

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 50 (1959)  
**Heft:** 21

**Artikel:** Frequenzsprünge und Zieherscheinungen an gekoppelten Kreisen  
**Autor:** Ehrenberg, W.S.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1057824>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

ORGANE COMMUN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS (ASE) ET  
DE L'UNION DES CENTRALES SUISSES D'ELECTRICITE (UCS)

## Frequenzsprünge und Zieherscheinungen an gekoppelten Kreisen

Von W. S. Ehrenberg, Wettingen

621.372.512.3 : 621.3.016.35

Es wird das Verhalten von zwei gekoppelten Schwingkreisen im Anodenkreis eines Oszillators untersucht. Die durch gekoppelte Kreise bestimmten zwei Eigenfrequenzen bedingen eine Zweideutigkeit der Schwingfrequenz. Dies hat Frequenzsprünge und Zieherscheinungen beim Verstimmen der Kreise gegeneinander zur Folge. Die Untersuchung geht von der Annahme eines konstanten und reellen negativen Widerstandes aus, welcher das aktive Oszillatorelement vertritt. Es werden keine Einschränkungen bezüglich der Grösse der Verstimmung, der Kopplung und im allgemeinen, der Verluste gemacht. Der allgemeine Verlauf der Schwingfrequenz in Abhängigkeit von der genannten Grösse wird bestimmt, und die resultierende Funktion besprochen. Insbesondere wird eine Grenzbedingung für Frequenzsprungfreiheit ermittelt. Für den Sonderfall kleiner Verluste wird ferner ein formelles Kriterium für Ziehfreiheit aufgestellt, und die Grösse des Frequenzsprunges mit und ohne Ziehen bestimmt.

L'auteur examine le comportement de deux circuits oscillants couplés dans le circuit anodique d'un oscillateur. Les deux fréquences propres des circuits couplés donnent lieu à une ambiguïté de la fréquence d'oscillation. Il en résulte des sauts de fréquence et des sifflements lors d'un désaccord entre les circuits. L'investigation se base sur une résistance négative constante et réelle, substituée à l'élément actif de l'oscillateur. Aucune restriction n'est faite en ce qui concerne la grandeur du désaccord, le couplage et, d'une manière générale, les pertes. L'allure de la fréquence d'oscillation en fonction de ces grandeurs est déterminée et la fonction qui en résulte est discutée. L'auteur établit, notamment, une condition aux limites pour l'absence de sauts de fréquence. Pour le cas particulier de faibles pertes, il établit en outre un critère formel pour l'absence de sifflement et détermine la grandeur du saut de fréquence avec et sans sifflements.

### 1. Einführung

#### 1.1 Verhalten von gekoppelten Schwingkreisen

Die Anwesenheit von zwei Eigenfrequenzen verursacht die bekannte doppelhöckerige Resonanzkurve von gekoppelten Schwingkreisen. Die ganze Schaltung besitzt zwei Resonanzfrequenzen, die mit  $\omega_a$  und  $\omega_b$  bezeichnet werden sollen. Die Eigenfrequenzen der einzelnen Kreise seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . Jedem Paar von Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  entspricht ein solches von  $\omega_a$  und  $\omega_b$ . Insbesondere wird ein Oszillator, der auf gekoppelte Kreise arbeitet, die Wahl zwischen  $\omega_a$  und  $\omega_b$  als Schwingfrequenz haben.

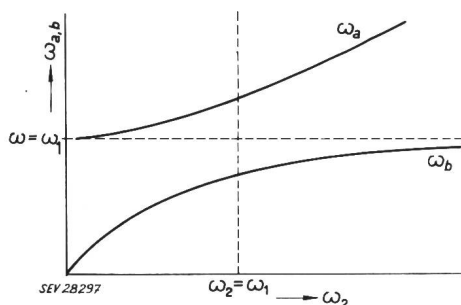


Fig. 1

Verlauf der Eigenfrequenzen gekoppelter Kreise in Funktion der Frequenz  $\omega_2$  des Sekundärkreises, bei fester Primärfrequenz  $\omega_1$

$\omega_a, \omega_b$  Resonanzfrequenzen der Schaltung

Nun wird aber ein Oszillator nicht beliebig mit den Frequenzen  $\omega_a$  oder  $\omega_b$  arbeiten, sondern diejenige Frequenz bevorzugen, welche jeweils der

Eigenfrequenz des Primärkreises näher liegt. Wird  $\omega_1$  festgehalten, und  $\omega_2$  variiert, so verlaufen  $\omega_a$  und  $\omega_b$  prinzipiell wie in Fig. 1 dargestellt.

Dem Oszillator stehen die beiden Zweige  $\omega_a$  und  $\omega_b$  nicht beliebig zur Verfügung. Grundsätzlich müsste die Schwingfrequenz, sobald  $\omega_2 = \omega_1$  wird, von dem jeweils sich von  $\omega = \omega_1$  entfernenden Ast auf den anderen hinüberwechseln. Sie tut dies jedoch

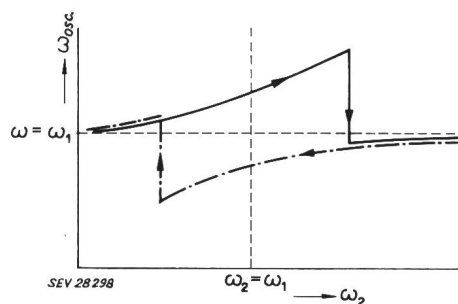


Fig. 2

Verlauf der Schwingfrequenz  $\omega_{osc}$  gekoppelter Kreise in Funktion der Frequenz  $\omega_2$  des Sekundärkreises, bei fester Primärfrequenz  $\omega_1$

erst etwas später, welche Erscheinung, mit Hysterese oder Unterkühlung verwandt, als «Ziehen» bezeichnet wird (Fig. 2).

Mit oder ohne Ziehen ist das — wörtliche — Absägen des Astes, auf dem sie sitzt, für die Schwingung sehr unerwünscht. Der Sprung kann für den Oszillator u. U. verheerende Folgen haben, wie Abbrechen der Schwingung und Auftreten von Überspannungen.

## 1. 2 Umfang der Untersuchung

Wir gehen im folgenden von der Annahme eines rein reellen, konstanten, negativen Widerstandes für den aktiven Teil des Oszillators aus. Die Verstimmung beider Kreise gegeneinander sei beliebig, ebenso der Grad der gegenseitigen Kopplung. Bis auf einen Teil der Untersuchung dürfen die Verluste ebenfalls beliebig sein. Die beiden Kreise sollen aus je einer Parallelschaltung von Induktivität, Kapazität und Widerstand bestehen. Untersucht wird der Verlauf der Schwingfrequenz in Funktion der Variation der sekundären Eigenfrequenz gegen die primäre. Es zeigt sich, dass diese Funktion vom Kopplungsfaktor  $k$  und der sekundären Kreisgüte  $Q_2$  als Parametern abhängt.

Die vorliegende Analyse wurde mit einfachen mathematischen Mitteln durchgeführt. Einige Arbeiten, welche dieselbe oder ähnliche Fragen behandeln, und für welche Obiges allerdings nicht mehr zutrifft, sind im Literaturverzeichnis aufgeführt.

## 1. 3 Ergebnisse der Untersuchung

a) *Grenzbedingung für Sprungfreiheit*: Frequenzsprünge können ganz unterbleiben, wenn die erwähnten Parameter  $k$  und  $Q_2$  einer bestimmten Beziehung genügen.

b) Die *Mindestsprungweite* wird für den Fall geringer Verluste in Funktion der Kopplung bestimmt.

$$\frac{1}{k} \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + j\omega Y_2 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \\ \left[ Y_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + j\omega Y_1 Y_2 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} + Y_2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - j \frac{1}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} \right] \end{bmatrix} \right\| \quad \left\| \begin{bmatrix} j\omega (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \\ \left[ \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + j\omega Y_1 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \right] \end{bmatrix} \right\| \quad (2)$$

c) *Ziehkriterium*: Wird dieses erfüllt, so unterbleibt das Ziehen, und die Mindestsprungweite trifft zu.

## 2. Grundgleichungen

### 2. 1 Liste der verwendeten Symbole

$\  A \ $	allgemeines Symbol für Kettenmatrix
$a_{nm}$	allgemeines Element einer Kettenmatrix
$B$	allgemeine Bezeichnung für den Imaginärteil einer Admittanz
$C$	Kapazität
$c$	im Text eingeführtes Ziehkriterium
$f$	allgemeines Symbol für Funktion
$G$	allgemeine Bezeichnung für den Realteil einer Admittanz
$j$	$\sqrt{-1}$
$k$	Kopplungsfaktor
$L$	Induktivität
$Q$	Kreisgüte
$R$	Widerstand (Realteil einer Impedanz)
$X$	Reaktanz (Imaginärteil einer Impedanz)
$x$	Variable
$Y$	Admittanz
$Y_R$	Resonanzblindleitwert
$y$	Variable
$Z$	Impedanz

$\alpha$	$\omega_2 / \omega_1$ (bezogene Frequenz)
$\Delta$	kleine Grösse
$\eta$	Variable
$\xi$	Variable
$\varrho$	Radius
$\varphi$	Winkel
$\Omega$	$\omega / \omega_1$ (bezogene Frequenz)
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_0, \omega_1, \omega_2$	Eigenfrequenzen

### 2. 2 Vierpolmatrix

Fig. 3 zeigt die behandelte Schaltung. Für die Vierpolanalyse soll das Schaltbild der gekoppelten Kreise nach Fig. 4 umgezeichnet werden. Die Kettenmatrizen der Vierpole 1, T und 2 lauten<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \| A_1 \| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_1 & 1 \end{bmatrix} \right\| \\ \| A_T \| &= \left\| \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} & j\omega (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \\ \frac{-j}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} & \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \end{bmatrix} \right\| \\ \| A_2 \| &= \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_2 & 1 \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (1)$$

Die Matrix der gesamten Schaltung besteht aus dem Produkt dieser Matrizen, in der Reihenfolge  $1 \times T \times 2$ . Sie lautet:

$$\left\| \begin{bmatrix} j\omega (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \\ \left[ \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} + j\omega Y_1 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \right] \end{bmatrix} \right\| \quad (2)$$

### 2. 3 Admittanzgleichungen

Für die Kettenmatrix

$$\| A \| = \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|$$

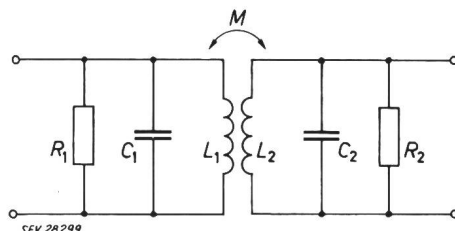


Fig. 3  
Schaltbild der behandelten gekoppelten Kreise  
 $M$  Gegeninduktivität von  $L_1$  und  $L_2$   
Weitere Bezeichnungen siehe im Text

welche im Leerlauf, also ohne Abschlussimpedanz ist, wird die Eingangsadmittanz:

$$Y_{\text{eing.}} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

In reelle und imaginäre Anteile gruppiert, wird die Admittanz:

<sup>1)</sup> Siehe z. B. Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik.

$$Y_{eing.} = \frac{\left\{ \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} - \omega^2 \left( \frac{C_1}{R_2} + \frac{C_2}{R_1} \right) (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \right\}}{\left\{ \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - \omega^2 C_2 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \right\} + j \frac{\omega}{R_2} (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2}} + \frac{j \left\{ \omega \left( C_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} + C_2 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right) + \left( \frac{\omega}{R_1 R_2} - \omega^3 C_1 C_2 \right) (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} - \frac{1}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} \right\}}{\left\{ \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} - \omega^2 C_2 (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2} \right\} + j \frac{\omega}{R_2} (1 - k^2) \sqrt{L_1 L_2}} \quad (3)$$

Mit folgenden Grössen:

- $Q_1$  primäre Kreisgüte =  $R_1 \sqrt{C_1/L_1}$   
 $Q_2$  sekundäre Kreisgüte =  $R_2 \sqrt{C_2/L_2}$   
 $\omega_1$  primäre Eigenfrequenz =  $1/\sqrt{L_1 C_1}$   
 $\omega_2$  sekundäre Eigenfrequenz =  $1/\sqrt{L_2 C_2}$   
 $k$  Kopplungsfaktor =  $M/\sqrt{L_1 L_2}$   
 $Y_{R1}$  primärer Resonanzblindleitwert =  $\sqrt{C_1/L_1}$   
 $Y_{R2}$  sekundärer Resonanzblindleitwert =  $\sqrt{C_2/L_2}$   
 kann Gl. (3) umgeformt werden in:

$$Y_{eing.} = Y_{R1} \frac{\left\{ \left( \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_2} \right) \frac{1}{Q_1} + \left( \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_1} \right) \frac{1}{Q_2} + \left( \frac{\omega_1}{\omega_1} \cdot \frac{1}{Q_2} + \frac{\omega}{\omega_2} \cdot \frac{1}{Q_1} \right) \cdot k^2 \right\}}{\left\{ \left( \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_2} \right) + \frac{\omega}{\omega_2} k^2 \right\} + j \frac{1 - k^2}{Q_2}} + \frac{j \left\{ \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \right) - \left( \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{\omega}{\omega_2} \right) k^2 + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \left( \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{\omega}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{\omega_2}{\omega} \right) \right\}}{\left\{ \left( \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_2} \right) + \frac{\omega}{\omega_2} k^2 \right\} + j \frac{1 - k^2}{Q_2}} \quad (4)$$

Der Ausdruck  $1/\sqrt{LC}$  liefert zwar nur für grössere  $Q$  die tatsächliche Eigenfrequenz. Es soll hier jedoch dieser Ausdruck stets formell als Eigenfrequenz bezeichnet werden.

In Real- und Imaginärteile gegliedert:

$$G = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \quad B = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Damit lautet die imaginäre Schwingbedingung:

$$bc - ad = 0$$

Setzt man die entsprechenden Ausdrücke der Gl. (4) ein, dann wird:

$$\left\{ \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_2} (1 - k^2) \right\} \left\{ \frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{1}{Q_1 Q_2} (1 - k^2) - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2} (1 - k^2) - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2} \right\} - \frac{1 - k^2}{Q_2} \left\{ \frac{\omega_2}{\omega} \cdot \frac{1}{Q_1} + \frac{\omega_1}{\omega} \cdot \frac{1}{Q_2} - \frac{\omega}{\omega_2} \cdot \frac{1}{Q_1} (1 - k^2) - \frac{\omega}{\omega_1} \cdot \frac{1}{Q_2} (1 - k^2) \right\} = 0 \quad (5)$$

### 3. Schwingbedingungen

Die in der besprochenen Schaltung primärseitig angeschlossene Energiequelle soll durch einen reellen, frequenzunabhängigen negativen Widerstand vom Absolutwert  $|R_0|$  ersetzt werden. Die Schwingbedingungen lauten dann:

$$G + 1/R_0 = 0 \quad (\text{reelle Schwingbedingung})$$

$$B = 0 \quad (\text{imaginäre Schwingbedingung})$$

wobei  $G + jB = Y$  die Schaltungsadmittanz bedeutet.

Bei Einführung der bezogenen Frequenzen

$$\alpha = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$$

erhält man schliesslich aus Gl. (5):

$$\frac{\Omega^3}{\alpha^2} (1 - k^2)^2 - \Omega (1 - k^2) \left( 2 + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right) + \frac{1}{\Omega} \left( 2 - k^2 + \alpha^2 - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right) - \frac{\alpha^2}{\Omega^3} = 0 \quad (6)$$

Man beachte, dass die Frequenzgleichung somit von  $Q_1$  unabhängig ist. Da die Verlustwiderstände der Kreise als Parallelwiderstände vorausgesetzt wurden, ist diese Tatsache auch physikalisch ohne weiteres verständlich.

Während die Gl. (6) für  $\Omega$  bi-kubisch ist, ist sie für  $\alpha$  bi-quadratisch. Umgeschrieben wird sie:

$$\alpha^4 Q_2^2 (\Omega^2 - 1) + \alpha^2 \Omega^2 \left\{ (2 - k^2) Q_2^2 - (1 - k^2) - \Omega^2 (1 - k^2) \right\} [2 Q_2^2 - (1 - k^2)] + \Omega^4 Q_2^2 (1 - k^2) [\Omega^2 (1 - k^2) - 1] = 0 \quad (7)$$

#### 3.1 Allgemeine Frequenzgleichung

Man erhält die Frequenzgleichung beim Ansetzen der imaginären Schwingbedingung.

Gl. (4) hat die Form:

$$Y = \frac{a + jb}{c + jd}$$

Mit den Abkürzungen:

$$A = \Omega^2 (1 - k^2) [\Omega^2 (1 - k^2) - 1]$$

$$B = \Omega^2 [(2 - k^2) - 2 \Omega^2 (1 - k^2)]$$

lauten die Lösungen von Gl. (7):

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{-(B + A/Q_2^2) \pm \sqrt{\Omega^4 k^4 + 2AB/Q_2^2 + A^2/Q_2^4}}{2(\Omega^2 - 1)} \quad (8)$$

### 3.2 Spezielle Frequenzgleichung für grosses $Q_2$

Für den Fall hoher sekundärer Kreislage geht Gl. (8) über in:

$$\begin{aligned}\alpha_1^2 &= \frac{\Omega^2 [1 - \Omega^2 (1 - k^2)]}{1 - \Omega^2} \\ \alpha_2^2 &= \Omega^2 (1 - k^2)\end{aligned}\quad (9)$$

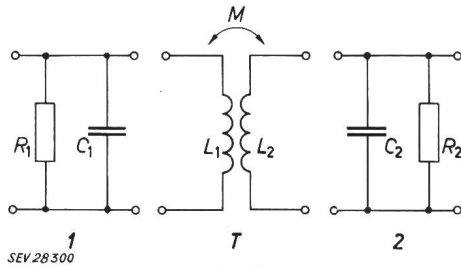


Fig. 4

Für die Vierpolanalyse umgezeichnetes Schaltbild der gekoppelten Kreise  
Bezeichnungen siehe im Text

### 3.3 Die reelle Schwingbedingung für den Sonderfall von grossen Kreislagen

Die reelle Schwingbedingung  $G = 1/|R_0|$  lässt sich mit den allgemeinen Bezeichnungen von Abschnitt 3.1 schreiben:

$$\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = 1/|R_0|$$

Wenn man die entsprechenden Ausdrücke der Gl. (4) einsetzt, und dabei  $Q_1$  und  $Q_2$  vernachlässigt, erhält man die nach  $\Omega$  geordnete Gleichung:

$$\Omega^4 (1 - k^2)^2 - \Omega^2 \cdot 2\alpha^2 (1 - k^2) + \alpha^3 \left( \alpha - k^2 \frac{|R_0| Y_{R1}}{Q_2} \right) = 0 \quad (10)$$

Mit der Abkürzung

$$c = \sqrt{\frac{|R_0| Y_{R1}}{R_2 Y_{R2}}} = \sqrt{\frac{|R_0| Y_{R1}}{Q_2}} = \sqrt{\frac{|R_0| \omega_2 L_2}{R_2 \omega_1 L_1}}$$

lauten die Lösungen von Gl. (10):

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\alpha^2 \left( 1 \pm \frac{k c}{\sqrt{\alpha}} \right)}{1 - k^2} \quad (11)$$

## 4. Aussagen über Frequenzsprungweite und Ziehen

Mit den Ergebnissen der Abschnitte 3.2 und 3.3 lässt sich einiges über die Frequenzsprungweite und das Ziehen für den Fall grösserer Kreislagen aussagen.

### 4.1 Die minimale Sprungweite

Solange man von Zieherscheinungen absieht, wird der Sprung von einem Funktionsast (s. Fig. 2 und 5) zum anderen jeweils dort erfolgen, wo die Eigenfrequenzen beider Kreise gerade gleich sind. Es wird dort jener Ast bevorzugt, welcher im weiteren Verlauf der primären Eigenfrequenz ( $\omega = \omega_1$ , also  $\Omega = 1$ ) immer näher rückt, während der andere sich von ihr entfernt.

Für minimal mögliche Sprungweite gilt also:

$$\omega_1 = \omega_2, \text{ d. h. } \alpha = 1, \alpha^2 = 1$$

Aus Gl. (9) erhält man explizit für  $\Omega^2$ :

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\alpha^2 + 1 \pm \sqrt{(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2(1 - k^2)}}{2(1 - k^2)} \quad (12)$$

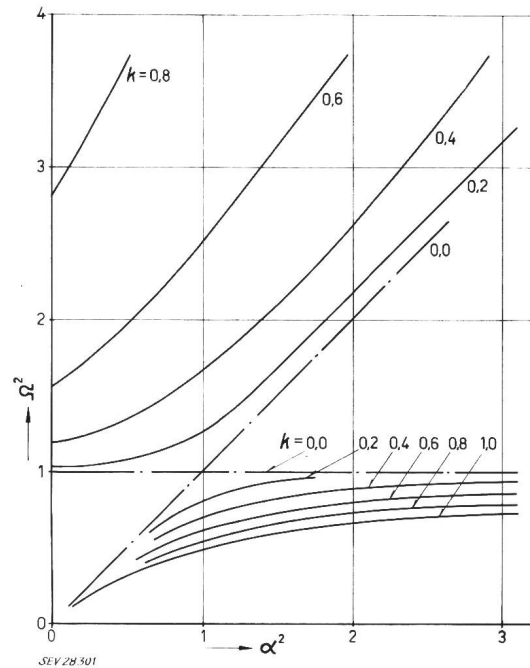


Fig. 5

Verlauf der Frequenzfunktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$  im Grenzfall hoher Kreislagen, mit  $k$  als Parameter

Für minimale Sprungweite erhält man durch Einsetzen von  $\alpha^2 = 1$ :

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{1 - k}; \quad \Omega_2^2 = \frac{1}{1 + k} \quad (13)$$

Der arithmetische Mittelwert von  $\Omega_1^2$  und  $\Omega_2^2$  ist

$$\Omega_m^2 = \frac{\Omega_1^2 + \Omega_2^2}{2} = \frac{1}{1 - k^2} \quad (14)$$

Geht man aus praktischen Gründen auf  $\Omega$  über, so erhält man für die relative Sprungweite:

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_m} = \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{\Omega_m} = \sqrt{1 + k} - \sqrt{1 - k} \quad (15)$$

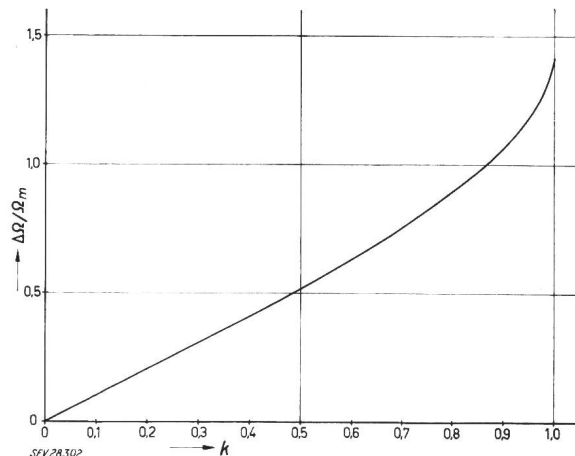


Fig. 6

Die minimal mögliche Frequenzsprungweite  $\Delta \Omega / \Omega_m$  im Grenzfall hoher Kreislagen, in Funktion der Kopplung  $k$

Den Verlauf dieses Ausdrucks in Funktion der Kopplung zeigt Fig. 6.

#### 4.2 Das Ziehkriterium

Die im letzten Abschnitt ermittelte minimal mögliche Frequenzsprungweite entspricht einem Mangel von Zieherscheinungen. Es soll nun ein formelles Kriterium für diesen wünschenswerten Zustand gefunden werden.

Für minimale Sprungweite wird  $\alpha = 1$ ; setzt man die in diesem Fall erhaltenen Lösungen in Gl. (13) für  $\Omega^2$  sowie den Wert 1 für  $\alpha$  in folgende, aus Gl. (11) umgeformte Gleichung für  $c$  ein:

$$c = \pm \left[ \frac{(1-k^2) \Omega^2}{\alpha^2} - 1 \right] \frac{\sqrt{\alpha}}{k} \quad (16)$$

(die positive Lösung ist zu nehmen)

so erhält man als Lösung den Wert  $c = 1$ . Damit lautet das Ziehkriterium:

$$c^2 = \frac{|R_0| Y_{R1}}{R_2 Y_{R2}} = \frac{|R_0| \omega_2 L_2}{R_2 \omega_1 L_1} = 1 \quad (17)$$

#### 4.3 Die Sprungweite für $c \neq 1$

Wenn der Ausdruck

$$c^2 = \frac{|R_0| Y_{R1}}{R_2 Y_{R2}} < 1$$

ist, so erfolgt der Sprung nicht mehr dort, wo die Eigenfrequenzen beider Kreise gleich sind. Es tritt jetzt ein «Frequenzziehen» ein, analog etwa der Unterkühlung einer kristallinen Lösung.

In Gl. (16) setze man einander zugeordnete Wertepaare von  $(\alpha^2 - \Omega^2)$  ein, wie sie aus den Kurven der Fig. 5 zu entnehmen sind. Dabei werden die Wertepaare demjenigen Funktionsast entnommen, welcher der Asymptote  $\Omega^2 = \alpha^2/(1-k^2)$  jeweils näher ist. Damit erhält man einander zugeordnete Wertepaare von  $(c - \alpha^2)$ . In Übereinstimmung mit dem Vorgehen in Abschnitt 4.1 [Gl. (14) und (15)], wird der Ausdruck für die relative Frequenzsprungweite gebildet. Für  $\Omega^2$  setzt man die Werte nach Gl. (12) ein, womit man die zugeordneten  $(c - \Omega^2)$ -Paare erhält. Der relative Frequenzsprung wird dann:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_m} = 2 \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}(1-k^2)}} - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}(1-k^2)}}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}(1-k^2)}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2}(1-k^2)}}} \quad (18)$$

Diese Funktion ist für den Fall  $k = 0,3$  über  $c$  in Fig. 7 aufgetragen.

Seiner Herleitung entsprechend, ist  $c$  ein Mass für die Schwingneigung des Kreises, einschliesslich des durch  $-R_0$  dargestellten aktiven Elementes. Je grösser die Schwingneigung, und somit je kleiner  $c$ , desto weiter von  $\Omega = 1$  ist die Schaltung auf dem «falschen» Ast schwingfähig, und um so stärker wird das Ziehen. Bei  $c = 1$  ist bei  $\alpha = 1$  eine Schwingung gerade noch möglich. Wird  $c$  aber grösser als 1, so entsteht ein leerer Bereich (siehe Fig. 8). Beim Durchlaufen von  $\alpha^2$  ist zwischen den

Punkten  $A$  und  $B$  kein Schwingen möglich, weder auf dem oberen, noch auf dem unteren Ast.

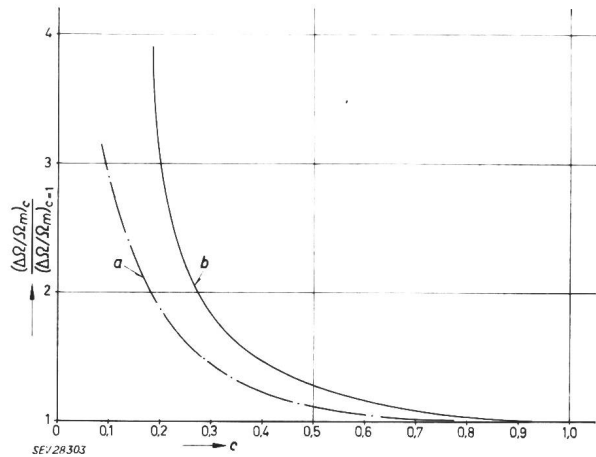


Fig. 7

Vergrösserung der Frequenzsprungweite infolge von Ziehen, in Funktion der Ziehgrösse  $c$

Die Sprungweite ist auf den Minimalwert (Fig. 6) bezogen.

Die Kurve gilt für den Fall  $k = 0,3$

$a$  Sprung von oberem auf unteren Ast;  $b$  Sprung von unterem auf oberen Ast

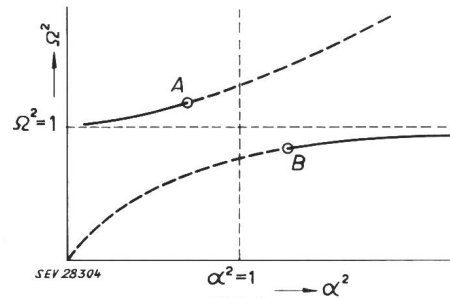


Fig. 8

Veranschaulichung des Verlaufs der Frequenzfunktion für den Fall, dass die Ziehgrösse  $c > 1$  wird

$A, B$  Punkte, zwischen welchen auf keinem Ast ein Schwingen möglich ist

Weitere Bezeichnungen siehe im Text

## 5. Diskussion der allgemeinen Frequenzgleichung

Kehren wir jetzt zu der in Abschnitt 3.1 bestimmten, allgemeinen Frequenzgleichung zurück [Gl. (6), (7) und (8)]. In den folgenden Abschnitten soll diese Funktion etwas näher untersucht werden.

### 5.1 Grenzkurven für hohe Kreisgüten

Die Grenzkurven für grosses  $Q_2$  (die Frequenzgleichung ist ja von  $Q_1$  unabhängig) sind durch Gl. (9), Abschnitt 3.2 gegeben. Fig. 5 zeigt den Verlauf dieser Grenzkurven für verschiedene Kopplungsgrade  $k$ .

### 5.2 Ausgezeichnete Punkte

a) Punkt  $\alpha^2 = 0$ ;  $\Omega^2 = 0$ . Alle Kurven der behandelten Funktion gehen durch den Nullpunkt des  $(\alpha^2, \Omega^2)$ -Koordinatensystems.

- b) Punkte  $\alpha^2 = 1$ ;  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$ . Beim Einsetzen des Wertes  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$  in Gl. (8) erhält man die Lösungen:

$$\alpha_1^2 = 1; \quad \alpha_2^2 = 0$$

Den durch die erste Lösung gegebenen Punkt bezeichnet man als Mittelpunkt. Die zweite Lösung bestimmt die Punkte:

- c)  $\alpha^2 = 0$ ;  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$   
d)  $\alpha^2 = \infty$ ;  $\Omega^2 = 1$ . Dieser Punkt folgt aus Gl. (8) beim Einsetzen von  $\Omega^2 = 1$ .

Die Lage der ausgezeichneten Punkte ersieht man aus Abb. 9.

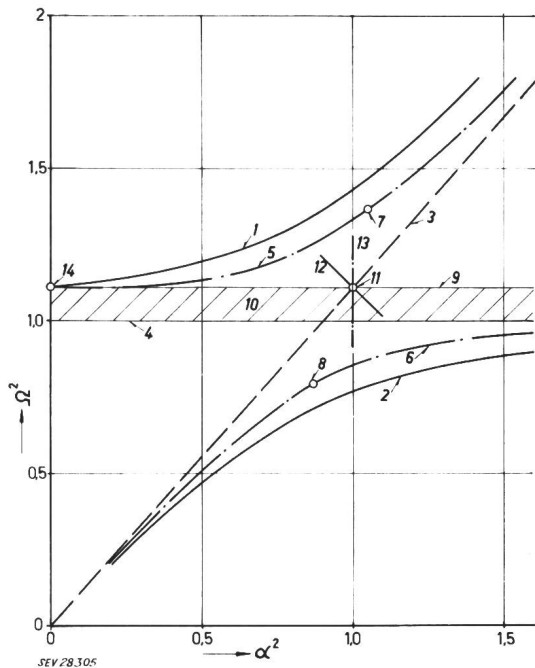


Fig. 9

Überblick über die im Text ermittelten Besonderheiten der Frequenzfunktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$ , mit  $k = 0,3$

1, 2 Grenzkurven bei hoher Kreisgüte; 3 schräge Asymptote  $\Omega^2 = \alpha^2/(1-k^2)$ ; 4 horizontale Asymptote  $\Omega^2 = 1$ ; 5, 6 Ortskurve der Extremalwerte der Funktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$ ; 7, 8 bestimmtes Paar von Extremalwerten, zu bestimmtem  $Q_2$ -Wert; 9 Linie  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$ ; 10 für Extremalwerte von  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$  verbotener Bereich; 11 der Mittelpunkt,  $\alpha^2 = 1$ ,  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$ ; 12 Neigung einer bestimmten Kurve im Mittelpunkt; 13 Grenzneigung für Sprungfreiheit; 14 der Punkt  $\alpha^2 = 0$ ,  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$

### 5.3 Punkte horizontaler Tangente

Gl. (8) liefert zu jedem Wert von  $\Omega^2$  zwei solche für  $\alpha^2$ . Die beiden Lösungen fallen zusammen, wenn der Ausdruck unter der Wurzel in Gl. (8) verschwindet. Jenseits des entsprechenden Grenzwertes von  $\Omega^2$  wird die Wurzel imaginär, und  $\alpha^2$  komplex. Im reellen Bereich der Funktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$  ist man somit an einem Extremum angelangt. Mit dem Verschwinden der genannten Wurzel erhält man eine Bedingungsgleichung für  $\Omega^2_{extr.}$ :

$$\Omega^4 k^4 + \frac{2AB}{Q_2^2} + \frac{A^2}{Q_2^4} = 0 \quad (19)$$

wobei  $A$ ,  $B$  die früher (s. Abschnitt 3.1) eingeführten Abkürzungen sind. Gl. (19) ergibt die Lösungen (wobei vorteilhaft nach  $Q_2$  aufgelöst wird):

$$Q_2^2 = \frac{A}{B \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Omega^4 k^4}{B^2}} \right)} \quad (20)$$

Da  $Q_2$  reell sein muss, darf der Ausdruck unter der Wurzel in Gl. (20) nicht negativ werden. Daraus ergibt sich ein  $\Omega^2$ -Bereich, in welchem keine Extremalwerte auftreten können. Diese sind bestimmt durch:

$$1 - \frac{\Omega^4 k^4}{B^2} < 0 \quad (21)$$

Die Grenzen des verbotenen Bereichs sind durch die aus Gl. (21) folgende Gleichung bestimmt:

$$\Omega^4 (1 - 2k^2 + k^4) - \Omega^2 (2 - 3k^2 + k^4) + (1 - k^2) = 0 \quad (22)$$

Die beiden positiven Lösungen dieser bi-quadratischen Gleichung sind:

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{1-k^2}; \quad \Omega_2^2 = 1 \quad (23)$$

Die entsprechenden  $Q_2$ -Werte sind, nach Gl. (20):

$$(Q_2^2)_{1,2} = \left( -\frac{A}{B} \right) \Omega_1 \quad (24)$$

Mit den  $\Omega^2$ -Werten nach Gl. (23) lauten die  $(\Omega^2 - Q_2)$ -Paare an den Grenzen des für Extremalwerte von  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$  verbotenen Bereichs:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= 1/(1-k^2); & Q_2 &= 0 \\ \Omega^2 &= 1; & Q_2 &= \sqrt{1-k^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Der erste Fall entspricht dem oberen, der zweite dem unteren Kurvenast (siehe z. B. Fig. 9).

Die Auswertung der Gl. (20) für ein  $k$  von 0,3 zeigt Fig. 10. Die zu den  $\Omega^2_{extr.}$ -Werten gehörigen  $\alpha^2$ -Werte findet man aus Gl. (8), wenn man, laut Definition, die Wurzel gleich 0 setzt:

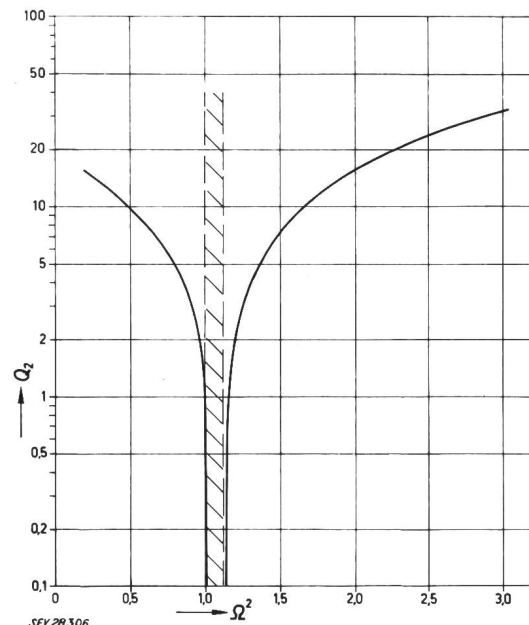


Fig. 10

Den Extremalwerten von  $\Omega^2$  [Punkte horizontaler Tangente der Funktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$ ] zugeordnete Werte von  $Q_2$  für  $k = 0,3$   
Keine Extremalwerte von  $\Omega^2$  im schraffierten Gebiet



$$\alpha^2 = -\frac{(B + A/Q_2^2)}{2(\Omega^2 - 1)} \quad (26)$$

Die entsprechenden  $(\Omega^2 - \alpha^2)$ -Werte sind für  $k = 0,3$  in Fig. 9 aufgetragen. Die eingezeichnete Kurve ist zu verstehen als Ortskurve der Extremalwerte der durch  $k = 0,3$  bestimmten Kurvenschar der Funktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$ .

#### 5.4 Neigung der Tangente an die Kurven im Mittelpunkt

Zur Bestimmung der Neigung einer Kurve muss diese nach der unabhängigen Variablen abgeleitet werden. Die Neigung in einem bestimmten Punkt wird durch Einsetzen der Koordinaten des Punktes in die Ableitung bestimmt.

$\alpha^2$  allgemein nach  $\Omega^2$  abzuleiten wäre sehr mühsam. Da hier aber nur der eine Punkt  $\Omega^2 = 1/(1-k^2)$ ,  $\alpha^2 = 1$  interessiert, soll für  $\Omega^2$  gesetzt werden:

$$\Omega^2 = \frac{1}{1-k^2} (1 + \Delta)$$

Mit  $\Delta \ll 1$  stellt dieser Ausdruck die Funktion  $\Omega^2 = f(\alpha^2)$  in der Nähe des Mittelpunktes dar. Bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung von  $\Delta$  erhält man für die verschiedenen Anteile der Gl. (8):

$$\begin{aligned} B &= -\frac{k^2 + \Delta(2 + k^2)}{1 - k^2} \\ A/Q_2^2 &= \Delta/Q_2^2 \\ A^2/Q_2^4 &= 0 \\ 2AB/Q_2^2 &= -2\frac{\Delta k^2}{(1 - k^2)Q_2^2} \\ \Omega^4 k^4 &= \frac{k^4 + 2k^4 \Delta}{(1 - k^2)^2} \\ \Omega^2 - 1 &= \frac{\Delta + k^2}{1 - k^2} \end{aligned}$$

Damit lauten die Lösungen der Gl. (8):

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{k^2 + \Delta(2 + k^2) - \frac{\Delta(1 - k^2)}{Q_2^2} \pm \left[ k^2 + \Delta \left( k^2 - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right) \right]}{2(\Delta + k^2)} \quad (27)$$

woraus schliesslich folgt

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \frac{k^2 + \Delta \left[ 1 + k^2 - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right]}{\Delta + k^2} \\ \alpha_2^2 &= \frac{\Delta}{\Delta + k^2} \end{aligned} \quad (28)$$

Die Ableitung von  $\alpha^2$  nach  $\Omega^2$  lautet allgemein:

$$\frac{d\alpha^2}{d\Omega^2} = \frac{\partial \alpha^2}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega^2} \quad (29)$$

Für  $\frac{\partial \alpha^2}{\partial \Delta}$  erhält man sofort die zwei Lösungen:

$$\frac{\partial \alpha_1^2}{\partial \Delta} = \frac{1}{k^2} \left[ k^2 - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right] \quad (30)$$

$$\frac{\partial \alpha_2^2}{\partial \Delta} = \frac{1}{k^2}$$

Der Ausdruck  $\partial \Delta / \partial \Omega^2$  ergibt:

$$\Omega^2 = \frac{1 + \Delta}{1 - k^2}; \quad \Delta = \Omega^2 (1 - k^2) - 1; \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega^2} = 1 - k^2 \quad (31)$$

Mit den Gl. (30) und (31) lauten die Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1^2}{d\Omega^2} &= \frac{1 - k^2}{k^2} \left( k^2 - \frac{1 - k^2}{Q_2^2} \right) = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \frac{d\alpha_2^2}{d\Omega^2} &= \frac{1 - k^2}{k^2} \end{aligned} \quad (32)$$

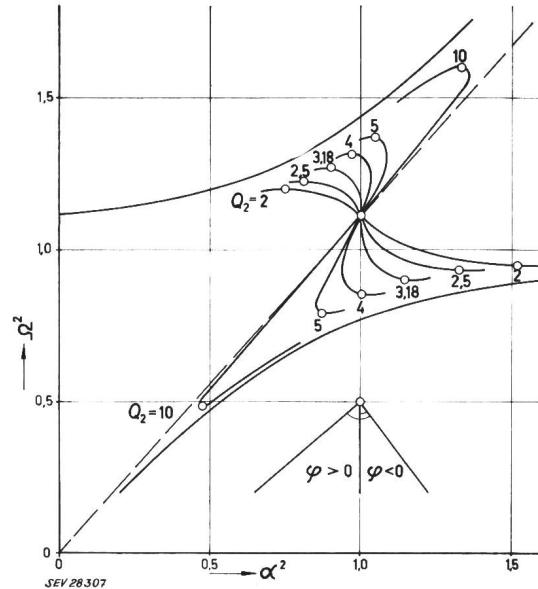


Fig. 11

Ungefäher Verlauf der Frequenzfunktion für  $k = 0,3$  und verschiedene Werte von  $Q_2$

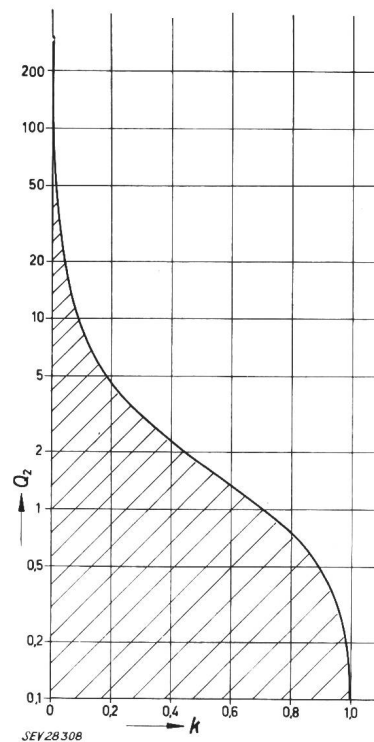


Fig. 12

Grenzbedingung für Frequenzsprungfreiheit: einander entsprechende Werte von  $Q_2$  in Funktion von  $k$   
Frei wählbar sind Wertepaare innerhalb des schraffierten Bereichs



Die zweite Lösung, unabhängig von  $Q_2$ , entspricht keiner physikalischen Realität. Der gefundene Ausdruck für die Neigung der Funktion im Mittelpunkt wurde bei der Konstruktion der Kurven im Beispiel der Fig. 11 verwendet.

### 5.5 Grenzbedingung für Sprungfreiheit

Wenn der Ausdruck in der rechten Klammer der Gl. (32a) verschwindet, wechselt der Winkel  $\varphi$  sein Vorzeichen. Aus Fig. 11 ersieht man, dass für  $\varphi > 0$  Frequenzsprünge stattfinden, für  $\varphi < 0$  hingegen nicht mehr. Die Grenze für Sprungfreiheit liegt somit bei  $\tan \varphi = 0$ , und:

$$Q_2^2 \leq \frac{1 - k^2}{k^2}; \quad k^2 \leq \frac{1}{1 + Q_2^2} \quad (33)$$

Die Funktion  $Q_2 = f(k)$ , entsprechend der erfüllten Grenzbedingung, wurde in Fig. 12 aufgetragen.

### 6. Zusammenfassung

Es wurden die Admittanzausdrücke für zwei gekoppelte Schwingkreise aufgestellt. Daraus wurde der Verlauf der Schwingfrequenz eines Oszillators bestimmt, der auf diese Kreise arbeitet. Das aktive Oszillatorelement wurde einem festen, rein reellen negativen Widerstand gleichgesetzt. Der Kreis-

verstimmung, der Kopplung und den Verlusten wurde keine Einschränkung auferlegt. Einzig bei der prinzipiellen Besprechung der Zieherscheinungen beschränkte man sich auf kleine Kreisverluste.

Es wurde zunächst der minimale Frequenzsprung in Funktion der Kopplung bestimmt, sowie ein Kriterium für Ziehfreiheit; damit konnte die Grösse des Frequenzsprunges in Abhängigkeit vom Ausmass des Ziehens ermittelt werden. Die allgemeine Beziehung für die Schwingfrequenz in Funktion der relativen Kreisverstimmung, mit Kreisgüte und Kopplung als Parameter, wurde aufgestellt. Eine Diskussion der Eigenheiten dieser Funktion führte zu einer Grenzbedingung für Frequenzsprungfreiheit.

### Literatur

- [1] Feldtkeller, R.: Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik. 6. Aufl. Stuttgart: Hirzel 1953.
- [2] Barkhausen, H.: Lehrbuch der Elektronenröhren und ihrer technischen Anwendungen. 3. Bd.: Rückkopplung, 5. Aufl. Zürich: Hirzel 1950.
- [3] Pol, B. van der: On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom. Philos. Mag. 6. Serie, Bd. 43(1922), Nr. 256, S. 700...719.
- [4] Käch, A.: Zur Frage der Frequenzstabilität selbsterregter Sender mit langen Antennenzuleitungen. AEÜ Bd. 8(1954), Nr. 11, S. 491...498; Nr. 12, S. 553...561.
- [5] Rouche, N.: Etude du régime de synchronisation de deux oscillateurs couplés. Bull. sci. AIM Bd. 69(1956), Nr. 1, S. 3...83.

### Adresse des Autors:

W. S. Ehrenberg, Dipl.-Ing. ETH, Zentralstrasse 52, Wettingen (AG).

## Die Möglichkeit zur Erhöhung der statischen Stabilitätsgrenze bei Synchronmaschinen

Von M. Canay, Bazenheid

621.313.32 : 621.016.35

In dieser Arbeit werden die theoretischen Möglichkeiten zur Erhöhung der statischen Stabilitätsgrenze gesucht. Mit Hilfe der hier angegebenen mathematischen Beziehungen kann die Steilheit der Charakteristik des Winkelreglers bei der Erzeugung der mit dem Lastwinkel proportionalen Erregung vorausberechnet werden.

### Einleitung

Wie bekannt, kann eine Synchronmaschine weder als Generator noch als Phasenschieber die statische Stabilitätsgrenze im normalen Betrieb überschreiten, die mit einem kritischen Winkel  $\delta_{max}$  begrenzt ist. Der Winkel  $\delta_{max}$  ist immer kleiner als 90 Grad. Dies beschränkt die aufgenommene Blindleistung des Generators, die man aus verschiedenen Gründen manchmal zu vergrössern dachte. Der Wunsch zur Vergrösserung der aufgenommenen Blindleistung kann bei den Generatoren, die mit weniger Leistung fast bei Leerlauf über eine grosse Leitung arbeiten, ein Bedürfnis sein, denn man würde sich damit ersparen, einen Phasenschieber in Betrieb zu setzen, wenn die Generatoren die von der grossen Leitung erforderliche Blindleistung aufnehmen könnten. Die Bedingung  $\delta < \delta_{max}$  ermöglicht aber diesen Betrieb nicht, und deshalb braucht man einen zusätzlichen Phasenschieber mit grosser aufgenommener Blindleistung in Betrieb zu nehmen. Da der Phasenschieber aber ohne zusätzlichen Regler im normalen Betrieb nur die Blindleistung von der Grösse  $1/X_d$  pu (Per Unit) aufnehmen kann, wenn man die Erregung null macht, und diese oft viel kleiner ist als

*Recherche des possibilités théoriques d'élever la limite de stabilité statique. A l'aide des relations mathématiques indiquées, on peut calculer d'avance la raideur de la caractéristique du régulateur d'angle, lors de la production de l'excitation proportionnelle à l'angle de charge.*

die normale Leistung des Phasenschiebers, sieht man ein, dass man wegen dieser Beschränkung gezwungen ist, den Phasenschieber grösser zu bauen als notwendig.

Der Winkelregler, der diese Schwierigkeiten beseitigt und einen noch sichereren Betrieb gewährleistet, hat in der letzten Zeit grosse Bedeutung bekommen.

Die theoretischen Unterlagen zur Möglichkeit der Erhöhung der Stabilitätsgrenze sollen hier zunächst mathematisch und dann graphisch behandelt und damit ein Verfahren angegeben werden, um die erforderliche Eigenschaft, nämlich die Steilheit der Charakteristik des Winkelreglers für einen beliebigen Betriebspunkt des Generators oder Phasenschiebers zu bestimmen. Mit einem solchen zusätzlichen Regler kann es gelingen, die statische Stabilitätsgrenze der Synchronmaschine theoretisch bis zur dynamischen Stabilitätsgrenze auszudehnen.

### Stabilitätsbedingung einer Synchronmaschine

Die Stabilitätsbedingung einer Synchronmaschine kann wie folgt ausgedrückt werden: