

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 52 (1961)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Ersatzschema der Zuleitung in der Hochspannungs-Messtechnik, insbesondere bei der Messung rasch veränderlicher Stossspannungen  
**Autor:** Ašner, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1059042>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die sich aus den verschiedenen Werten von  $\mu_r$  ergebenden Streukoeffizienten sind in Fig. 12 in Funktion von  $\mu_r$  aufgetragen, während die Fig. 7...11 die entsprechenden ausgewerteten Felddbilder zeigen.

Der Autor dankt Prof. Dr. M. J. O. Strutt, Vorstand des Instituts für höhere Elektrotechnik, für die Anregung zur vorliegenden Arbeit. Diese wurde ermöglicht durch einen Kredit des Aluminiumfonds Neuhausen; dieser sei hier ebenfalls bestens verdankt.

#### Literatur

- [1] Tschopp, P. A. und A. H. Frei: Analogienetzwerkmethode und graphisches Verfahren zur Bestimmung von magnetischen Feldern mit örtlich variabler Permeabilität. Arch. Elektrotechn. Bd. 44(1959), Nr. 7, S. 441...454.
- [2] Brechna, H.: Einfluss von Form und Bauart der Transformator-Eisenkörper auf die Ummagnetisierungsverluste. Scientia electr. Bd. 5(1959), Nr. 1, S. 1...18.

- [3] Buchholz, H.: Elektrische und magnetische Potentialfelder. Berlin: Springer 1957.
- [4] Ollendorff, F.: Berechnung magnetischer Felder. Wien: Springer 1952.
- [5] Frey, K. G.: Anwendung der konformen Abbildung auf praktische Probleme des Elektromaschinenbaus. Diss. TH Karlsruhe 1922. [Maschinenschrift.] Koppenfels, W. von und F. Stallmann: Praxis der konformen Abbildung. Berlin: Springer 1959.
- [6] Čremošnik, G.: Ermittlung von Raumladungsfeldern und Kapazitäten mit Hilfe eines Widerstandnetzes mit Stromquellen. Diss. ETH. Zürich: Juris-Vlg. 1957.
- [7] Oberretl, K.: Die genauere Berechnung des Magnetisierungsstromes von dreiphasigen Asynchronmaschinen. Bull. Oerlikon Bd. -(1959), Nr. 335, S. 66...84.
- [8] Spangenberg, K., G. Walters und F. Schott: Electrical Network Analyzers for the Solution of Electromagnetic Field Problems. Proc. IRE Bd. 37(1949), Nr. 7, S. 724...729; Nr. 8, S. 866...872.

#### Adresse des Autors:

P. A. Tschopp, Dipl. El.-Ing. ETH, Institut für höhere Elektrotechnik an der ETH, Gloriastrasse 35, Zürich 7/6.

## Ersatzschema der Zuleitung in der Hochspannungs-Messtechnik, insbesondere bei der Messung rasch veränderlicher Stoßspannungen

Von A. Ašner, Genf

621.317.32.027.3 : 621.317.333.8

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem der Darstellung der Zuleitung, des Einflusses ihres elektrischen Ersatzschemas in der Stoßspannungs-Messtechnik, insbesondere bei rasch veränderlichen Steilstößen, theoretisch untersucht. Bisher war es allgemein üblich, die Anschlussleitung einer Messanordnung für Stoss als konzentrierte Induktivität darzustellen. Während diese Vereinfachung bei der Messung niederfrequenter, voller sowie im Rücken abgeschnittener Normalstöße 1/50 bestimmt berechtigt ist, bedarf es bei den viel hochfrequenten, rasch veränderlichen Steilstößen einer genauen Überprüfung der Zulässigkeit und Grenzen einer derartigen Vereinfachung. Durch Darstellung der Zuleitung als verlustloser, am Ende mit einer den Parametern des Teilers entsprechenden Impedanz abgeschlossener Wellenleiter konnte das Problem mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden. Die Berechnung ergibt, dass es eine kürzeste Grenzanstiegs- oder -abschneidezeit  $T_{gr}$  des linearen Steilstosses gibt, für welche die vereinfachte Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität noch zulässig ist. Diese Grenzanstiegszeit ist eine Funktion des Verhältnisses  $C/C_0$  (Ersatzkapazität des Spannungsteilers durch Erdkapazität der Zuleitung) und von  $R_s$ , dem Dämpfungswiderstand der Messanordnung.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass für die meisten Stoßspannungs-Messanordnungen die Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität selbst bei Steilstößen mit Anstiegszeiten von 0,5...0,6  $\mu s$  berechtigt ist.

### 1. Theoretischer Teil

Beim Entwurf einer Messanordnung für Stoss, die allgemein aus Zuleitung, Spannungsteiler und Niederspannungsarm mit Messkabel und Oszillograph zusammengesetzt ist, wird man bestrebt sein, den Übertragungsfehler für verschiedene Stossspannungen unter Annahme der berechneten oder gemessenen elektrischen Parameter der Messanordnung möglichst genau vorauszubestimmen. Während über die Ersatzschemata der heute gebrauchten Spannungsteiler eingehende theoretische und experimentelle Arbeiten vorliegen [1]<sup>1)</sup>, ist der Einfluss des Ersatzschemas der Zuleitung bisher nicht näher untersucht worden. Die Zuleitung ist stets als konzentrierte Induktivität  $L$ , die annähernd der Induktivität einer Freileitung zu 1,25  $[\mu H/m]$  gleichge-

setzt wurde, dargestellt worden (Fig. 1). Während diese Annäherung im Bereiche der niederfrequenten vollen und im Rücken abgeschnittenen Normalstößen berechtigt ist [2], bedarf es bei einer solchen

Le présent article traite d'une manière théorique du problème de la représentation du conducteur d'amenée, de l'influence de son schéma équivalent dans la technique de mesure des tensions de choc, notamment en ce qui concerne les impulsions rapides à front raide. Jusqu'à présent, la connexion à l'objet de mesure fut présentée comme inductance concentrée pour le courant de choc. Tandis que cette simplification est justifiée pour la mesure de chocs normalisés 1/50, c'est-à-dire pour les chocs à basse fréquence, les chocs pleins et les chocs coupés, il est nécessaire d'examiner l'admissibilité et les limites d'une telle simplification pour les impulsions rapides à front raide à haute fréquence. Le problème a pu être résolu par l'application de la transformation de Laplace et la représentation du conducteur d'amenée comme ligne homogène sans perte chargée à son extrémité par une impédance qui correspond aux paramètres du diviseur. La théorie démontre qu'il existe un temps de montée ou de coupure minimal  $T_{gr}$  du choc à front linéaire pour lequel la représentation simplifiée du conducteur d'amenée comme inductance concentrée reste valable. Le temps de montée est une fonction de la relation  $C/C_0$  (capacité équivalente du diviseur de tension divisée par la capacité de terre du conducteur d'amenée) et de  $R_s$  (résistance d'atténuation du dispositif de mesure).

En résumé, on constate que pour la plupart des dispositifs de mesure des tensions de choc l'admission de l'inductance concentrée pour le conducteur d'amenée est justifiée même pour les chocs à front raide avec un temps de montée de 0,5...0,6  $\mu s$ .

setzt wurde, dargestellt worden (Fig. 1). Während diese Annäherung im Bereiche der niederfrequenten vollen und im Rücken abgeschnittenen Normalstößen berechtigt ist [2], bedarf es bei einer solchen

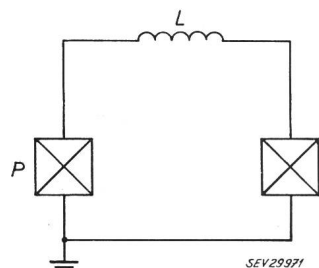


Fig. 1  
Vereinfachte Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität  
P Prüfling; T Spannungsteiler; L Induktivität der Zuleitung

Vereinfachung in Anbetracht der viel hochfrequenten, rasch veränderlichen Steilstößen einer genaueren Überprüfung der Zulässigkeit und ihrer Grenzen.

<sup>1)</sup> Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

Die Zuleitung deren Länge  $h$  [m] durch den Abstand und Höhenunterschied zwischen Prüfling und Spannungsteiler gegeben ist, stellt in Wirklichkeit ein komplexes elektrisches Gebilde dar (Fig. 2), das aus verteilter Längsinduktivität  $l_0$  [ $\mu\text{H}/\text{m}$ ], Erd-

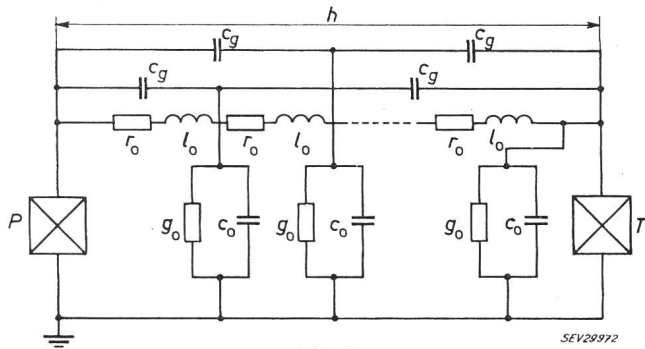


Fig. 2

#### Ersatzschema der Zuleitung

$h$  Länge der Zuleitung;  $l_0$  Induktivität pro Längeneinheit;  $c_0$  Erdkapazität pro Längeneinheit;  $r_0$  Widerstand pro Längeneinheit;  $g_0$  Ableitung pro Längeneinheit;  $c_g$  Gegenkapazität;  $P$  Prüfling;  $T$  Spannungsteiler

kapazität  $c_0$  [pF/m], vernachlässigbarem Widerstand  $r_0$  [ $\Omega/\text{m}$ ] und Ableitung  $g_0$  [ $1/\Omega\text{m}$ ] zusammengesetzt ist, zu welchen noch die Gegenkapazitäten  $c_g$  [pF] zu benachbarten Objekten, hauptsächlich zum Prüfling und Spannungsteiler, dazukommen. Die Aufstellung eines genauen elektrischen Ersatzschemas der Zuleitung wird somit wegen der Abhängigkeit von der jeweiligen räumlichen Disposition der Messanordnung kaum möglich sein. Ein den tatsächlichen Verhältnissen gut entsprechendes Ersatzschema ergibt die Darstellung der Zuleitung als verlustlosen Wellenleiter mit verteilter Längsinduktivität  $l_0$  [ $\mu\text{H}/\text{m}$ ] und Erdkapazität  $c_0$  [pF/m]. Diesem Wellenleiter kann über die Eingangsimpedanz  $Z_1$  [ $\Omega$ ] die Spannung  $u(t)$  zugeführt werden — die Spannung am Anfang der Leitung ist folglich  $u_1(t)$  — während die übertragene Spannung am Ende  $u_2(t)$  an der den Spannungsteiler und Dämpfungswiderstand darstellenden Abschlussimpedanz  $Z_2$  [ $\Omega$ ] erscheint (Fig. 3). Da diese Impedanz  $Z_2$  viel

erfüllt, da der Innenwiderstand der hierfür verwendeten Rechteckstossgeneratoren verschwindend gering ist. Der Wert der Abschlussimpedanz  $Z_2$  ist von der Art des Spannungsteilers und vom eventuell vorhandenen Dämpfungswiderstand  $R_s$  [ $\Omega$ ] der

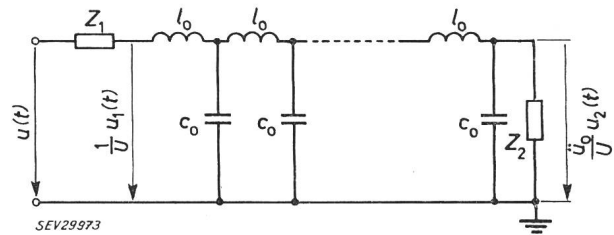


Fig. 3

#### Zuleitung als verlustloser Wellenleiter

$u(t) = t/T$  angelegte Spannung;  $u_1(t) \cdot 1/U$  genormte Spannung am Anfang der Zuleitung;  $\frac{\dot{u}_0}{U} \cdot u_2(t)$  auf die Hochspannungs-

seite des Teilers reduzierte und genormte Spannung am Ende der Zuleitung;  $Z_1, Z_2$  Impedanzen am Eingang und Ende der Zuleitung;  $l_0$  Induktivität pro Längeneinheit der Zuleitung;  $c_0$  Erdkapazität der Zuleitung pro Längeneinheit

Messanordnung abhängig, und kann als reine Kapazität  $C$  [pF], als Serieschaltung von  $C$  und  $R_s$  oder allgemein zu einer Schaltung von  $R_s, R_p$  und  $C$  dargestellt werden (Fig. 4) [3].

Um nun den Einfluss des Ersatzschemas der Zuleitung auf den Übertragungsfehler bei Steilstoss zu ermitteln, wird folgendermassen vorgegangen:

Es wird bei angelegtem linearem Steilstoss der Form

$$u_1(t) = U \frac{t}{T}$$

( $T$  Anstiegs- bzw. Abschneidezeit) die Spannung  $u_2(t)$  am Spannungsteiler bestimmt und zwar sowohl bei vereinfachter Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität  $L$  als auch bei angenommenem verlustlosem Wellenleiter mit  $l_0$  und  $c_0$ . Die Gleichungen für den übertragenen Steilstoss bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung sind bekannt [1]. Für eine Messanordnung nach Fig. 4a ist:

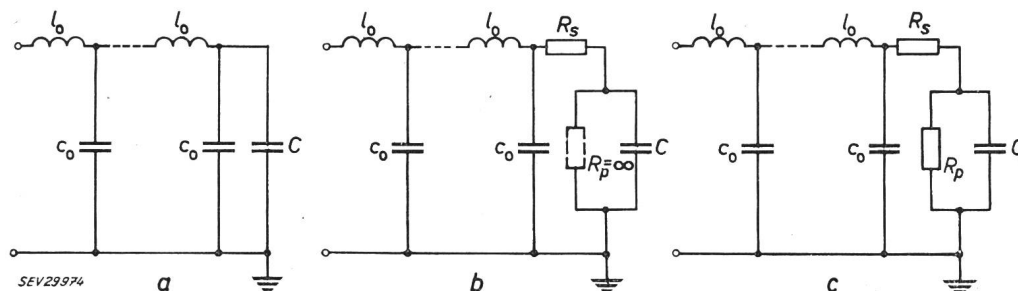


Fig. 4

#### Abschlussimpedanzen $Z_2$ der Zuleitung für verschiedene Spannungsteiler

- a Messanordnung mit kapazitivem Teiler
  - b Messanordnung mit Dämpfungswiderstand und Ersatzkapazität des Teilers
  - c Messanordnung mit Ersatzkapazität und Widerstand des Teilers und mit Dämpfungswiderstand
- $C$  Ersatzkapazität des Teilers;  $R_s$  Dämpfungswiderstand;  $R_p$  Parallelwiderstand des Teilers

höher als die Eingangsimpedanz  $Z_1$  des Prüflings, bzw. des parallelgeschalteten Stossgenerators ist, können die Betrachtungen weiter vereinfacht werden, indem  $Z_1 = 0$  gesetzt wird. Diese Annahme ist bei der Eichung einer Messanordnung mit Rechteckstoss, wie z. B. in [1] beschrieben, praktisch immer

mit

$$u_2(t) = U \frac{t}{T} \left( 1 - \frac{\sin \omega t}{\omega_0 t} \right) \quad (1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L C}} \quad (2)$$

Für die Messanordnungen nach Fig. 4b und 4c ist im Falle einer positiven Diskriminante  $D^2 > 0$  die charakteristische Gleichung:

$$u_2(t) = U \frac{t}{T} \left[ 1 - \frac{k+l}{k l t} - \frac{l}{k(k-l)t} e^{-kt} + \frac{k}{l(k-l)t} e^{-lt} \right] \quad (3)$$

$$u_2(t) \approx U \frac{t}{T} \left[ 1 - \frac{\tau}{t} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \quad (3a)$$

mit

$$k, l = \frac{1}{2} \left( \frac{R_s}{L} + \frac{1}{R_p C} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{R_s}{L} + \frac{1}{R_p C} \right)^2 - \left( 1 + \frac{R_s}{R_p} \right) \frac{1}{L C}} \quad (4)$$

und

$$\tau = \frac{1}{l}, D = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{R_s}{L} + \frac{1}{R_p C} \right)^2 - \left( 1 + \frac{R_s}{R_p} \right) \frac{1}{L C}} \quad (4a)$$

Für Messanordnungen für Stoss darf wegen

$$k \gg l, \frac{l}{k-l} e^{-kt} \approx 0 \quad (5)$$

Gl. (3a) für Gl. (3) angenommen werden.

Für den Fall einer negativen Diskriminante  $D^2 < 0$  ist:

$$u_2(t) = U \frac{t}{T} \left\{ 1 - e^{-\frac{a_0}{2} t} \frac{\sin \omega t}{\omega t} - \frac{a_0}{\omega^2 t} \left[ 1 - e^{-\frac{a_0}{2} t} \left( \cos \omega t + \frac{a_0}{2\omega} \sin \omega t \right) \right] \right\} \quad (6)$$

mit

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{R_s}{L} + \frac{1}{R_p C} \right) \quad (7)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{a_0^2}{4}} \quad (8)$$

Um den übertragenen Steilstoss bei der als verlustlosen Wellenleiter dargestellten Zuleitung der Länge  $h$  [m] zu bestimmen, geht man von den bekannten Gleichungen aus:

$$u_1(t) = u_2(t) \cosh \gamma h + i_2(t) Z \sinh \gamma h \quad (9)$$

$$i_1(t) = u_2(t) \cdot \frac{1}{Z} \sinh \gamma h + i_2(t) \cosh \gamma h \quad (10)$$

wobei  $Z$  ( $\Omega$ ) der Wellenwiderstand der Zuleitung:

$$Z = \sqrt{\frac{h l_0}{h c_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (11)$$

und  $\gamma h$  durch

$$\gamma h = p \sqrt{L_0 C_0} = p T_0 \quad (12)$$

gegeben ist.  $T_0$  [ $\mu$ s] ist die Grundwellenlaufzeit der Zuleitung,  $p$  der Laplace-Operator  $p = \frac{d}{dt}$ .

Nach Fig. 3 wird die Zuleitung über die Impedanz  $Z_1$  an die Spannung  $U \frac{t}{T}$  gelegt und am Ende mit der Impedanz  $Z_2$  belastet. Es gilt dann:

$$U \frac{t}{T} = u_1(t) + i_2(t) \cdot Z_1 \quad (13)$$

$$u_2(t) = i_2(t) \cdot Z_2 \quad (14)$$

Führt man die Gl. (13) und (14) in die Gl. (9) und (10) ein, so erhält man nach Reihenentwicklung von  $\sinh \gamma h$  und  $\cosh \gamma h$ :

$$u_2(t) = U \frac{t}{T} \cdot \frac{Z}{Z + Z_1} (e^{-\gamma h} + r_2 e^{-\gamma h} + r_1 r_2 e^{-3\gamma h} + r_1 r_2^2 e^{-3\gamma h} + r_1^2 r_2^2 e^{-5\gamma h} \dots) \quad (15)$$

$$i_2(t) = U \frac{t}{T} \cdot \frac{1}{Z_1 + Z} (e^{-\gamma h} - r_2 e^{-\gamma h} + r_1 r_2 e^{-3\gamma h} - r_1 r_2^2 e^{-3\gamma h} + r_1^2 r_2^2 e^{-5\gamma h} \dots) \quad (16)$$

wobei mit

$$r_1 = \frac{Z_1 - Z}{Z_1 + Z_2} \quad (17)$$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z}{Z_1 + Z_2} \quad (18)$$

die Reflexionskoeffizienten bezeichnet wurden.

Gl. (15) und (16) bilden die Ausgangspunkte für die weiteren Betrachtungen, indem sie ermöglichen werden, die übertragenen Spannungen bei angelegtem linearem Steilstoss  $U \frac{t}{T}$  für die auf Fig. 4a...4c dargestellten Abschlussimpedanzen der Zuleitung zu bestimmen

### 1.1 Bestimmung der übertragenen Spannung für eine Messanordnung nach Fig. 4a

Es soll vorerst der Fall einer rein kapazitiven Belastungsimpedanz bei Stoßspannungs-Messanordnungen, die einem rein kapazitiven Teiler entsprechen, untersucht werden. Dazu wird Gl. (15) im Bildbereich der Laplace-Transformation geschrieben und die Stossantwort  $\gamma_r(t)$  bei angelegter Schritt-funktion  $U\varepsilon(t)$  bestimmt. Es ist:

$$Z_2 = \frac{1}{p C} \quad (19)$$

$$Z_1 = 0 \quad (20)$$

Die Reflexionskoeffizienten  $r_1$  und  $r_2$  ergeben sich zu:

$$r_1 = -1 \quad (21)$$

$$r_2 = \frac{\frac{1}{p C} - Z}{\frac{1}{p C} + Z} = -\frac{p - \varrho}{p + \varrho} \quad (22)$$

mit

$$\varrho = \frac{1}{Z C} \quad (23)$$

Unter Beachtung von Gl. (12) wird:



$$L[\gamma_r(t)] = U \frac{1}{p} \left\{ \frac{2\varrho}{p+\varrho} \left[ e^{-pT_0} + \frac{p-\varrho}{p+\varrho} e^{-3pT_0} + \left( \frac{p-\varrho}{p+\varrho} \right)^2 e^{-5pT_0} \dots \right] \right\} =$$

$$= U \frac{1}{p} \cdot \frac{2\varrho}{p+\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{p-\varrho}{p+\varrho} \right)^n e^{-(2n+1)pT_0} \quad (24)$$

Gl. (24) besagt, dass bei angelegter Schrittfunktion die Stossantwort am kapazitiven Spannungsteiler aus Spannungswellen, die jeweils nach Zeiten  $T_0, 3T_0, \dots, (2n+1)T_0$  einsetzen, zusammengesetzt ist. Durch Anwendung des Verschiebungssatzes und der Rücktransformationen in den Originalbereich nach Tabelle I des Anhanges, erhält man für die ersten sieben Spannungswellen der Stossantwort:

$$\gamma_0(t) = 2U(1 - e^{-\varrho t_0}) \quad (25a)$$

$$\gamma_1(t) = 2U[-1 + e^{-\varrho t_1}(1 + 2\varrho t_1)] \quad (25b)$$

$$\gamma_2(t) = 2U[1 - e^{-\varrho t_2}(1 + 2\varrho^2 t_2^2)] \quad (25c)$$

$$\gamma_3(t) = 2U \left[ -1 + \left( 1 + 2\varrho t_3 - 2\varrho^2 t_3^2 + \frac{4}{3}\varrho^3 t_3^3 \right) e^{-\varrho t_3} \right] \quad (25d)$$

$$\gamma_4(t) = 2U \left[ 1 - \left( 1 + 4\varrho^2 t_4^2 - \frac{8}{3}\varrho^3 t_4^3 + \frac{2}{3}\varrho^4 t_4^4 \right) e^{-\varrho t_4} \right] \quad (25e)$$

$$\gamma_5(t) = 2U \left[ -1 + \left( 1 + 2\varrho t_5 - 4\varrho^2 t_5^2 + \frac{16}{3}\varrho^3 t_5^3 - 2\varrho^4 t_5^4 + \frac{4}{15}\varrho^5 t_5^5 \right) e^{-\varrho t_5} \right] \quad (25f)$$

$$\gamma_6(t) = 2U \left[ 1 - \left( 1 + 6\varrho^2 t_6^2 - 8\varrho^3 t_6^3 + \frac{14}{3}\varrho^4 t_6^4 - \frac{16}{15}\varrho^5 t_6^5 + \frac{4}{45}\varrho^6 t_6^6 \right) e^{-\varrho t_6} \right] \quad (25g)$$

mit

$$t_0 = t - T_0, t_1 = t - 3T_0, \dots, t_n = t - (2n+1)T_0 \quad (26)$$

Der Übertragungsfehler bei einwirkendem Steilstoss der Form  $u_1(t) = U \frac{t}{T}$  mit der Anstiegszeit  $T[\mu s]$  kann nun durch Anwendung des Integrals von *Duhamel* für jede Teil-Stossantwort nach den Gl. (25a)...(25g) ermittelt werden. Dabei sind nur die Stossantworten zu berücksichtigen, die noch während der Anstiegszeit, d. h. vor  $t = T$  am Leitungsende antreffen und für welche

$$t_n = T - (2n+1)T_0 > 0 \quad (27)$$

Mit dem Duhamelschen Integral

$$u_2(t) = u_1(0)\gamma_r(t) + \int_{v=0}^{v=t} \gamma_r(t-v) \cdot \frac{d}{dv}[u_1(v)] dv \dots \quad (28)$$

und unter Beachtung, dass die  $n$ -te Teil-Stossantwort für

$$t - v > (2n+1)T_0 \quad u_{2n}(t) = 0 \quad (29)$$

oder für

$$t - (2n+1)T_0 < v \quad u_{2n}(t) = 0 \quad (30)$$

erhält man für den übertragenen Steilstoss zur Zeit  $t = T$

$$u_2(T) = \frac{1}{T} \int_{v=0}^{v=T-T_0} \gamma_0(t-v) dv + \frac{1}{T} \int_{v=0}^{v=T-3T_0} \gamma_1(t-v) dv + \dots + \frac{1}{T} \int_{v=0}^{v=T-(2n+1)T_0} \gamma_n(t-v) dv \quad (31)$$

Die Ausrechnung ergibt für die ersten sieben Komponenten

$$u_{20}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( t_0 - \frac{1}{\varrho} \right) + \frac{1}{\varrho} e^{-\varrho t_0} \right] \quad (32a)$$

$$u_{21}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( \frac{3}{\varrho} - t_1 \right) - e^{-\varrho t_1} \left( \frac{3}{\varrho} + 2t_1 \right) \right] \quad (32b)$$

$$u_{22}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( t_2 - \frac{5}{\varrho} \right) + e^{-\varrho t_2} \left( \frac{5}{\varrho} + 4t_2 + 2\varrho t_2^2 \right) \right] \quad (32c)$$

$$u_{23}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( \frac{7}{\varrho} - t_3 \right) - e^{-\varrho t_3} \left( \frac{7}{\varrho} + 6t_3 + 2\varrho t_3^2 + \frac{4}{3}\varrho^2 t_3^3 \right) \right] \quad (32d)$$

$$u_{24}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( t_4 - \frac{9}{\varrho} \right) + e^{-\varrho t_4} \left( \frac{9}{\varrho} + 8t_4 + 4\varrho t_4^2 + \frac{2}{3}\varrho^3 t_4^3 \right) \right] \quad (32e)$$

$$u_{25}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( \frac{11}{\varrho} - t_5 \right) - e^{-\varrho t_5} \left( \frac{11}{\varrho} + 10t_5 + 4\varrho t_5^2 + \frac{8}{3}\varrho^2 t_5^3 + \frac{2}{3}\varrho^3 t_5^4 + \frac{4}{15}\varrho^4 t_5^5 \right) \right] \quad (32f)$$

$$u_{26}(T) = U \frac{2}{T} \left[ \left( t_6 - \frac{13}{\varrho} \right) + e^{-\varrho t_6} \left( \frac{13}{\varrho} + 12t_6 + 6\varrho t_6^2 + 2\varrho^3 t_6^4 + \frac{8}{15}\varrho^4 t_6^5 + \frac{4}{45}\varrho^5 t_6^6 \right) \right] \quad (32g)$$

## 1.2 Bestimmung der übertragenen Spannung für Messanordnungen nach Fig. 4b und 4c

Für eine Messanordnung mit Dämpfungswiderstand  $R_s$ , Ersatzkapazität  $C$  und vernachlässigbarem Parallelwiderstand  $R_p = \infty$  nach Fig. 4b ist:

$$Z_2 = \frac{1+pR_sC}{pC} \quad (33)$$

Die Reflexionskoeffizienten sind:

$$r_1 = -1, \quad r_2 = \frac{\alpha}{p + \alpha} + \frac{\nu p}{p + \alpha} \quad (34)$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{C(R_s + Z)} \quad (35)$$

$$\nu = \frac{R_s - Z}{R_s + Z} \quad (36)$$

Bei angelegter Schrittfunktion  $U_\varepsilon(t)$  erhält man für den Strom am Ende der Zuleitung im Bildbereich:

$$I_2(p) = \frac{U}{Z} \cdot \frac{1}{p} \left\{ e^{-pT_0} - \frac{\alpha + \nu p}{p + \alpha} e^{-pT_0} - \frac{\alpha + \nu p}{p + \alpha} e^{-3pT_0} + \left( \frac{\alpha + \nu p}{p + \alpha} \right)^2 e^{-3pT_0} \right\} + \dots \quad (37)$$

Für die Stossantwort an der Ersatzkapazität ist folglich:

$$L[\gamma_r(t)] = \frac{1}{Cp} I_2(p) \quad (38)$$

Führt man Gl. (37) in (38) ein, so erhält man nach Rücktransformation für die einzelnen Stossantworten:

$$\gamma_0(t) = \frac{U}{\varrho} \left\{ t_0 - \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha t_0} - 1) + \frac{\nu}{\alpha} (e^{-\alpha t_0} - 1) \right\} \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) = \frac{U}{\varrho} \left\{ -\frac{1}{\alpha} [e^{-\alpha t_1} - 1 + \alpha t_1] + \frac{\nu}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} - 1) + \right. \\ \left. + t_1 + \frac{2}{\alpha} (e^{-\alpha t_1} - 1) + t_1 e^{-\alpha t_1} + \right. \\ \left. + \frac{2\nu}{\alpha} [1 - (\alpha t_1 + 1) e^{-\alpha t_1}] + \nu^2 t_1 e^{-\alpha t_1} \right\} \quad (39b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(t) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_2}) + \right. \\ \left. + (1-\nu)(\nu^2 - 1) t_2 e^{-\alpha t_2} + \frac{\alpha}{2} (\nu - 1)^3 t_2^2 e^{-\alpha t_2} \right\} \quad (39c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) = \frac{U}{\varrho} \left\{ -\frac{1-\nu}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_3}) + \lambda t_3 e^{-\alpha t_3} + \right. \\ \left. + \frac{\kappa}{2} \alpha t_3^2 e^{-\alpha t_3} + \frac{(1-\nu)^4}{6} \alpha^2 t_3^3 e^{-\alpha t_3} \right\} \quad (39d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_4(t) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{1-\nu}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_4}) + \xi t_4 e^{-\alpha t_4} + \right. \\ \left. + \frac{\theta}{2} t_4^2 e^{-\alpha t_4} + \frac{\mu}{6} \alpha^2 t_4^3 e^{-\alpha t_4} + \frac{(1-\nu)^5}{4!} \alpha^3 t_4^4 e^{-\alpha t_4} \right\} \quad (39e) \end{aligned}$$

wobei

$$\lambda = 1 - \nu - \nu^3 + \nu^4 = (1 - \nu)(1 - \nu^3) \quad (40)$$

$$\kappa = 1 - \nu - 3\nu^2 + 5\nu^3 - 2\nu^4 \quad (40a)$$

$$\xi = (1 - \nu)(\nu^4 - 1) \quad (40b)$$

$$\theta = -1 + \nu + 4\nu^3 - \frac{9}{2}\nu^4 + \frac{3}{2}\nu^5 \quad (40c)$$

$$\mu = -1 + \nu + 6\nu^2 - 14\nu^3 + 11\nu^4 - 3\nu^5 \quad (40d)$$

Durch Anwendung des Duhamelschen Integrals nach Gl. (28) und (31) unter Beachtung von Gl. (29) und (30) erhält man für die Komponenten des übertragenen Steilstosses  $u_2(T)$  für  $t = T$  an der Kapazität  $C$ :

$$u_{20}(T) = \frac{U}{\varrho} \cdot \frac{1-\nu}{T\alpha} \left\{ t_0 - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_0}) \right\} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} u_{21}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{1-\nu}{T\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_1} - \alpha t_1) + \right. \\ \left. + \frac{(1-\nu)^2}{T\alpha^2} [1 - e^{-\alpha t_1} (1 + \alpha t_1)] \right\} \quad (42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{22}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{1-\nu}{T\alpha} t_2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{T\alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_2} (3 - 5\nu + 2\nu^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{t_2}{T\alpha} 2(1-\nu)^2 e^{-\alpha t_2} - (\nu - 1)^3 e^{-\alpha t_2} \frac{t_2^2}{2T} \right] \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

$$u_{23}(T) = u_{23\text{ I}} + u_{23\text{ II}} + u_{23\text{ III}} + u_{23\text{ IV}} \quad (44)$$

mit

$$u_{23\text{ I}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ -\frac{1-\nu}{T\alpha} t_3 + \frac{1-\nu}{T\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_3}) \right\} \quad (44a)$$

$$u_{23\text{ II}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{\lambda}{T\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_3}) - \frac{\lambda t_3}{T\alpha} e^{-\alpha t_3} \right\} \quad (44b)$$

$$u_{23\text{ III}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{\kappa}{T\alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_3} \left( 1 + \frac{\alpha t_3}{1!} + \frac{\alpha^2 t_3^2}{2!} \right) \right] \right\} \quad (44c)$$

$$\begin{aligned} u_{23\text{ IV}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{(1-\nu)^4}{T\alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_3} \left( 1 + \frac{\alpha t_3}{1!} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{\alpha^2 t_3^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t_3^3}{3!} \right) \right] \right\} \quad (44d) \end{aligned}$$

Für die Komponenten von  $u_{24}(T)$  erhält man:

$$u_{24\text{ I}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{1-\nu}{T\alpha} t_4 - \frac{1-\nu}{T\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_4}) \right\} \quad (45a)$$

$$u_{24\text{ II}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{\xi}{T\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t_4}) - \frac{\xi}{T\alpha} t_4 e^{-\alpha t_4} \right\} \quad (45b)$$

$$u_{24\text{ III}}(T) = \frac{U}{\varrho} \left\{ \frac{\theta}{T\alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_4} \left( 1 + \frac{\alpha t_4}{1!} + \frac{\alpha^2 t_4^2}{2!} \right) \right] \right\} \quad (45c)$$

$$\begin{aligned} u_{24\text{ IV}}(T) = \frac{U}{\varrho} \frac{\mu}{T\alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_4} \left( 1 + \frac{\alpha t_4}{1!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha^2 t_4^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t_4^3}{3!} \right) \right] \quad (45d) \end{aligned}$$

$$u_{24V}(T) = \frac{U}{\varrho} \cdot \frac{(\nu-1)^5}{T \alpha^2} \left[ 1 - e^{-\alpha t_4} \left( 1 + \frac{\alpha t_4}{1!} + \frac{\alpha^2 t_4^2}{2!} + \frac{\alpha^3 t_4^3}{3!} + \frac{\alpha^4 t_4^4}{4!} \right) \right] \quad (45e)$$

Ähnlich können auch weitere Komponenten ermittelt werden.

Für eine Abschlussimpedanz  $Z_2$  der Zuleitung nach Fig. 4c ergibt eine ähnliche Ausrechnung:

$$Z_2 = \frac{R_s + R_p + R_s R_p C_p}{1 + C R_p} \quad (46)$$

$$r_2 = \frac{\kappa'}{\alpha' + p} + \frac{\nu p}{\alpha' + p} \quad (47)$$

wobei

$$\kappa' = \frac{R_s + R_p - Z}{R_p C (R_s + Z)} \quad (48)$$

$$\alpha' = \frac{R_s + R_p + Z}{R_p C (R_s + Z)} \quad (49)$$

und  $\nu$  durch Gl. (36) gegeben sind.

Für die ersten zwei Komponenten des übertragenen Steilstosses an der Kapazität  $C$  und am Parallelwiderstand  $R_p$  erhält man nach einiger Umrechnung:

$$u_{20}(T) = \frac{U}{\varrho T} \left\{ \frac{\omega'}{2} t_0^2 + \lambda' t_0 - \frac{\lambda'}{\alpha'} (1 - e^{-\alpha' t_0}) \right\} \quad (50)$$

$$u_{21}(T) = \frac{U}{\varrho T} \left\{ \gamma' t_1 - \frac{\gamma'}{\alpha'} (1 - e^{-\alpha' t_1}) + \frac{\mu' t_1^2}{2} + \frac{\delta'}{\alpha^2} [1 - e^{-\alpha' t_1} (1 + \alpha' t_1)] \right\} \quad (51)$$

mit

$$\omega' = 1 - \frac{\kappa'}{\alpha'} \quad (52)$$

$$\lambda' = \frac{\kappa' - \nu \alpha'}{\alpha'^2} \quad (53)$$

$$\gamma' = \frac{\kappa'}{\alpha'^2} - \frac{\nu}{\alpha'} - \frac{2 \kappa'^2}{\alpha'^3} + \frac{2 \nu \kappa'}{\alpha'^2} \quad (54)$$

$$\delta' = \frac{\kappa'}{\alpha'^2} - \frac{2 \nu \kappa'}{\alpha'} + \nu^2 \quad (55)$$

Die Ausrechnung weiterer Komponenten erübrigt sich, da an numerischen Beispielen gezeigt wird, dass bei Annahme von bei Messanordnungen für Stoss üblichen Werten für den Widerstand  $R_p$  praktisch die gleichen Ergebnisse wie für den Fall  $R_p = \infty$  (Fig. 4b) erhalten werden, und  $R_p$  somit die Problemstellung nicht beeinflusst.

## 2. Numerische Beispiele

Die im Abschnitt 1 abgeleiteten Gleichungen sollen nun an einige numerische Beispiele angewandt werden. Als Ausgang der Betrachtungen sei eine 10-m-Zuleitung, aus einem einfachen zylindrischen Leiter von 30 mm Durchmesser, der 6 m über Boden verläuft, angenommen. Damit wird bereits eine in der Stoßspannungs-Messtechnik lange Zu-

leitung zwischen Prüfling und Spannungsteiler, d.h. ein ungünstiger Fall angenommen. Die Annahme eines zylindrischen Leiters wird eine genaue Bestimmung der Längsinduktivität  $l_0$  und Erdkapazität  $c_0$  ermöglichen, die auch bei einer etwas ab-

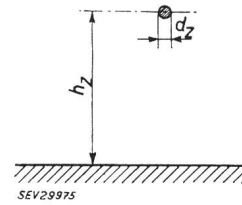


Fig. 5  
Räumliche Anordnung einer  
10-m-Zuleitung  
 $d_z$  Durchmesser des Leiters  
 $h_z$  Abstand des Leiters vom Boden

weichenden Leiterform nur unwesentlich von den Werten des zylindrischen Leiters abweichen werden. Man erhält somit für den Verlauf der Zuleitung nach Fig. 5 für:

$$l_0 = 0,05 + 0,1 \ln \left( \frac{2 h_z}{d_z} \right)^2 = 1,25 \quad [\mu\text{H/m}]$$

$$c_0 = \frac{2 \pi \varepsilon_0}{\ln \frac{4 h_z}{d_z}} = \frac{0,0886 \cdot 10^{-10}}{\ln \frac{4 \cdot 6,0}{0,03}} = 8,33 \quad [\text{pF/m}]$$

Mit diesen Werten ergibt sich der Wellenwiderstand  $Z$  zu:

$$Z = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^{-6}}{8,33 \cdot 10^{-12}}} = 388 \Omega$$

und die Grundwellenlaufzeit:

$$T_0 = 10 \sqrt{1,25 \cdot 8,33 \cdot 10^{-9}} = 0,03235 \mu\text{s}$$

Es sollen nun die übertragenen linearen Steilstöße bei vereinfachter und genauerer Darstellung der Zuleitung für Messanordnungen nach Fig. 4a...4c berechnet werden:

### 2.1 Messanordnung mit rein kapazitivem Spannungsteiler nach Fig. 4a

Die übertragenen Spannungen sollen für Ersatzkapazitäten des Teilers am Ende der Zuleitung von  $C = 100 \text{ pF}$ ,  $300 \text{ pF}$  und  $500 \text{ pF}$  berechnet werden.

Für  $C = 100 \text{ pF}$  ergibt sich bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität  $I = 12,5 \mu\text{H}$  die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  zu:

$$\omega_0 = \frac{1}{L C} = \frac{10^9}{\sqrt{100 \cdot 12,5}} = 28,25 \cdot 10^6 \quad [\text{s}^{-1}]$$

Der Verlauf des übertragenen Steilstosses nach Gl. (1) ist in Fig. 6 als Kurve *a* dargestellt. Für den Fall der als *verlustlosen Wellenleiter* angenommenen Zuleitung sind die einzelnen Komponenten des übertragenen Steilstosses nach den Gl. (32a)...(32g) berechnet worden und in Tabelle I zusammengestellt.

Der entsprechende übertragende Steilstoss ist in Fig. 6, Kurve *b*, aufgezeichnet. In der gleichen Figur sind auch die Einhüllenden von den beiden übertragenen Steilstößen — die Geraden  $a_0$  und  $b_0$  — aufgezeichnet, die die beiden Fehlerbereiche bestimmen. Der Eingangsstoss  $u_1(t)$  ist auf Fig. 6 und auf allen weiteren Figuren normiert dargestellt und hat für  $T = 0,5 \mu\text{s}$  den Wert 1. Die übertragenen Steilstöße sind dazu noch mit dem Nennüber-

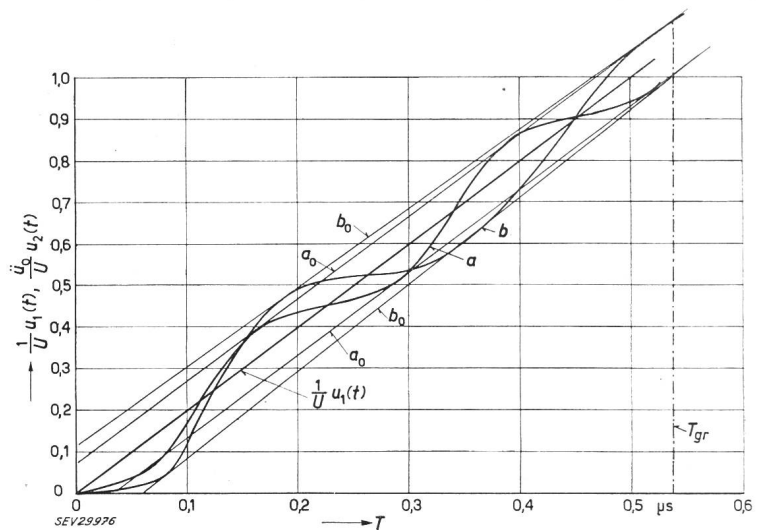
Komponente	Anstiegszeit $T [\mu\text{s}]$								
	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25	0,3	0,375	0,5	0,525
$u_{20}$	0,098	0,665	1,1204	1,2635	1,4051	1,5056	1,551	1,7032	1,7173
$u_{21}$			0,089	-0,0453	-0,2974	-0,5387	-0,812	-1,1106	-1,152
$u_{22}$				0,021	-0,0426	-0,0629	0,1188	0,5225	0,5903
$u_{23}$					0,0007	-0,0159	0,0341	-0,0383	-0,0958
$u_{24}$							-0,011	-0,015	-0,0156
$u_{25}$								0,0036	0,0143
$u_{26}$									0,045
$u_2$	0,098	0,665	1,2094	1,2403	1,0658	0,8881	0,8766	1,0654	1,063

tragungsverhältnis des Spannungsteilers  $\ddot{u}_0$  multipliziert, d. h. auf die Hochspannungsseite bezogen.

Fig. 6

Übertragung eines linearen Steilstosses bei vereinfachter und genaueren Darstellung der Zuleitung einer Messanordnung mit einer Ersatzkapazität von  $C = 100 \text{ pF}$

$\frac{1}{U} \cdot u_1(t)$  reduzierter Eingangstoss;  $a, b$  Verlauf der reduzierten und genormten übertragenen Steilstöße  $\frac{\ddot{u}_0}{U} \cdot u_2(t)$  bei vereinfachter und genauere Darstellung der Zuleitung;  $a_0$  Einhüllende der Kurve  $a$ ;  $b_0$  Einhüllende der Kurve  $b$ ;  $T$  Anstiegszeit des Steilstosses;  $T_{gr}$  Grenzanstiegszeit



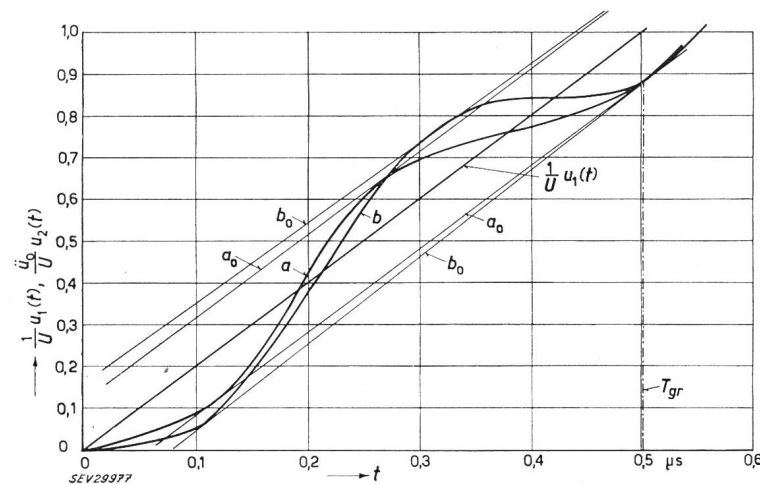
Wie aus Fig. 6 hervorgeht, treten die Einhüllenden  $b_0$  für Anstiegszeiten  $T \geq 0,53 \mu\text{s}$  endgültig in den Fehlerbereich des übertragenen Steilstosses bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung ein, der durch die beiden Geraden  $a_0$  begrenzt ist. Mit anderen Worten, die Anstiegszeit  $T_{gr} = 0,53 \mu\text{s}$  stellt

Für  $C = 300 \text{ pF}$  ist bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung die Resonanzfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{10^9}{\sqrt{300 \cdot 12,5}} = 16,3 \cdot 10^6 \quad [\text{s}^{-1}]$$

Der Verlauf des entsprechenden übertragenen Steilstosses ist in Fig. 7 durch Kurve  $a$  dargestellt. Der übertragene Steilstoss für den Fall der als verlustlosen Wellenleiter dargestellten Zuleitung ist auf Fig. 7 durch Kurve  $b$  gegeben. Die Grenzschnitzeit  $T_{gr}$  beträgt in diesem Fall  $T_{gr} = 0,5 \mu\text{s}$ .

Für  $C = 500 \text{ pF}$  ist bei vereinfachter Annahme der Zuleitung:



hier die Grenzanstiegszeit dar für die, und für alle längeren Anstiegszeiten, die vereinfachte Darstellung bestimmt berechtigt ist, indem sich dann ein eher zu hoher Übertragungsfehler ergibt und die Berechnung somit eine gewisse Sicherheit enthält.

Fig. 7

Wie Fig. 6, aber mit einer Ersatzkapazität von  $C = 300 \text{ pF}$

Bezeichnungen siehe Fig. 6

$$\omega_0 = \frac{10^9}{\sqrt{500 \cdot 12,5}} = 12,64 \cdot 10^6 \quad [\text{s}^{-1}]$$

Der Verlauf des übertragenen Steilstosses bei vereinfachter und als verlustloser Wellenleiter darge-

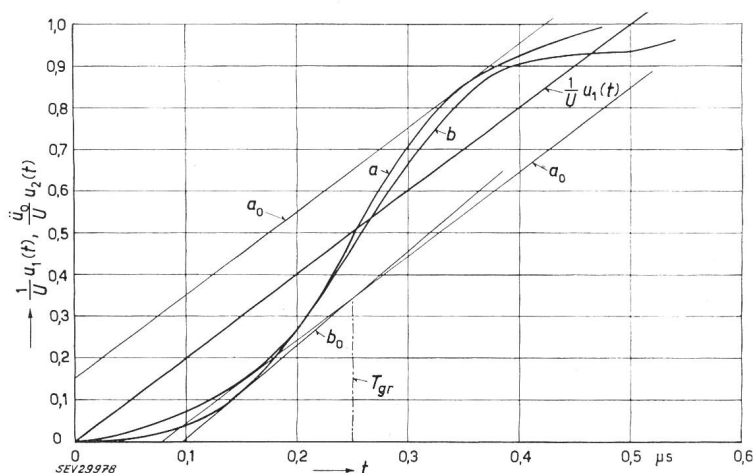
stellten Zuleitung ist auf Fig. 8 durch die Kurven *a* und *b* gegeben. Die Grenzschnitzzeit beträgt hier  $T_{gr} = 0,25 \mu s$ .

Weiter soll das Verhalten von Messanordnungen mit der gleichen 10-m-Zuleitung bei vorhandenem Dämpfungswiderstand  $R_s$  und vernachlässigbarem Parallelwiderstand  $R_p$  für die gleichen Werte der Abschlusskapazität  $C$  untersucht werden.

Fig. 8

Wie Fig. 6, aber mit einer Ersatzkapazität von  $C = 500 \text{ pF}$

Bezeichnungen siehe Fig. 6



## 2.2 Messanordnungen nach Fig. 4b mit Dämpfungswiderstand $R_s$ , Ersatzkapazität $C$ und vernachlässigbarem Parallelwiderstand $R_p = \infty$

### 2.2.1. Dämpfungswiderstand $R_s = 300 \Omega$

Für  $C = 100 \text{ pF}$  ist bei vereinfachter Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität  $L = 12,5 \mu H$  mit

$$\frac{a_0}{2} = 12,0 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]}, \quad \omega_0 = 28,25 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]} \\ \omega = 25,6 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Der übertragene lineare Steilstoss ist nach Gl. (6) berechnet worden und in Fig. 9 als Kurve *a* eingetragen.

Bei Annahme der Zuleitung als verlustloser Wellenleiter sind die einzelnen Komponenten nach den Gl. (41)...(45e) mit:

$$\alpha = \frac{1}{C(R_s + Z)} = \frac{10^{12}}{100(300 + 388)} = 14,5 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$\nu = \frac{R - Z}{R + Z} = \frac{300 - 388}{300 + 388} = -0,128$$

$$T_0 = 0,03235 \cdot 10^{-6} \text{ [s]}$$

berechnet worden und in Tabelle II zusammengefasst.

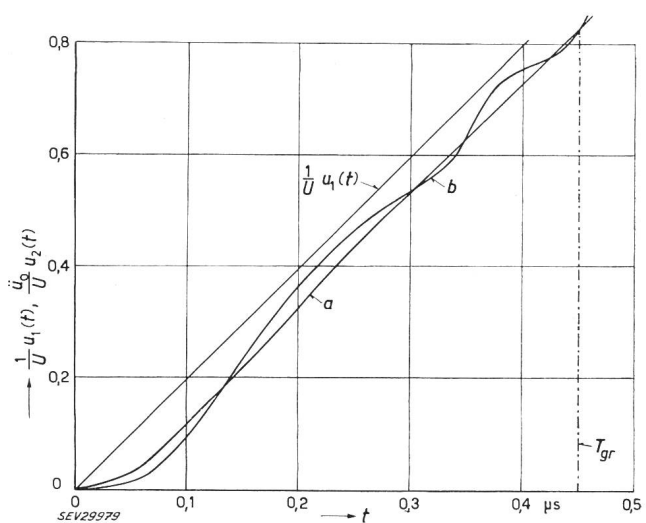


Fig. 9

Übertragung eines linearen Steilstosses bei vereinfachter und genaueren Darstellung der Zuleitung einer Messanordnung mit Dämpfungswiderstand  $R_s = 300 \Omega$  und Ersatzkapazität  $C = 100 \text{ pF}$

$\frac{1}{U} \cdot u_1(t)$  reduzierter Eingangsschoss; *a*, *b* Verlauf des reduzierten und genormten übertragenen Steilstosses bei vereinfachter und genaueren Darstellung der Zuleitung;  $T$  Anstiegszeit des Steilstosses;  $T_{gr}$  Grenzanstiegszeit

Komponenten des übertragenen linearen Steilstosses für  $R_s = 300 \Omega$ ,  $C = 100 \text{ pF}$ , Zuleitung als verlustloser Wellenleiter

Tabelle II

Komponente	Anstiegszeit $T [\mu s]$								
	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,425
$u_{20}$	0,115	0,49	0,826	1,05	1,219	1,338	1,43	1,502	1,535
$u_{21}$		0	-0,026	-0,154	-0,325	-0,515	-0,672	-0,817	-0,875
$u_{22}$				0,016	0,036	0,084	0,175	0,288	0,356
$u_{23}$					-0,006	-0,003	-0,002	-0,009	-0,141
$u_{24}$						0	0,001	0,006	0,013
$u_{25}$							0	-0,01	0,01
$u_{26}$								0	0,002
$u_2$	0,115	0,49	0,8	0,912	0,936	0,904	0,932	0,96	0,9

Der entsprechende übertragene Steilstoss ist in Fig. 9 als Kurve *b* eingetragen. Wie ersichtlich, schwingt dieser um den Verlauf der Kurve *a* und tritt nach etwa  $T = 0,46 \mu\text{s}$  definitiv in den Fehler-

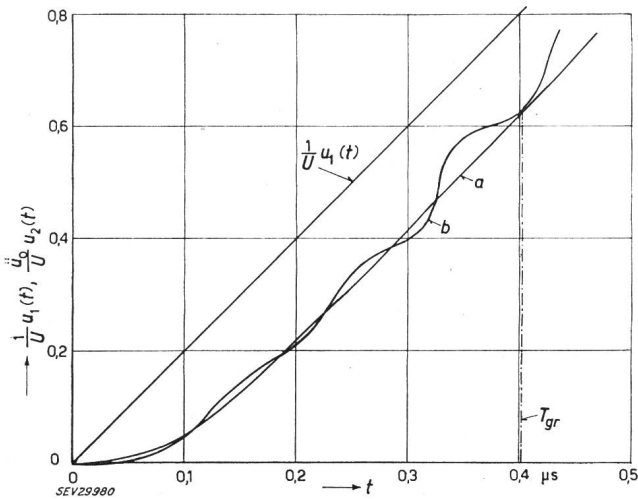


Fig. 10

Wie Fig. 9, aber mit einem Dämpfungswiderstand von  $R_s = 300 \Omega$  und einer Ersatzkapazität von  $C = 300 \text{ pF}$ .  
Bezeichnungen siehe Fig. 9

bereich des übertragenen Steilstosses bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung ein. Die Grenzabschneidezeit beträgt für diesen Fall somit  $T_{gr} = 0,46 \mu\text{s}$ .

Für die Ersatzkapazitäten  $C = 300 \text{ pF}$  und  $C = 500 \text{ pF}$  sind die übertragenen Steilstöße bei vereinfachter (Kurve *a*) und als Wellenleiter dargestellten Zuleitung (Kurve *b*) auf Fig. 10 und Fig. 11 ge-

Fig. 11

Wie Fig. 9, aber mit einem Dämpfungswiderstand von  $R_s = 300 \Omega$  und einer Ersatzkapazität von  $C = 500 \text{ pF}$ .

Bezeichnungen siehe Fig. 9

geben. Die entsprechenden Grenzabschneidezeiten sind  $T_{gr} = 0,4 \mu\text{s}$  für  $C = 300 \text{ pF}$  bzw.  $T_{gr} = 0,23 \mu\text{s}$  für  $C = 500 \text{ pF}$ .

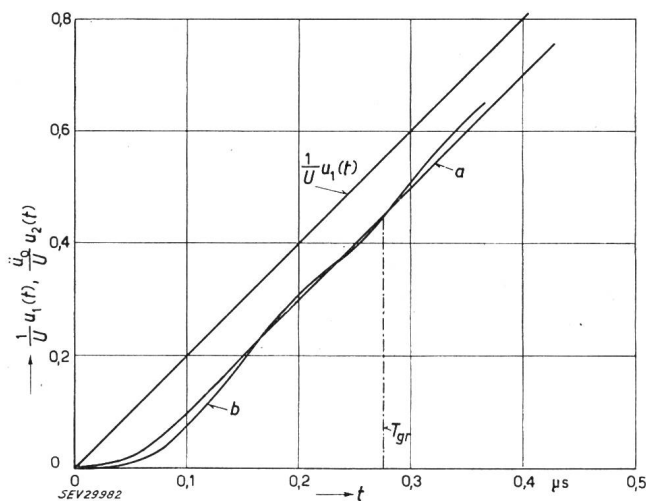


Fig. 12

Wie Fig. 9, mit einem Dämpfungswiderstand von  $R_s = 500 \Omega$  und einer Ersatzkapazität von  $C = 100 \text{ pF}$ .  
Bezeichnungen siehe Fig. 9

## 2.2.2 Dämpfungswiderstand $R_s = 500 \Omega$

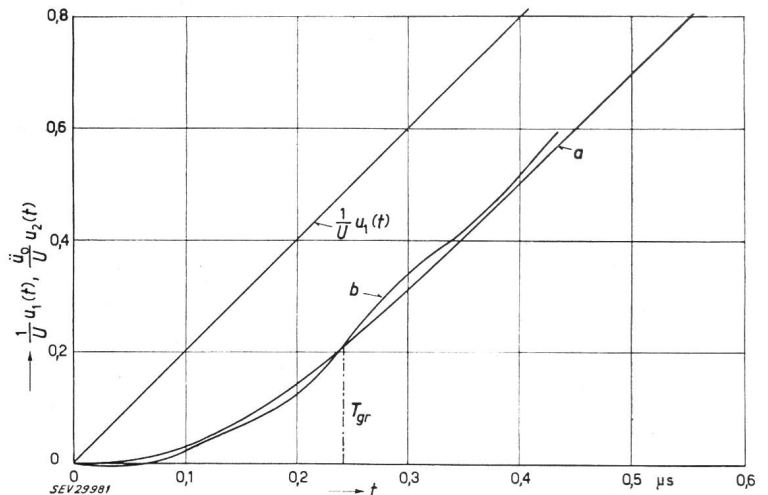
Auf Fig. 12, 13 und 14 sind die übertragenen Steilstöße für einen Dämpfungswiderstand  $R_s = 500 \Omega$  und Ersatzkapazitäten der Messanordnung von  $C = 100 \text{ pF}$ ,  $300 \text{ pF}$  und  $500 \text{ pF}$  angegeben. Die entsprechenden Grenzabschneidezeiten belaufen sich dabei zu  $T_{gr} = 0,28 \mu\text{s}$ ,  $0,25 \mu\text{s}$  und  $0,16 \mu\text{s}$ .

## 2.3 Messanordnung nach Fig. 4c mit Dämpfungswiderstand $R_s$ , Parallelwiderstand $R_p$ und Ersatzkapazität $C$

Zuletzt soll noch der Fall einer Messanordnung nach Fig. 4c mit einem Parallelwiderstand  $R_p = 10 \text{ k}\Omega$ , d. h. mit einem in der Stoßspannungsmesstechnik sehr geläufigen Wert für den Widerstand des Spannungsteilers, berechnet werden. Für den Dämpfungswiderstand sei  $R_s = 300 \Omega$ , für die Ersatzkapazität des Teilers  $C = 500 \text{ pF}$  angenommen, um einen Vergleich mit dem unter 2.2 in Fig. 11 dargestellten Fall für  $R_p = \infty$  zu ermöglichen.

Nach Gl. (48) und (49) ist:

$$\kappa' = \frac{300 + 10\,000 - 388}{10\,000 \cdot 500 \cdot 10^{-12} (300 + 388)} = 2,88 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$



$$\alpha' = \frac{300 + 10\,000 + 388}{10\,000 \cdot 500 \cdot 10^{-12} (300 + 388)} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

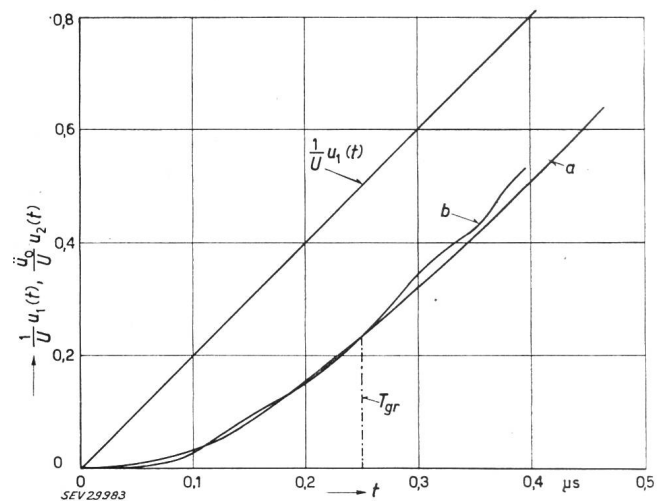


Fig. 13

Wie Fig. 9, aber mit einem Dämpfungswiderstand von  $R_s = 500 \Omega$  und einer Ersatzkapazität von  $C = 300 \text{ pF}$ .



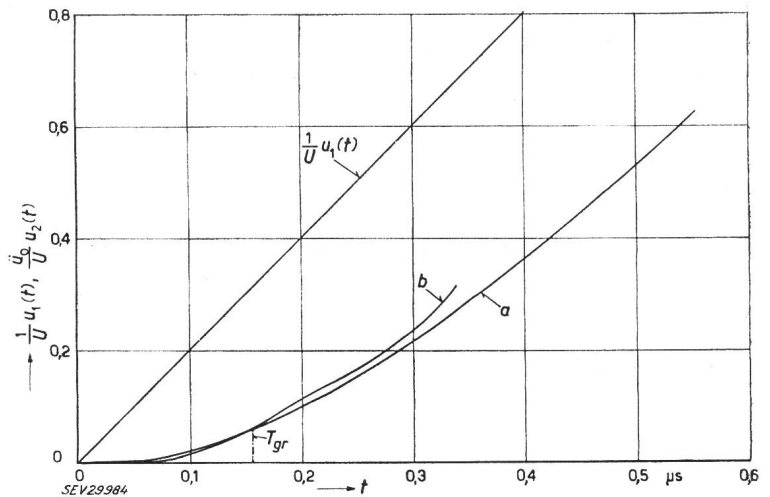
Nach Gl. (52)...(55) ist ferner mit  $\nu = 0,128$ :

$$\begin{aligned}\omega' &= 0,07 \\ \lambda' &= 0,341 \\ \gamma' &= -0,293 \cdot 10^{-6} \\ \delta' &= 1,12\end{aligned}$$

Die Ausrechnung der beiden ersten Komponenten für den übertragenen Steilstoss nach den Gl. (50) und (51) ergibt nach Tabelle III:

Fig. 14

Wie Fig. 9, aber mit einem Dämpfungswiderstand von  $R_s = 500 \Omega$  und einer Ersatzkapazität von  $C = 500 \text{ pF}$   
Bezeichnungen siehe Fig. 9



Komponenten des übertragenen Steilstosses für  $R_p = 10 \text{ k}\Omega$ ,  
 $R_s = 300 \Omega$ ,  $C = 500 \text{ pF}$   
Zuleitung als verlustloser Wellenleiter

Tabelle III

Komponente	Anstiegszeit $T$ [ $\mu\text{s}$ ]		
	0,05	0,1	0,15
$u_{20}$	0,02	0,13	0,247
$u_{21}$		-0,004	-0,025
$u_2$	0,02	0,126	0,222

Vergleicht man diese Werte mit den entsprechenden Komponenten für eine Messanordnung mit  $R_s = 300 \Omega$ ,  $C = 500 \text{ pF}$  und  $R_p = \infty$  ( $u_{20} = 0,017$ ,  $u_{21} = 0,127$ ,  $u_{22} = 0,226$ ), so ist ersichtlich, dass die Ergebnisse praktisch gleich sind. Dies bedeutet, dass der Parallelwiderstand  $R_p$  in seiner, in der Stoßspannungsmesstechnik üblichen Grösse keinen Einfluss auf das Problem der Zuleitungsdarstellung ausübt, und die Ausrechnung weiterer Komponenten in Tabelle III sich erübrigt.

### 3. Schlussfolgerungen

Die in Fig. 6...14 berechneten Fälle des Einflusses der Zuleitungsdarstellung bei der Messung sehr hoher, rasch veränderlicher Steilstösse ergeben eine klare Antwort auf das gestellte Problem. Wie aus diesen Figuren ersichtlich, ist der Übertragungsfehler bei Annahme der Zuleitung als verlustlosen

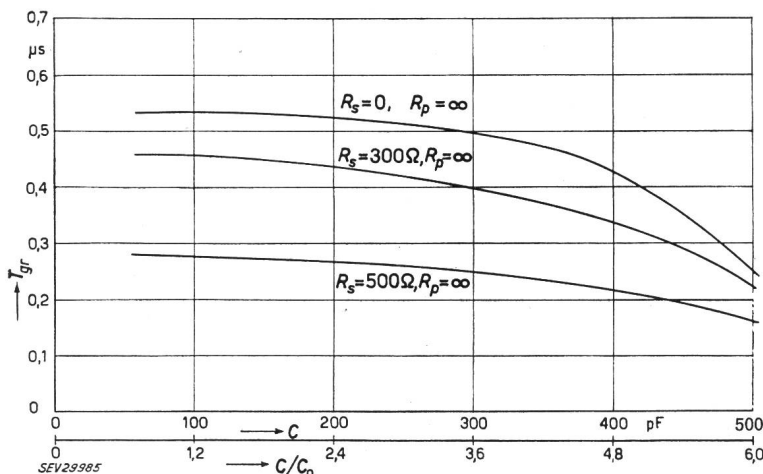
Wellenleiter zuerst grösser als bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung als konzentrierte Induktivität  $L$ , um dann nach einer bestimmten Grenzanstiegszeit  $T_{gr}$  [ $\mu\text{s}$ ] endgültig in den Fehlerbereich bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung zu treten. Beim Fehlen eines Dämpfungswiderstandes  $R_s$  ist die Grenzanstiegszeit  $T_{gr}$  durch den Schnittpunkt der Einhüllenden der beiden Schwingungen  $a$  und  $b$  gegeben (s. Fig. 6...8), indem diese allgemein in der Phase verschoben sind. Ist ein Dämpfungswiderstand vorhanden, so schwingt der übertragene Steilstoss nach Kurve  $b$  um den Verlauf des übertragenen Steilstosses bei vereinfachter Darstellung der Zuleitung nach Fig.  $a$ , und tritt dann nach der Grenzanstiegszeit  $T_{gr}$  definitiv in dessen Fehlerbereich ein.  $T_{gr}$  stellt somit die kürzeste Anstiegszeit des linearen Steilstosses dar, für welche die vereinfachte Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität noch zulässig ist, indem dann der gleiche oder grössere Übertragungsfehler als bei der genaueren Darstellung der Zuleitung als verlustlosen Wellenleiter erhalten werden. Für sämtliche Anstiegszeiten  $T > T_{gr}$  befindet man sich mit der vereinfachten Darstellung der Zuleitung auf der sicheren Seite der Vorausbestimmung des Übertragungsfehlers, indem eher zu hohe Fehlerwerte erhalten werden.

Die in Fig. 6...14 berechneten Beispiele sind in Fig. 15 und 16 zusammengefasst. Fig. 15 stellt die Abhängigkeit der Grenzanstiegszeit  $T_{gr}$  einer 10-m-Zuleitung von der Ersatzkapazität  $C$  des Spannungsteilers, bzw. vom Verhältnis  $C/C_0$  (Ersatzkapazität des Teilers durch gesamte Erdkapazität der Zuleitung) dar. Wie ersichtlich, wird der ungünstigste Fall für  $R_s = 0$ , d. h. für Messanordnungen ohne Dämpfungswiderstand erreicht. Dieser Fall ergibt (s. Fig. 15) die höchsten Grenz-Anstiegszeiten, die um so höher sind, je geringer die Teilerkapazität  $C$ , bzw. das Verhältnis

Fig. 15

Grenzanstiegszeit der Zulässigkeit einer vereinfachten Darstellung der 10-m-Zuleitung einer Messanordnung bei Steilstossmessung in Abhängigkeit von der Ersatzkapazität des Teilers bzw. von  $C/C_0$

$T_{gr}$  Grenzanstiegszeit;  $R_s$  Dämpfungswiderstand;  $C$  Ersatzkapazität des Teilers;  $C_0$  Erdkapazität der Zuleitung



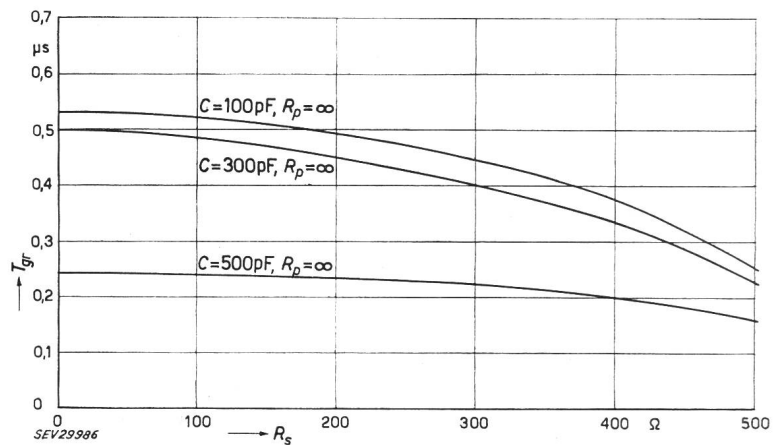
$C/C_0$  ist. Dies bedeutet, dass bei hochwertigen Stoßspannungs-Messanordnungen, die bekanntlich eine möglichst geringe Teilerkapazität aufweisen sollen, und dessen Grenzwert für sehr hohe Spannungen etwa bei  $C = 100 \text{ pF}$  liegt, das Ersatzschema der Zuleitung einen weitaus grösseren Einfluss hat und mehr zu beachten ist als bei Messanordnungen mit grosser Teilerkapazität  $C$ , die dann auch grössere Übertragungsfehler aufweisen.

Bei vorhandenem Dämpfungswiderstand wird  $T_{gr}$  mit grösserem  $R_s$  kürzer, die vereinfachte Darstellung der Zuleitung wird bereits bei Steilstössen mit kürzerer Anstiegszeit — Fig. 16 entsprechend — zulässig.

Fig. 16

Wie Fig. 15, aber in Abhängigkeit des Dämpfungswiderstandes

Bezeichnungen siehe Fig. 15



Ganz allgemein ergibt sich aus den Fig. 15 und 16, dass die vereinfachte Darstellung der 10-m-Zuleitung einer Messanordnung für Stoss mit  $C = 100 \text{ pF}$  bereits für Steilstösse mit  $T > 0,53 \mu\text{s}$  zulässig ist — ein Ergebnis, das bestimmt zu begrüßen ist. Obwohl sämtliche Beispiele für eine 10-m-Zuleitung berechnet wurden, geben die Fig. 15 und 16 auch Auskunft für andere Zuleitungslängen. So ist z. B. selbstverständlich, dass für sämtliche Zuleitungen, die kürzer als 10 m sind, die vereinfachte Darstellung wegen des grösseren Verhältnisses von  $C/C_0$  bei noch kürzeren Anstiegszeiten erlaubt ist, während für längere Zuleitungen, die jedoch bereits als Sonderfälle zu betrachten sind, das Gegenteil gilt.

Abschliessend sei bemerkt, dass durch eine Vorausbestimmung des Übertragungsfehlers aus den elektrischen Parametern einer Messanordnung bei Steilstoss selbst bei dem genaueren Ersatzschema der Zuleitung als verlustlosen Wellenleiter gewisse Vereinfachungen notwendig waren, wie z. B. die Annahme einer widerstandslosen Spannungsquelle am Anfang der Zuleitung und die Vernachlässigung ihrer Gegenkapazitäten zu ihren benachbarten Objekten sowie ihres Widerstandes, um überhaupt mit noch vernünftigem mathematischem Aufwand den Übertragungsfehler bestimmen zu können. Die Gegenkapazitäten der Zuleitung können eine Erhöhung von  $C_0$  herbeiführen, der Widerstand der Zuleitung sowie die selbst bei «rein» kapazitiven Teilern immer vorhandenen Ohmschen Verluste im Dielektrikum der Kondensatoren als ein zusätzlicher Dämpfungswiderstand betrachtet werden, die somit einen entgegengesetzten, gegenseitig kompensierenden Einfluss auf die Grenzanstiegszeit  $T_{gr}$  ausüben.

Erst durch eine Eichung der Messanordnung nach den in [1] ausführlich dargelegten Verfahren werden sämtliche Einflüsse erfasst und der genaue Übertragungsfehler bestimmt.

Der Zweck der hier durchgeführten Untersuchungen ist vielmehr die in der Literatur bisher ohne Beweis übliche Annahme der Zuleitung als konzentrierte Induktivität auch bei der Messung

rasch veränderlicher Steilstösse kritisch zu untersuchen und auf die Grenzen der Berechtigung und Zulässigkeit einer derartigen Annahme hinzuweisen. Obwohl die vorliegende Arbeit in erster Linie als Abklärung der Zuleitungsdarstellung in der Stoßspannungs-Messtechnik gedacht ist, können die Ergebnisse auch auf andere Gebiete der Hoch-

spannungstechnik ausgedehnt werden. Als derartige Beispiele seien die Bestimmung des Spannungsverlaufes an Ableitern, die über eine Zuleitung bestimmter Länge mit dem zu schützenden Objekt verbunden sind, ferner Hochspannungsapparate, insbesondere Stosskondensatoren, bei welchen die einzelnen Kondensatorelemente mit kürzeren oder längeren Leitungen verbunden sind, Leistungsschalter, usw. erwähnt. Auch hier dürfte der erbrachte Beweis bzw. die bestimmten Grenzen der Zulässigkeit einer vereinfachten, als konzentrierte Induktivität angenommenen Zuleitung von Nutzen sein.

## Anhang

Die in der Arbeit gebrauchten Laplace-Transformationen

Tabelle IV

Funktion im Originalbereich $f(t)$	Funktion im Bildbereich $F(p) = L[f(t)]$
$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{p^3}$
$\frac{1}{a^2} [1 + (at - 1) e^{at}]$	$\frac{1}{p(p-a)^2}$
$\frac{1}{2} t^2 e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^3}$
$\left(t + \frac{1}{2} at^2\right) e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^3}$
$\frac{1}{a^n} \left[1 - \left(1 + \frac{at}{1!} + \dots + \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{at}\right]$	$\frac{1}{p(p+a)^n}$
$\frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^n}{n!} e^{-at}\right)$	$\left(\frac{p}{p+a}\right)^{n+1} \frac{1}{p}$
$P_1(at) = \sum_{v=0}^{v=n} (-1)^v \binom{n}{v} \frac{(at)^v}{v!}$	$\left(\frac{p-a}{p}\right)^n \frac{1}{p}$
$at - \sum_{v=0}^{v=n} \left[1 - e^{-at} \sum_{\mu=0}^{\mu=n} \frac{(at)^\mu}{\mu!}\right]$	$\frac{a}{p^2} \left(\frac{a}{a+p}\right)^{n+1}$

## Literatur

- [1] Berger, K. und A. Ašner: Neue Erkenntnisse über das Verhalten und die Prüfung von Spannungsteilern zur Messung sehr hoher, rasch veränderlicher Stoßspannungen. Bull. SEV Bd. 51(1960), Nr. 16, S. 769...783.  
 [2] Ašner, A.: Peak-Voltage Measurements of Standard Impulse Voltage Waves. Proc. IEE Bd. 103(1956), Part C, Nr. 3, S. 186...189.

- [3] Ašner, A.: Neue Erkenntnisse über die Messung sehr hoher, rasch veränderlicher Stoßspannungen mittels Spannungsteiler. Diss. ETH. Zürich: Aschmann & Scheller 1960.

## Adresse des Autors:

Dr. sc. techn. A. Ašner, 73, rue de la Servette, Genève.

# Nachrichten- und Hochfrequenztechnik — Télécommunications et haute fréquence

## Einfaches Wellensieb

621.372.542

[Nach D. G. Wyatt: A Simple Wave Filter. Electronic Engng. Bd. 32(1960), Nr. 385, S. 155...157]

Zweckdienliche Hoch- und Tiefpassfilter können durch Serieschaltung eines Parallel-T-Kreises mit einem geeigneten LC-Kreis hergestellt werden. Es wird nur eine einzige Induktivität benötigt, was besonders bei tiefen Grenzfrequenzen wünschenswert ist. Diese Anordnung hat in bezug auf Einfachheit, Stabilität und Grösse sowohl gegenüber gebräuchlichen Typen, als auch gegenüber den von gegengekoppelten Verstärkern abgeleiteten Formen Vorteile.

Bekanntlich weisen herkömmliche Filter mit tiefen Grenzfrequenzen mehrere grosse Induktivitäten und Kapazitäten auf. Es sind Versuche unternommen worden, diesen Nachteil mittels aktiven Elementen zu umgehen. Anordnungen dieser Art können ihre Aufgabe für bestimmte Zwecke gut erfüllen, weisen jedoch zwei Nachteile auf: erstens sind die Amplituden- und Phasencharakteristiken gewöhnlich vom Verstärkungsgrad der verwendeten aktiven Elemente abhängig und zweitens lassen sich die Filterelemente häufig nur empirisch bestimmen. Der Aufwand wird ausserdem vergleichbar mit demjenigen herkömmlicher Filter.

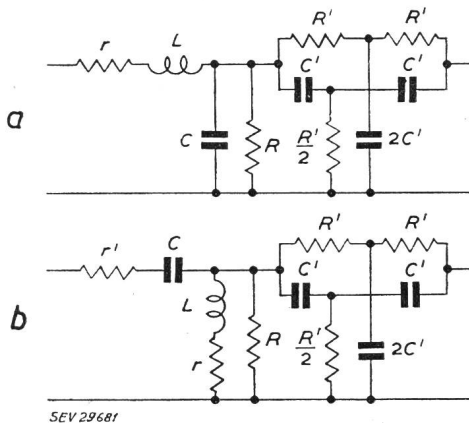


Fig. 1  
Varianten des Filters  
a Tiefpassfilter; b Hochpassfilter

Einfache Filter lassen sich nun durch Serieschaltung eines LC-Kreises mit einem geeigneten Parallel-T-Kreis gemäss Fig. 1 realisieren. Fig. 2 zeigt die Übertragungsfunktion eines derart aufgebauten Tiefpassfilters. Bei geeigneter Dimensionierung kann das Produkt der Teilübertragungsfunktionen über einen gewissen Bereich nahezu konstant gehalten werden. Die Berechnung wird im folgenden für ein Bandpassfilter erläutert. Die Grenzfrequenzen liegen bei 30 und 70 Hz.

## Tiefpassfilter

Der unbelastete Parallel-T-Kreis besitzt die folgende Übertragungsfunktion:

$$A_1 = \left[ 1 + \left( \frac{4f/f_0}{f^2/f_0^2 - 1} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (1)$$

Es bedeuten:

$f$  Signalfrequenz

$f_0$  Sperrfrequenz,  $f_0 = 1/2 \pi R' C'$

Bei der Sperrfrequenz  $f = f_0$  wird  $A_1 = 0$ .

Die Übertragungsfunktion des mit dem Widerstand  $R$  abgeschlossenen LC-Gliedes lautet:

$$A_2 = \{ [1 + \Phi - (f^2/f_c^2)]^2 + \alpha' (f^2/f_c^2) \}^{-1/2} \quad (2)$$

wobei:

$$\Phi = r/R$$

$$\alpha' = Q_c^2 (1 + \Phi/Q_c^2)^2$$

$$Q_c = \omega_c L/R$$

$$\omega_c^2 = 1/LC$$

Die Wahl der Sperrfrequenz  $f_0$  der Parallel-T-Schaltung hängt von zwei Gesichtspunkten ab:

a) Für zu grosses  $f_0$  steigt die Dämpfung oberhalb 70 Hz zu wenig rasch an.

b) Ein zu kleines  $f_0$  erfordert eine scharfe Resonanzcharakteristik im LC-Kreis.

Im vorliegenden Beispiel ist  $f_0$  mit 212,2 Hz angenommen worden ( $C' R' = 0,00075$ ).

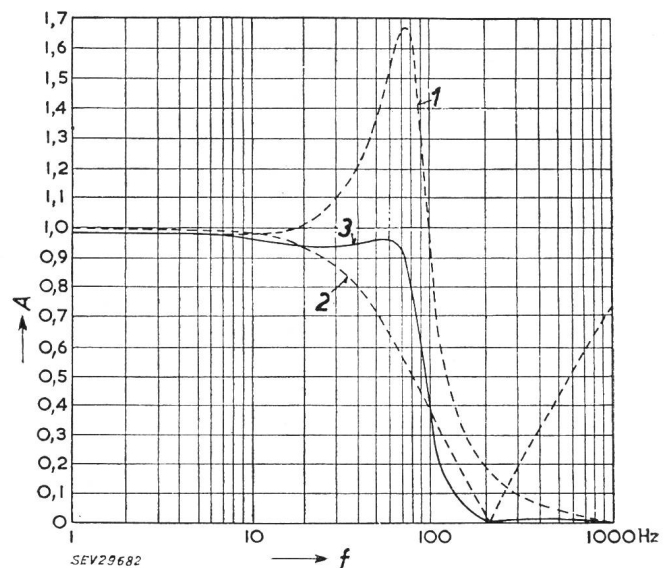


Fig. 2  
Verlauf der Übertragungsfunktionen

A Amplitude; f Frequenz

1 LC-Glied; 2 Parallel-T-Glied; 3 Kombination von a und b

Im LC-Glied muss der Widerstand  $R$  einerseits mit Rücksicht auf die Eingangsimpedanz des Parallel-T-Gliedes klein gewählt werden. Andererseits bewirkt ein niedriger Wert von  $R$  mit  $r$  zusammen eine unerwünschte Dämpfung ( $r$  stellt den Ohmschen Widerstand der Induktivität und den Quellenwiderstand dar). Die Grösse  $\Phi = r/R$  wird nun als Ausgangspunkt der Dimensionierung benutzt. Dazu werden die folgenden Werte angenommen:

$$r = 2,25 \text{ k}\Omega, R = 50 \text{ k}\Omega, \text{ somit } \Phi = 0,045$$

Die Beziehung (2) liefert mit der Einführung von  $\Phi$  und dem für zwei Frequenzen (z. B. 30 Hz und 70 Hz) notwendigen  $A_2$  ein Simultansystem für  $f_c$  und  $\alpha'$ . Unter Beachtung von  $A_1 A_2 = 1$  ergibt sich dann ein Wert von 64,2 Hz für  $f_c$ . Dieser