Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 44 (1953)

Heft: 24

Artikel: Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus Messreihen von Durchschlagspannungen

Autor: Krondl, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1058114

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

44e année N° 24 Samedi, le 28 Novembre 1953

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus Messreihen von Durchschlagspannungen

Von *M. Krondl*, Zürich

621.3.015.5 : 31

Die Normalverteilung und die daraus abgeleitete t-Verteilung nach «Student» (S.W. Gosset) wird kurz erläutert und das Prüfen der Durchschnitte von Messreihen mit diesen Verteilungen an einigen Beispielen gezeigt. Nachher wird die weniger bekannte, «nicht zentrale t-Verteilung» erklärt und ihre Anwendung zur Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus einer Messreihe von Durchschlagspannungen erläutert.

L'auteur décrit brièvement la distribution normale, ainsi que la distribution de t selon «Student» (S.W. Gosset), qui en découle; il montre par quelques exemples comment on examine à l'aide de ces distributions les moyennes arithmétiques de séries de mesures. Il explique ensuite la notion moins connue de «distribution de t non-centrale» et discute son application lorsqu'il s'agit d'évaluer à partir de séries de mesures de claquage la tension de tenue et ses limites de confiance.

1. Einleitung

Prof. *Linder* hat in seinem Vortrag an der Jahresversammlung des SEV und VSE in Fribourg 1952 [2][1]) gezeigt, welche Bedeutung der mathematischen Statistik in der Elektrotechnik zukommt. Die hauptsächlichsten statistischen Methoden zur Auswertung von Versuchen, die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der binomischen und Poissonschen Verteilung, der Normalverteilung und aus dieser abgeleiteten t-, F-, χ^2-Verteilung sind in den Lehrbüchern leicht zugänglich. Weniger bekannt ist die allgemeine Form der t-Verteilung, die «*nicht zentrale t-Verteilung*»[2]) (non-central t-distribution) und doch ermöglicht diese — wie im folgenden gezeigt wird — die Lösung einiger wichtiger Aufgaben, so besonders die Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus Messreihen von Durchschlägen.

Um das Verständnis zu erleichtern, wird zuerst die Normalverteilung und die (zentrale) t-Verteilung mit Beispielen aus der Elektrotechnik kurz erläutert, um am Schluss auf die nicht zentrale t-Verteilung überzugehen.

2. Die Normalverteilung

Schon *C. F. Gauss* hat mathematisch abgeleitet: Wenn eine Grösse vielen, kleinen, zufälligen, voneinander unabhängigen Beeinflussungen unterworfen ist, die sich bald im positiven, bald im negativen Sinne auswirken, dann lässt sich die Häufigkeitsverteilung der variablen Grösse durch die Glockenkurve darstellen (s. Gl. 1 und Fig. 1). Die Richtigkeit der mathematischen Theorie kann auch experimentell, z. B. durch Urnenversuche bekräftigt werden. Die Glockenkurve, d. h. die Normalverteilung, auch Gaußsche oder Laplacesche Verteilung genannt, hat folgende Gleichung[3]):

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{1}$$

Für die beiden Bestimmungsgrössen μ = Durchschnitt, σ = Standardabweichung gilt

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx \tag{1a}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\,\varphi(x)\,dx \tag{1b}$$

Durch Einführung der reduzierten Variablen u vereinfacht sich Gl. (1) zu

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \tag{2}$$

$$u = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{2a}$$

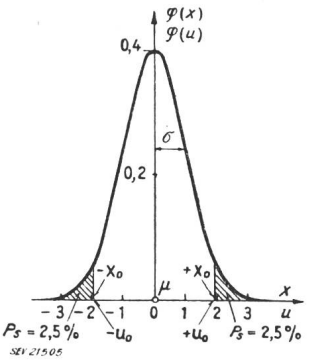

Fig. 1
Normalverteilung $\varphi(x)$, $\varphi(u)$

Die Fläche der reduzierten Normalverteilung (Fig. 1) ist gleich 1. Die gestrichelten Flächen, welche ausserhalb der Grenze $\pm u_0$ liegen, geben die Summen-Häufigkeit oder -Wahrscheinlichkeit an, mit der die Werte $|u| \geq |u_0|$ auftreten:

$$P(u_0) = \int_{u_0}^{\infty} \varphi(u)\,du = \int_{-\infty}^{-u_0} \varphi(u)\,du \tag{3}$$

$P(u_0)$ ist in allen statistischen Werken tabelliert. In

[1]) siehe Literaturnachweis am Schluss des Aufsatzes.
[2]) abgekürzt: n. z. t-Verteilung.
[3]) Die Buchstabensymbole und die Benennungen entsprechen der Publ. Nr. 192 df des SEV [3].

Fig. 2 ist das Integral $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\,du$ dargestellt (sog. S-Kurve).

Wenn $P(u_0)$ klein ist, treten die ausserhalb der Grenzen u_0 liegenden Werte selten auf und es kann angenommen werden, dass sie nicht mehr zur Grundgesamtheit (μ, σ) gehören, dass also ihre Abweichung von μ nicht mehr zufällig, sondern «gesichert» ist. Das Risiko, dass diese Behauptung zu Unrecht gemacht wird, ist nur $P(u_0)$.

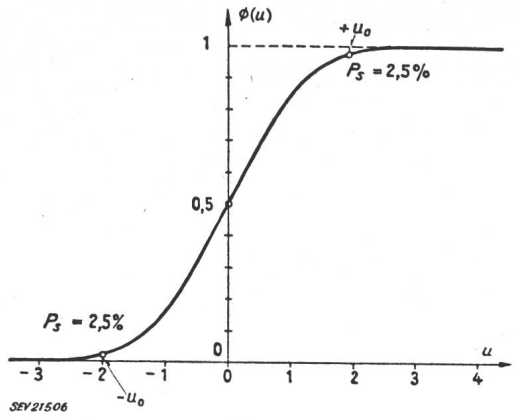

Fig. 2
Integral der Normalverteilung: $\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \varphi(u)\,du$

In der mathematischen Statistik hat sich für die meisten Untersuchungen $P = 5\ \%$ als die kritische Wahrscheinlichkeit bewährt, welche zwischen «gesichert» oder «nicht gesichert» entscheidet. Die kritische Wahrscheinlichkeit wird auch Sicherheitsschwelle, der entsprechende Grenzwert x_0, u_0 der Variablen Sicherheitsgrenze genannt. Je nach dem Problem wird die einseitige (P_s) oder beidseitige (P_d) Sicherheitsschwelle angewendet. In Gl. (3) ist die einseitige Sicherheitsschwelle P_s ausgedrückt, die beidseitige Sicherheitsschwelle ist bei symmetrischen Verteilungen $P_d = 2P_s$. Es ist z. B.:

$P_d =$	5 %	2 %	2 ‰
$P_s =$	2,5 %	1 %	1 ‰
$u_0 =$	1,96	2,33	3,09

Die Normalverteilung ist nur ein Spezialfall von allen möglichen Häufigkeitsverteilungen, doch kommt sie, wenigstens in angenäherter Form, sehr oft vor. Die Durchschnitte $\bar{x}$ von Stichproben, welche einer von der Normalverteilung abweichenden Grundgesamtheit entnommen sind, nähern sich um so besser der Normalverteilung, je grösser der Umfang der Stichprobe ist [1, S. 173].

Oft lässt sich durch geeignete Transformation der Variablen, z. B. $\lg x$, x^2, $\sqrt{x}$, die Normalverteilung erreichen. Die Normalverteilung ist immer anzustreben, da sie der mathematischen Behandlung am besten zugänglich ist.

Eine rasche angenäherte Kontrolle der Normalität einer Verteilung gibt ihre graphische Darstellung, am besten im Wahrscheinlichkeitsnetz. Eine zuverlässigere Prüfung gibt *Fisher* [9, S. 52] an.

21. *Anwendung in der Qualitätskontrolle*

Das Prüfen mit der Normalverteilung wird z. B. angewendet in der Qualitätskontrolle von Fabrikaten, bei denen stetig veränderliche charakteristische Werte gemessen werden.

Vor der Einführung der Qualitätskontrolle werden aus einer grossen Stichprobe der Durchschnitt $\bar{x}$ und die Standardabweichung s berechnet:

$$\bar{x} = \frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4a}$$

$$s = \sqrt{\frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\mathop{\mathrm{S}}\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n-1}}\ ^{4)} \tag{4b}$$

Sollen diese Werte genügend genau denjenigen der Grundgesamtheit entsprechen $(\bar{x} \approx \mu,\ s \approx \sigma)$, muss gemäss British Standards 600 R : 1942 [7] der Umfang der Stichprobe mindestens $n = 50$ betragen.

Die Qualitätskontrolle beruht darin, dass fortlaufend von kleinen Stichproben (z. B. $n = 4 \ldots 10$) die Durchschnitte nach Gl. (4a) berechnet und mit der Normalverteilung geprüft werden. (Zur Ergänzung der Kontrolle wird oft auch die Standardabweichung oder die Variationsbreite der kleinen Stichproben herbeigezogen, s. z. B. [4 und 7].)

Die Durchschnitte $\bar{x}$ von Stichproben aus einer normal verteilten Grundgesamtheit sind wieder normal verteilt [1, S. 171]. Der Durchschnitt der Durchschnitte ist $\mu(\bar{x}) = \mu$, die Standardabweichung der Durchschnitte $\sigma(\bar{x}) = \sigma/\sqrt{n}$. Dies ist leicht einzusehen, wenn das «Fehlerfortpflanzungsgesetz» zur Ableitung angewendet wird. Dieses Gesetz lautet [6, S. 37]:

$$\sigma^2\left[f(x_1, x_2, \ldots)\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) + \ldots\ ^{5)} \tag{5}$$

Gl. (5) gilt streng nur für lineare Funktionen von $(x_1, x_2, \ldots)$, was für unseren Fall erfüllt ist.

$$f(x_1, x_2, \ldots) = \bar{x} = \frac{\mathop{\mathrm{S}}\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

daher

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$$

Weiter gilt $\sigma^2(x_i) = \sigma^2$, da alle Einzelwerte x_i der Grundgesamtheit mit der Standardabweichung σ angehören. Endlich wird

$$\sigma^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\sigma^2 n = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

[4]) Die zweite Form der Gleichung ist für bequemes Rechnen auf der Rechenmaschine geeignet.

[5]) $\sigma^2(x)$, bzw. $\sigma^2[f(x_1, x_2, \ldots)]$ das Quadrat der Standardabweichung einer Variablen, bzw. einer Funktion von mehreren unabhängigen Variablen wird Varianz oder Streuung genannt.

Ist also μ und σ bekannt, kann die Abweichung des Durchschnittes einer Stichprobe $\bar{x}$ von demjenigen der Grundgesamtheit μ mit folgender Gleichung geprüft werden:

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \text{[(vgl. mit Gl. (2a)]} \qquad (7)$$

Es wird empfohlen [7; 4], die Sicherheitsgrenzen, welche in der Qualitätskontrolle auch Kontrollgrenzen genannt werden, mit $u_0 = 1{,}96$ bzw. 3,09 entsprechend $P_s(u_0) = 2{,}5\ \%$ bzw. $1\ ^0/_{00}$ auszulegen:

Beispiel 1:

Bei der Einführung der *Qualitätskontrolle von Käfigankermotoren* wurden zuerst aus 50 Messungen des Käfigankerwiderstandes der Durchschnitt (hier $\mu = 100$ gesetzt) und die Standard-Abweichung $\sigma = 4$ ermittelt.

Bei der Qualitätskontrolle wurde jeweils aus Stichproben von 5 Stücken der Durchschnitt $\bar{x}$ berechnet. Die Kontrollgrenzen wurden (mit $u_0 = 3{,}09$) berechnet:

$$\bar{x} \pm u_0 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 3{,}09 \frac{4}{\sqrt{5}} = 100 \pm 5{,}53 = 94{,}47 \ldots \mathbf{100} \ldots 105{,}53$$

Es besteht die Wahrscheinlichkeit von nur 1 ‰, dass die zur Grundgesamtheit (μ, σ) gehörenden Durchschnitte $\bar{x}$ ausserhalb dieser Grenzen fallen. Überschreitet also der Durchschnitt $\bar{x}$ einer oder mehrerer Stichproben die Kontrollgrenzen, so ist dies ein Hinweis, dass sich die Fabrikation geändert hat und es können Massnahmen zur Korrektur ergriffen werden.

3. Die t-Verteilung

In der Messtechnik ist selten der Durchschnitt (μ) und die Standardabweichung (σ) der Grundgesamtheit genau bekannt, zur Verfügung stehen meist nur die Einzelwerte von «kleinen» Stichproben (Messreihen); die aus diesen berechneten Werte $\bar{x}$, s geben eine mit Unsicherheit behaftete Schätzung von μ und σ, die direkte Anwendung der Normalverteilung ist daher unzulässig.

In der Messtechnik stellen sich bei der Planung und Auswertung von Messreihen folgende Fragen:

a) Wie gross ist die Unsicherheit, oder welches sind die Vertrauensgrenzen des aus einer kleinen Stichprobe geschätzten Durchschnittes der Grundgesamtheit?

b) Ist der Unterschied der Durchschnitte von zwei oder mehreren Stichproben gesichert, also wesentlich, oder aber nicht gesichert, d. h. nur zufällig?

Die von Student (S. W. Gosset) im Jahre 1908 abgeleitete t-Verteilung ermöglicht die mathematisch korrekte Antwort.

Die t-Verteilung hat folgende Definitions-Gleichung:

$$t = \frac{u}{\frac{s}{\sigma}} \qquad (8)$$

u und s/σ sind Variable, die gleichzeitig, aber voneinander unabhängig variieren. u ist die reduzierte Variable der Normalverteilung, s ist die Standardabweichung der Stichprobe mit ν Freiheitsgraden, die einer normal verteilten Grundgesamtheit mit der Standardabweichung σ entnommen ist. (Der Freiheitsgrad einer einfachen Stichprobe z. B. ist $\nu = n - 1$, da 1 Gleichung — zur Berechnung von $\bar{x}$ — die Anzahl der freien Grössen um 1 verkleinert.)

Die Normalverteilung $\varphi(u)$ wurde in Fig. 1 dargestellt, die Verteilung von s/σ zeigt z. B. für $\nu = 4$ Fig. 3[6]). Die Häufigkeitsverteilung von t wird durch doppelte Integration des Produktes der elementaren Wahrscheinlichkeiten von u und s/σ im ganzen Bereich berechnet, wobei die Variablen durch Gl. (7) verknüpft sind [1, S. 156]. Die Gleichung der t-Verteilung lautet:

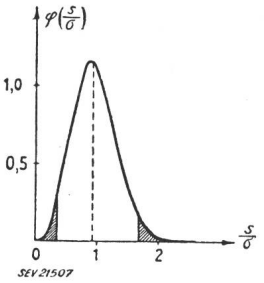

Fig. 3
s/σ-Verteilung, $\varphi(s/\sigma)$ für $\nu = 4$

$$\varphi(t) = \frac{\left(\frac{\nu-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\nu-2}{2}\right)! \sqrt{\nu\pi}} \left(\frac{\nu}{\nu + t^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \text{[7])} \qquad (9)$$

In Fig. 4 ist die t-Verteilung z. B. für $\nu = 4$ dargestellt, sie verläuft flacher als die Normalverteilung (vgl. mit Fig. 1), nähert sich jedoch derselben mit wachsendem ν.

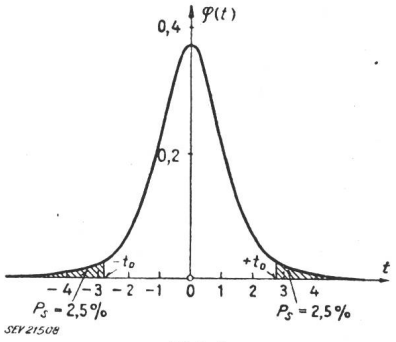

Fig. 4
t-Verteilung, $\varphi(t)$ für $\nu = 4$

Die gestrichelten Flächen in Fig. 4 geben die Sicherheitsschwellen $P_s = 2{,}5\ \%$ an.

Für $P_d = 5\ \%$, $P_s = 2{,}5\ \%$ gilt:

ν =	1	2	3	4	5	10	20	∞
t_0 =	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,23	2,09	1,96 ($= u_0$)

In Fig. 5 ist das Integral $\Phi(t) = \int_{-\infty} \varphi(t) dt$ dargestellt (vgl. Fig. 2).

Zum Prüfen von Durchschnitten muss zuerst die Definitionsgleichung durch Einsetzen von

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \text{(vgl. mit Gl. 7)}$$

umgeformt werden:

[6]) Die Verteilung s/σ kann aus der χ^2-Verteilung, welche in allen statistischen Werken tabelliert ist, abgeleitet werden, da: $\frac{s}{\sigma} = \frac{\chi}{\sqrt{\nu}}$ [1, S. 171].

[7]) $x! = \Gamma(1+x)$ (Γ: Gammafunktion).

$$t = \frac{u}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\sigma}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad (10)$$

Mit dieser Gleichung kann die Abweichung eines Durchschnittes $\bar{x}$ von seinem theoretischen Wert μ geprüft werden, wenn die Standardabweichung s, aber nicht σ bekannt ist.

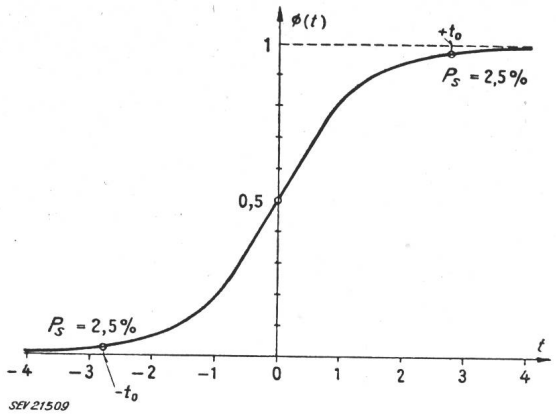

Fig. 5

Integral der t-Verteilung für $\nu = 4$: $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \varphi(t)\, dt$

Ist t laut Gl. (10) kleiner als die Sicherheitsgrenze t_0, die Tabellen für den Freiheitsgrad ν und die Sicherheitsschwelle (z. B. $P_d = 5\ \%$) entnommen wird, so ist die Abweichung $\bar{x} - \mu$ nur zufällig.

Anderseits können die Vertrauensgrenzen des geschätzten Durchschnittes der Grundgesamtheit durch Umstellung der Gl. (10) berechnet werden, wenn $\bar{x}$, s einer Stichprobe bekannt sind:

$$\mu^* = \bar{x} \pm t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ [8]} \qquad (11)$$

Der Begriff ist folgendermassen zu verstehen: Werden die Vertrauensgrenzen nach Gl. (11) für eine sehr grosse Zahl von Untersuchungen ermittelt, so fallen die wahren Werte der geprüften (normalen) Grundgesamtheiten mit der Häufigkeit $1 - P_d$ (z. B. $100\ \% - 5\ \% = 95\ \%$) zwischen die Vertrauensgrenzen [4, S. 40]. Die beste Schätzung von μ ist $\bar{x}$, dieser Wert wird vom wahren Wert μ mit der Häufigkeit 50 % unter- bzw. überschritten. Das Intervall zwischen den Vertrauensgrenzen wird Vertrauensbereich genannt, die *Unsicherheit* ist:

$$\pm \Delta = \pm t_0 \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Bei Angaben der Vertrauensgrenzen ist immer der Umfang der ausgewerteten Stichprobe und die Sicherheitsschwelle zu präzisieren.

Beispiel 2a:

An 8 kleinen Induktionsmotoren eines Typs, mit lackisolierten Dynamoblechen, wurden Zusatzverluste gemessen, um den Durchschnitt der Grundgesamtheit und seine Unsicherheit abzuschätzen. Die Messwerte waren:

102 93 98 97 117 97 99 95 W

Gemäss Gl. (4) ist $\bar{x} = 99{,}75$; $s = 7{,}46$.

Aus Tabellen wird für $\nu = n - 1 = 7$ und $P_d = 5\ \%$ der Wert $t_0 = 2{,}36$ gefunden, daher sind die Vertrauensgrenzen:

$$\mu^* = \bar{x} \pm t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} = 99{,}75 \pm 6{,}21 = 93{,}54 \ldots \mathbf{99{,}75} \ldots 105{,}96$$

(der fettgedruckte Wert entspricht der besten Schätzung, d. h. $\bar{x}$).

Beispiel 2b:

An anderen 8 Motoren des gleichen Typs, jedoch mit Dynamoblechen, welche keine besondere Isolation ausser der natürlichen Oxydschicht haben, sind folgende Zusatzverluste gemessen worden:

105 92 102 124 106 129 111 100 W

Daraus: $\bar{x} = 108{,}6$; $s = 12{,}4$ (Gl. 4).

Aus dem direkten Vergleich der Durchschnitte, oder der nach Grösse geordneten Einzelwerte der beiden Beispiele, wäre es schwierig zu entscheiden, ob die Unterschiede wesentlich sind:

$\bar{x}_1 = 99{,}75$; $x_{1i} = 93 \quad 95 \quad 97 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 102 \quad 117$

$\bar{x}_2 = 108{,}6$; $x_{2i} = 92 \quad 100 \quad 102 \quad 105 \quad 106 \quad 111 \quad 124 \quad 129$

Die t-Prüfung ermöglicht dagegen einen systematischen Entscheid:

Die Differenz der Durchschnitte $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ ist normal verteilt [1, S. 173], ihre Standardabweichung $\sigma\,[\bar{x}_1 - \bar{x}_2]$ lässt sich nach dem «Fehlerfortpflanzungsgesetz» Gl. (5) berechnen:

$$\sigma^2\,[\bar{x}_1 - \bar{x}_2] = \sigma^2 \left[\frac{\overset{n_1}{S}_{x_{1i}}}{n_1} - \frac{\overset{n_2}{S}_{x_{2i}}}{n_2}\right] = \left(\frac{1}{n_1^2} n_1 + \frac{1}{n_2^2} n_2\right) \sigma^2 = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \sigma^2$$

In die Definitionsgleichung (8) wird eingesetzt:

$$u = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, \sigma}$$

so dass

$$t = \frac{u}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{s}{\sigma}\, \sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \qquad (12)$$

Die beste Schätzung von s wird durch Zusammenlegung der Quadrate der Abweichungen in den beiden Stichproben erreicht:

$$s = \sqrt{\frac{s_1^2 \nu_1 + s_2^2 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}} = \sqrt{\frac{\overset{n_1}{S}_{x_{1i}}{}^2 + \overset{n_2}{S}_{x_{2i}}{}^2 - \frac{\left(\overset{n_1}{S}_{x_{1i}}\right)^2}{n_1} - \frac{\left(\overset{n_2}{S}_{x_{2i}}\right)^2}{n_2}}{n_1 + n_2 - 2}} \qquad (13)$$

Der Freiheitsgrad ist $\nu = n_1 + n_2 - 2$, da 2 Gleichungen (für $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$) die Anzahl der freien Grössen um 2 verkleinern. Für obiges Beispiel ist nach Gl. (13) $s = 10{,}23$, nach Gl. (12):

$$t = \frac{108{,}6 - 99{,}75}{10{,}23} \sqrt{\frac{8 \cdot 8}{16}} = 1{,}74$$

Der Sicherheitsschwelle $P_d = 5\ \%$ für $\nu = 14$ entspricht $t_0 = 2{,}15$. Da also $t < t_0$, ist der aus dieser Stichprobe ermittelte Unterschied der Durchschnitte nicht gesichert, die Zusatzverluste des kleinen Induktionsmotors vergrössern sich nicht wesentlich bei Verwendung von Dynamoblech mit natürlicher Oxydschicht statt Lackisolation.

Streng genommen ist die t-Prüfung nur dann zulässig, wenn die Streuungen der beiden Stichproben *nicht* wesentlich verschieden sind. Das kann mit der F-Verteilung [1, S. 177] geprüft werden. Für Bei-

[8]) In kleiner Abweichung von der Publ. 192 df des SEV, Ziff. 6—801, [3] werden hier die Vertrauensgrenzen durch einen Stern (μ^*) bezeichnet, um eine klare Unterscheidung vom wahren Wert (μ) zu machen.

spiel 2b zeigt diese Prüfung die Zulässigkeit der t-Prüfung. Im negativen Falle sollte eine Abwandlung der t-Prüfung [10, Tab. V], oder aber ein ganz anderes Prüfverfahren, nämlich die Rang-Prüfung (ordre-, ranking-test) [12], verwendet werden.

4. Die nicht zentrale t-Verteilung

Die nicht zentrale t-Verteilung hat folgende Definitionsgleichung (s. Fisher [5, S. XXX...XXXIII], Johnson und Welch [11] und andere):

$$t = \frac{u + \delta}{\frac{s}{\sigma}} \tag{14}$$

u, s/σ haben die gleiche Bedeutung wie im Abschnitt 3 und variieren gleichzeitig, unabhängig voneinander; δ ist eine Konstante. Die Häufigkeitsverteilung von t muss, ähnlich wie im Abschnitt 3 erwähnt, durch doppelte Integration abgeleitet werden. Die Gleichung lautet gemäss [11] (nach Korrektur zweier Druckfehler):

$$\varphi(t) = \frac{\nu!}{2^{\frac{\nu-1}{2}} \left(\frac{\nu-2}{2}\right)! \sqrt{\nu\pi}}$$

$$\exp\left(-\frac{\nu\delta^2}{2(\nu+t^2)}\right)\left(\frac{\nu}{\nu+t^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \mathrm{Hh}_\nu\left(-\frac{t\delta}{\sqrt{\nu+t^2}}\right) \tag{15}$$

wo:

$$\mathrm{Hh}_\nu(x) = \int_{z=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!} \exp\left(-\frac{(z+x)^2}{2}\right) dz$$

Die Funktion $\mathrm{Hh}_\nu(x)$ ist in [5, Tab. XV] tabelliert.

In Fig. 6a ist zuerst der triviale Fall der Verteilungskurve für $\nu = \infty$ dargestellt. Hier ist $s/\sigma = 1$ und daher (Gl. 14) $t = u + \delta$, die nicht-zentrale t-Verteilung ist gleich der um δ verschobenen Normalverteilung. In Fig. 6b ist dagegen $\varphi(t)$ für $\nu = 4$ angedeutet. Für $\delta = 0$ ist es die zentrale t-Verteilung (vgl. mit Fig. 4), für $\delta = \pm 5$ gibt es unsymmetrische Glockenkurven.

Je kleiner ν und grösser δ, desto unsymmetrischer und flacher ist der Verlauf. In Fig. 6a und b sind auch die Sicherheitsgrenzen für $P_s = 2{,}5$ % und der zentrale Wert für $P_s = 50$ % eingetragen. Der zweite Wert ist etwas grösser als δ, eine Näherungsformel wird weiter unten in Gl. (17) angegeben.

Die Tabellen der Sicherheitsgrenzen in der Originalarbeit von *Johnson* und *Welch* [11] sind für andere Anwendungen zugeschnitten und müssen für unsere Zwecke durch schrittweise Annäherung ausgewertet werden. In den British Standards [7] sind jedoch von Johnson und Welch berechnete Kurven, welche zwar in erster Linie für die Qualitätskontrolle bestimmt sind, jedoch ziemlich leicht auf die ursprüngliche nicht-zentrale t-Verteilung zurückgerechnet werden können[9]). Die Kurven für $P_s = 2{,}5$% der [7] sind in Fig. 7 wiedergegeben, aber mit Buchstabensymbolen, die in den Rahmen dieses Artikels passen, bezeichnet und durch Kurven für $n' = 30$ und 50 ergänzt.

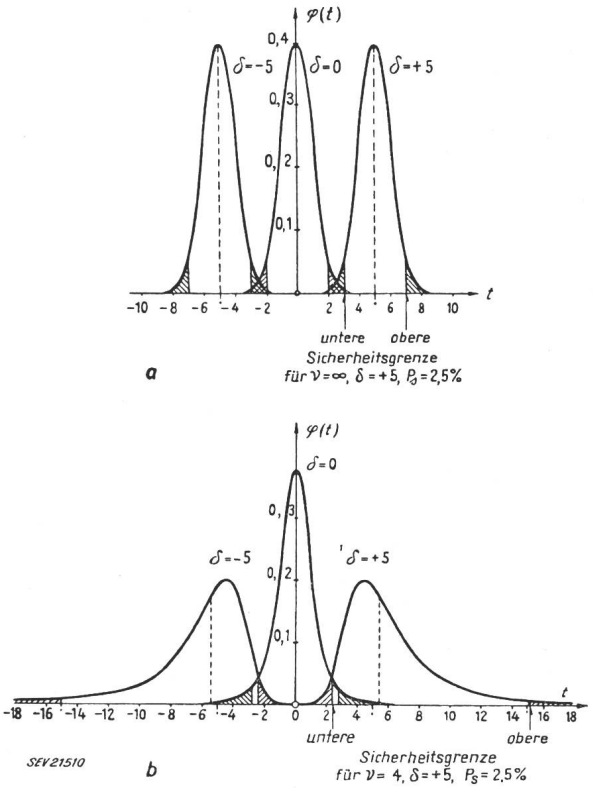

Fig. 6
Nicht zentrale t-Verteilung
a) für $\nu = \infty$, $\delta = -5$, 0, $+5$
b) für $\nu = 4$, $\delta = -5$, 0, $+5$

Wird für ein gegebenes ν, δ, P_s die untere und obere Sicherheitsgrenze t_0 gesucht, so wird zuerst n', u_0' aus folgenden Gleichungen ausgerechnet:

$$n' = \nu + 1 \tag{16a}$$

$$u_0' = \frac{\delta}{\sqrt{n'}} \tag{16b}$$

Dann wird die entsprechende untere und obere Grenze $\mathrm{t}_0'(n', u_0', P_s)$ aus der Fig. 7 abgelesen und in Gl. (16c) oder (16d) eingesetzt:

$$\mathrm{t}_0(\nu, \delta, P_s) = \mathrm{t}_0'(n', u_0', P_s)\sqrt{n'-1} = \frac{\mathrm{t}_0'(n', u_0' P_s)}{u_0'} u_0' \sqrt{n'-1} \tag{16c}$$

$$\frac{\mathrm{t}_0(\nu, \delta, P_s)}{\delta} = \frac{\mathrm{t}_0'(n', u_0', P_s)}{u_0'} \sqrt{\frac{n'-1}{n'}} \tag{16d}$$

In diesen Gleichungen bedeutet — ähnlich wie in [11] — $\mathrm{t}_0(\nu, \delta, P_s)$ die Sicherheitsgrenze t_0 der t-Verteilung für gegebene Werte ν, δ, P_s und analog gilt $\mathrm{t}_0'(n', u_0', P_s)$ für die Werte n', u_0', P_s.

Die Wahrscheinlichkeit, dass t ausserhalb $\mathrm{t}_0(\nu, \delta, P_s)$, d. h. beispielsweise in den schraffierten Flächen der Fig. 6a und 6b liegt, ist also P_s.

t' wird in [7] «coefficient of displacement» genannt und für die Qualitätskontrolle empfohlen, wenn die Qualität des Einzelproduktes nicht ausserhalb einer gegebenen Grenze fallen soll.

[9]) Die Ausarbeitung und Veröffentlichung vollständiger, genauer Tabellen der n.z. t-Verteilung wäre trotzdem sehr erwünscht.

Der Wert $t_0(\nu, \delta, P_s = 50\,\%)$ ist in [7] und in der Fig. 7 nicht angegeben, kann aber aus folgender Näherungsgleichung berechnet werden:

$$t_0(\nu, \delta, P_s = 50\,\%) \approx \delta \left[1 + \frac{0{,}3}{\nu} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\nu+1}}\right)^{\frac{1}{6}}\right] \qquad (17)$$

Die Gl. (17) wurde aus einigen, nach den Tabellen von Johnson und Welch durchgerechneten Zahlenwerten abgeleitet und gilt etwa für den Bereich $\nu \geqq 4$ und $\delta/\sqrt{\nu+1} \leqq 3$. Für $\nu = 4$, $\delta = 5$ ergibt sich z. B. $t_0 \approx 1{,}087\,\delta$.

Für grosse Werte von ν gilt die Näherungsgleichung [11]:

$$t_0(\nu, \delta, P_s) \approx \frac{\delta + u_P \sqrt{1 + \frac{\delta^2 - u_P^2}{2\nu}}}{1 - \frac{u_P^2}{2\nu}} \qquad (18)$$

wo u_P die Sicherheitsgrenze der reduzierten Variablen ist, die der Sicherheitsschwelle P_s entspricht, z. B. $u_P = \pm 1{,}96$ für $P_s = 2{,}5\,\%$. Für $\nu = \infty$ limitieren die Vertrauensgrenzen zu

$$t_0(\nu = \infty, \delta, P_s) = \delta + u_P$$

(vgl. Fig. 6a)

41. *Anwendung der nicht zentralen t-Verteilung zur Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus einer Messreihe von Durchschlagspannungen*

Als «Haltespannung» wird üblicherweise diejenige Spannung aufgefasst, die «knapp unter der gerade noch zum Durchschlag oder Überschlag führenden Spannung liegt». Um die Haltespannung der statistischen Auswertung zugänglich zu machen, muss sie als diejenige Spannung definiert werden, bei deren Einwirkung die Durchschlagwahrscheinlichkeit einen sehr kleinen, durch Konvention festgelegten Wert hat, z. B. 1 % (oder 1 ‰).

Unter der Voraussetzung, dass die Häufigkeitsverteilung der Grundgesamtheit der Durchschlagspannungen (oder ihrer Transformierten, z. B. lg U) normal ist, kann die 1-%-Durchschlagspannung und ihre Vertrauensgrenzen mittels der nicht zentralen t-Verteilung aus einer Messreihe geschätzt werden.

In die Definitionsgleichung (14) wird eingesetzt:

$$u = \frac{x - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \text{(s. Gl. 7)}$$

$$\delta = -u_0\sqrt{n} = -\frac{x(u_0) - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \quad ^{10)}$$

und

$$t = \frac{u + \delta}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{\bar{x} - \mu - x(u_0) + \mu}{\frac{s}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Also wird

$$t = \frac{\bar{x} - x(u_0)}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \qquad (19)$$

und

$$x^*(u_0) = \bar{x} - t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad (19a)$$

Für die Schätzung der Vertrauensgrenzen $x^*(u_0)$ wird $t_0(\nu, \delta, P_s)$ benötigt, wobei $\nu = n - 1$, $\delta = u_0\sqrt{n}$ und $P_s = 2{,}5\,\%$ zu setzen ist. Dieser Wert kann aus der Fig. 7 ermittelt werden.

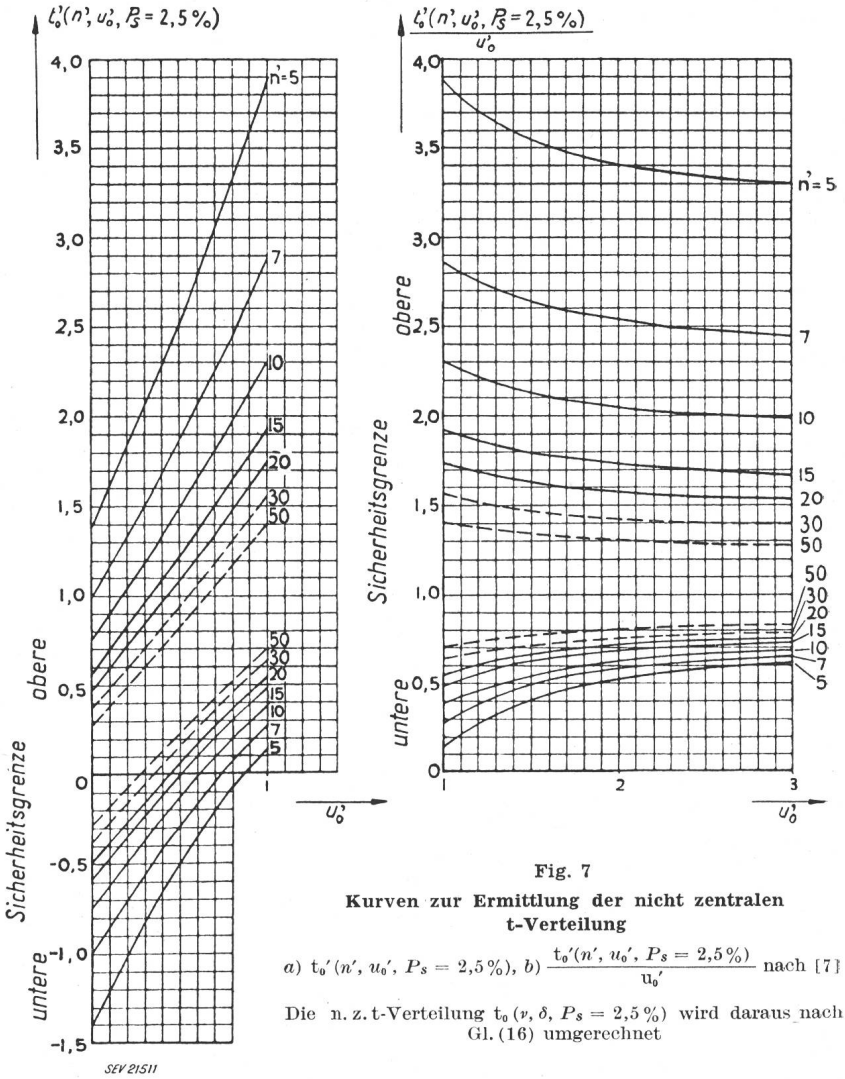

Fig. 7
Kurven zur Ermittlung der nicht zentralen t-Verteilung

a) $t_0'(n', u_0', P_s = 2{,}5\,\%)$, *b)* $\frac{t_0'(n', u_0', P_s = 2{,}5\,\%)}{u_0'}$ nach [7]

Die n. z. t-Verteilung $t_0(\nu, \delta, P_s = 2{,}5\,\%)$ wird daraus nach Gl. (16) umgerechnet

Zur Bestimmung der 1-%-Durchschlagspannung von einfachen Stichproben, also für $\nu = n - 1$ und für $u_0 = 2{,}33$ wurden direkt aus den Tabellen von

10) $x(u_0)$ ist die Sicherheitsgrenze der normal verteilten Variablen, welche der Sicherheitsschwelle $P(u_0)$ z. B. 1 % entspricht.

Johnson und Welch [11] die Werte berechnet und in den Kurven der Fig. 8 dargestellt. Die Vertrauensgrenzen der 1-%-Durchschlagspannung sind:

$$x_{1\%}^{*} = \bar{x} - t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} = \bar{x} - \left(\frac{t_0}{\delta}\right) \frac{\delta}{\sqrt{n}} s = \bar{x} - \left(\frac{t_0}{\delta}\right) u_0 s$$

$u_0 = 2{,}33$, daher:

$$x_{1\%}^{*} = \bar{x} - \left(\frac{t_0}{\delta}\right) 2{,}33\, s \qquad (t_0/\delta \text{ aus Fig. 8}) \quad (20)$$

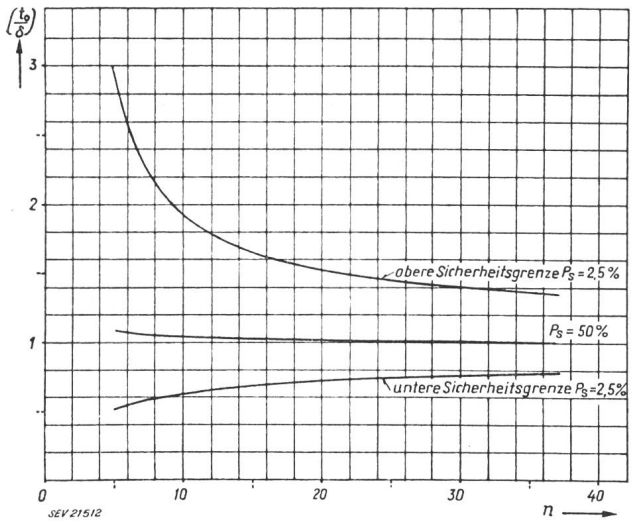

Fig. 8
t_0/δ zur Ermittlung der 1-%-Durchschlagspannung (Gl. 20) aus einer einfachen Stichprobe mit dem Umfang n und dem Freiheitsgrad $\nu = n - 1$

Die Vertrauensgrenzen $x_{1\%}^{*}$ sind ähnlich zu verstehen, wie im Abschnitt 3, diejenigen des Durchschnittes μ^*: Werden in einer grossen Zahl von Untersuchungen die Vertrauensgrenzen $x_{1\%}^{*}$ der geschätzten 1-%-Durchschlagspannung nach Gl. (20) ermittelt, so liegt der wahre Wert $x_{1\%}$ der geprüften (normalen) Grundgesamtheiten mit der Häufigkeit $(1 - 2\,P_s)$ (z. B. 100 % — 2 · 2,5 % = 95 %) zwischen den Vertrauensgrenzen. Der mit $t_0(\nu, \delta, P_s = 50\ \%)$ berechnete Wert wird vom wahren Wert $x_{1\%}$ mit der Häufigkeit 50 % unter-, bzw. überschritten. (In den folgendenBeispielen wird dieser Wert durch Fettdruck gekennzeichnet.)

Beispiel 3:

In einer Messreihe von Durchschlägen von Preßspan unter Öl zwischen plattenförmigen Elektroden (D = 40 mm) wurde die Wechselspannung 50 Hz stetig bis zum Durchschlag gesteigert. Die 16 Messwerte (hier nach Grösse geordnet) waren in kV die folgenden:

6,12	6,33	6,45	6,56	6,64	6,68	6,73	6,78
6,98	6,98	7,0	7,0	7,1	7,3	7,3	7,45

Daraus wird (Gl. 4) $\bar{x} = 6{,}84$, $s = 0{,}37$ berechnet, und den Kurven in Fig. 8 $t_0/\delta = (0{,}69...\mathbf{1{,}02}...1{,}6)$ entnommen. Die 1-%-Durchschlagspannung liegt in den Vertrauensgrenzen (Gl. 20):

$$x_{1\%} = 6{,}84 - (0{,}69...\mathbf{1{,}02}...1{,}6) \cdot 2{,}33 \cdot 0{,}37 = 5{,}45...\mathbf{5{,}96}...6{,}24$$

Die Unsicherheit ist unsymmetrisch:

$$\Delta_+ = +0{,}28 \triangleq +4{,}7\ \%$$
$$\Delta_- = -0{,}51 \triangleq -8{,}5\ \%$$

Als Grundlage für die Dimensionierung von Hochspannungskonstruktionen empfiehlt es sich, vorsichtshalber die untere Vertrauensgrenze (5,45 kV) und nicht den mittleren Wert (**5,96 kV**) zu nehmen. Es muss immer abgewogen werden, ob sich der Aufwand für eine grössere Messreihe nicht durch eine kleinere Unsicherheit bezahlt macht.

Die Spannungswerte sollten vor der statistischen Auswertung logarithmisch transformiert werden (vgl. auch mit dem nächsten Unterabschnitt 42), besonders wenn das Produkt $t_0 \frac{s}{\sqrt{n}} = \left(\frac{t_0}{\delta}\right) u_0 s$ im Originalmaßstab relativ zu $\bar{x}$ gross wäre. Die Normalverteilung erstreckt sich über Null gegen $(-\infty)$, wogegen die Durchschlagspannungen in diesem Sinn nicht negativ werden können, wohl aber ihr Logarithmus. Im obigen Beispiel ist $t_0 \frac{s}{\sqrt{n}}$ relativ klein $(0{,}202 \cdot \bar{x})$ und die logarithmische Transformation kann daher einfachheitshalber unterbleiben.

42. *Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen aus Messreihen der Durchschlagzeiten in Abhängigkeit der einwirkenden Spannung*

Die im Beispiel 3 beschriebene Messmethode, bei der die angelegte Spannung stetig (oder in kleinen Stufen) bis zum Durchschlag der Isolation gesteigert wird, ist bequem und wird daher oft angewendet. Sie hat jedoch den grundsätzlichen Nachteil, dass sie keine zuverlässigen Schlüsse auf die Durchschlagwahrscheinlichkeit bei Einwirkung konstanter Spannung während einer bestimmten Zeit (z. B. 1 s, 1 m, 1 h) erlaubt. Zur Ermittlung dieser wichtigen Abhängigkeit ist es am zweckmässigsten, in einer Messreihe die Durchschlagzeiten bei Einwirkung konstanter Spannungen zu messen. Wie die Auswertung mittels der nicht zentralen t-Verteilung gemacht wird, zeigt das nächste Beispiel:

Beispiel 4:

An Preßspan wurden in der gleichen Anordnung wie im Beispiel 3 je 20 Durchschlagzeiten bei 3 verschiedenen Spannungen gemessen. In Fig. 9 sind lediglich die Variationsbreiten zwischen den kleinsten und grössten gemessenen Zeiten durch Pfeile eingetragen. Die Darstellung geschah auf doppellogarithmischem Papier, und zwar aus folgenden Gründen:

a) Die Abhängigkeit der Durchschlagzeit τ[11]) von der Spannung folgt etwa der Gleichung:

$$\tau = k U^{\beta} \qquad (21)$$

wo β negativ und in der Grössenordnung von ca. 10 ist. Durch logarithmische Transformation beider Variablen erhält man

$$y = \alpha + \beta x, \quad y = \lg \tau, \quad x = \lg U$$

also eine Gerade auf doppellogarithmischem Papier.

b) Durch die logarithmische Transformation der Zeit τ wird eine angenähert normale Verteilung der Variablen y erzielt, was die Voraussetzung für die korrekte Anwendung der n. z. t-Verteilung ist.

Dabei ist zu betonen, dass die Spannung (bzw. ihr Logarithmus) bei der Messung frei wählbar, also die unabhängige Variable, dagegen die Zeit (bzw. ihr Logarithmus) die abhängige Variable ist und von dieser Grundlage muss die statistische Auswertung ausgehen.

In Tabelle I ist der Berechnungsgang angedeutet. Für jede Klasse wird $\bar{y}$ und s (Gl. 4) berechnet, der Fig. 8 wird für $n = 20$ der Wert t_0/δ entnommen und in Gl. (20) eingesetzt:

Tabelle I

Kl.	U kV	n	ν	$\bar{y}$	s	$\left(\frac{t_0}{\delta}\right)$ (Fig. 8)	$y_{1\%}^{*}$ (Gl. 20)
1	9	20	19	3,075	0,095	0,72...**1,02** ...1,52	2,74...**2,85** ...2,92
2	12	20	19	1,478	0,137	0,72...**1,02** ...1,52	0,99...**1,15** ...1,25
3	15	20	19	0,352	0,173	0,72...**1,02** ...1,52	−0,26...**−0,059** ...0,062

[11]) Die (variable) Zeit wird ausnahmsweise mit dem Buchstabensymbol τ bezeichnet, um die Verwechslung mit dem Prüfwert t zu vermeiden.

Die Verbindung der zusammengehörigen Punkte $\bar{y}$, $y^*_{1\%}$ in Fig. 9 gibt schwach gebrochene Linien. Im schraffierten Vertrauensbereich liegt die geschätzte 1-%-Durchschlagzeit.

Die 1-%-Durchschlagspannung für eine bestimmte Einwirkungszeit wird durch Durchschneiden des Vertrauensbereiches in der horizontalen Richtung, ausgehend von der gegebenen Zeit τ ermittelt. In Tabelle II sind einige Werte der 1-%-Durchschlagspannung zusammengestellt:

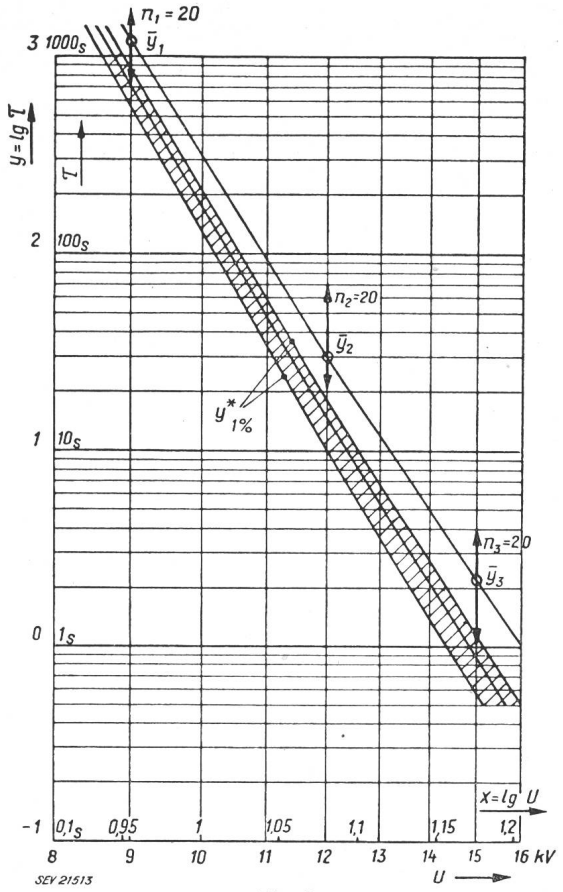

Fig. 9

Durchschlagszeiten in Abhängigkeit von der Spannung

Durch Pfeile ist die Variationsbreite für je 20 Durchschlagzeiten angedeutet. Der Vertrauensbereich der 1-%-Durchschlagzeiten ist schraffiert (P_s = 2,5 %)

Tabelle II

Durchschlagzeit τ	1 s	10 s	100 s	1000 s
$U^*_{1\%}$ in kV	14,1...**14,8**...15,1	12...**12,35**...12,6	10,15...**10,4**...10,55	8,65...**8,8**...8,9

Im folgenden wird gezeigt, dass unter bestimmten Umständen die Unsicherheit der Schätzung wesentlich verkleinert werden kann.

Unter günstigen Bedingungen ist die Streuung in allen Klassen homogen, d. h. die Unterschiede der Varianz s^2 sind nur zufällig und nicht gesichert. Die Homogenität wird z. B. durch die F-Prüfung [1, S. 177] und die Bartlett-Prüfung [6] geprüft (für das Beispiel 4 fällt sie negativ aus). Die Homogenität ist vor allem physikalisch von den Materialeigenschaften der Isolation abhängig. Die experimentellen Bedingungen müssen auf jeden Fall in der ganzen Messreihe konstant gehalten und die Prüflinge vor der Verteilung auf die Klassen sorgfältig «gemischt» werden.

Ist also die Streuung in allen Klassen homogen, dürfen die Quadrate der Abweichung in allen Klassen zur Berechnung einer resultierenden Standardabweichung zusammengelegt werden:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_j^m s_j^2 \nu_j}{\sum_j^m \nu_j}} = \sqrt{\frac{\sum_j^m \sum_i^{n_j} (y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{\sum_j^m n_j - m}} \qquad (22)$$

Der Freiheitsgrad wird auf diese Weise wesentlich erhöht. (m = Anzahl der Klassen, n_j = Umfang der j-ten Klasse, $\nu_j = n_j - 1$ Freiheitsgrad der j-ten Klasse, s_j^2 Varianz der j-ten Klasse.)

Für jede Klasse wird berechnet (Gl. 19):

$$y_j^*(u_0) = \bar{y}_j - t_0(\nu, \delta, P_s) \frac{s}{\sqrt{n_j}}$$

wo

$$\nu = \sum_j^m \nu_j \quad \text{und} \quad \delta = u_0 \sqrt{n_j}$$

zu setzen ist.

Wird z. B. für 3 Klassen zu je 20 Messungen auf diese Weise der Freiheitsgrad ν der Standardabweichung s, also auch der t-Verteilung, erhöht, ist:

$$\left(\frac{t_0}{\delta}\right) = 0{,}78...\mathbf{1{,}01}...1{,}32; \text{ für } \nu = 3\,(20 - 1) = 57,$$

statt

$$\left(\frac{t_0}{\delta}\right) = 0{,}72...\mathbf{1{,}02}...1{,}52; \text{ für } \nu = 20 - 1 = 19,$$

wie für eine Klasse berechnet wurde (vgl. mit Tabelle I).

Die Vertrauensgrenzen von t_0/δ müssen aus Fig. 7 ermittelt werden; Fig. 8 gilt nur für den Spezialfall $\nu = n - 1$. In unserem Beispiel ist aber $\nu = 57$, $n_j = 20$.

43. *Berechnung der einfachen linearen Regression aus Messreihen der Durchschlagzeiten in Abhängigkeit von der Spannung. Schätzung der Haltespannung und ihrer Vertrauensgrenzen*

Folgendes mathematisches Modell wird der Auswertung zugrundegelegt: In einer Grundgesamtheit von ∞ Wertepaaren x_i, y_i ist die Variable y (z. B.

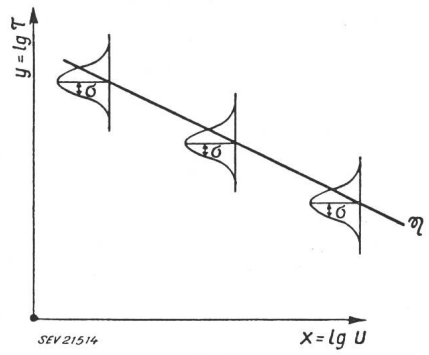

Fig. 10

Grundgesamtheit mit einfacher linearer Regression

Die abhängige Variable y ist um die Regressionsgerade η mit der Standardabweichung σ normal verteilt

$y = \lg \tau$) von der Variablen x (z. B. $x = \lg U$) abhängig und streut um die Regressionsgrade η mit der Normalverteilung (Fig. 10). Die Standardab-

weichung σ ist im ganzen Bereich konstant und die Gleichung der Regressionsgeraden lautet[12]):

$$\eta = \alpha + \beta x \tag{23}$$

β = Regressionskoeffizient

Dieser Grundgesamtheit wird eine Stichprobe von n Wertepaaren, nämlich der frei gewählten unabhängigen Variablen x_i und der abhängigen Variablen y_i entnommen und daraus mittels der Methode der kleinsten Quadrate die Regressionsgerade der Stichprobe Y berechnet, die allgemein von der Regressionsgeraden der Grundgesamtheit η abweichen wird:

$$Y = \bar{y} + b(x - \bar{x}) \tag{24}$$

Darin sind $\bar{x} = \frac{\overset{n}{S}\, x_i}{n}$ $\qquad \bar{y} = \frac{\overset{n}{S}\, y_i}{n}$

$$b = \frac{\overset{n}{S}\,(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\overset{n}{S}\,(x_i - \bar{x}^2)} = \frac{\overset{n}{S}\, x_i y_i - \frac{\overset{n}{S} x_i \overset{n}{S} y_i}{n}}{\overset{n}{S} x_i^2 - \frac{\left(\overset{n}{S} x_i\right)^2}{n}}$$

Die Varianz des Regressionswertes Y der Stichprobe um den entsprechenden Wert der Grundgesamtheit η — für einen bestimmten Wert X der unabhängigen Variablen — ist:

$$\sigma^2\,[Y - \eta] = \frac{1}{g}\,\sigma^2 \tag{25}$$

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{x})^2}{\overset{n}{S}\,(x_i - \bar{x})^2} \tag{25a}$$

Das zweite Glied des Ausdruckes für $1/g$ hat den Ursprung in der Streuung des Regressionskoeffizienten b; für $x = \bar{x}$ ist es gleich Null.

Die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist meistens unbekannt. Aus n Paaren der Messwerte x_i, y_i kann jedoch die Varianz s^2 der Stichprobe berechnet werden:

$$s^2\,[y - Y] = \frac{\overset{n}{S}\,(y_i - Y_i)^2}{\nu} = \tag{26}$$

$$= \frac{\left[\overset{n}{S} y_i^2 - \frac{\left(\overset{n}{S} y_i\right)^2}{n}\right] - b^2\left[\overset{n}{S} x_i^2 - \frac{\left(\overset{n}{S} x_i\right)^2}{n}\right]}{n - 2}$$

Der Freiheitsgrad ist $\nu = n - 2$, da zwei Gleichungen (für $\bar{y}$ und b) die Anzahl der freien Grössen um zwei verkleinern.

Zur Anwendung der nicht zentralen t-Verteilung wird die Definitions-Gleichung (14) für t umgeformt, durch Einsetzen von:

$$u = \frac{Y - \eta}{\frac{\sigma}{\sqrt{g}}}, \quad \delta = -u_0\sqrt{g} = -\frac{y(u_0) - \eta}{\sigma}\sqrt{g} \qquad \text{s. Gl. (25)}$$

$$t = \frac{u + \delta}{\frac{s}{\sigma}} = \frac{Y - \eta + \eta - y(u_0)}{\frac{\sigma}{\sqrt{g}} \cdot \frac{s}{\sigma}}$$

also

$$t = \frac{Y - y(u_0)}{\frac{s}{\sqrt{g}}} \tag{27}$$

$$y^*(u_0) = Y - t_0\,\frac{s}{\sqrt{g}} \tag{27a}$$

Die Analogien zur Stichprobe einer Variablen (Unterabschnitt 41) sind offensichtlich. t_0 wird für $\nu = n - 2$, $\delta = u_0\sqrt{g}$, $P_s = 2{,}5\ \%$ aus den Kurven der Fig. 7 mittels der Gl. (16) umgerechnet.

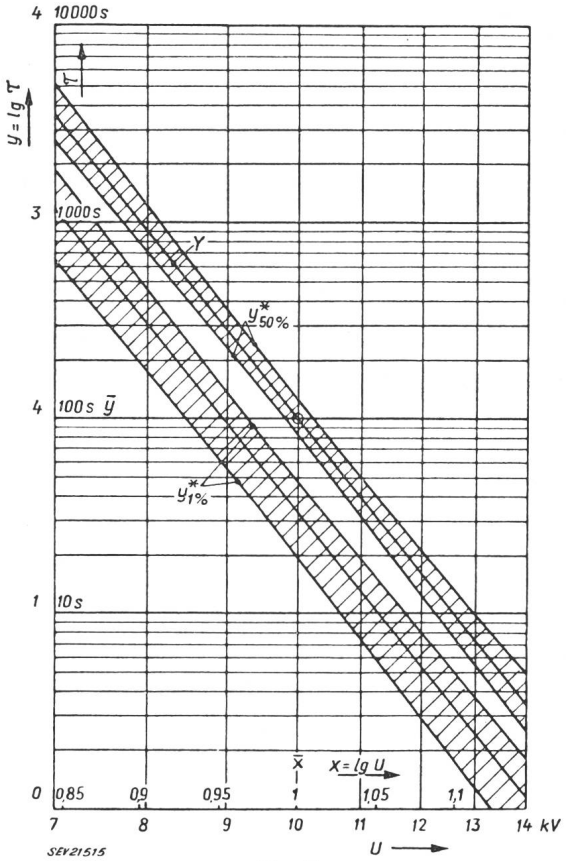

Fig. 11

Auswertung einer Stichprobe, welche einer Grundgesamtheit mit einfacher linearer Regression entnommen ist

Y = Regressionsgerade der Stichprobe

Der Vertrauensbereich von $y_{1\%}$ und $y_{50\%}$ ist schraffiert (P_s = 2,5 %). Umfang der Stichprobe (n): 20 Wertepaare x_i, y_i; Standardabweichung s = 0,2;

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{20} + \frac{(X - \bar{x})^2}{0{,}316} \quad \text{(s. Gl. 25a)}$$

In Fig. 11 ist der prinzipielle Verlauf der nach den obigen Gleichungen berechneten Vertrauensgrenzen $y^*_{1\%}$ und $y^*_{50\%}$ für ein (konstruiertes) Beispiel dargestellt. Die schraffierten Vertrauensbereiche sind am schmälsten bei $\bar{x}$ und verbreitern sich symmetrisch nach beiden Seiten.

[12]) Die Theorie der einfachen linearen Regression kann hier nur skizziert, und es muss auf Lehrbücher hingewiesen werden.

Werden die Vertrauensgrenzen horizontal bei einem gegebenen y durchschnitten, erhält man die 1-%-, bzw. 50-%-Durchschlagspannung bei Einwirkung während einer bestimmten Zeit und ihren Vertrauensbereich.

5. Kommentar

Mit der zentralen t-Verteilung werden Durchschnitte von Stichproben geprüft. Da aber Durchschnitte sich immer besser der Normalverteilung nähern als die Einzelwerte (vgl. Abschnitt 2), kann die t-Verteilung auch dann mit Erfolg verwendet werden, wenn die Grundgesamtheit ziemlich stark von der Normalverteilung abweicht.

Empfindlicher auf Abweichungen von der Normalverteilung ist die nicht zentrale t-Verteilung, denn sie bezieht sich auf Einzelwerte (z. B. $x_{1\%}$) und diese können bei Nichteinhaltung der Normalverteilung vom theoretischen Wert abweichen. Im Zweifelsfalle muss die Stichprobe daher auf Normalität der Häufigkeitsverteilung geprüft (s. Abschnitt 2 und [9, S. 52]) und eventuell die Normalität durch geeignete Transformation hergestellt werden.

Blattförmige Isolierstoffe, z. B. Papier und Pressspan, haben manchmal eine unsymmetrische, gegen kleine Werte der Durchschlagspannung oder -zeit auslaufende Häufigkeitsverteilung, was meistens durch leitende Teilchen im Isolierblatt verursacht ist. Derartige Isolierstoffe sollten nur in zwei oder mehreren Lagen verwendet und auch geprüft werden. Dann wird auch die Häufigkeitsverteilung verbessert.

Bei der Anwendung der nicht zentralen t-Verteilung muss in erhöhtem Masse auf die Normalität der Häufigkeitsverteilung in den Stichproben geachtet werden. Trotzdem bleibt die nicht zentrale t-Verteilung ein nützliches Werkzeug der Hochspannungstechnik, da sie die Berechnung der Vertrauensgrenzen ermöglicht, ohne deren Kenntnis jede Schätzung der Haltespannung von zweifelhaftem Wert ist.

Die nicht zentrale t-Verteilung führt vor allem zur richtigen Planung von Durchschlagversuchen. Unter Berücksichtigung der Grösse der Standardabweichung und der zulässigen Unsicherheit kann der wirtschaftliche Umfang der Messreihen ausgelegt werden.

Die in den Abschnitten 2...4 beschriebenen statistischen Methoden werden für stetig veränderliche Merkmale, z. B. Messwerte von Verlusten, Durchschlagspannungen, -zeiten usw. verwendet. Zur Auswertung von Ereignis-Häufigkeiten, z. B. der Anzahl der Durchschläge bei Stoßspannungen, müssen andere Methoden zur Anwendung kommen, wie die Prüfung mittels der binomischen, der Poissonschen Verteilung, der χ^2-Verteilung oder die Probit-Analysis [8; 10].

Da ein qualitatives Merkmal (z. B. «Durchschlag» oder «kein Durchschlag» bei Stoßspannung) weniger «Informationen» liefert als ein quantitatives Merkmal (z. B. Durchschlagzeit 52 s bei Wechselspannung) ist die Unsicherheit bei Auswertung von Ereignis-Häufigkeiten meist wesentlich grösser, bzw. es müssen mehr Messungen gemacht werden, um die gleiche statistische Sicherheit zu erreichen.

Prof. Linder und seinen Mitarbeitern Dipl. math. Kaelin und Weber bin ich zu grossem Dank für wertvolle Ratschläge und Literaturangaben verpflichtet.

Literatur

[1] *Linder, A.:* Statistische Methoden für Naturwissenschafter, Mediziner und Ingenieure. 2. erw. Auflage. Basel: Birkhäuser 1951.

[2] *Linder, A.:* Anwendung statistischer Methoden in der Elektrotechnik. Bull. SEV Bd. 43(1952), Nr. 17, S. 681...687.

[3] *SEV:* Regeln und Leitsätze für Buchstabensymbole und Zeichen. Ergänzung 1α zu Publ. 192(1950), Nr. 6-601...6-802.

[4] *A.S.T.M.*, American Society for Testing Materials: Manual on Presentation of Data. Philadelphia (1946).

[5] *British Association for the Advancement of Science:* Mathematical Tables, Vol. I. London: Office of the British Association (1931).

[6] *Davies, O. L.:* Statistical Methods in Research and Production. London: Oliver and Boyd (1949).

[7] *Dudding, B. P.* and *W. J. Jenet:* Quality Control Charts. British Standards 600 R: 1942.

[8] *Finney, D. J.:* Probit Analysis. A Statistical Treatment of the Sigmoid Response Curve. 2nd ed. Cambridge: University Press (1952).

[9] *Fisher, R. A.:* Statistical Methods for Research Workers. 10th ed. Edinburgh: Oliver and Boyd. (1946).

[10] *Fisher, R. A.* and *F. Yates:* Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research. 3rd ed. London: Oliver and Boyd (1948).

[11] *Johnson, N. L.* and *B. L. Welch:* Applications of the Noncentral t-Distribution. Biometrika, Bd. 31(1939), S. 362...389.

[12] *Wilcoxon, F.:* Individual Comparisons by Ranking Methods. Biometrics, Bd. 1(1945), Nr. 6, S. 80.

Adresse des Autors:
Dr.-Ing. *M. Krondl*, Maschinenfabrik Oerlikon, Zürich 50.

Ligne 225 kV du Simplon

(Secteur suisse Mörel—Passo di Monscera)

Communication de la *Société Ofinco S. A.*, Genève

621.315.1.027.7(494.441.7)

L'aménagement hydro-électrique du versant sud du Simplon et la proximité des réseaux suisse et italien amenèrent les Sociétés intéressées à réaliser une ligne 225 kV de Mörel à la centrale Gasparoni près Domodossola. Le présent article indique les caractéristiques du secteur suisse de cette importante interconnexion.

Der Ausbau der Wasserkräfte des Südabhanges des Simplons einerseits und die Nähe des schweizerischen und des italienischen Höchstspannungsnetzes anderseits veranlassten die interessierten Elektrizitätsunternehmungen eine 225-kV-Leitung zwischen Mörel und der Zentrale Gasparoni bei Domodossola zu erstellen. Der Artikel bezieht sich auf die Schweizer Strecke dieser Leitung.

1. Généralités

L'aménagement hydro-électrique du versant sud du col du Simplon et la réalisation, en première étape, d'une centrale à Gondo, posèrent le problème du transport de l'énergie vers les centres consommateurs.

La nécessité d'un raccordement avec le réseau suisse et la proximité du réseau italien engagèrent