

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 52 (1961)
Heft: 10

Artikel: Rauschuntersuchungen an Silizium-Transistoren
Autor: Kurz, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1059051>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Organe commun de l'Association Suisse des Electriciens (ASE)
et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité (UCS)

Rauschuntersuchungen an Silizium-Transistoren

Von B. Kurz, Zürich

621.382.3 : 669.782 : 621.391.822

In der folgenden Arbeit wird das Rauschverhalten von Siliziumtransistoren untersucht. Es wird einerseits auf die kleinsten zu erwartenden Rauschwerte, die infolge physikalischen und herstellungstechnischen Grenzen schwerlich unterschritten werden können, hingewiesen und anderseits die gute Übereinstimmung zwischen Praxis und Theorie hervorgehoben. Auch wird auf einige allgemeine Eigenschaften der Siliziumtransistoren, soweit sie mit dem Rauschen in Verbindung stehen, eingegangen. Besonders wurde der Verlauf des Stromverstärkungsfaktors in Funktion des Emitterstromes festgehalten, auch liegen Ergebnisse über die Emitterstromabhängigkeit des Faktors A , der die Eingangsimpedanz korrigieren kann, vor.

Allgemeines

Die bisherigen Rauschuntersuchungen im Halbleitergebiet widmeten sich grösstenteils den Germanium-Transistoren und -Dioden. Da in letzter Zeit der Silizium-Transistor in preislicher Hinsicht konkurrenzfähiger geworden ist und somit, dank seinen physikalischen Vorteilen bald ein grosses Anwendungsgebiet erschliessen wird, scheint es zweckmässig, sein Rauschverhalten zu untersuchen.

Die Untersuchungen beschränkten sich auf legierte Niederfrequenz-Transistoren kleinerer Verlustleistung. Die theoretischen Ergebnisse können aber, unter Berücksichtigung des technologisch unterschiedlichen Aufbaues, für diffundierte wie auch für Hochfrequenz-Transistoren übernommen werden. Man muss natürlich jeweils die speziell anders liegenden Transistorgrössen einsetzen.

Zuerst wurden die verschiedenen Rauschbeiträge analysiert, was einerseits die Abschätzung eines erreichbaren unteren Rauschpegels bei Kenntnis wichtiger Transistorparameter erlaubt, und anderseits den rauschmässig günstigsten Arbeitspunkt, unter Berücksichtigung des Quellenwiderstandes ergibt. Als Ausgangslage diente bei den Untersuchungen das theoretisch schon gut beherrschte Rauschen im weissen Rauschspektrum (white noise or shot noise). Es wird sich dann von alleine ergeben, wie weit diese Theorie mit den praktisch erhaltenen Ergebnissen übereinstimmt und wo sie nötigenfalls durch das Funkelrauschen (excess noise) ergänzt werden muss.

Theoretische Grundlagen

Bekanntlich gilt für das weisse Rauschspektrum nach Guggenbühl [1]¹) im Fall von Emitter- und Basisschaltung folgende Beziehung:

¹ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

Des indications précises au sujet du facteur de bruit sont évoquées dans ce traité. On donne d'une part les raisons pour lesquelles une diminution du facteur de bruit tel qu'il se présente actuellement est difficile à atteindre, et d'autre part on relève la différence minimale entre les valeurs théoriques et pratiques obtenues. Des propriétés d'ordre général qui peuvent avoir une influence sur le facteur de bruit sont également traitées. Le lecteur trouvera une analyse détaillée de l'amplificateur de courant et du facteur A qui dans certains domaines du courant émetteur peut corriger fortement l'impédance d'entrée.

$$F_o = 1 + \frac{r_{bb}'}{R_o} + \frac{r_e}{2 R_o} + \frac{(r_e + r_{bb}' + R_o)^2}{2 r_e R_o \alpha_{fb}^2} \left[\frac{I_{CBO}}{I_E} + \alpha_{fb} (1 - \alpha_{fb}) \right] \quad (1)$$

$$r_e \approx \frac{k_T}{q} \cdot \frac{1}{I_E} \approx \frac{25 \text{ [mV]}}{I_E \text{ [mA]}} \quad (2)$$

Darin bedeuten:

k	Boltzmannsche Konstante
q	Ladung des Elektrons
T	Temperatur in °K
F_o	Rauschfaktor
r_{bb}'	Basiszuleitungs-Widerstand
r_e	differentieller Widerstand der Basis-Emitterdiode
α_{fb}	Stromverstärkungsfaktor in Basisschaltung
I_{CBO}	Sperrstrom
I_E	Emitterarbeitsstrom
R_o	Quellenwiderstand

Eine andere, in der Literatur übliche Herleitung des Rauschfaktors F_o besteht in der Anwendung der Vierpoltheorie, sie führt jedoch zum gleichen Ergebnis ohne besondere Vorteile zu bieten, weshalb hier auf ein diesbezügliches Eingehen verzichtet wird.

Die Beziehung in Gl. (1) hat nur bei niedrigen Frequenzen Gültigkeit, da ja α_{fb} frequenzabhängig ist; diese Abhängigkeit sollte im Fall hoher Frequenzen berücksichtigt werden.

$$\alpha_{fb} = \frac{\alpha_{fo}}{1 + \frac{jf}{F_{ab}}} \quad (3)$$

α_{fo}	Stromverstärkung bei 1000 Hz
F_{ab}	Grenzfrequenz in Basisschaltung
f	Frequenz

Gl. (1) enthält die α_{fe} -Stromabhängigkeit nicht direkt; ferner muss man beachten, dass der differentielle Widerstand der Basis-Emitterdiode sich nicht unbedingt durch die Gleichung

$$r_e = \frac{U_T}{I_E} \quad U_T = \frac{kT}{q} \quad (4)$$

beschreiben lässt. Es kommt hingegen ein Korrekturfaktor A hinzu, der zwischen 1 und 2 variieren kann.

$$r_e = A \frac{U_T}{I_E} \quad (5)$$

Vollständigkeitshalber sei noch die Beziehung

$$\alpha_{fe} = \frac{\alpha_{fb}}{1 - \alpha_{fb}} \quad (6)$$

angeführt.

Der Faktor A röhrt daher, dass bei einem Silizium-p-n-Übergang der Stromtransport nicht ausschliesslich durch den klassischen Diffusionsstrom I_D getragen wird. Ein Teil der injizierten Minoritätsträger wird nämlich in der Sperrsicht der Rekombination und der Generation unterworfen, und ruft dadurch in dieser Schicht den sog. Rekombinationsstrom I_R hervor. Der Emitterstrom I_E setzt sich somit aus einem Diffusions- sowie Rekombinations-Anteil zusammen. Nach Veloric [2] gelten folgende Beziehungen:

Für den Diffusionsanteil I_D :

$$I_D = I_o \left(\exp \frac{qV}{kT} - 1 \right) \quad (7)$$

Für den Rekombinationsanteil I_R :

$$I_R = \frac{2 q w_s n_i \cdot \sinh \frac{q}{2kT} \cdot V}{(T_{no} - T_{po})^{1/2} \frac{q}{kT} (V_D - V)} \cdot f(b) \quad (8)$$

w_s drückt sich wie folgt aus:

$$w_s = 0,54 \varrho_b \sqrt{V_D - V} \cdot 10^{-4} \quad (9)$$

Darin bedeuten:

- I_o Sperrstrom des p-n-Überganges
- V_D Diffusionspotential
- w_s Breite der Sperrsicht
- n_i Eigenleitdichte der Elektronen und Löcher
- T_{no}, T_{po} Lebensdauer der Träger
- $f(b)$ Korrekturfaktor $\approx 1,5$
- V angelegte Spannung am p-n-Übergang
- ϱ_b spezifischer Widerstand des Basismaterials

Man kann nun aus beiden Anteilen die differentiellen Eingangsadmittanzen

$$Y_D = \frac{\delta I_D}{\delta V} \quad \text{und} \quad Y_R = \frac{\delta I_R}{\delta V}$$

bilden.

Zu diesem Zweck lässt sich Gl. (8) folgendermassen umformen:

$$\sinh \frac{q}{2kT} \cdot V = \exp \frac{q}{2kT} \cdot V, \text{ dies trifft zu, da } \frac{q}{2kT} \cdot V \text{ recht grosse Werte hat.}$$

Somit wird Gl. (8):

$$I_R = \frac{\lambda \cdot \exp \frac{q}{2kT} \cdot V}{(V_D - V)^{1/2}}$$

wobei in λ die numerischen Faktoren zusammengefasst sind.

Die Rekombinations-Eingangsadmittanz schreibt sich somit:

$$\frac{\delta I_R}{\delta V} = \frac{q I_R}{2kT} + \frac{I_R}{2 \cdot (V_D - V)} \approx \frac{q I_R}{2kT}$$

Für den totalen differentiellen Leitwert ergibt sich somit:

$$r_e = \frac{kT}{q I_D} + \frac{2kT}{q I_R} = \frac{A k T}{q I_E} = \frac{kT}{q} \left(\frac{1}{I_D} + \frac{2}{I_R} \right) \quad (9)$$

Bei sehr kleinen Emitterströmen ist der Rekombinationsstrom überwiegt, so dass sich A dem Wert 2 nähert. Im mittleren Strombereich überwiegt der Diffusionsanteil; A nimmt den Wert 1 ein. Im hohen Strombereich (high injection) ist die am p-n-Übergang liegende Spannung nur noch die Hälfte der Klemmenspannung, da die Diffusionsbedingungen nicht mehr gültig sind. Der Korrekturfaktor A nimmt in diesem Bereich den Wert 2 an, obwohl der Stromtransport sozusagen nur durch Diffusion getragen wird. Gl. (7) schreibt sich nämlich in diesem Gebiet:

$$I_D = I_o \left(\exp \frac{q}{kT} \cdot \frac{V}{2} - 1 \right) \quad (10)$$

Zusammenfassend durchläuft also A je nach dem Emitterstrom den Wert von 1 bis 2. In Fig. 1 sind die A -Werte einiger Silizium-Transistoren in Funktion des Emitterstromes aufgetragen.

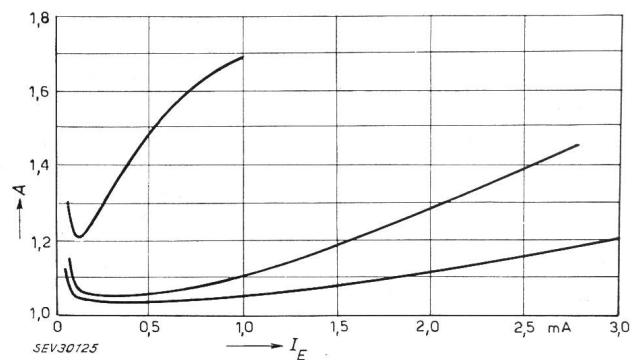


Fig. 1
Faktor A als Funktion des Emitterstromes I_E
(gemessen an drei Silizium-Transistoren)

Der Beginn des high injection-Gebietes variiert stark von Exemplar zu Exemplar. Die Überlegung, dass die Löcherdichte p klein gegenüber der Störstellenanzahl N_D bei einem Emitterstrom von etwa $0,1 \text{ A/cm}^2$ zutreffe, kann irrig sein. Die Anzahl p der injizierten Löcher erreicht u. U. schnell die Grössenordnung der Störstellenkonzentration N_D und die high injection beginnt dort, wo $p = N_D$ wird.

Für den Verwender von solchen Transistoren ist es nun interessant zu wissen, bei welchem Emitterstrom er bereits mit obigem Fall zu rechnen hat. Geht man von der Annahme $p = N_D$ aus, so ergibt sich nach Webster [3] folgende Gleichung für I_E :

$$I_E = \frac{2 A_e D_p}{w \mu_n \varrho_b} \quad (11)$$

Darin bedeuten:

- A_e Emitterquerschnitt
- w Basisbreite
- D_p Diffusionskonstante der Löcher
- μ_n Elektronenbeweglichkeit

D_p und μ_n sind für den in Frage kommenden ϱ_b -Bereich konstant und haben bei Silizium folgende Werte: $\mu_n = 1100 \text{ cm}^2/\text{Vs}$, $D_p = 12 \text{ cm}^2/\text{s}$. A_e , ϱ_b und w ändern pro Transistor, wobei die Basisbreite w leicht gemessen werden kann.

Der Emitterquerschnitt A_e ist im allgemeinen unbekannt und liegt bei kleineren Transistoren in der Größenordnung von $0,3 \dots 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$. Der spezifische Widerstand ϱ_b des Basismaterials kann selbst beim gleichen Fabrikationstyp von Exemplar zu Exemplar stark streuen und variiert im allgemeinen von $1 \dots 6 \Omega\text{cm}$ bei Si-Transistoren. Eine Abschätzung von ϱ_b kann mittels einer r_{bb}' - oder C_{bb}' -Messung durchgeführt werden.

Man sieht nun leicht ein, dass bei Transistoren mit hohem ϱ_b der Emitterstrom I_E , wo high injection auftritt, beträchtlich kleiner sein kann als bei solchen mit niedrigem ϱ_b , sofern die andern Größen nicht allzu stark ändern. Bei einer mittleren Basisbreite $w = 18 \mu\text{m}$, was bei Si-Transistoren einen normalen Wert darstellt, und bei einem Emitterquerschnitt von $0,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2$ beträgt der high injection Emitterstrom bei $6 \Omega\text{cm}$ -Material 5 mA, bei $1 \Omega\text{cm}$ -Material 30 mA.

Da r_e nun in Gl. (1) ein addierender Bestandteil ist, kann der Rauschfaktor F_o , je nach dem Wert von A besonders bei kleinen Strömen und kleinen Quellenwiderständen R_o , beträchtlich steigen.

Es gibt nun Transistoren, die einen wesentlich größeren Strombereich erfassen, bis A auf der kleinen wie auf der hohen Stromseite den Wert 2 erreicht, und sind also rauschmäßig gesehen vorteilhafter. Den Faktor A kann man nun am besten durch eine Messung der Eingangsimpedanz h_{11b} des Transistors bestimmen. h_{11b} drückt sich wie folgt aus:

$$h_{11b} = A r_e + \frac{r_{bb}'}{\alpha_{fe}} \quad (12)$$

Misst man h_{11b} in Funktion von I_E und berücksichtigt jeweils den Anteil r_{bb}'/α_{fe} , so kann A beim jeweiligen Strom I_E numerisch ausgewertet werden.

Eine Einsetzung von $A = 1$ für den ganzen Strombereich kann bei einigen Transistoren, besonders bei kleinen Strömen, wo der durch r_e hervorgerufene Anteil dominierend ist, sofort einen Fehler von $1 \dots 2 \text{ dB}$ im Rauschfaktor verursachen.

Wie anfänglich erwähnt, könnte man für α_{fe} den physikalischen Ausdruck, der die Stromabhängigkeit einschließt, in Gl. (1) einsetzen. Es ist jedoch übersichtlicher, α_{fe} in Funktion des Arbeitsstromes I_E zu messen und beim jeweiligen Rauscharbeitspunkt das entsprechende α_{fe} zu berücksichtigen.

Eine wichtige Größe in Gl. (1) besteht in dem Basiszuleitungswiderstand r_{bb}' . Dieser Parameter kann bei Si-Transistoren infolge der relativ kleinen Basisbreite w beträchtliche Werte im Vergleich zu Ge-Transistoren annehmen. r_{bb}' drückt sich wie folgt aus:

$$r_{bb}' = \varrho_b \left[\frac{1}{8 \pi w} + \frac{1}{2 \pi w_2} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2 \pi w_3} \ln \frac{r_3}{r_2} \right] \quad (13)$$

Die Bedeutung der geometrischen Größen ist aus Fig. 2 ersichtlich. w_3 ist die Dicke des Ausgangsplättchens (Wafer) des herzustellenden Transistors. Die Oberfläche des Transistors muss aus physikalischen und

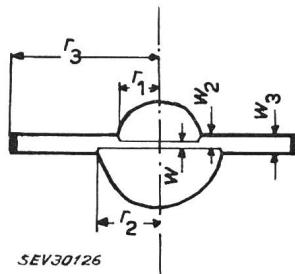


Fig. 2

Interner Querschnitt durch einen legierten Transistor
 w Basisbreite; w_2 variable durch Ätzprozess beeinflusste Größe; w_3 Dicke des Basiskristalles; r_1 Emitterradius; r_2 Kollektorradius; r_3 Radius des Basiskristalles

technologischen Gründen bei der Herstellung bekanntlich überätzt werden; es entsteht somit rings um den Emitter eine Ätzgrube, die verschieden tief sein kann. Der restliche zum Kollektor betragende Abstand wird w_2 genannt. Schliffbilder von verschiedenen Transistoren zeigen recht deutlich, dass je nach Ätzmethode eine mehr oder weniger ausgeprägte Ätzmulde, d. h. eine Verminderung von w_2 am Emitter entsteht. Die Größe dieser Verkleinerung von w_2 ist für den Verwender des Transistors eine Unbekannte; sie kann den Wert von r_{bb}' stark beeinflussen. Es ist deshalb vorteilhaft, den r_{bb}' eines Transistors bei einer Rauschberechnung zu messen, um den Rauschanteil von r_{bb}' einsetzen zu können. Eine Berechnung von r_{bb}' stösst nämlich nach den oben angeführten Betrachtungen schnell auf Schwierigkeiten:

1. Wegen der Streuung des spezifischen Widerstandes ϱ_b .

2. Wegen der Unkenntnis der Größe w_2 .

Gl. (13) zeigt recht deutlich, dass Transistoren mit kleinem w im allgemeinen ein hohes r_{bb}' aufweisen werden, was sich rauschmäßig ungünstig auswirken kann. Anderseits haben Transistoren mit kleiner

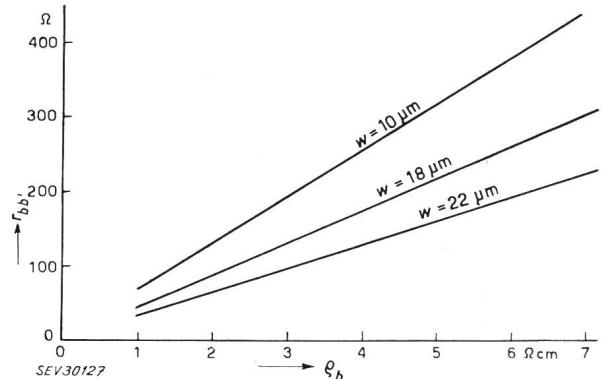


Fig. 3
 Basiszuleitungswiderstand r_{bb}' als Funktion des spezifischen Widerstandes ϱ_b vom Basismaterial
 Parameter ist die Basisbreite w

Basisbreite w im allgemeinen höhere α_{fe} -Werte, was sich rauschmäßig wiederum günstig bemerkbar macht. Aus Fig. 3 ist der im Mittel ungefähr zu erwartende Basiszuleitungswiderstand r_{bb}' bei verschiedenen Basisbreiten und verschiedenem Basismaterial, wie er auch für die theoretischen Rauschberechnungen verwendet wurde, aufgetragen. Der dritte Anteil in Gl. (13) wurde in der Größenannahme für w_2 ($30 \dots 20 \mu\text{m}$) mitberücksichtigt. Das Verhältnis vom Kollektor- zum Emitterradius dürfte sich im Mittel um den Wert 1,5 bewegen.

Eine Streuung des Basiszuleitungswiderstandes bis zu einem Faktor 2 ist mit den oben gemachten Annahmen besonders mit der unsicheren Abschätzung von w_2 für einzelne Exemplare durchaus denkbar. Für Transistoren mit normalen Durchschnittswerten hingegen stimmen die berechneten Werte mit der Praxis gut überein.

Einer der Hauptvorteile des Si-Transistors gegenüber dem Ge-Transistor liegt in den bedeutend kleineren Sperrströmen, die in die Größenordnung von nA kommen. Dies beruht grösstenteils auf der Tatsache, dass der klassische Sperrstromanteil (Oberflächenrekombination), sowie der Rekombinations-Sperrstrom proportional zu n_i^2 beziehungsweise zu n_i sind. Da die Eigenleitdichte n_i bei Silizium um Zehnerpotenzen kleiner ist als bei Germanium, sind auch die entsprechenden Sperrstromanteile kleiner.

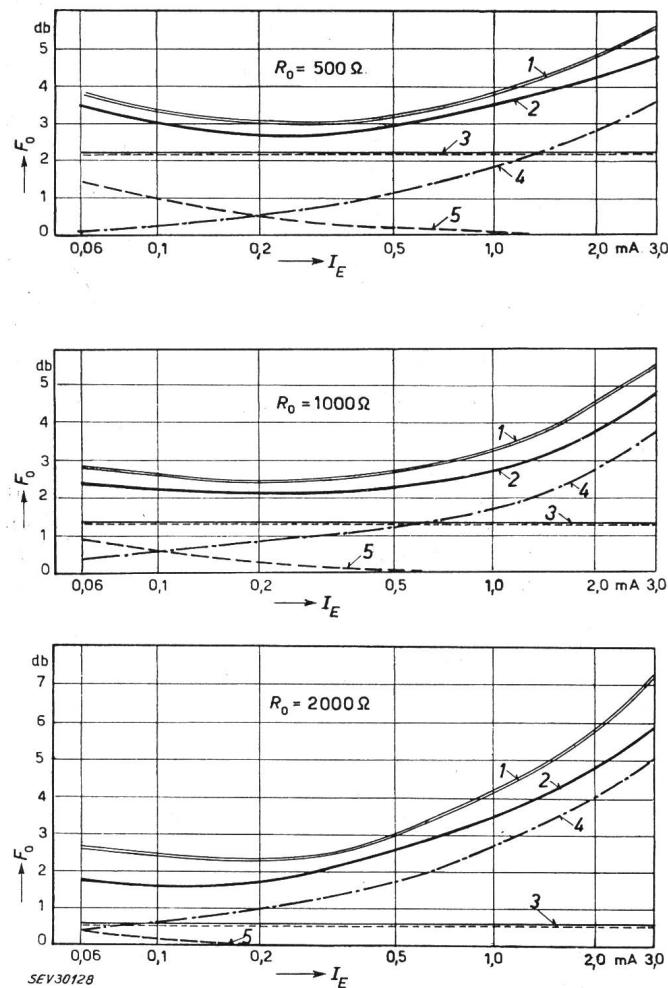


Fig. 4

Totaler Rauschfaktor F_o sowie die einzelnen Rauschanteile als Funktion des Emitterstromes I_E

$$V_{CB} = -2 \text{ V}; f = 1000 \text{ Hz}$$

Parameter ist der Quellenwiderstand R_o . Der gemessene Transistor (30 A) wies folgende charakteristische Größen auf: $r_{bb'} = 340 \Omega$, $\alpha_{fe} = 70$ bei $I_E = 1 \text{ mA}$, $w = 8.5 \mu\text{m}$, $f_{ce} = 76 \text{ kHz}$
Kurven: 1 gemessener totaler Rauschfaktor F_o ; 2 berechneter totaler Rauschfaktor F_o ; 3 $r_{bb'}$ -Rauschen; 4 Stromverteilungsrauschen; 5 Emitterrauschen

Es ist somit klar, dass man in Gl. (1) den Anteil I_{CBO}/I_E , selbst bei kleinsten Emitterströmen, vernachlässigen darf.

Ersetzt man nun α_{fb} durch α_{fe} , so formt sich Gl. (1) folgendermassen um:

$$F_o = 1 + \frac{r_{bb'}}{R_o} + \frac{A r_e}{2 R_o} + \frac{(A r_e + R_o + r_{bb'})^2}{2 A r_e R_o} \cdot \frac{1}{\alpha_{fe}} \quad (14)$$

Vergleich zwischen Theorie und Praxis

An den untersuchten Transistoren wurde der Rauschfaktor bei einer Grundfrequenz von 1000 Hz in Funktion des Stromes I_E und des Quellenwiderstandes R_o gemessen. Eine spätere Änderung der Grundfrequenz kam nur im Hinblick auf eine Funkelrauschuntersuchung in Frage. Die Fig. 4 und 5 zeigen einer-

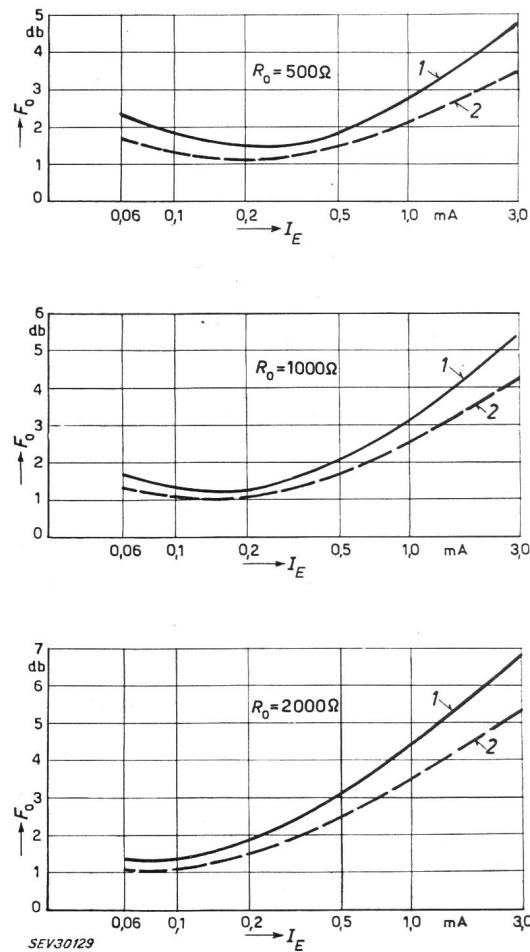


Fig. 5
Rauschfaktor F_o als Funktion des Emitterstromes I_E

Parameter ist der Quellenwiderstand R_o . Der gemessene Transistor (14 A) wies folgende charakteristische Größen auf: $r_{bb'} = 160 \Omega$, $\alpha_{fe} = 17$ bei $I_E = 1 \text{ mA}$, $w = 35 \mu\text{m}$, $f_{ce} = 20 \text{ kHz}$

Kurven: 1 gemessener Rauschfaktor F_o ; 2 berechneter Rauschfaktor F_o

Die Abweichung zwischen Theorie und Praxis ist infolge des Funkelrauschen im hohen Strombereich beträchtlich

seits den experimentell gefundenen Rauschverlauf zweier Transistoren und anderseits die theoretisch ermittelten Kurven derselben. Dieser Vergleich wurde an mehreren Exemplaren durchgeführt, die Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem gemessenen Wert schwankt im Mittel um 0,5 db. Der Emitterstrom wurde in dem Bereich von 60 μA ...3000 μA geändert, der Quellenwiderstand nahm die Werte 500, 1000 und 2000 Ω an. Die grösste Differenz zwischen dem theoretischen und praktischen Rauschwert tritt im hohen Strombereich auf. Aus den Kurven sind nebst dem totalen Rauschfaktor die einzelnen Rauschanteile ersichtlich, die man wie folgt unterteilen kann:

1. Das r_{bb}' -Rauschen

Bei höheren Quellenwiderständen fällt dieser Rauschanteil immer weniger ins Gewicht, er berechnet sich zu:

$$F_{OB} = 1 + \frac{r_{bb}'}{R_o} \quad \text{oder} \quad F_{OB} = 10 \log \left(1 + \frac{r_{bb}'}{R_o} \right) [\text{db}] \quad (15)$$

Dieser Rauschbeitrag ist im kleinen und mittleren Strombereich stromabhängig, bei grösseren Strömen ist dies nicht mehr der Fall. Fig. 6 zeigt die Strom-

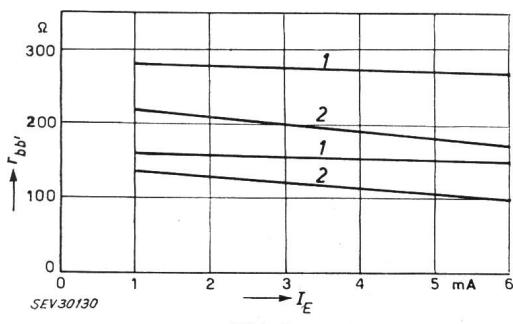


Fig. 6

Basiszuleitungswiderstand r_{bb}' als Funktion des Emitterstromes I_E
 $V_{CB} = -2 \text{ V}$

1 bezeichnet Exemplare, die einen spezifischen Widerstand σ_b von etwa 2...4 Ωcm aufweisen, 2 hingegen solche Exemplare mit einem σ_b -Wert von etwa 6 Ωcm

abhängigkeit des Basiszuleitungswiderstandes. Die spezifische Leitfähigkeit σ_b im Anteil I der Gl. (13): $1/\sigma_b \cdot 8\pi w$ wird im Falle der high injection um den Faktor $(p + N_D)/N_D$ korrigiert, das heisst mit $p = N_D$ um den Wert 2. Der Anteil II: der Gl. (13)

$$\frac{1}{\sigma_b 2\pi w_2} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

wird nur etwa knapp zur Hälfte um den Faktor $(p + N_D)/N_D$ korrigiert, da der Löcherstrom dieses Bahngelände nur noch teilweise berührt, der Anteil III:

$$\frac{1}{\sigma_b 2\pi w_3} \ln \frac{r_3}{r_2}$$

dürfte mehrheitlich unverändert bleiben.

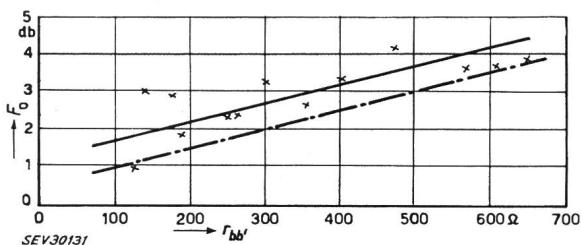


Fig. 7
Abhängigkeit des Rauschfaktors F_o vom Basiszuleitungswiderstand r_{bb}'

Rauscharbeitspunkt:

$$V_{CB} = -2 \text{ V}, I_E = 0.2 \text{ mA}, f = 1000 \text{ Hz}, R_o = 5000 \Omega$$

Die Kreuze stellen Messwerte mehrerer Transistoren dar. Der Unterschied zwischen der ausgezogenen (Durchschnitt der gemessenen Rauschfaktoren) und der strichpunktuierten Kurve (berechnetes r_{bb}' -Rauschen) beträgt $\approx 0.7 \text{ db}$

Gesamthaft werden somit im Gebiet der high injection etwa 50% von r_{bb}' um den Faktor 2 reduziert. Dies ändert sich natürlich, je nach welchem Größenverhältnis die Anteile I, II und III zueinanderstehen.

In Fig. 7 ist die Abhängigkeit des Rauschfaktors F_o von r_{bb}' dargestellt. Der Rauschfaktor wurde bei fol-

gendem Arbeitspunkt aufgetragen $I_E = 200 \mu\text{A}$, $R_o = 500 \Omega$.

Bei diesem Arbeitspunkt ist das r_{bb}' -Rauschen gegenüber dem Emitter- und Stromverteilungsrauschen dominierend. Die theoretisch zu erwartende Kurve und die experimentell erhaltenen Messpunkte weisen nur eine Differenz von 0,7 db auf, die grössten Teils darauf beruht, dass das Emitter- und Kollektorauschen eben doch nicht ganz gleich Null sind.

2. Das Rauschen der Emitterdiode

Dieser Rauschanteil macht sich erst bei kleineren Emitterströmen stark bemerkbar und ist bei recht hohen Quellenwiderständen vernachlässigbar. Der Faktor A in der Eingangsimpedanz muss für jeden Transistor bei jedem Emitterstrom individuell bestimmt werden. Dieser Rauschanteil berechnet sich zu:

$$F_{OE} = 1 + \frac{A r_e}{2 R_o} = 1 + \frac{A (I_E) \frac{25 \text{ mV}}{I_E [\text{mA}]}}{2 R_o} \quad (16)$$

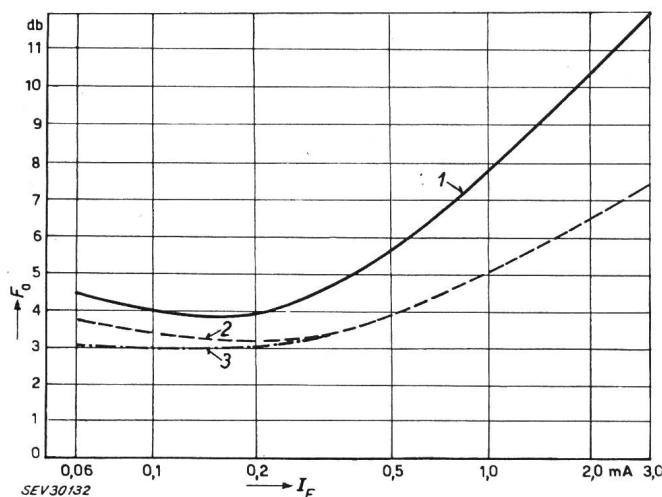


Fig. 8

Rauschfaktor F_o eines Silizium-Transistors mit ausgeprägter Sperrschiene-Rekombination in Funktion des Emitterstromes I_E

Rauscharbeitspunkt $V_{CB} = -2 \text{ V}$, $R_o = 5000 \Omega$, $f = 1000 \text{ Hz}$
Der A -Wert dieses Exemplares beträgt bei $60 \mu\text{A}$ 1,3, um bei $200 \mu\text{A}$ auf 1,08 zu sinken

Kurven: 1 gemessener Rauschfaktor; 2 berechneter Rauschfaktor mit Berücksichtigung von A ; 3 berechneter Rauschfaktor ohne Einbezug von A

Fig. 8 zeigt den Rauschverlauf eines Transistors mit einem A -Wert bis zu 1,30 bei $60 \mu\text{A}$ Emitterstrom. Eine Nichtbeachtung des richtigen Wertes von A würde bei kleinen Strömen einen Fehler von etwa 0,5 db ergeben.

3. Das Kollektor- oder Stromverteilungsrauschen

Dieser Anteil ist komplizierter, da er verschiedene Größen einschliesst. Er drückt sich aus zu:

$$F_{OC} = 1 + \frac{(A r_e + r_{bb}' + R_o)^2}{2 A r_e R_o} \cdot \frac{1}{\alpha_{fe}} \quad (17)$$

Folgendes ist eindeutig ersichtlich: Bei grossen Emitterströmen wird dieser Rauschanteil beträchtlich, denn selbst wenn A gegen den Wert 2 geht, so strebt doch $A r_e$ im Nenner kleinen Werten entgegen, der Zähler hingegen ändert sich weniger. Hierzu kommt noch, dass α_{fe} stromabhängig ist:

$$\frac{1}{\alpha_{fe}} = \frac{\sigma_b w}{\sigma_e L_e} \left(1 + \frac{Z}{2}\right) + \frac{s w A_s}{D_p A_e} \cdot g(Z) \quad (18)$$

Der Einfluss der Volumenrekombination sei hier vernachlässigt. $Z/2$ sowie $g(Z)$ lassen sich für jeden Stromwert nach Webster [3] ausrechnen. Es bedeuten:

- s Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit
- $\sigma_e L_e$ Güte der rekristallisierten p-Schicht
- r_{em} Emitterradius
- $A_s = 2 \pi r_{em} w$ Fläche, auf welcher hauptsächlich die Oberflächenrekombination stattfindet.

Aus Fig. 9 ist der im Mittel zu erwartende $\alpha_{fe} = f(I_E)$ Verlauf einiger Si-Transistoren aufgezeichnet. Die im mittleren Strombereich liegenden α_{fe} -Werte hängen natürlich, wie aus Gl. (18) ersichtlich ist, stark von der Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit und der

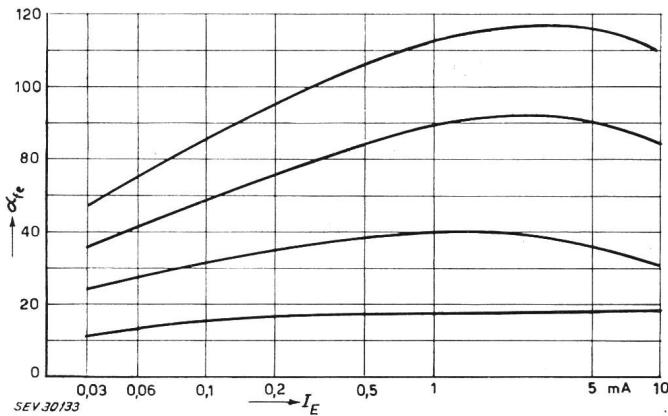


Fig. 9
Stromverstärkungsfaktor α_{fe} in Abhängigkeit des Emitterstromes I_E , gemessen an 4 Transistoren

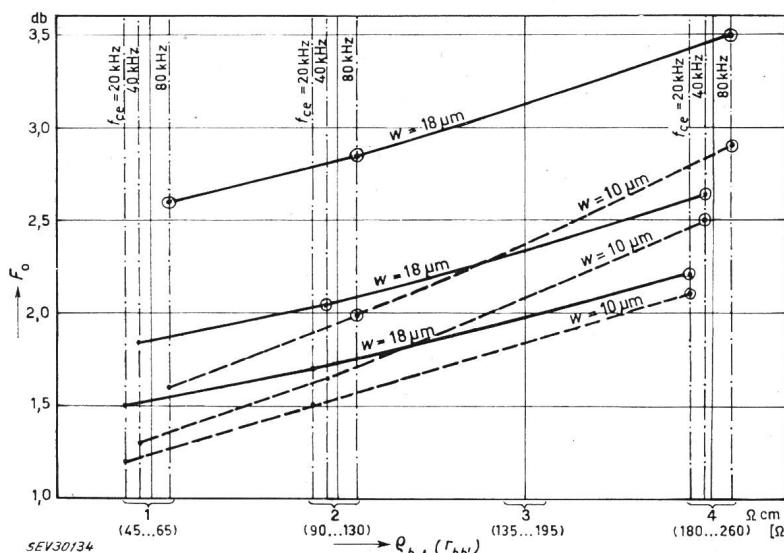
Basisbreite ab. Je stärker nun α_{fe} bei grösseren Emittstromen abnimmt (besonders bei hochohmigem Material der Fall), um so stärker kommt das Kollektorauschen zur Geltung. Eine kleine Oberflächenrekombinationsgeschwindigkeit, sowie eine kleine Basisbreite ergeben ein hohes α_{fe} . Die gemessenen Transistoren weisen jedoch im Falle kleiner w im Durchschnitt

Rauschmässig gesehen, muss man natürlich in erster Linie α_{fe} mittels kleinen s -Werten in die Höhe zu treiben versuchen; denn ein hoher Stromverstärkungsfaktor mittels kleinem w birgt die Gefahr in sich, das r_{bb}' -Rauschen stark zu fördern.

Die Grösse s lässt sich dank folgender Näherungsgleichung bestimmen:

$$f_{ce} = \frac{2 s}{\pi r_{em}} \quad (19)$$

Diese Gleichung ist approximativ und nur bei kleinen Strömen gültig. Zu ihrer Herleitung setzt man $1/\alpha_{fe} = 1/\alpha_{fes}$, wobei $1/\alpha_{fes}$ den durch die Oberflächenverhältnisse gegebenen Stromverstärkungsfaktor darstellt. Bei kleinen Basisbreiten w kann diese Beziehung bereits bis zu 30% falsch werden, da der Emitterwirkungsgrad schon etwa zu einem Drittel ins Gewicht fällt. Die Grösse des Stromverstärkungsfaktors lässt sich auch noch mittels der Wahl des spezifischen Widerstandes des Basismaterials ρ_b bestimmen. Mit steigendem ρ_b nimmt α_{fe} zu. Dies erhöht jedoch anderseits den Basiszuleitungswiderstand r_{bb}' . Eine weitere Möglichkeit, um einen kleinen Rauschfaktor zu erzielen, ist folgende: Man wählt Material mit kleinem spezifischem Ohmwert; um dennoch hohe α_{fe} -Werte zu erreichen, legiert man tiefer. Theoretisch gesehen erhält man dadurch die kleinsten Rauschpegel (Fig. 10). Die Praxis zeigt jedoch, dass es nicht immer leicht ist, mit niederohmigem Material kleine bis mittlere s - oder f_{ce} -Werte zu erreichen. Man stösst also hier noch auf Grenzen, was denn auch deutlich in Fig. 10 zum Ausdruck kommt, auf welcher nur die eingekreisten Punkte Durchschnittsrauschwerte darstellen, die effektiv gemessen wurden und somit mit der Theorie verglichen werden konnten. Fig. 10 stellt nämlich Rauschkurven dar, die theoretisch aus Kombinationen von f_{ce} , w und r_{bb}' hergeleitet wurden. Der Hersteller wird je nach dem zu entwerfenden Transistortyp auf diese verknüpften Beziehungen achten und einen Kompromiss schliessen. Der Verwender hingegen muss wissen, was er theoretisch im günstigsten Fall erwarten kann. Dass diese Werte in der Praxis nicht immer erreicht werden,



höchstens mittlere f_{ce} , d. h. entsprechende s -Werte auf. (Hierbei bedeutet f_{ce} die Grenzfrequenz in Emitterschaltung.)

Fig. 10
Graphische Herleitung des Rauschfaktors F_o aus Kombinationen von f_{ce} , w und ρ_b

Parameter sind die Grenzfrequenz f_{ce} und die Basisbreite w . Die ausgezogenen ($w = 18 \mu m$) sowie die gestrichelten ($w = 10 \mu m$) Kurven stellen die Verbindungslinien der aufgeföhrten Grenzfrequenzen 20, 40 und 80 kHz dar. In dieser Darstellung wird jeweils die Annahme gemacht, dass der ρ_b -Wert in dem f_{ce} -Platzbereich (20...80 kHz) konstant bleibt. Der im Mittel zu erwartende r_{bb}' -Wert ist ebenfalls aufgetragen; der erste numerische Wert betrifft die Basisbreite $w = 18 \mu m$, der zweite jene von 10 μm . Die eingekreisten Punkte stellen Rauschwerte von Transistoren dar, die praktisch realisiert wurden

beruht teilweise auf die oben aufgeföhrten Grenzen und teilweise auf die Streuung der einzelnen Exemplare, wie sie bei der Legiertechnik immer auftreten wird.

Aus den Ausführungen können folgende Schlussfolgerungen gezogen werden:

a) Ein tieferes Legieren, mit dem Ziel, noch kleinere Rauschpegel zu erreichen, würde abgesehen von den Schwierigkeiten, die hinsichtlich einem guten f_{ce} -Wert auftreten können, andere Parameter wie z. B. die Durchbruchspannungen in Mitleidenschaft ziehen und den Legieraufall unter Umständen stark erhöhen. Auch ein Anstreben von allzu kleinen f_{ce} -Werte dürfte im Sinne einer Allgemeinverwendung des Transistors unerwünscht sein.

b) Transistoren mit einem ϱ_b -Wert von 2...2,5 Ωcm , was einem r_{bb}' -Wert von etwa 90...190 Ω entspricht, sofern normale Basisbreiten und Ätzbedingungen vorliegen, schneiden rauschmäßig am besten ab. Wie bereits erwähnt, ersieht man aus Fig. 10, dass besonders bei hochohmigem Material ein Herabsetzen der f_{ce} -Werte, z. B. von 40 auf 20 kHz rauschmäßig mehr einbringt als eine Verkleinerung der Basisbreite von 18 auf 10 μm . Eine somit in beiden Fällen auftretende Erhöhung von α_{fe} ist rauschmäßig besonders gewinnbringend, wenn sie auf Kosten von f_{ce} geschieht.

c) Eine f_{ce} , w und r_{bb}' -Messung eines Transistors gibt einen guten Aufschluss über sein Rauschverhalten.

d) Die hier angeführten numerischen Werte sind nur richtungweisend und nicht für jedes Exemplar verbindlich, da ja öfters entscheidende Faktoren wie jener der Geometrie oder jener des Ätzverfahrens unbekannt bleiben.

Einfluss des Emitterstromes sowie des Quellenwiderstandes auf den Rauschpegel

Aus Fig. 11 ist der Rauschpegel in Funktion des Quellenwiderstandes R_o ersichtlich. Bei einem R_o -Wert von 10 k Ω und einem Emitterstrom von 100 und weniger μA sind die beiden ersten Rauschanteile vernachlässigbar. Für den gesamten Rauschfaktor ist dann nur der Kollektorrauschanteil verantwortlich.

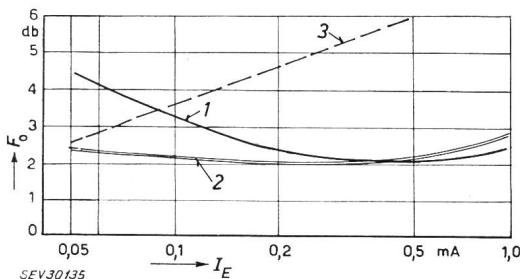


Fig. 11

Rauschfaktor F_o in Funktion des Emitterstromes I_E eines Transistors, der im kleinen Strombereich ein relativ hohes α_{fe} aufweist

$$V_{CB} = -2 \text{ V}, f = 1000 \text{ Hz}$$

Parameter ist der Quellenwiderstand R_o

Kurven: 1 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 500 \Omega$; 2 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 2000 \Omega$; 3 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 10000 \Omega$

Der α_{fe} -Wert dieses Transistors beträgt bei einem Emitterstrom von 50 μA : 52

Transistoren, die unter oben genannten Bedingungen bis zu den kleinen Strömen einen α_{fe} -Wert von etwa 25 behalten, weisen im Falle von 50 μA Emitterstrom einen Rauschfaktor von 1,8 bis 2,5 dB auf (Fig. 11). Die Theorie ergibt einen Rauschfaktor von etwa 1,7 dB. Für den Verwender ist es nun wichtig, für jeden beliebigen Transistor bei einem bestimmten Arbeitsstrom den günstigsten Quellenwiderstand auszurechnen zu kön-

nen. Bildet man den Ausdruck $\partial F_o / \partial R_o = 0$ in Gl. (14), so ergibt sich folgende Beziehung:

$$R_o^2 = (A r_e + r_{bb}')^2 + (2 r_{bb}' + A r_e) \alpha_{fe} r_e \quad (20)$$

r_e und α_{fe} müssen natürlich jeweils für den entsprechenden Strom eingesetzt werden. Aus Fig. 12 ersieht man, dass bei einem bestimmten Arbeitsstrom der minimale für einen Transistor auftretende Rauschpegel von Fall zu Fall einen anderen Quellenwiderstand verlangt.

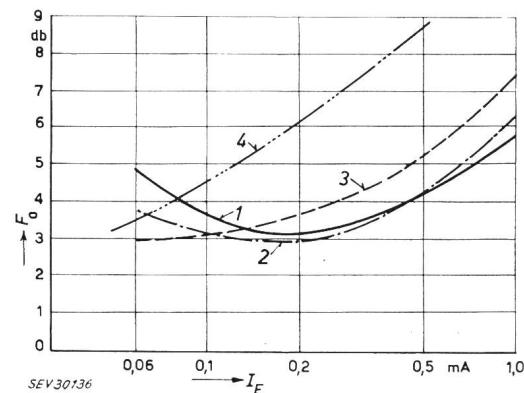


Fig. 12
Mittlerer Rauschpegel F_o in Funktion des Emitterstromes I_E , gemessen an mehreren Transistoren

$$V_{CB} = -2 \text{ V}, f = 1000 \text{ Hz}$$

Parameter ist der Quellenwiderstand R_o

Kurven: 1 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 500 \Omega$; 2 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 1000 \Omega$; 3 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 2000 \Omega$; 4 gemessener Rauschverlauf mit $R_o = 10000 \Omega$

Ist nun anderseits der Quellenwiderstand gegeben, so ist es wiederum möglich, den günstigsten Emitterstrom zu berechnen, bei welchem der kleinste Rauschfaktor erwartet werden kann. Im Falle des Emitterstromes würde aber die Differenzierung $\partial F_o / \partial r_e = 0$ ohne einige Vereinfachungen bedeutend komplizierter. Folgende Annahmen seien deshalb notwendig:

a) α_{fe} ist emitterstromunabhängig. Um grobe Fehler zu vermeiden, wird für α_{fe} ein mittlerer dem Strombereich von 100...3000 μA entsprechender Wert eingesetzt.

b) r_e wird im Zähler des Ausdrückes für das Kollektorauschen gegenüber dem Anteil von R_o und r_{bb}' vernachlässigt. Dies ist zulässig, sofern der Quellenwiderstand R_o mehr als 500 Ω beträgt und der Emitterstrom I_E nicht kleiner als 100 μA ist.

c) Die Stromabhängigkeit von r_{bb}' darf vernachlässigt werden.

Mit diesen Massnahmen ergibt sich folgende Beziehung für den optimalen Emitterstrom:

$$I_E^2 = \frac{(25 \text{ mV})^2 \alpha_{fe}}{(r_{bb}' + R_o)^2} \quad (21)$$

Es ist klar, dass man bei jedem Transistor seine speziellen Größen einsetzen muss. Aus Fig. 4 ersieht man, dass bei einem Quellenwiderstand von 1000 Ω der minimale Rauschpegel etwa bei 170 μA auftritt. Gemäß obiger Gleichung würde der optimale Emitterstrom bei diesem Exemplar ($r_{bb}' = 340 \Omega$, $\alpha_{fe} = 54$) 138 μA betragen. Die Übereinstimmung ist demzufolge ziemlich gut.

Funkelrauschen

Es wurde anfänglich erwähnt, dass nötigenfalls dort, wo Praxis und Theorie zu stark voneinander abweichen, die Frage ob Funkelrauschen diese Differenz verursacht, abzuklären ist.

Der Unterschied zwischen den praktisch ermittelten und berechneten Rauschkurven macht sich besonders im hohen Strombereich bemerkbar. Nach Fonger [4] ist die Funkelrauschquelle proportional zum Kollektorstrom und drückt sich wie folgt aus:

$$\Sigma di_{be}^{-2} \approx \frac{I_c^2}{\pi D^2} \left(\frac{w}{r_{em}} \right)^3 \psi(f) \cdot df \quad (22)$$

Darin bedeuten:

- $\psi(f)$ eine variable Grösse, welche die Funkelrauschfähigkeit charakterisiert und umgekehrt proportional zur Frequenz verläuft.
 Σdi_{be}^{-2} Funkelrauschquelle
 I_c Kollektorstrom

Neben der Abhängigkeit von I_c ist aus Gl. (22) auch jene von w ersichtlich. Fig. 13 und 14 zeigen die entsprechenden Rauschkurven einiger Transistoren bei 1000 und bei 10400 Hz. Die Bandbreite der Filter betrug im ersten Fall 200 und im zweiten 900 Hz. Dass das Funkelrauschen mit steigender Frequenz abnimmt ($\psi(f) = 1/f$), kann man gut aus den Fig. 13 und 14 er-

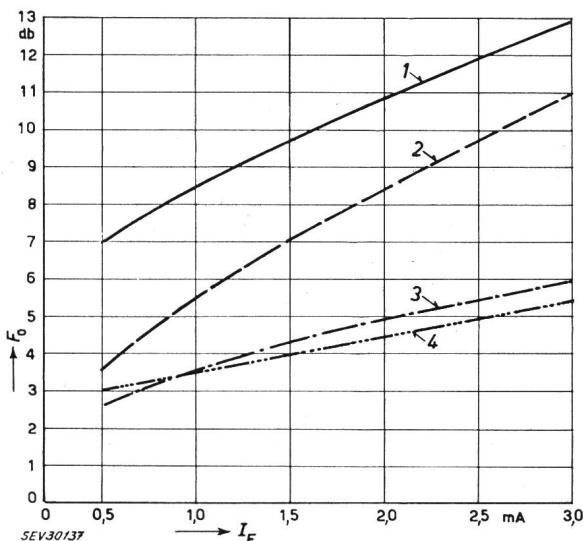


Fig. 13

Einfluss des Funkelrauschen auf den Rauschfaktor F_o bei 1000 Hz
 $V_{CB} = -2 \text{ V}$, $R_o = 500 \Omega$, I_E Emittierstrom

Die Transistoren 3 und 4 (A 30) weisen einen Rauschfaktor auf, der mit dem berechneten weissen Rauschen bis auf etwa 1 db übereinstimmt. Die Transistoren 1 und 2 (A 14) weichen hingegen mehrere db vom entsprechenden Weissrauschwert ab, ihr Funkelrauschanteil ist beträchtlich

sehen. Bei 10 400 Hz weisen die meisten Transistoren zum grössten Teil nur noch das weisse Rauschen auf. Der Transistor 14 A, der in Fig. 5 ($f = 1000 \text{ Hz}$, $R_o = 500 \Omega$) bei den Emittierströmen von 1000 und 3000 μA einen Rauschpegel von 5,5 und 11,2 db aufwies, zeigt nunmehr bei 10 400 Hz einen Rauschfaktor von 4,2 bzw. 7,4 db. Die theoretischen Weiss-Rauschwerte betragen bei diesen Strömen 4,2 und 6,7 db.

Die Abweichung zwischen Theorie und Praxis dürfte im hohen Strombereich folglich auf das Funkelrauschen zurückzuführen sein. Der 30-A-Transistor ist ziemlich funkelauschfest. Bei 1000 und 10400 Hz weist er bei grösseren Strömen fast den gleichen Rauschfaktor auf. Vergleicht man die Basisbreiten der Transistoren 30 A und 14 A, so besitzt jener ein w von 8,5 μm , dieser ein w von 35 μm . Die Basisbreite w übt, wie aus Gl. (22) ersichtlich, einen grossen Einfluss auf das

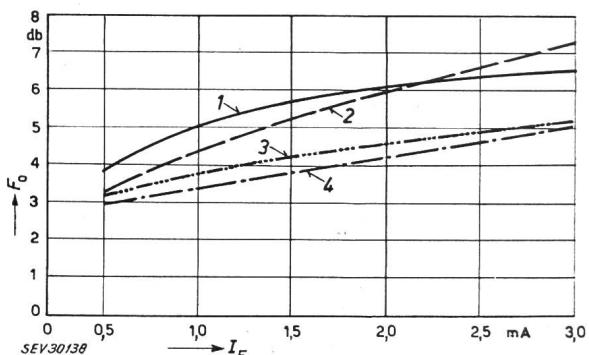


Fig. 14
Wie Fig. 13, aber bei 10 000 Hz

$V_{CB} = -2 \text{ V}$, $R_o = 500 \Omega$, I_E Emittierstrom

Die Transistoren 3 und 4 weisen fast den gleichen Rauschverlauf wie bei 1000 Hz auf. Sie sind somit bei 1000 Hz bereits funkelauschfest, ihre Basisbreiten betragen 10 und 8,5 μm . Die Transistoren 1 und 2 weisen nur noch einen Funkelrauschanteil von etwa 1...1,5 db bei 3000 μA auf, ihre Basisbreiten sind grösser als 30 μm

Funkelrauschen aus. Transistoren mit kleinem w weisen im Mittel ein kleineres Funkelrauschen auf als solche mit grossem w . Die Grösse des Funkelrauschen schwanke bei den untersuchten Transistoren bei einem Emittierstrom von 1000 μA zwischen 0,1 und 1,4 db, bei einem solchen von 3000 μA zwischen 0,4 und 10 db.

Die früher erwähnte Möglichkeit, durch tieferes Legieren mit niederohmigem Material einen kleinen Rauschfaktor zu erzielen, weist sich folglich für das Funkelrauschen günstig aus. Der f_{ce} -Wert muss natürlich in einem mittleren Rahmen bleiben.

Allgemeine Schlussfolgerungen

Die bei diesen Untersuchungen gemessenen Transistoren wiesen folgende allgemeine Merkmale auf, wobei einige allgemeine Natur sein dürfen:

a) Der Vergleich zwischen Theorie und Praxis hinsichtlich dem Rauschfaktor ist zufriedenstellend. Die Erweiterung und Anpassung der allgemeinen Rauschgleichung für den Silizium-Transistor, sowie die annähernde Erfassung des Funkelrauschen erlauben es, den Unterschied zwischen den berechneten und gemessenen Rauschfaktoren recht klein zu halten.

b) Da die Silizium-Transistoren im Gegensatz zu den Germanium-Transistoren bei kleinen Emittierströmen schaltungsmässig gesehen gut arbeiten können, ist es mittels der Wahl einer grösseren Quellenimpedanz möglich, tiefe Rauschpegel zu erreichen. Es ist jedoch notwendig, dass bei dieser Verwendung die α_{fe} -Werte in der Grössenordnung von 25 bleiben.

c) Im Falle üblicher Arbeitsbedingungen ($I_E = 0,5 \text{ mA}$ und $R_o = 500 \Omega$) kann der niedrigste zu erwartende Rauschfaktor bei den z. Z. gebräuchlichen Herstellungsprozessen im Mittel 2 db betragen.

Literatur

- [1] Guggenbühl, W. und M. J. O. Strutt: Experimentelle Untersuchung und Trennung der Rauschursachen in Flächentransistoren. AEÜ Bd. 9(1955), Nr. 6, S. 259...269.
- [2] Veloric, H. S. und M. B. Prince: High-Voltage Conductivity-Modulated Silicon Rectifier. Bell Syst. techn. J. Bd. 36(1957), Nr. 4, S. 975...1004.
- [3] Webster, W. M.: On the Variation of Junction-Transistor Current-Amplification Factor with Emitter Current. Proc. IRE Bd. 42(1954), Nr. 6, S. 914...920.
- [4] Fonger, W. H.: A Determination of 1/f Noise Sources in Semiconductor Diodes and Triodes in "Transistors I", hg. von "RCA Laboratories". Princeton N. J.: März 1956. S. 239...255.
- [5] Early, J. M.: Design Theory of Junction Transistors. Bell Syst. techn. J. Bd. 32(1953), Nr. 6, S. 1271...1312.

Adresse des Autors:

Bruno Kurz, dipl. El.-Ing. ETH, Hungerbergstrasse 37, Zürich 46.

Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an einem kreisförmigen Ferritzylinder¹⁾

Von W. Eggimann, Cleveland

621.396.677.8 : 538.566

Einleitung

Die Beugung von elektromagnetischen Wellen an einem dielektrischen Kreiszylinder ist in mehreren Arbeiten behandelt worden. Die vollständige Lösung für beliebige Einfallrichtung wurde von Wait angegeben [1]²⁾. Näherungsformeln für dünne Zylinder (d. h., wenn die Wellenlänge gross ist verglichen mit dem Zylinderdurchmesser) und für das Fernfeld wurden in jener Arbeit ebenfalls behandelt.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf den Fall senkrechter Einfallrichtung, für welchen eine genaue Lösung in Form einer Reihenentwicklung von Zylinderfunktionen angegeben werden kann. Der Ferritzylinder ist durch ein konstantes Magnetfeld längs seiner Achse magnetisiert. Dank den nichtreziproken Eigenschaften des Ferrites ist eine unsymmetrische Verteilung des Beugungsfeldes bezüglich der Einfallrichtung zu erwarten. Das Beugungsfeld ist eine Funktion des Permeabilitätstensors des Ferrites, welcher seinerseits durch die Magnetisierung des Materials bestimmt ist. Es muss daher möglich sein, das Beugungsfeld mittels der angelegten magnetischen Feldstärke zu beeinflussen.

Die mathematische Lösung

Gegeben sei ein unendlich langer Ferritzylinder, dessen Achse mit der z-Achse und der Richtung eines konstanten Magnetfeldes H_0 identisch ist. Die ebene elektromagnetische Welle fällt in Richtung der positiven x-Achse ein. Unter diesen Umständen kann das Problem zweidimensional in der xy-Ebene behandelt werden. Die Polarisation der Welle ist beliebig angenommen. Das Feld kann in diesem Fall in zwei Felder zerlegt werden, von welchen eines senkrecht ($\vec{E} = E \vec{e}_y$), das andere parallel ($\vec{E} = E \vec{e}_z$) zur Zylinderachse polarisiert ist (Fig. 1). Im ersten Falle ist die magnetische Feldstärke der Welle parallel zur Magnetisierung des Ferritzylinders, und der Permeabilitätstensor ist ein Skalar. Man kann deshalb den Ferritzylinder wie einen dielektrischen Zylinder behandeln. Ist hingegen die Welle parallel zur z-Achse polarisiert, dann stehen die Magnetisierung und das magnetische Feld der Welle senkrecht aufeinander, und es findet eine Wechselwirkung mit den präzessierenden magnetischen Elektronendipolmomenten des Ferrites statt. Daraus folgt, dass in den Maxwellschen Gleichungen die Permeabilitätskonstante durch einen Tensor ersetzt werden muss:

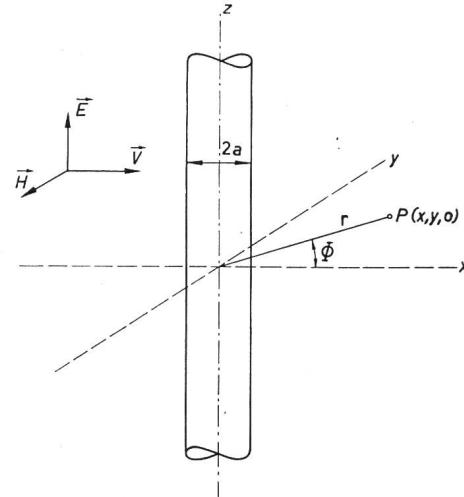
¹⁾ Die Arbeit wurde im Auftrag des Electronic Research Directorate of the Air Force Cambridge Research Center ausgeführt und ist in englischer Sprache in den IRE Transactions on Microwave Theory erschienen.

²⁾ Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega \vec{D} = j\omega \epsilon \vec{E} \quad (1a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - j\omega \vec{B} = - j\omega (\vec{\mu}) \cdot \vec{H} \quad (1b)$$

Da alle Ableitungen in der z-Richtung verschwinden, kann Gl. (1b) durch eine zweidimensionale Tensorgleichung ersetzt werden



SEV29425

Fig. 1
Senkrechter Einfall der ebenen Welle auf den Ferritzylinder
a Zylindradius; x, y, z rechtwinklige Koordinaten; r, φ Polarkoordinaten; P Feldpunkt; E elektrische Feldstärke; V Fortpflanzungsrichtung; H magnetische Feldstärke

$$\vec{B} = - \cdot \frac{1}{j\omega} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{\nabla} E_z = - \frac{1}{j\omega} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} \cdot E_z \quad (2)$$

(Hier bedeutet $\vec{\nabla}$ den zweidimensionalen Gradient.) Für die magnetische Feldstärke im freien Raum ergibt sich

$$\vec{H} = - \frac{1}{j\omega} (\mu_0)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{\nabla} E_z \quad (3)$$

und im Ferrit

$$\vec{H} = - \frac{1}{j\omega} (\vec{\mu})^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{\nabla} E_z \quad (4)$$

Der Permeabilitätstensor kann mit Hilfe eines einfachen Elektronenmodells berechnet werden [2]. Die magnetischen Eigenschaften des Elektrons können durch einen magnetischen Dipol, welcher um die Richtung des magnetischen Feldes präzessiert, dargestellt werden. Die Wechselwirkung zwischen den induzierten magnetischen Feldstärken in der x- und y-Richtung wird dann durch den Permeabilitätstensor ausgedrückt, welcher in zwei Dimensionen lautet: