Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 41 (1950)

Heft: 24

Artikel: Beitrag zur Berechnung von offenen Leitungen mit gleichmässig verteilter Belastung

Autor: Jung, Werner

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1058947

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

41e année N° 24 Samedi, le 25 Novembre 1950

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Beitrag zur Berechnung von offenen Leitungen mit gleichmässig verteilter Belastung

Von *Werner Jung*, Bern

621.392.22

Es wird eine Methode entwickelt zur Berechnung von Leitungen, an die in gleichmässigen Abständen gleiche Widerstände parallel geschaltet sind. Die Ergebnisse werden mit der in der Starkstromtechnik üblichen Formel für die Berechnung von offenen Leitungen mit gleichmässig verteilter Belastung verglichen und eine graphische Lösung der Aufgabe angegeben.

L'auteur expose une méthode de calcul des lignes comportant des résistances branchées en parallèle à des distances uniformes. Les résultats sont ensuite comparés à ceux obtenus au moyen de la formule utilisée dans la technique des courants forts pour le calcul des lignes ouvertes avec charge uniformément répartie. L'auteur termine par une solution graphique du problème.

I

In Fig. 1 sei eine Fernmeldeleitung dargestellt, an die in gleichmässigen Abständen Apparate mit gleichen elektrischen Eigenschaften parallel angeschlossen seien.

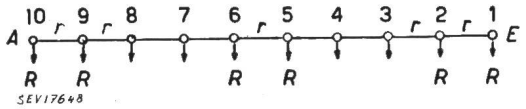


Fig. 1
Leitung mit gleichmässig verteilter Belastung
Stromquelle in *A*, am Anfang der Leitung

Der gesamte Leitungswiderstand von A bis E sei nr und der Widerstand eines Apparates sei R. Ferner sei das Verhältnis $r/R = a$ gesetzt. Wird A als Sendestation angenommen, so bedeuten

U_a die Anfangs- oder Sendespannung und
U_e die Endspannung am Apparat E,

und es ist dann

$$U_a = kU_e \text{ und } U_e = U_a/k. \tag{1}$$

Der Strom im Endapparat E ist

$$I_1' = \frac{U_e}{R} = \frac{a}{r} U_e \tag{2}$$

der Spannungsabfall im Leitungsstück *1-2* wird

$$U_1' = I_1' r = a\, U_e \tag{3}$$

und die Spannung am Apparat *2*

$$U_2 = k_1 U_e = U_e + U_1' = U_e (1 + a). \tag{4}$$

Hieraus finden wir die Konstante

$$k_1 = 1 + a.$$

Der Strom im Apparat *2* wird

$$I_2' = \frac{U_2}{R} = \frac{a}{r} U_e k_1 = \frac{a}{r} U_e (1 + a)$$

und der Spannungsabfall im Leitungsstück *2-3*

$$U_2' = (I_1' + I_2') r = U_e (2a + a^2)$$

Die Spannung im Apparat *3* wird somit

$$U_3 = k_2 U_e = U_2 + U_2' = U_e (1 + 3a + a^2)$$

und die Konstante

$$k_2 = 1 + 3a + a^2.$$

In diesem Sinne führen wir die Rechnung für jeden Punkt weiter und finden anhand dieses Rechnungsschemas folgende Beziehungen für $x = 1 \ldots n$, wobei $k_0 = 1$:

Zweigstrom

$$I_x' = \frac{1}{R} U_e k_{x-1} \tag{5}$$

Gesamtstrom

$$I_x = \frac{1}{R} U_e \left[1 + \sum_{x=1}^{n-1} k_x\right] \tag{6}$$

Teil-Spannungsabfall

$$U_x' = aU_e \left[1 + \sum_{x=1}^{n-1} k_x\right] \tag{7}$$

Gesamtspannung

$$U_x = U_e k_{x-1} \tag{8}$$

prozentualer Spannungsabfall in der Leitung

$$\varepsilon_x = 100 \frac{k_{x-1} - 1}{k_{x-1}} \tag{9}$$

Gesamtwiderstand

$$Z_x = R \frac{k_{x-1}}{1 + \sum_{x=1}^{n-1} k_x} \tag{10}$$

Für die direkte Berechnung des Gesamtwiderstandes Z gehen wir aus von Fig. 2.

Es ist $Z_1 = R$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_1 + r} + \frac{1}{R} = \frac{Z_1 + R + r}{R\,(Z_1 + r)}; \quad Z_2 = \frac{Z_1\,(Z_1 + r)}{Z_1 + Z_1 + r}$$

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_2 + r} + \frac{1}{R} = \frac{Z_2 + R + r}{R\,(Z_2 + r)}; \quad Z_3 = \frac{Z_1\,(Z_2 + r)}{Z_1 + Z_2 + r}$$

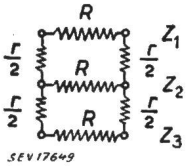


Fig. 2
In einer Leitung parallel geschaltete Widerstände

Setzen wir wiederum $r/R = a$, $R = r/a$, so erhalten wir

$$Z_2 = \frac{\frac{r}{a}\left[\frac{r}{a} + r\right]}{2\,\frac{r}{a} + r} = \frac{r}{a}\,\frac{1 + a}{2 + a} = R\,\frac{k_1}{1 + k_1}$$

$$Z_3 = \frac{\frac{r}{a}\left[r + \frac{r}{a}\,\frac{k_1}{1 + k_1}\right]}{\frac{r}{a} + r + \frac{r}{a}\,\frac{k_1}{1 + k_1}} = \frac{r}{a}\left[\frac{a + \frac{k_1}{1 + k_1}}{1 + a + \frac{k_1}{1 + k_1}}\right] =$$

$$= R\,\frac{a\,(1 + k_1) + k_1}{(1 + a)\,(1 + k_1) + k_1} = R\,\frac{1 + 3a + a^2}{3 + 4a + a^2}$$

Der Wert des Zählers entspricht der Konstanten k_2. Teilen wir den Nenner auf in $1 + 2 + 4a + a^2$, so finden wir in der folgenden Tabelle dafür den Wert $1 + k_1 + k_2$. Wir dürfen daher schreiben:

$$Z_3 = R\,\frac{k_2}{1 + k_1 + k_2}$$

Führen wir die Rechnung weiter, so finden wir für Z_x den gleichen Wert wie Formel 10, nämlich

$$Z_x = R\,\frac{k_{x-1}}{1 + \sum\limits_{x=1}^{n-1} k_x}$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte für die Konstanten k_1 bis k_{20} zusammengestellt.

Zusammenstellung der k-Werte

k_0	$= 1$			
k_1	$= 1 +$	a		
k_2	$= 1 +$	$3a +$	a^2	
k_3	$= 1 +$	$6a +$	$5a^2 +$	a^3
k_4	$= 1 +$	$10a +$	$15a^2 +$	$7a^3 + a^4$
k_5	$= 1 +$	$15a +$	$35a^2 +$	$28a^3 + \ldots$
k_6	$= 1 +$	$21a +$	$70a^2 +$	$84a^3 + \ldots$
k_7	$= 1 +$	$28a +$	$126a^2 +$	$210a^3 + \ldots$
k_8	$= 1 +$	$36a +$	$210a^2 +$	$462a^3 + \ldots$
k_9	$= 1 +$	$45a +$	$330a^2 +$	$924a^3 + \ldots$
k_{10}	$= 1 +$	$55a +$	$495a^2 +$	$1716a^3 + \ldots$
k_{11}	$= 1 +$	$66a +$	$715a^2 +$	$3003a^3 + \ldots$
k_{12}	$= 1 +$	$78a +$	$1001a^2 +$	$5005a^3 + \ldots$
k_{13}	$= 1 +$	$91a +$	$1365a^2 +$	$8008a^3 + \ldots$
k_{14}	$= 1 +$	$105a +$	$1820a^2 + \ldots$	
k_{15}	$= 1 +$	$120a +$	$2380a^2 + \ldots$	
k_{16}	$= 1 +$	$136a +$	$3060a^2 + \ldots$	
k_{17}	$= 1 +$	$153a +$	$3876a^2 + \ldots$	
k_{18}	$= 1 +$	$171a +$	$4845a^2 + \ldots$	
k_{19}	$= 1 +$	$190a +$	$5985a^2 + \ldots$	
k_{20}	$= 1 +$	$210a +$	$7315a^2 + \ldots$	

Der Index des Faktors k gibt also die Zahl der Leitungsteile an oder auch die um 1 verminderte Zahl der parallel geschalteten Apparate.

Wir wollen nun aus einem Beispiel einige Punkte nachrechnen: Auf einer Streckentelephonleitung längs einer Bahn sollen 10 Apparate, deren Ohmscher Widerstand $R = 23\,500\ \Omega$ beträgt (SBB-Modell), parallel geschaltet werden. Als Leitung diene ein unbelastetes Kabeladerpaar von 1,2 mm Durchmesser mit einem Schleifenwiderstand von 31,2 Ω/km. Die Gesamtlänge der Leitung betrage 14,4 km und der Leitungswiderstand somit 450 Ω.

Hier soll nicht untersucht werden, ob für diese kurze Strecke inbezug auf die Dämpfung nicht eine dünnere Ader und damit ein billigeres Kabel gewählt werden könnte, sondern wir nehmen die Leitung einfach als gegeben an. Ebenso klar ist, dass die Resultate bei Wechselstrombetrieb wesentlich andere werden.

Es sollen nun die Spannungen, Ströme und Widerstände an bestimmten Punkten ermittelt werden.

Nehmen wir an, die 10 Apparate seien in gleichmässigen Abständen über die Leitung verteilt, eine Annahme, die natürlich nicht ganz zutrifft, aber für unsere Rechnung zweckmässig und zulässig ist, so erhalten wir 9 Teilstrecken ($n = 9$) von der Länge 14,4 km/9 = 1600 m mit einem Widerstand von 450 Ω/9 = 50 Ω.

Wir haben somit $r = 50$ und $R = 23\,500$ und damit wird

$$a = r/R = 0{,}0021277 \text{ und } a^2 = 0{,}000004527$$

Die Glieder mit dem Exponenten 3 können wir vernachlässigen. Berechnen wir mit den beiden Werten die 9 Konstanten, so erhalten wir

$k_1 = 1{,}00213$	$k_4 = 1{,}02134$	$k_7 = 1{,}06015$
$k_2 = 1{,}00639$	$k_5 = 1{,}03207$	$k_8 = 1{,}07755$
$k_3 = 1{,}01279$	$k_6 = 1{,}04500$	$k_9 = 1{,}09724$

Nehmen wir noch in A eine Sendespannung von 70 V an, so erhalten wir nach Gl. 1 die Endspannung in E mit

$$U_e = U_a/k_9 = 70/1{,}097 = 63{,}80 \text{ V}$$

woraus sich der totale Spannungsabfall auf der Leitung zu 6,20 V ergibt.

Nun kennt man U_e und kann damit rückwärts für jeden Punkt Strom, Spannung und Widerstand bestimmen.

Der Strom im Endapparat ($x = 1$) beträgt

$$I_1' = \frac{1}{R}\,U_e = 1/23\,500 \cdot 63{,}80 = 2{,}71 \text{ mA}$$

und der Spannungsabfall im Leitungsstück *1-2* wird

$$U_1' = a\,U_e = 0{,}00213 \cdot 63{,}80 = 0{,}136 \text{ V oder}$$
$$U_1' = I_1'\,r = 0{,}00271 \cdot 50 = 0{,}136 \text{ V}$$

Für die Spannung am Apparat 2 ($x = 2$) erhalten wir nach Gl. 8

$$U_2 = U_e\,k_1 = 63{,}80 \cdot 1{,}00213 = 63{,}93 \text{ V}$$

Der Zweigstrom in Punkt 6 ($x = 6$) wird nach Gl. 5

$$I_6' = \frac{1}{R} U_e k_5 = 1/23\,500 \cdot 63{,}80 \cdot 1{,}03207 = 2{,}80\,\text{mA}$$

die Spannung

$$U_6 = U_e\, k_5 = 63{,}80 \cdot 1{,}03207 = 65{,}84\ \text{V}$$

und für den Gesamtstrom in diesem Punkte erhalten wir nach Gl. 6

$$I_6 = \frac{1}{R} U_e \left[1 + \sum_{x=1}^{5} k_x\right] = \frac{1}{23\,500} \cdot 63{,}80 \cdot 6{,}07472 = \\ = 16{,}49\ \text{mA}.$$

Der Strom im Apparat 10 ($x = 10$) beträgt

$$I_{10}' = \frac{1}{R} U_e k_9 = 1/23\,500 \cdot 63{,}80 \cdot 1{,}09724 = 2{,}978\,\text{mA}$$

und der Gesamtstrom im Punkt 10 oder der Sendestation A

$$I_{10} = \frac{1}{R} U_e \left[1 + \sum_{x=1}^{9} k_x\right] = \frac{1}{23\,500} \cdot 63{,}80 \cdot 10{,}35466 = \\ = 28{,}11\ \text{mA}.$$

Für den Gesamtwiderstand der Leitung mit den 10 parallel geschalteten Apparaten erhalten wir somit nach Gl. 10

$$Z_{10} = R \frac{k_9}{1 + \sum_{x=1}^{9} k_x} = 23\,500 \cdot \frac{1{,}09724}{10{,}35466} = 2490\ \Omega$$

oder

$$Z_{10} = \frac{U_{10}}{I_{10}} = \frac{70{,}0}{28{,}11 \cdot 10^{-3}} = 2490\ \Omega$$

Wollen wir noch den prozentualen Spannungsabfall in der Leitung bestimmen, so erhalten wir dafür nach Gl. 9

$$\varepsilon_{10} = 100 \cdot \frac{k_9 - 1}{k_9} = 100 \cdot \frac{0{,}09724}{1{,}09724} = 8{,}86\ \%$$

oder

$$\varepsilon_{10} = 100\, \frac{U_a - U_e}{U_a} = 100\, \frac{6{,}20}{70} = 8{,}86\ \%$$

II

Sollte die Notwendigkeit vorliegen, die Spannungs-, Strom- und Widerstandsverhältnisse auf der Leitung zu kennen für den Fall, dass z. B.

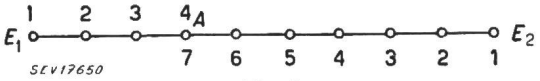


Fig. 3
Leitung mit gleichmässig verteilter Belastung
Stromquelle in A, im Zuge der Zeitung

Station 7 als Sendestation wirkt, so erhalten wir entsprechend Fig. 3 folgendes Bild:

Wir teilen die Leitung in die beiden Strecken E_1-4 und E_2-7, berechnen bei gegebener Sendespannung U_a in Station A die Endspannungen in E_1 und E_2 nach Gl. 1, erhalten damit

$$U_{e1} = U_a/k_3 \text{ und } U_{e2} = U_a/k_6$$

und rechnen weiter wie im ersten Beispiel.

Sind exakte Resultate erforderlich, so rechnen wir statt mit dem Rechenschieber mit Logarithmen. Aus einer 7stelligen Tafel können die meisten Zahlenwerte direkt ohne Interpolation abgelesen werden.

III

In der Starkstromtechnik rechnet man anders. Hier handelt es sich ja hauptsächlich darum, bei vorgeschriebenem Spannungsabfall den Leitungsquerschnitt zu bestimmen, und man nimmt ohne Bedenken an, dass alle n Abnahmestellen den gleichen Strom beziehen, was jedoch wegen des Spannungsabfalls auf der Leitung nicht ganz zutrifft.

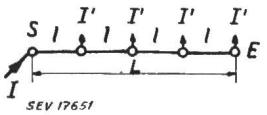


Fig. 4
Leitung mit gleichmässig verteilter Belastung
Speisepunkt in S

Bedeuten in Fig. 4

L die Länge der Hin- und Rückleitung in m,
A den gleichmässigen Leitungsquerschnitt in mm²,
n die Zahl der Abnahmestellen,
γ die Leitfähigkeit,
I' den Strom in einer Abnahmestelle und
I den Gesamtstrom,

so wird der Spannungsabfall U_v in der offenen Leitung folgendermassen berechnet:

Es ist $I' = I/n$ und $l = L/n$ und damit

$$U_v = \frac{1}{\gamma A}\left[\frac{I}{n}\frac{L}{n} + 2\frac{I}{n}\frac{L}{n} + \ldots + n\frac{I}{n}\frac{L}{n}\right] = \\ = \frac{1}{\gamma A}\frac{IL}{n^2}\,[1 + 2 + \ldots + n]$$

Nun ist die Summe der Reihe ganzer Zahlen

$$s = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

und somit

$$U_v = \frac{1}{\gamma A}\, I L\, \frac{n+1}{2n} \qquad (11)$$

Vergleichen wir Fig. 1 und 4, so erkennen wir, dass in Fig. 1 der Speisepunkt im Apparat A liegt, während in Fig. 4 zwischen dem Speisepunkt und der ersten Abnahmestelle noch ein Leitungsstück von der Länge L/n vorgeschaltet ist. Diesen Unterschied müssen wir bei der Berechnung des Gesamtstromes berücksichtigen.

Nun ist $\frac{1}{\gamma A} L = nr$, und damit geht Gl. 11 über in

$$U_v = r\, I\, \frac{n+1}{2}$$

Wir rechnen wieder mit $U_a = 70$ V, $r = 50\ \Omega$, $R = 23\,500\ \Omega$ und 9 Teilstrecken, d. h. in diesem Falle zugleich mit 9 Abnahmestellen ($n = 9$), da in der Sendestation kein Strom abzweigt. Damit wird der Zweigstrom

$$I' = \frac{70}{23\,500} = 2{,}978 \text{ mA}$$

und der gesamte Spannungsabfall

$$U_v = 50 \cdot 9 \cdot 2{,}978 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10}{2} = 6{,}70 \text{ V}$$

oder

$$U_v = I'r + 2I'r + \ldots + nI'r = I'r\,(1 + 2 + \ldots + n) =$$

$$= I'r\,n\,\frac{(n+1)}{2}$$

$$U_v = 2{,}978 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 45 = 6{,}70 \text{ V}.$$

Der prozentuale Spannungsabfall in der Leitung beträgt somit

$$\varepsilon = 100 \cdot \frac{6{,}70}{70} = 9{,}57\ \%$$

der Gesamtstrom unter Berücksichtigung des oben Gesagten

$$I = 10\ I' = 29{,}78 \text{ mA}.$$

und der Gesamtwiderstand

$$Z = U_a / I_a = \frac{70}{0{,}02978} = 2350\ \Omega.$$

Stellen wir die Resultate der beiden Rechnungsarten einander gegenüber, so haben wir

	Exakte Rechnung	*Starkstrom-Formel*
Anfangsspannung	70,00	70,00
Endspannung	63,80	63,30
Spannungsabfall	6,20	6,70
%-Spannungsabfall	8,86	9,57
Gesamtstrom	28,11	29,78
Strom im Apparat *A*	2,978	2,978
Strom im Apparat *E*	2,71	2,978
Gesamtwiderstand	2490	2350

Aus dieser Zusammenstellung erkennen wir, dass sich die «Starkstrommethode» für die exakte Berechnung von Fernmeldeleitungen weniger gut eignet.

IV

Nun wollen wir noch versuchen, die Berechnung von parallel geschalteten Widerständen graphisch zu lösen.

Schalten wir einem Widerstand $R_1 = Z_1$ einen Widerstand R_2 parallel, so ist

$$Z_2 = \frac{Z_1 R_2}{Z_1 + R_2}$$

Wenn wir diesem Z_2 einen weiteren Widerstand R_3 parallel schalten, so erhalten wir

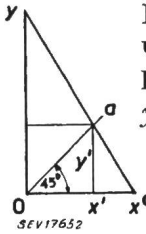
$$Z_3 = \frac{Z_2 R_3}{Z_2 + R_3}$$

und schliesslich

$$Z_x = \frac{Z_{x-1} R_x}{Z_{x-1} + R_x}$$

Nun zeichnen wir zwei rechtwinklig aufeinanderstehende Koordinaten x und y und ziehen vom Schnittpunkt 0 aus unter 45° eine Hilfsgerade a. Dann ist nach Fig. 5

$$y : x = y' : (x - x') \text{ oder } x : y = x' : (y - y')$$



Nun ist der Winkel der Hilfsgeraden 45° und somit $x' = y'$, wodurch die Proportion übergeht in

$$y : x = y' : (x - y') \text{ oder } x : y = x' : (y - x')$$

Fig. 5
Graphische Darstellung der Formel $Z = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

und daraus finden wir

$$y' = \frac{xy}{x + y} \quad \text{oder} \quad x' = \frac{xy}{x + y} \tag{13}$$

Diese Gl. 13 entspricht aber der Formel für die Berechnung von zwei parallel geschalteten Widerständen und auch der Formel für die Hintereinanderschaltung von zwei Kondensatoren, und damit können wir unsere Aufgabe graphisch lösen.

Zur Erläuterung soll ein Beispiel gerechnet und angenommen werden, es sollen die Widerstände $R_1 = 50$, $R_2 = 40$, $R_3 = 30$, $R_4 = 20$ und $R_5 = 10\ \Omega$ parallel geschaltet werden. Wir haben also

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{50} + \frac{1}{40} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10}; \quad Z = 4{,}38\ \Omega$$

Wir nehmen die y-Achse als Träger der Z-Werte an und tragen auf dieser Achse irgend einen Wert, z. B. $Z_1 = R_1 = 50\ \Omega$ in einem passenden Massstab in Fig. 6 auf. Die übrigen Werte für $R_2 \ldots R_5$

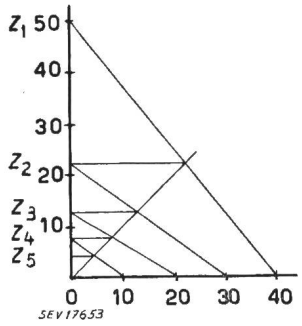


Fig. 6
Graphische Ermittlung des resultierenden Widerstandes parallel geschalteter ungleicher Widerstände

tragen wir auf der x-Achse ab und ziehen noch die Hilfsgerade unter 45°. Nun legen wir eine Verbindungsgerade von Z_1 z. B. zu $R_2 = 40\ \Omega$ und ziehen vom Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Hilfsgeraden eine Parallele zur x-Achse an die y-Achse. Die Länge dieser Verbindungslinie entspricht dem Werte Z_2, den wir auf der y-Achse ablesen können.

Den Punkt Z_2 verbinden wir mit irgend einem anderen R-Wert auf der x-Achse, ziehen wiederum vom neuen Schnittpunkt aus die Parallele an die y-Achse und haben so den Wert für Z_3 usw.

Projizieren wir die y-Skala auf die Hilfsgerade, so können wir an den Schnittpunkten die gesuchten Werte direkt ablesen. Aus Fig. 6 lesen wir ab:

$$Z_1 = 50\ \Omega,\ Z_2 = 22{,}22\ \Omega,\ Z_3 = 12{,}77\ \Omega,$$
$$Z_4 = 7{,}79\ \Omega,\ Z_5 = 4{,}38\ \Omega.$$

Haben wir die Aufgabe, n gleiche Widerstände parallel zu schalten, so werden wir nicht lange zeichnen, sondern die Werte gleich anschreiben.

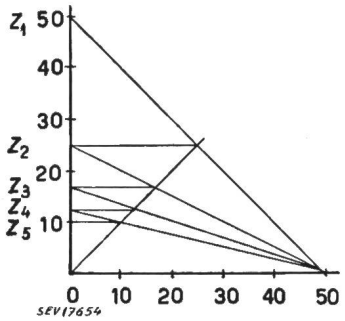


Fig. 7
Graphische Ermittlung des resultierenden Widerstandes parallel geschalteter gleicher Widerstände

Gleichwohl sei in Fig. 7 die ohne weiteres verständliche Konstruktion angegeben für den Fall, dass 5 Widerstände von je 50 Ω parallel zu schalten seien. Aus der Fig. lesen wir folgende Resultate ab:

$$Z_1 = 50\ \Omega,\ Z_2 = 25\ \Omega,\ Z_3 = 16{,}66\ \Omega,$$
$$Z_4 = 12{,}5\ \Omega \text{ und } Z_5 = 10\ \Omega.$$

In den beiden letzten Beispielen haben wir parallel geschaltete Widerstände berechnet, die praktisch widerstandslos miteinander verbunden sind.

Nun handelt es sich aber in unserem ersten Beispiel darum, den Gesamtwiderstand von parallel geschalteten Widerständen zu berechnen, die nach Fig. 2 in gleichmässigen Abständen in einer Leitung liegen, und wir wollen nun auch diese Aufgabe graphisch lösen.

Wir haben früher gefunden:

$$Z_1 = R;\ Z_2 = \frac{Z_1\,(Z_1 + r)}{Z_1 + Z_1 + r};\ Z_3 = \frac{Z_1\,(Z_2 + r)}{Z_1 + Z_2 + r}$$

oder allgemein

$$Z_x = \frac{Z_1\,(Z_{x-1} + r)}{Z_1 + Z_{x-1} + r}$$

Tragen wir nun in Fig. 8 den konstanten Wert Z_1 z. B. als Abszisse und den Wert $Z_1 + r$ als Ordinate auf, ziehen wiederum vom Schnittpunkt mit der Hilfsgeraden die Parallele zur Abszisse, so lesen wir an der Ordinatenachse den Wert für Z_2 ab. Um nun den neuen Wert $Z_2 + r$ zu erhalten, tragen wir auf der y-Achse von Z_2 aus aufwärts den Wert r auf, ziehen von diesem neuen Punkte aus die Verbindungslinie zu Z_1 und finden so den Wert für Z_3 usw.

Das erste Beispiel mit den Widerständen $Z_1 = 23\,500\ \Omega$ und $Z_1 + r = 23\,550\ \Omega$ lässt sich nun aber graphisch nicht mehr so darstellen, dass der Leitungswiderstand von 50 Ω noch sichtbar ist. Wir nehmen daher zum Beweise der Richtigkeit der graphischen Rechnung kleinere Werte an, und es sollen Widerstände von je 100 Ω in Leitungsteile von je 5 Ω Widerstand parallel geschaltet werden.

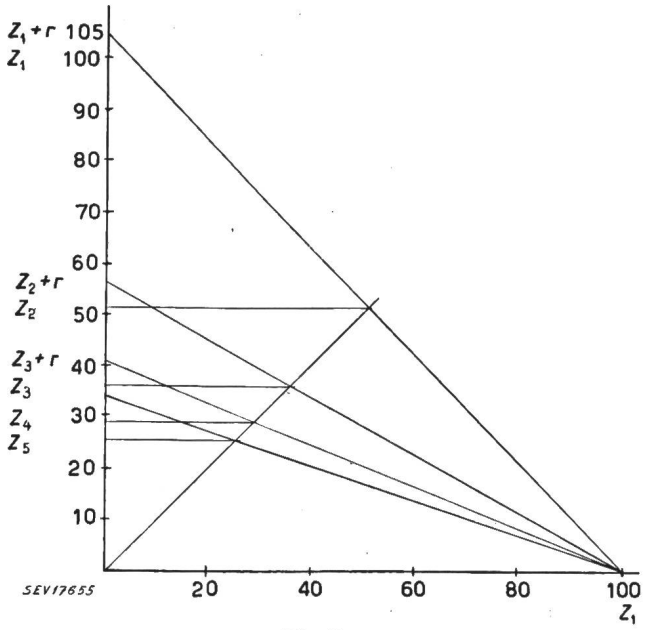


Fig. 8
Graphische Ermittlung des resultierenden Widerstandes parallel geschalteter gleicher Widerstände, die in gleichmässigen Abständen in einer Leitung liegen

Aus Fig. 8 lesen wir ab:

$$Z_1 = 100;\ Z_1 + r = 105;\ Z_2 = \frac{105 \cdot 100}{205} = 51{,}22$$
$$Z_2 + r = 56{,}22$$
$$Z_3 = \frac{56{,}22 \cdot 100}{156{,}22} = 36{,}00;\ Z_3 + r = 41{,}00$$
$$Z_4 = \frac{41{,}00 \cdot 100}{141{,}00} = 29{,}07;\ Z_4 + r = 34{,}07$$
$$Z_5 = \frac{34{,}07 \cdot 100}{134{,}07} = 25{,}41\ \Omega \text{ usw.}$$

Nun haben wir z. B. bei Streckentelephonanlagen sehr oft Stationen oder Wärterposten, in denen zum Streckenapparat noch ein Zusatzwecker parallel geschaltet ist. Dadurch werden aber die Widerstandsverhältnisse vollständig anders. Schalten wir in unserem ersten Beispiel einem Streckenapparat von 3500 + 20 000 Ω einen Zusatzwecker von 3500 Ω parallel, so wird der Gesamtwiderstand 3046 Ω.

Um auch diese Aufgabe graphisch zu lösen, erweitern wir das letzte Beispiel, indem wir annehmen, in den Stationen *3* und *4* sei dem Apparate $Z_1 = 100\ \Omega$ je ein Zusatzapparat von ebenfalls 100 Ω parallel geschaltet. Die Widerstände dieser Stationen betragen somit je $Z' = 50\ \Omega$.

Wir tragen nun in Fig. 9 gleich wie in Fig. 8 die Werte für Z_1 und $Z_1 + r$ auf und finden wiederum für Z_2 den Wert 51,22 Ω. Dazu addieren wir 5 Ω für den Widerstand der Teilstrecke und haben damit den Punkt $Z_2 + r = 56{,}22\ \Omega$ festgelegt.

Nun ist der Widerstand der folgenden Station 3 nicht 100 Ω, sondern nur 50 Ω. Diesen Wert tragen wir auf der Abszisse als Punkt Z' auf, verbinden ihn mit dem Punkt $Z_2 + r = 56{,}22$, ziehen die Parallele vom Schnittpunkt an die Ordinate und finden so den Wert $Z_3 = 26{,}46$ Ω usw.

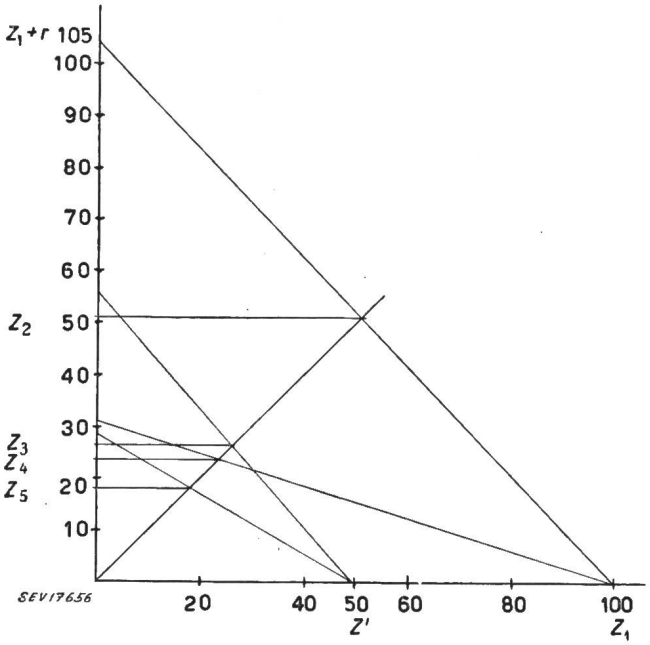


Fig. 9
Graphische Ermittlung des resultierenden Widerstandes parallel geschalteter ungleicher Widerstande, die in gleichmässigen Abständen in einer Leitung liegen

Aus Fig. 9 lesen wir ab:

$$Z_1 = 100;\ Z_1 + r = 105;\ Z_2 = \frac{105 \cdot 100}{205} = 51{,}22$$

$$Z_2 + r = 56{,}22$$

$$Z_3 = \frac{56{,}22 \cdot 50}{106{,}22} = 26{,}46;\ Z_3 + r = 31{,}46$$

$$Z_4 = \frac{31{,}46 \cdot 100}{131{,}46} = 23{,}93;\ Z_4 + r = 28{,}93$$

$$Z_5 = \frac{28{,}93 \cdot 50}{78{,}93} = 18{,}33 \text{ usw.}$$

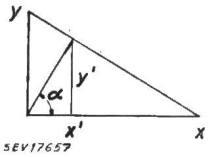


Fig. 10
Graphische Darstellung der Formel $Z = \frac{RnR}{R+nR}$

Haben wir Widerstände parallel zu schalten, die zueinander ungefähr im Verhältnis 1 : 10 stehen, so können wir sie nach Fig. 10 folgendermassen graphisch berechnen:

Es ist wiederum $y : x = y' : (x - x')$ oder

$$y : x = x' \operatorname{tg} \alpha : (x - x')$$

und daraus

$$x' = \frac{xy}{x \operatorname{tg} \alpha + y}$$

Legen wir nun die Hilfsgerade im Verhältnis 1 : 10 in das Achsenkreuz, setzen also $\operatorname{tg} \alpha = 10$, so erhalten wir

$$x' = \frac{10\,xy}{10\,x + y} \tag{14}$$

Wir schreiben also nun die Abszissenachse mit den Werten 0...1000 statt mit 0...100 an, während die Ordinatenachse die unveränderten Werte 0...100

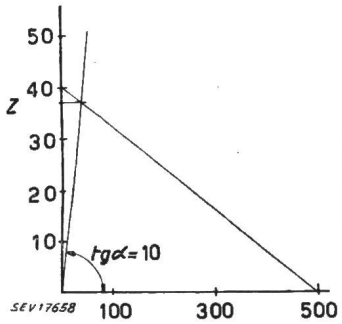


Fig. 11
Graphische Berechnung des resultierenden Widerstandes parallel geschalteter, im Verhältnis 1:10 zu einander stehender Widerstände

trägt. Sollen z. B. die Widerstände 40 Ω und 500 Ω parallel geschaltet werden, so erhalten wir nach Fig. 11

$$Z = \frac{40 \cdot 500}{540} = 37{,}0\ \Omega$$

Für die Fig. 5...9 haben wir einen Kreuzungswinkel von 90° angenommen. Wir würden aber zu den selben Resultaten gelangen, wenn wir irgend einen anderen Winkel wählen würden, wobei wir aber darauf achten müssten, dass die Winkelhalbierende nicht unpraktisch kurz wird. Mit dem Beispiel Fig. 9 haben wir das Gebiet der offenen Leitungen mit gleichmässig verteilter Belastung verlassen und es ist ohne weiteres ersichtlich, dass die angegebene graphische Methode auch für die Lösung von Aufgaben mit ungleichmässigen Leitungsabschnitten anwendbar ist.

Adresse des Autors:
Werner Jung, Ingenieur, Junkerngasse 43, Bern.

Über die mechanische Charakteristik von Einphasen-Bahnmotoren bei 16⅔ und bei 50 Hz

Von *W. Kummer*, Zürich

621.33.025.1

Im Anschluss an den Bericht von L. H. Leyvraz über Einphasen-Bahnbetrieb bei 50 Hz wird hier gezeigt, dass die empirisch festgestellte mechanische Charakteristik der neuen Motoren für 50 Hz gegenüber der Charakteristik von Motoren für 16⅔ Hz durchaus den Erwartungen der Theorie entspricht.

Donnant suite aux résultats empiriques communiqués par M. L. H. Leyvraz sur la traction électrique à courant monophasé de 50 Hz, la présente note démontre que la caractéristique mécanique des nouveaux moteurs pour 50 Hz, vis-à-vis de la caractéristique des moteurs pour 16⅔ Hz, est conforme aux prévisions de la théorie.