm{d}\omega} = \sum\tau_k$$

Es können daher die folgenden wichtigen Sätze formuliert werden:

*Zusammenhang zwischen den verschiedenen Parametern des Allpassgrundgliedes 2. Ordnung*

Tabelle III

| | $\omega_0, K$ | $p_{1,2}$ | $A_1, A_2$ |
|---|---|---|---|
| $\omega_0 =$ | — | $\lvert p_1 \rvert$ | $\frac{1}{\sqrt{A_2}}$ |
| $K =$ | — | $-\frac{2 \operatorname{Re} p_1}{\lvert p_1 \rvert}$ | |
| $p_{1,2} =$ | $-\frac{K\omega_0}{2}\left(1 \pm j\sqrt{\frac{4}{K^2}-1}\right)$ | — | $-\frac{A_1}{2A_2} \pm j\frac{\sqrt{4A_2 - A_1^2}}{2A_2}$ |
| $A_1 =$ | $\frac{K}{\omega_0}$ | $-\frac{2 \operatorname{Re} p_1}{\lvert p_1 \rvert^2}$ | — |
| $A_2 =$ | $\frac{1}{\omega_0^2}$ | $\frac{1}{\lvert p_1 \rvert^2}$ | — |

a) Die Gruppenlaufzeit eines Allpasses ist immer positiv.

b) Die Phase $B$ eines Allpasses kann mit der Frequenz nur zunehmen.

c) Eine Funktion $\tau(\omega)$ ist dann und nur dann Gruppenlaufzeitfunktion eines Allpasses, wenn sie sich als Partialsumme von Summanden (67) und (70) schreiben lässt. $\tau(\omega)$ ist eine gerade Funktion von $\omega$:

$$\tau(\omega) = \frac{C_0 + C_1\omega^2 + \ldots + C_{n-1}\omega^{2(n-1)}}{b_0 + b_1\omega^2 + \ldots + b_n\omega^{2n}} \tag{71}$$

d) Jede Allpasscharakteristik höherer Art lässt sich zerlegen in Glieder 1. und 2. Ordnung. Falls eine Realisierungsart mit konstantem Wellenwiderstand gewählt wird, kann man die einzelnen Glieder unmittelbar in Kette schalten. Eine nach dem Verfahren von Abschnitt 3 gefundene Brückenreaktanz für $Z_1(p) / G(p)$ kann auf einfache Weise auf Einzelglieder 1. und 2. Ordnung verteilt werden [Nullstellenbestimmung der Gleichung $U(p) + G(p) = 0$].

Für das Glied 2. Ordnung ist in Tabelle III der Zusammenhang zwischen den im 6. Abschnitt eingeführten Grössen $\omega_0$ und $K$, den Konstanten $A_1$ und $A_2$ der charakteristischen Funktion, sowie den Nullstellen $p_1$ und $\overline{p_1}$ angegeben.

Die Werte der Schaltelemente bestimmen sich daraus zu:

Schaltelemente (Glied 1. Ordnung):

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 R}; \quad L_2 = \frac{R}{\omega_0} \tag{72}$$

Schaltelemente (Glied 2. Ordnung):

(mit $\alpha = -\operatorname{Re} p_1$)

Parallelkreis $Z_1$:

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0 RK} = \frac{A_2}{RA_1} = \frac{1}{2\alpha R}; \quad L_1 = \frac{RK}{\omega_0} = RA_1 = \frac{2\alpha R}{\lvert p_1 \rvert^2} \tag{73}$$

Seriekreis $Z_2$:

$$C_2 = \frac{K}{\omega_0 R} = A_1 R = \frac{2\alpha}{R\lvert p_1 \rvert^2}; \quad L_2 = \frac{R}{\omega_0 K} = \frac{RA_2}{A_1} = \frac{R}{2\alpha} \tag{74}$$

## 12. Einige weitere Realisierungsmöglichkeiten

Von den vielen möglichen Realisierungsarten für Allpässe sollen einige hier kurz gestreift werden.

Fig. 13 zeigt die Umwandlung des symmetrischen Kreuzgliedes in eine äquivalente Schaltung mit einem überbrückten T-Glied (das allerdings einen idealen Überträger enthält). Die Übertragungsfunktion eines solchen Vierpols lautet allgemein:

$$\frac{U_2}{U_1} = v = \frac{R_2(Z_2 - Z_1)}{(R_2 + R_1)(Z_2 + Z_1) + 2(R_1 R_2 + Z_1 Z_2)} \tag{75}$$

Mit dem Ansatz $\sqrt{Z_1 Z_2} = Z_w$ = reell und $z_1 = Z_1/Z_w$ (76)

lässt sich Gl. (75) überführen in die Form:

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 - z_1(p)}{1 + z_1(p)} \tag{77}$$

Das ist nach Gl. (46) die Übertragungsfunktion eines Allpasses. Der Übergang Gl. (75) → (77) ist durchführbar unter der Bedingung:

$$Z_w = R_1 \quad \text{oder / und} \quad Z_w = R_2 \tag{78}$$

Falls eine konstante Betriebsdämpfung zugelassen wird, ist es also keinesfalls nötig, den Vierpol beidseitig mit $R = Z_w$ abzuschliessen, vielmehr genügt es, wenn die wesentlich allgemeinere Bedingung in Gl. (78) erfüllt ist. Unter anderem sind folgende Spezialfälle möglich:

a) $R_1 = Z_w = \sqrt{Z_1 Z_2}$, $R_2$ beliebig, Anpassung nur primär;

b) $R_2 = Z_w = \sqrt{Z_1 Z_2}$, $R_1$ beliebig, Anpassung nur sekundär;

c) $R_1 = R_2 = Z_w = \sqrt{Z_1 Z_2}$, beidseitige Anpassung.

Vor- und Nachteile der eben besprochenen Allpass-Schaltung sind:

*Vorteil:* Da die Eingangsimpedanz (nur falls $R_2 = Z_w = \sqrt{Z_1 Z_2}$) konstant und gleich $Z_w$ ist, können eine grössere Anzahl von Einzelgliedern ohne weiteres in Kette geschaltet werden (Vorteil beim Abstimmen, Toleranzen bei Gliedern 1. und 2. Ordnung weniger kritisch als bei Allpässen höherer Ordnung, die aus nur einem einzigen Kreuzglied bestehen).

*Nachteil:* Die Pole von $Z_1$ und die Nullstellen von $Z_2$ (bzw. umgekehrt) müssen äusserst genau übereinstimmen, da der Amplitudengang sonst starke Schwankungen aufweist. Zudem werden relativ viele Reaktanzen benötigt und bei der Sparschaltung ein eng gekoppelter Übertrager.

Die Übereinstimmung der Pole und Nullstellen der beiden dualen Impedanzen $Z_1$ und $Z_2$ lässt sich vermeiden, falls man die eine Brückenimpedanz (z. B. $Z_2$) durch einen Widerstand ersetzt. Man erhält damit das Netzwerk (Darlington-Schaltung) gemäss Fig. 14.

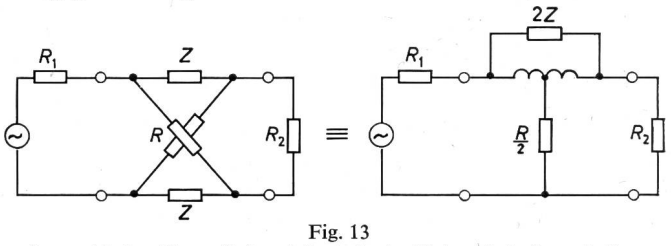



Fig. 13
**Symmetrisches Kreuzglied und aquivalentes Netzwerk in Sparschaltung**
$R_1$ = Quellenwiderstand; $R_2$ = Abschlusswiderstand
Weitere Bezeichnungen siehe im Text

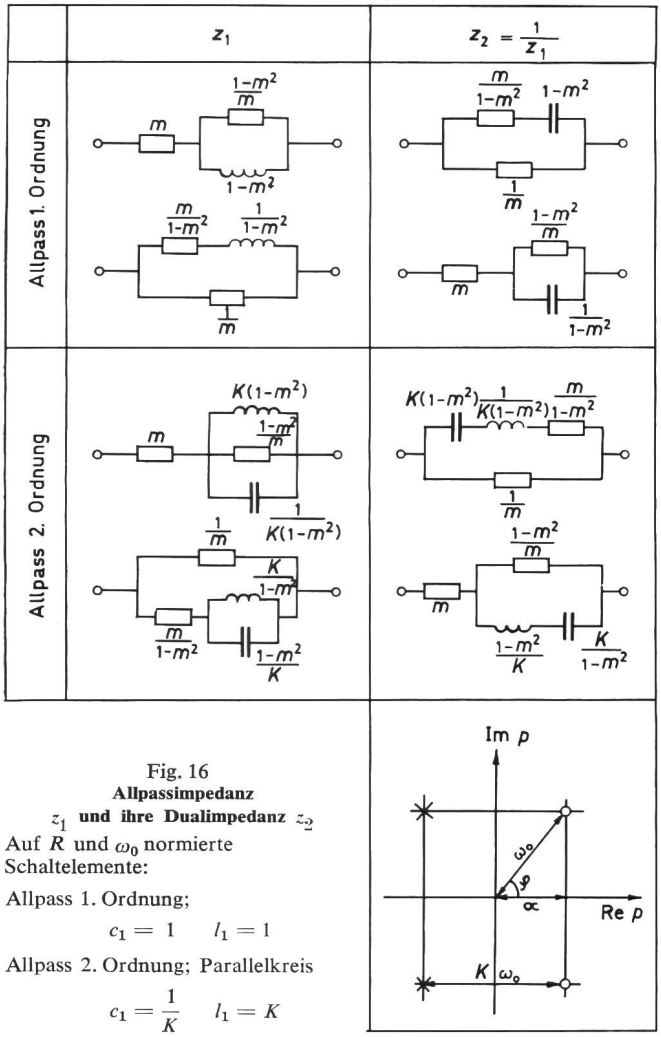



Fig. 16
**Allpassimpedanz $z_1$ und ihre Dualimpedanz $z_2$**
Auf $R$ und $\omega_0$ normierte Schaltelemente:

Allpass 1. Ordnung;

$$c_1 = 1 \qquad l_1 = 1$$

Allpass 2. Ordnung; Parallelkreis

$$c_1 = \frac{1}{K} \qquad l_1 = K$$

Seriekreis $c_2 = K \qquad l_2 = \frac{1}{K}$

Für das Glied 2. Ordnung ist noch die Nullstellenlage in der komplexen $p$-Ebene angegeben
$K$, $m$ Parameter

Wählt man den Widerstand $R$ so, dass die Bedingung

$$R^2 = R_1 R_2 \tag{79}$$

erfüllt ist, so wird nämlich die Übertragungsfunktion (75) zu:

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + 2R} \cdot \frac{R - Z}{R + Z} = c_0 \frac{1 - z(p)}{1 + z(p)}$$

$$\text{mit } z = \frac{Z}{R} \tag{80}$$

was nach Gl. (46) die Übertragungsfunktion eines Allpasses ist (falls $Z$ eine Reaktanz oder ein Zweipol der im folgenden beschriebenen Art ist).

*Vorteil* der Darlington-Schaltung: Nur die halbe Anzahl Reaktanzelemente wird (gegenüber dem Glied mit dem dualen $Z_1$ und $Z_2$) benötigt. Die Reaktanz $Z$ kann relativ leicht nach dem graphischen

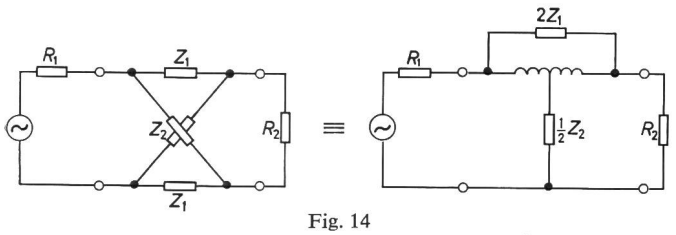



Fig. 14
**Darlington-Allpass als Kreuzglied und Sparschaltung**
Bezeichnungen siehe Fig.13

Verfahren von Abschnitt 3 gefunden werden. Die duale Impedanz und das Problem der Pol-Nullstellen-Identität entfällt.

*Nachteil:* Die Eingangsimpedanz des mit $R_2$ abgeschlossenen Darlington-Netzwerkes beträgt:

$$Z_{ein} = \frac{Z(R_2 + 2R) + R_2 R}{Z + R + 2R_2} \tag{81}$$

$Z_{ein}$ ist (wegen dem in Zähler und Nenner auftretenden Glied $Z(p)$ eine Funktion der Frequenz. Eine Kettenschaltung (ohne Trennverstärker) einzelner Darlington-Allpässe ist daher nicht möglich.

Die bis jetzt beschriebenen Schaltungen erforderten als Zweipole u. a. verlustfreie Reaktanzen. Es stellt sich die Frage, wie dieser Nachteil umgangen werden kann. Auf die Möglichkeit der Vorverzerrung der Übertragungsfunktion (Predistortion) soll hier nicht näher eingegangen werden, dagegen sei an die im 9. Abschnitt gemachte Fussnote angeknüpft und eine allgemeinere Realisierungsmöglichkeit für die in Gl. (77) ein-

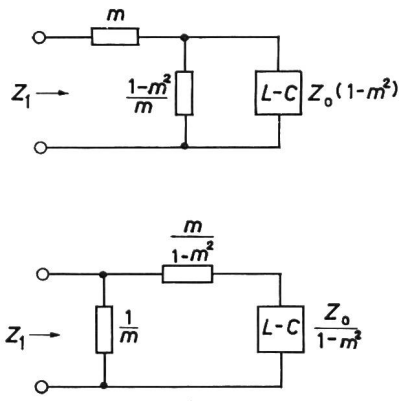



Fig. 15
**Realisierungsmöglichkeiten für die $RLC$-Impedanz $Z_1$, ausgehend von der verlustlosen $LC$-Impedanz $Z_0$ und dem Parameter $m$**
Erklärungen siehe im Text

geführte Impedanz $z_1(p)$ gezeigt. Vergleicht man nämlich die Allpassübertragungsfaktoren Gl. (46) und (77) so erhält man:

$$v(p) = v_0 \frac{H(-p)}{H(p)} = \frac{1 - z_1(p)}{1 + z_1(p)} c_0 \tag{82}$$

Bisher wurde stillschweigend $v_0 = c_0$ angenommen, da ja $z_1(p)$ als Reaktanz ausgebildet wurde. Man kann allgemeiner den Ansatz:

$$\frac{v_0}{c_0} = \frac{1 - m}{1 + m}; \qquad m = \frac{c_0 - v_0}{c_0 + v_0} \tag{83}$$

einführen und Gl. (82) nach $z_1(p)$ auflösen:

$$z_1(p) = \frac{(1 + m) H(p) - (1 - m) H(-p)}{(1 + m) H(p) + (1 - m) H(-p)} \tag{84}$$

Definiert man eine normierte Reaktanzfunktion $z_0(p)$ durch den Quotienten des geraden und ungeraden Anteils von $H(p)$ in der Form:

$$z_0(p) = \frac{H(p) - H(-p)}{H(p) + H(-p)} \tag{85}$$

so ergibt sich durch Einsetzen in Gl. (84) schliesslich für die Brückenimpedanz $z_1(p)$:

$$z_1(p) = \frac{m + z_0(p)}{1 + m z_0(p)} \qquad (0 \leqq m < 1) \tag{86}$$

Fig. 15 zeigt zwei Realisierungsmöglichkeiten für die Impedanz $z_1(p)$. Zeichnet man die Zweipole für die Allpässe 1. und 2. Ordnung im Detail auf, so sieht man, dass — wenigstens bei diesen einfachen Gliedern — Verluste in den Reaktanzen weit-

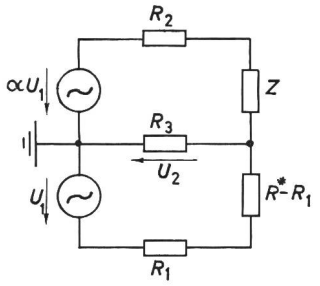



Fig. 17
**Allpass-Netzwerk, das durch zwei gegenphasige Quellen angesteuert wird**
$U_1$ Eingangsspannung;
$R_1, R_2$ Quellenwiderstand;
$R_3$ Abschlusswiderstand

gehend mit den beiden zusätzlich vorkommenden Widerständen berücksichtigt werden können.

Die auf diese Weise entstehenden Zweipole sind in Fig. 16 angegeben. Der Parameter $m$ darf im Bereich $0 \leqq m < 1$ gewählt werden. Im Spezialfall $m = 0$ (d. h. $v_0 = c_0$) erhält man als Zweipol das schon früher besprochene verlustlose $LC$-Netzwerk. Der Grenzwert $m = 1$ (d. h. $v_0 = 0$) dagegen ergibt $z_1 = 1$ und entspricht einer ohmschen abgeglichenen Brücke. Zusätzlich sind in der Abbildung noch die normierten Werte der Schaltelemente zusammengestellt, ausgehend vom Pol-Nullstellenschema der Übertragungsfunktion.

Zuletzt soll nun noch eine Schaltung gezeigt werden, welche gleichviel Elemente benötigt wie das Darlington Netzwerk, bei der aber zudem der Übertrager noch wegfällt.

Die beiden gegenphasigen Spannungsquellen in Fig. 17 können mit irgendeiner der bekannten Phasenkehrschaltungen, wie sie zur Aussteuerung von Gegentaktverstärkern gebräuchlich sind, realisiert werden. Führt man noch einen Faktor $\alpha$ ein, um den sich die Verstärkungen der beiden Phasenkehrkanäle unterscheiden (schaltungstechnisch problemlos), so kann, trotz der Quellenimpedanzen $R_1$ und $R_2$ sowie des Abschlusses $R_3$ mit dem gezeichneten Netzwerk die Übertragungsfunktion eines Allpasses erreicht werden. Man findet:

$$v = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_3}{R_3 + R^*} \cdot \frac{(\alpha R^* - R_2) - Z}{R_2 + \dfrac{R^* R_3}{R^* + R_3} + Z} \tag{87}$$

Damit dies die Form (82) annimmt, muss offenbar gelten:

$$\alpha R^* - R_2 = R_2 + \frac{R^* R_3}{R^* + R_3}$$

Demnach wird:

$$\alpha = \frac{2 R_2}{R^*} + \frac{R_3}{R^* + R_3} \tag{88}$$

und die Bezugsimpedanz:

$$R = R_2 + \frac{R^* R_3}{R^* + R_3} \tag{89}$$

Mit $z = Z/R$ erhält man schliesslich:

$$v(p) = \frac{R_3}{R_3 + R^*} \cdot \frac{1 - z(p)}{1 + z(p)} \tag{90}$$

Dies ist nach den Gl. (46), (77), (80), (82) die Übertragungsfunktion eines Allpasses.

Zuletzt sei noch auf die unsymmetrischen Kreuzglieder hingewiesen, welche die symmetrischen Brücken mit den dualen Zweigen sowie auch die Darlington-Schaltung als Spezialfall enthalten. Tatsächlich kann man mit einem solchen Kreuzglied einen Allpass erhalten, wobei die Impedanz $Z$ nur in einem Brückenzweig vorkommt, während die anderen drei Zweige reine Widerstände enthalten. Auch hier ist — wie beim Darlington Netzwerk — die Eingangsimpedanz nicht konstant. Eine Kettenschaltung (ohne Trennstufen) ist also nicht mög-

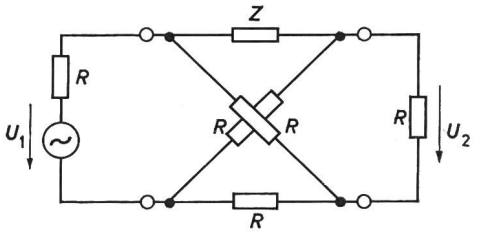
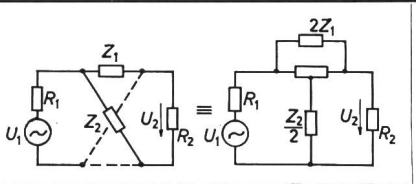
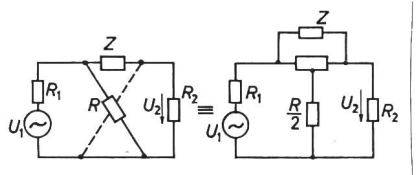
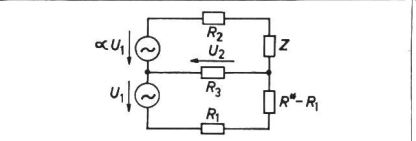
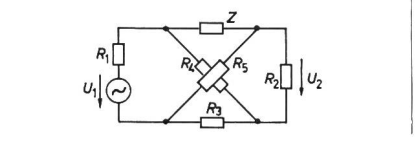



Fig. 18
**Unsymmetrisches Kreuzglied, welches als Watanaba-Allpass ausgebildet ist**
Drei der vier Brückenimpedanzen $Z = Z_1$ (bzw. $Z_2$) können durch Widerstände $R$ ersetzt werden

*Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der im Text besprochenen Schaltungen*

Tableau IV

| Schaltung | Bezeichnung Wellenwiderstand | Bedingungen Bezugswiderstand | Konstante $c_0 = v_0 \frac{1+m}{1-m}$ |
|---|---|---|---|
|  | Symmetrisches Kreuzglied mit je zwei dualen Impedanzen.<br>$\sqrt{Z_1 Z_2} = Z_w = R =$ konst.<br>Äquivalente Schaltungen für Allpässe 2. Ordnung s. Fig. 19 | $Z = Z_1 = \frac{R^2}{Z_2}$<br>$R = \sqrt{Z_1 Z_2}$<br>$R^2 + R_1 R_2 = R^2 (R_1 + R_2)$ | $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$ |
|  | Darlington-Allpass<br>$Z_w \neq$ konst. | $R = \sqrt{R_1 R_2}$ | $\frac{R_2}{R_1 + R_2 + 2R}$ |
|  | Brücke mit Phasenverkehrschaltung.<br>$Z_w$ nicht definiert<br>Ausgangsimpedanz $\neq$ konst. | $\alpha = \frac{2 R_2}{R^*} + \frac{R_3}{R_3 + R^*}$<br>$R = R_2 + \frac{R_3 R^*}{R_3 + R^*}$ | $\frac{R_3}{R_3 + R^*}$ |
|  | Watanaba-Allpass (spez. unsymmetr. Kreuzglied).<br>$Z_w \neq$ konst. | $R_1 < 2 R_2$<br>$R_3 = R_4 = 2R_2 - R_1$<br>$R = R_5 = \sqrt{R_1(2R_2 - R_1)}$ | $\frac{-R_2 (2R_2 - R_1)}{R_2(8R_2 - 3R_1) + R(4R_2 - R_1)}$ |

lich. Fig. 18 zeigt einen solchen Vierpol, wobei hier Quellen- und Abschlusswiderstand sowie die drei Brükkenwiderstände alle gleich gewählt wurden. Die Übertragungsfunktion ergibt sich in diesem speziellen Fall zu:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{R - Z(p)}{R + Z(p)} \qquad (91)$$

Das Netzwerk besitzt also Allpasscharakter. Das Minuszeichen in Gl. (91) kann vermieden werden, falls man $Z$ und einen der Diagonalwiderstände vertauscht. Wie in sämtlichen angegebenen Schaltungen, lässt sich auch hier die Impedanz $Z(p)$ als reine Reaktanz oder als $RLC$-Zweipol ausbilden durch geeignete Wahl von $m$. Das Netzwerk gemäss Fig. 18 benötigt weder Übertrager noch Phasenkehrstufe. Dagegen ist keine durchgehende Erdverbindung vorhanden; wird eine solche gewünscht, so müsste — mindestens auf einer Seite — ein Übertrager verwendet werden.

Zum Schluss sind noch die verschiedenen besprochenen Schaltungen mit ihren wichtigsten Eigenschaften in Tabelle IV zusammengefasst. Dass damit die Möglichkeiten der Allpass-Synthese bei weitem noch nicht erschöpft sind, versteht sich von selbst.

Das Nullstellenschema einer gegebenen Allpassfunktion wird sich im allgemeinen mehrheitlich aus konjugiert komplexen Wertepaaren zusammensetzen. Reelle Nullstellen werden eher selten sein; mit Allpässen 1. Ordnung lassen sich ja auch nur monoton abnehmende Laufzeitkurven realisieren. Die hauptsächlich vorkommenden Allpässe 2. Ordnung werden wiederum mehrheitlich $K$-Werte im Intervall $0 < K \leqq 1$ aufweisen. In Fig. 19 sind eine Anzahl von Schaltungen, die zwar zum Kreuzglied äquivalent sind, sich aber für die Realisierung besser eignen, zusammengestellt. Die Schaltung in Fig. 19f ist dabei für die praktische Ausführung besonders geeignet. Der gesamte Allpass kann dann durch eine Kettenschaltung der einzelnen Elementar-Allpässe aufgebaut werden. Der konstante Wellenwiderstand gestattet auch durch Zu- und Abschalten einzelner Glieder das Laufzeitverhalten in gewissen Grenzen zu variieren.

Unter den Schaltungen, welche die gesamte Übertragungsfunktion mit einem einzigen Reaktanzzweipol realisieren, ist die Brücke mit Phasenkehrstufe sehr beliebt, da sie mit der halben Anzahl Einzelreaktanzen (gegenüber den oben erwähnten Schaltungen) auszukommen vermag und ebenfalls eine durchgehende Erde besitzt (Anwendung u. a. für Verzögerungsglieder).

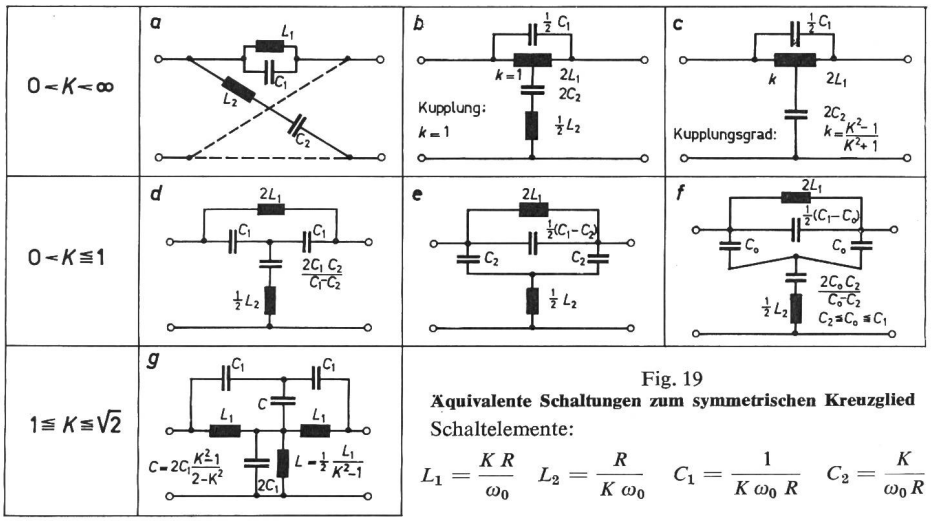



Fig. 19
**Äquivalente Schaltungen zum symmetrischen Kreuzglied**
Schaltelemente:

$$L_1 = \frac{K\,R}{\omega_0} \quad L_2 = \frac{R}{K\,\omega_0} \quad C_1 = \frac{1}{K\,\omega_0\,R} \quad C_2 = \frac{K}{\omega_0\,R}$$

### Literatur


[1] *W. Cauer:* Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Bd. 2. Berlin, Akademie-Verlag, 1960.
[2] *H. Keil:* Filter und Laufzeitentzerrer für die Fernsehübertragung auf Kabeln. NTZ 9(1956), S. 469...475.
[3] *G. Wunsch:* Laufzeitentzerrer und Verzögerungsschaltungen. Berlin, VEB Verlag Technik, 1960.
[4] *R. Saal* und *K. Antreich:* Zur Realisierung von Reaktanz-Allpass-Schaltungen. Frequenz 16(1962), S. 469...477, und 17(1963), S. 14...22.
[5] *G. Bosse:* Ein Rechenverfahren zur Approximation vorgegebener Laufzeitkurven. Frequenz 17(1963), S. 103...107.
[6] *H. Matthes:* Realisierung hochwertiger Laufzeitentzerrer. NTZ 17(1964), S. 11...19.
[7] *G. Szentirmai:* The problem of phase equalization. Trans. IRE, Circuit Theory 6(1959), S. 272...277.
[8] *S. Hellerstein:* Synthesis of All-Pass Delay Equalizers. Trans. IRE, Circuit Theory 8(1961), S. 215...222.
[9] *J. V. Fall:* Digital Computer Program for the Design of Phase Correctors. Trans. IRE, Circuit Theory 8(1961), S. 223...236.
[10] *P. Birgels:* Über ein mögliches Verfahren zur Grössenbestimmung mehrerer Allpässe beim Gruppenlaufzeitausgleich. NTZ 16(1963), S. 69...75.
[11] *T. A. Abele:* Übertragungsfaktoren mit Tschebyscheffscher Approximation konstanter Gruppenlaufzeit. Arch. elektr. Übertrag. 16(1962), S. 9...18.
[12] *E. Ulbrich* und *H. Piloty:* Über den Entwurf von Allpässen, Tiefpässen und Bandpässen mit einer im Tschebyscheffschen Sinne approximierten konstanten Gruppenlaufzeit. Arch. elektr. Übertrag. 14(1960), S. 451...467.
[13a] *P. Birgels:* Das verlustbehaftete überbrückte T-Glied. NTZ 15(1962), S. 190...195.
[13b] *P. Birgels:* Über eine Möglichkeit der Ergänzung von verlustbehafteten überbrückten T-Gliedern zu nahezu idealen Allpässen. NTZ 15(1962), S. 205...212.
[14] *K. H. Mueller:* Some remarks on circuits having the same transfer function as the constant-resistance lattice and the derivation of all-pass networks. Trans. IEEE, Circuit Theory 12(1965), S. 132...133.



**Adresse des Autors:**
Dr. *K. H. Mueller*, Dipl. Ingenieur, Institut für Fernmeldetechnik an der ETH, Sternwartstrasse 7, 8006 Zürich.


# Literatur — Bibliographie

**Wörterbuch Bausteine der Elektronik (Halbleiter, Röhren, Bauelemente, Werkstoffe).** Von *Ernst Peter Pils*. Telekosmos-Verlag, Stuttgart 1968; 19,5×13 cm, 191 S., 77 Fig.

Die Elektronik ist im Verlauf weniger Jahrzehnte zu einem sehr umfangreichen Teilgebiet der Elektrotechnik angewachsen, und sie dehnt sich rasch noch weiter aus. Eine Fülle von Fachausdrücken ist entstanden. Da ist die Schaffung eines Lexikons der Fachausdrücke der Bausteine der Elektronik, das heisst der Halbleiter, der Röhren, der Bauelemente und der Werkstoffe, sehr zu begrüssen. Der erfahrene Autor bietet mit seinem Werk eine lange Liste von Fachausdrücken; sie ist alphabetisch geordnet, bringt zu jedem Ausdruck eine knappe, aber leicht verständliche Erklärung und verweist überdies in sehr vielen Fällen auf Literaturstellen. In einer Reihe von Fällen sind auch Abbildungen beigefügt. Auf 188 Seiten sind über 1100 Fachausdrücke zusammengestellt. Dann folgt noch ein Literaturverzeichnis.

Im Gebiet der Elektronik werden oft englische Ausdrücke benützt, sei es weil entsprechende deutsche Ausdrücke noch nicht existieren, oder dass solche noch nicht allgemein eingeführt sind. Der Autor hat daher auch viele englische Ausdrücke in sein Lexikon aufgenommen. Zu Recht lässt er allgemeine Ausdrücke, wie Spannung und Strom und alle Einheitennamen, weg.

Mit dem Wörterbuch Bausteine der Elektronik wird der Fachwelt ein praktisches Werkzeug vorgelegt, das bestens empfohlen werden kann. *M. K. Landolt*