

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 41 (1950)
Heft: 14

Artikel: Moderne Methoden zur Behandlung nichtstationärer Vorgänge in elektrischen Maschinen
Autor: Laible, T.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1058919>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Moderne Methoden zur Behandlung nichtstationärer Vorgänge in elektrischen Maschinen

Von Th. Laible, Zürich *)

621.313.01

Es werden einige methodische Hilfsmittel zur Behandlung nichtstationärer Vorgänge in elektrischen Maschinen behandelt. Die mathematische Erfassung dieser Vorgänge geschieht mit Hilfe der Matrizenrechnung, mit der Laplace-Transformation und mit numerischen und mechanischen Integrationsmethoden. Anhand einiger Beispiele wird die Anwendung dieser Hilfsmethoden erörtert. Ein reiches Literaturverzeichnis ergänzt die Arbeit.

Exposé de quelques moyens méthodiques pour l'étude des processus non stationnaires dans les machines électriques, notamment du calcul matriciel, de la transformation de Laplace, ainsi que des méthodes d'intégration numériques et mécaniques. L'emploi de ces diverses méthodes est illustré par quelques exemples. Une bibliographie détaillée termine cet exposé.

Einleitung

Das gesamte Gebiet der nichtstationären Vorgänge in elektrischen Maschinen ist so gross, dass es sich nur darum handeln kann, einen ganz skizzenhaften Überblick zu geben. Wie schon der Titel andeutet, werden wir uns weniger um die Vorgänge selbst als um die Hilfsmittel zu ihrer mathematischen Erfassung kümmern. Die Beispiele dienen nur zur Illustration und könnten fast beliebig vermehrt werden.

Die wichtigsten methodischen Hilfsmittel sind:

1. Die Matrizenrechnung zur übersichtlichen Schreibweise der Gleichungen und zur Vornahme der nötigen «Koordinaten»-Transformationen.
2. Die Laplace-Transformation zur Behandlung der linearen Probleme.
3. Numerische und mechanische Integrationsmethoden zur Behandlung nichtlinearer Probleme.

Ich setze diese Methoden als mehr oder weniger bekannt voraus und beschränke mich darauf, ihre Anwendung auf das hier behandelte spezielle Gebiet zu erörtern.

Matrizenrechnung

Von der Matrizenrechnung brauchen wir nur einen verhältnismässig kleinen Teil, der repetitionsweise hier kurz zusammengestellt sei.

Unter einer *Matrix* versteht man eine Zusammenfassung von $n \cdot m$ Zahlen a_{ik} in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \|a_{ik}\| \quad \begin{matrix} i = 1 \dots n \\ k = 1 \dots m \end{matrix} \quad (1)$$

Die Matrix A enthält n Zeilen und m Kolonnen (Spalten). Als besonders wichtig seien die *quadra-*

tischen Matrizen ($m = n$), die *Kolonnenmatrizen* ($m = 1$) und die *Zeilenmatrizen* ($n = 1$) erwähnt. Unter der *transponierten Matrix* $A^t = \|a_{ki}\|$ versteht man diejenige, die aus A durch Vertauschen der Zeilen und Kolonnen hervorgeht. Die Transponierte einer Kolonnenmatrix ist eine Zeilenmatrix. Das Produkt zweier Matrizen $A = \|a_{ik}\|$ und $B = \|b_{ik}\|$ ist eine neue Matrix C , definiert durch

$$c_{ik} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{rk} \quad (2)$$

Die Kolonnenzahl des ersten Faktors A muss gleich der Zeilenzahl des zweiten Faktors B sein. Auch wenn das Produkt $B \cdot A$ existiert ist es im allgemeinen ungleich mit $A \cdot B$. Das kommutative Gesetz gilt für die Multiplikation der Matrizen nicht, wohl aber das assoziative, d. h.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \quad (3)$$

Ferner folgt aus $A \cdot B = C$

$$B^t \cdot A^t = C^t \quad (4)$$

Eine spezielle quadratische Matrix ist die *Einheitsmatrix*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sie ist mit allen Matrizen (gleicher Zeilen- bzw. Kolonnenzahl) vertauschbar:

$$E \cdot A = A \cdot E = A \quad (6)$$

Ist die Determinante $|A| = |a_{ik}|$ einer quadratischen Matrix von Null verschieden, so existiert auch die *inverse Matrix*

*) Vortrag, gehalten im Kolloquium für Ingenieure über moderne Probleme der Elektrotechnik an der ETH am 3. Dezember 1949.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \|D_{ki}\| \quad (7)$$

Darin bedeuten die D_{ki} die Unterdeterminanten der Elemente von A . Es ist stets

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \quad (8)$$

Die Elemente einer Matrix brauchen nicht gewöhnliche Zahlen zu sein, sondern können selbst wieder Matrizen sein. Solche Untermatrizen erhält man, indem man zwischen den Zeilen und Kolonnen einer Matrix einige waagrechte und senkrechte Trennlinien zieht und alle so entstehenden Rechtecke als einzelne Matrizen auffasst.

Transformationen

Sämtliche Ströme in den Zweigen eines Netzwerks lassen sich zu einer Kolonnenmatrix $\|i\|$ zusammenfassen und ebenso sämtliche Spannungen (z. B. die Spannungen aller Knotenpunkte gegen einen bestimmten Bezugspunkt) zu einer Spannungsmatrix $\|u\|$. Sie sind untereinander durch eine quadratische Matrix Z , die Impedanzmatrix, bzw. die Admittanzmatrix $Y = Z^{-1}$ verknüpft. Die Ströme und Spannungen einer Schaltung können mit denjenigen einer andern in eindeutiger und umkehrbarer Weise verknüpft sein. Eine solche Verknüpfung wird dargestellt durch eine quadratische Transformationsmatrix C . Die eine Schaltung stellt eine Ersatzschaltung für die andere dar. Die Matrizenrechnung ermöglicht für jede Etappe der Rechnung den bequemen Übergang auf diejenige Schaltung, in der die Rechnung am einfachsten durchführbar ist.

Unter allen möglichen Transformationen beschränken wir uns willkürlich auf eine Auswahl durch die Forderung nach «Leistungsinvarianz» und «Impedanzinvarianz». Die erste Forderung bedeutet, dass die Leistung

$$P = \|u\|^t \cdot \|i\| \quad (9)$$

unverändert bleiben soll, die zweite, dass für ein symmetrisches Netz ohne Kopplungen die spezielle Impedanzmatrix

$$Z = z \cdot E \quad (10)$$

unverändert bleiben soll. Beide Forderungen zusammen ergeben, dass die Transformationen orthogonal sein müssen, d. h. dass die Matrix C der Bedingung

$$C^t \cdot C = E \text{ oder } C^t = C^{-1} \quad (11)$$

genügen muss. Ein in der Starkstromtechnik viel gebrauchtes Beispiel einer solchen Transformation ist der Übergang auf symmetrische Komponenten. In einem m -phasen-Netz erhält man die symmetrischen Komponenten der Spannung aus

$$\|u'\| = C \cdot \|u\| \quad (12)$$

$$\text{wo } c_{ik} = \frac{1}{\sqrt{m}} e^{j \left(\frac{2\pi}{m} \right) \cdot (i-1) \cdot (k-1)} \quad (13)$$

Die Komponente u_1' ist die Nullspannung, u_2' die Mitspannung und u_m' die Gegenspannung. Entsprechendes gilt für den Strom.

«Park»-Koordinaten

Bei der Anwendung auf rotierende Maschinen ist eine wesentliche Aufgabe der Transformationen, durch Übergang auf geeignete Koordinaten die zeitlich variablen Induktivitäten zwischen bewegten Wicklungen zu eliminieren. Wir beschränken uns hier der Einfachheit halber auf kollektorlose Maschinen, da diesen die grösste praktische Bedeutung zukommt. Der allgemeinste Vertreter dieser Gattung ist die Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen und Dämpferwicklung. Fig. 1 zeigt das zwei-

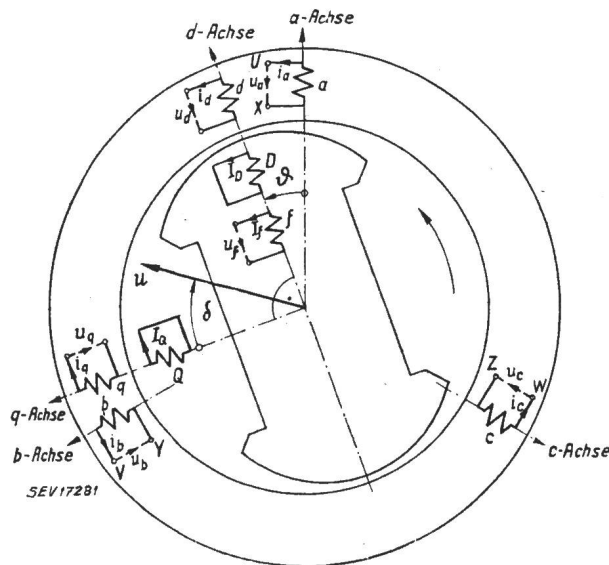


Fig. 1
Zweipoliges Ersatzbild der Synchronmaschine
a, b, c wirkliche Statorwicklung
d, q Ersatzwicklungen für die Statorwicklung a, b, c
D, f Dämpferwicklung für die Dämpferwicklung
f Feldwicklung

polige Schema einer solchen Maschine. Die Polachse oder Längsachse wird als d -Achse (französisch: axe directe, englisch: direct axis) bezeichnet, die darauf senkrechte als Querachse (französisch: axe transversale, englisch: quadrature axis). Den Übergang von den Strangströmen i_a, i_b, i_c auf die d, q -Komponenten erhält man durch die «Park»-Transformation. Park hat sie 1929 zum erstenmal systematisch angewandt [21]¹⁾. Dreyfus [14] und Blondel [16] haben schon früher, aber in etwas versteckter Form dasselbe gemacht. i_d und i_q sind bis auf ein Übersetzungsverhältnis k durch die Bedingung gegeben, dass sie in jedem Augenblick dasselbe Luftspaltfeld wie i_a, i_b, i_c erzeugen müssen, also:

$$i_d = k \left[i_a \cdot \cos \vartheta + i_b \cdot \cos \left(\vartheta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cdot \cos \left(\vartheta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad (14)$$

Dasselbe gilt für i_q mit $\left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right)$ statt ϑ . Die dritte Komponente soll keinen Beitrag zur Grundharmo-

¹⁾ siehe Literatur am Schluss der Arbeit.

nischen des Luftspaltfeldes geben. Diese Bedingung erfüllt der Nullstrom der symmetrischen Komponenten. Aus der Orthogonalitätsbedingung $C^t \cdot C = E$ folgt $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Park wählte seinerzeit von einem anderen Gesichtspunkt aus $k = 2/3$. Wir haben daher die Transformationsmatrix

$$C_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos(\vartheta) & \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\vartheta) & -\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{vmatrix} \quad (15)$$

und ihre Inverse

$$C_p^{-1} = C_p^t = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 1/\sqrt{2} & \cos\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ 1/\sqrt{2} & \cos\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\vartheta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{vmatrix} \quad (16)$$

Parksche Gleichungen

Das Induktionsgesetz gibt für irgendeinen Statorstrang die Gleichung

$$u_a = -R i_a - \frac{d\Psi_a}{dt} \quad (17)$$

Ψ_a ist die gesamte Flussverkettung dieses Stranges. Die entsprechenden Gleichungen aller Stränge zusammengefasst ergeben die Matrixgleichung

$$\|u\| = -R \|i\| - \frac{d\|\Psi\|}{dt} \quad (18)$$

Wir drücken die Spannungen, Ströme und Flussverkettungen durch ihre Park-Komponenten u_0 , u_d , u_q usw. aus:

$$C_p^{-1} \|u'\| = -R \cdot C_p^{-1} \|i'\| - \frac{d(C_p^{-1} \cdot \|\Psi'\|)}{dt} \quad (19)$$

Nun multiplizieren wir vorn mit der Matrix C_p :

$$\begin{aligned} \|u'\| &= -R \|i'\| - C_p \cdot \frac{d(C_p^{-1} \cdot \|\Psi'\|)}{dt} = \\ &= -R \|i'\| - \frac{d(\|\Psi'\|)}{dt} - C_p \frac{dC_p^{-1}}{dt} \|\Psi'\| \end{aligned} \quad (20)$$

In C_p^{-1} ist nur ϑ von der Zeit abhängig. $d\vartheta/dt = \omega$ ist die momentane Winkelgeschwindigkeit der Maschine. Daher wird

$$C_p \frac{dC_p^{-1}}{dt} = \omega C_p \frac{dC_p^{-1}}{d\vartheta} = -\omega \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\omega K \quad (21)$$

Da die mit ω multiplizierte Matrix noch öfters vorkommt, schreiben wir für sie zur Abkürzung K . Die Spannungsgleichungen der Synchronmaschine lauten also in Matrizenform

$$\|u'\| = -R \|i'\| - \frac{d\|\Psi'\|}{dt} + \omega K \|\Psi'\| \quad (22)$$

oder in Komponenten ausgeschrieben:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= -R i_0 - \frac{d\Psi_0}{dt} \\ u_d &= -R i_d - \frac{d\Psi_d}{dt} + \omega \Psi_q \\ u_q &= -R i_q - \frac{d\Psi_q}{dt} - \omega \Psi_d \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

In der Form von Gl. (23) wurden sie von Park gegeben.

Es fehlen noch die Beziehungen zwischen den Flussverkettungen und den Strömen. Wenn wir von Sättigungserscheinungen absehen sind sie linear. Man verwendet daher zu ihrer Herleitung mit Vorteil die Methode der Laplace-Transformation.

Laplace-Transformation

Definitionsgemäss wird einer Funktion $F(t)$ eine Funktion $f(s)$ zugeordnet durch

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-ts} \cdot F(t) dt \quad (24)$$

Von Doetsch [7] wurde dafür die symbolische Schreibweise

$$f(s) \bullet \circ F(t) \quad (25)$$

vorgeschlagen. Die bisher in der mathematischen Literatur üblichen Unterscheidungsmethoden zwischen Originalfunktionen und Bildfunktionen eignen sich nicht für die Elektrotechnik. Ich benutze daher folgende Schreibweise ²⁾

$$u_d \circ \bullet \tilde{u}_d; \quad i_d \circ \bullet \tilde{i}_d; \quad \Psi_d \circ \bullet \tilde{\Psi}_d \text{ usw.} \quad (26)$$

Im folgenden sind nur diejenigen Sätze und Formeln der Laplace-Transformation kurz zusammengestellt, die wir für unsere Zwecke brauchen. Es sind dies die Differentiationsregel

$$\frac{dF(t)}{dt} \circ \bullet s \cdot f(s) - F(0) \quad (27)$$

der Verschiebungssatz

$$e^{-\alpha t} F(t) \circ \bullet f(s + \alpha) \quad (28)$$

²⁾ Nachträglich habe ich gefunden, dass E. E. I. Pilcher genau die gleiche Bezeichnungsart vorschlägt [The Metropolitan-Vickers Gaz. Bd. 23 (1949), Nr. 374, S. 101].

der Faltungssatz

$$F_1(t) * F_2(t) = \int_0^\infty F_1(t-z) \cdot F_2(z) dz = \int_0^\infty F_1(z) \cdot F_2(t-z) dz \circ \bullet f_1(s) \cdot f_2(s) \quad (29)$$

und die Beziehungen zwischen den Grenzwerten (falls die Grenzwerte rechts existieren)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot f(s)] &= \lim_{t \rightarrow \infty} [F(t)] \\ \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot f(s)] &= \lim_{t \rightarrow 0} [F(t)] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

ferner eine kleine Auswahl an Entsprechungen zwischen speziellen Funktionen:

$$\begin{aligned} 1 &\circ \bullet \frac{1}{s} & e^{-\alpha t} &\circ \bullet \frac{1}{s + \alpha} \\ \cos(\nu t) &\circ \bullet \frac{s}{s^2 + \nu^2} & \sin(\nu t) &\circ \bullet \frac{\nu}{s^2 + \nu^2} \\ e^{-\alpha t} \cos(\nu t) &\circ \bullet \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \nu^2} & e^{-\alpha t} \sin(\nu t) &\circ \bullet \frac{\nu}{(s + \alpha)^2 + \nu^2} \end{aligned} \quad (31)$$

Nach dieser kurzen Abschweifung kehren wir zur Synchronmaschine zurück.

Flussverkettungen der Längsachse

Da die Querachse und die Längsachse aufeinander senkrecht stehen, beeinflussen sie sich nicht. Man kann jede für sich behandeln. Die d -Achse hat drei Wicklungen: die Ersatzwicklung d für den Stator, die Ersatzwicklung D für die Dämpferwicklung und die Feldwicklung f . Die Beziehungen zwischen den Strömen und den Flussverkettungen dieser drei Wicklungen sind in der Matrixengleichung

$$\begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_D \\ \Psi_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dd} & L_{dD} & L_{df} \\ L_{Dd} & L_{DD} & L_{Df} \\ L_{fd} & L_{fD} & L_{ff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_d \\ i_D \\ i_f \end{bmatrix} \quad (32)$$

zusammengefasst. Die Dämpferwicklung ist immer kurzgeschlossen. Daher gilt für sie

$$0 = -R_D i_D - \frac{d \Psi_D}{dt} \quad (33)$$

oder im Bildbereich

$$0 = -R_D \tilde{i}_D - s \tilde{\Psi}_D + \Psi_{D0} \quad (34)$$

Ψ_{D0} ist der Anfangswert der Flussverkettung Ψ_D . Für die Feldwicklung haben wir die entsprechenden Gleichungen

$$u_f = -R_f i_f - \frac{d \Psi_f}{dt} \quad (35)$$

$$\tilde{u}_f = -R_f \tilde{i}_f - s \tilde{\Psi}_f + \Psi_{f0} \quad (36)$$

Transformiert man Gl. (32) auch in den Bildbereich und setzt $\tilde{\Psi}_D$ aus Gl. (34) und $\tilde{\Psi}_f$ aus Gl. (36) darin ein, so erhält man

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_d \\ \frac{\Psi_{D0}}{s} \\ \frac{\Psi_{f0} - \tilde{u}_f}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{dd} & L_{dD} & L_{df} \\ L_{Dd} & L_{DD} + \frac{R_D}{s} & L_{Df} \\ L_{fd} & L_{fD} & L_{ff} + \frac{R_f}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{i}_d \\ \tilde{i}_D \\ \tilde{i}_f \end{bmatrix} \quad (37)$$

Daraus kann man die Untermatrix bestehend aus den beiden uns nicht interessierenden \tilde{i}_D und \tilde{i}_f eliminieren. Man erhält

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_d &= \left(L_{dd} - \begin{bmatrix} L_{dD} & L_{df} \\ L_{Dd} & L_{Df} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{DD} + R_D/s & L_{Df} \\ L_{fD} & L_{ff} + R_f/s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_{Dd} \\ L_{fd} \end{bmatrix} \right) \cdot \tilde{i}_d + \begin{bmatrix} L_{dD} & L_{df} \\ L_{Dd} & L_{Df} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{DD} + R_D/s & L_{Df} \\ L_{fD} & L_{ff} + R_f/s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_{D0}/s \\ (\Psi_{f0} - \tilde{u}_f)/s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (38)$$

Wir führen als Abkürzungen die Streukoeffizienten ein:

$$\begin{aligned} \sigma_{df} &= 1 - \frac{L_{df} L_{fd}}{L_{dd} L_{ff}} & \sigma_{dD} &= 1 - \frac{L_{dD} L_{Dd}}{L_{dd} L_{DD}} \\ \sigma_{fD} &= 1 - \frac{L_{fD} L_{Df}}{L_{ff} L_{DD}} \end{aligned} \quad (39)$$

ferner die Zeitkonstanten:

$$T_D = \frac{L_{DD}}{R_D} \quad T_f = \frac{L_{ff}}{R_f} \quad \text{und}$$

die beiden Wurzeln $\alpha_{d2} > \alpha_{d1}$ der quadratischen Gleichung

$$\sigma_{fD} \cdot T_f \cdot T_D \cdot \alpha_d^2 - (T_f + T_D) \alpha_d + 1 = 0 \quad (41)$$

und die beiden Zahlen A_{d1} und A_{d2} , die man aus dem Gleichungspaar

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{fD} (A_{d1} + A_{d2}) &= \\ &= 2 - \sigma_{df} - \sigma_{dD} - 2 \sqrt{(1 - \sigma_{df})(1 - \sigma_{dD})(1 - \sigma_{fD})} \\ \sigma_{fD} (A_{d1} \alpha_{d2} + A_{d2} \alpha_{d1}) &= \frac{(1 - \sigma_{df})}{T_D} + \frac{(1 - \sigma_{dD})}{T_f} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

erhält. Die Werte Ψ_{D0} und Ψ_{f0} drücken wir ausserdem durch die Anfangswerte der Ströme I_{d0} , I_{D0} und I_{f0} aus. Dann erhalten wir nach ausmultiplizieren von Gl. (38)

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_d - \frac{\Psi_{D0}}{s} &= \left(\tilde{i}_d - \frac{I_{d0}}{s} \right) L_d(s) - \left(\frac{\tilde{u}_f}{R_f} + \frac{I_{f0}}{s} \right) L_{df} G(s) - \\ &\quad - \frac{I_{D0}}{s} L_{dD} D(s) \end{aligned} \quad (43)$$

Die Funktion $L_d(s)$ hat die Form

$$L_d(s) = L_{dd} \left[1 - A_{d1} \frac{s}{s + \alpha_{d1}} - A_{d2} \frac{s}{s + \alpha_{d2}} \right] \quad (44)$$

Der Vergleich mit Gl. (31) zeigt folgende Beziehung zum Originalbereich

$$\frac{L_d(s)}{s} \bullet \rightarrow L_{dd} \left(1 - A_{d1} \cdot e^{-\alpha_{d1}t} - A_{d2} \cdot e^{-\alpha_{d2}t} \right) = l_d(t) \quad (45)$$

Daraus lässt sich leicht ablesen:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} L_d(s) &= \lim_{t \rightarrow \infty} l_d(t) = L_{dd} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} L_d(s) &= \lim_{t \rightarrow 0} l_d(t) = L_{dd}(1 - A_{d1} - A_{d2}) = L''_{dd} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Für stationäre Vorgänge und angenähert auch für alle langsam verlaufenden hat die Funktion $L_d(s)$ den Wert L_{dd} , für rasch verlaufende Vorgänge hingegen den Wert L''_{dd} . Mit Hilfe der Wurzeln $\beta_{d2} > \beta_{d1}$ der quadratischen Gleichung

$$\frac{L''_{dd}}{L_{dd}} \sigma_{fd} T_f T_D \beta_d^2 - (\sigma_{df} T_f + \sigma_{dd} T_D) \beta_d + 1 = 0 \quad (47)$$

kann man auch schreiben

$$L_d(s) = \frac{L''_{dd}(s + \beta_{d1}) \cdot (s + \beta_{d2})}{(s + \alpha_{d1}) \cdot (s + \alpha_{d2})} \quad (48)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_d(s)} &= \frac{1}{L_{dd}} + \left(\frac{1}{L'_{dd}} - \frac{1}{L_{dd}} \right) \frac{s}{s + \beta_{d1}} + \\ &+ \left(\frac{1}{L''_{dd}} - \frac{1}{L'_{dd}} \right) \frac{s}{s + \beta_{d2}} \end{aligned} \quad (49)$$

mit der weitem Abkürzung

$$L'_{dd} = L''_{dd} \frac{\beta_{d2} - \beta_{d1}}{\alpha_{d1} + \alpha_{d2} - \beta_{d1} - \frac{\alpha_{d1} \alpha_{d2}}{\beta_{d2}}} \quad (50)$$

Aus Gl. (49) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{s \cdot L_d(s)} &\bullet \rightarrow \frac{1}{L_{dd}} + \left(\frac{1}{L'_{dd}} - \frac{1}{L_{dd}} \right) e^{-\beta_{d1}t} + \\ &+ \left(\frac{1}{L''_{dd}} - \frac{1}{L'_{dd}} \right) e^{-\beta_{d2}t} = \lambda_d(t) \end{aligned} \quad (51)$$

Die Funktion $G(s)$ kommt meistens nur in der Kombination $G(s)/L_d(s)$ vor. Für diese erhalten wir mit praktisch genügender Annäherung

$$\frac{G(s)}{L_d(s)} \approx \frac{\beta_{d1}}{L_{dd}(s + \beta_{d1})} \bullet \rightarrow \frac{\beta_{d1}}{L_{dd}} e^{-\beta_{d1}t} \quad (52)$$

Genau genommen käme noch ein zweites Glied von ähnlichem Aufbau hinzu, das aber mit den in der Praxis vorkommenden Zahlenwerten vernachlässigt werden darf.

Auf die Funktion $D(s)$ gehen wir nicht näher ein. Im stationären synchronen Betrieb fliesst in der Dämpferwicklung kein Strom. I_{D0} ist nur dann von Null verschieden, wenn unmittelbar vor dem untersuchten Ausgleichvorgang ein anderer stattgefunden hat, der noch nicht abgeklungen ist. Da solche Probleme verhältnismässig selten sind, lassen wir für das Folgende das Glied mit I_{D0} in Gl. (43) weg.

Ihre Auflösung nach \tilde{i}_d ergibt dann

$$\tilde{i}_d = \frac{I_{d0}}{s} + \left(\tilde{\Psi}_d - \frac{\Psi_{d0}}{s} \right) \frac{1}{L_d(s)} + \left(\frac{\tilde{u}_f}{R_f} + \frac{I_{f0}}{s} \right) L_{df} \frac{G(s)}{L_d(s)} \quad (53)$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes kann man diese Gleichung sofort auch im Originalbereich schreiben

$$i_d = I_{d0} + \frac{d\Psi_d}{dt} * \lambda_d(t) + \left(\frac{u_f}{R_f} + I_{f0} \right) * \frac{L_{df}}{L_{dd}} \beta_{d1} e^{-\beta_{d1}t} \quad (54)$$

Querfeld

Für die q -Achse geht die Rechnung ganz entsprechend. Sie wird nur einfacher, weil man nur zwei Wicklungen q und Q hat. Entsprechend dem Operator $L_d(s)$ erhält man einen Operator $L_q(s)$:

$$L_q(s) = \frac{L_{qq}(\sigma_q s + \alpha_q)}{s + \alpha_q} = \frac{L''_{qq}(s + \beta_q)}{s + \alpha_q} \quad (55)$$

oder

$$\frac{1}{L_q(s)} = \frac{1}{L_{qq}} + \left(\frac{1}{L''_{qq}} - \frac{1}{L_{qq}} \right) \frac{s}{s + \beta_q} \quad (56)$$

und daher

$$\frac{1}{s L_q(s)} \bullet \rightarrow \frac{1}{L_{qq}} + \left(\frac{1}{L''_{qq}} - \frac{1}{L_{qq}} \right) e^{-\beta_q t} = \lambda_q(t) \quad (57)$$

und

$$i_q = I_{q0} + \frac{d\Psi_q}{dt} * \lambda_q(t) \quad (58)$$

Nullsystem

Für das Nullsystem kann man genügend genau mit einer konstanten Induktivität L_0 rechnen und erhält daher einfach

$$i_0 = \frac{\Psi_0}{L_0} \quad (59)$$

Es spielt übrigens selten eine Rolle.

Bewegungsgleichung

Mit den Gleichungen (54), (58) und (59), die i_0 , i_d , i_q durch Ψ_0 , Ψ_d , Ψ_q ausdrücken, werden die Gleichungen (22) bzw. (23) zu einem System von Integrodifferentialgleichungen für Ψ_0 , Ψ_d , Ψ_q . Ist die Geschwindigkeit ω gegeben oder konstant, so genügt dieses Gleichungssystem zur Bestimmung der Lösung. Im andern Fall ist als weitere Gleichung die Bewegungsgleichung der Maschine erforderlich. Zur Bestimmung des Drehmoments bilden wir die Leistungsbilanz. Wir bilden die Transponierte der Gl. (22) und multiplizieren sie hinten mit der Strommatrix $\|i'\|$:

$$\begin{aligned} \|u'\|^t \cdot \|i'\| &= -R \|i'\|^t \cdot \|i'\| - \left(\frac{d}{dt} \|\Psi'\|^t \right) \cdot \|i'\| + \\ &+ \omega \|\Psi'\|^t \cdot K^t \cdot \|i'\| \end{aligned} \quad (60)$$

Links haben wir die ins Netz abgegebene Leistung. Das erste Glied rechts stellt die Jouleschen Verluste

in der Statorwicklung, das zweite die zur Änderung der magnetischen Energie benötigte Leistung, das dritte die mechanische Leistung dar. Diese ist gleich ω/p (mechanische Winkelgeschwindigkeit!) mal das Drehmoment. Dieses ist daher

$$p \|\Psi'\|^t \cdot K^t \cdot \|i'\| = p (\Psi_q i_d - \Psi_d i_q) \quad (61)$$

Setzen wir den Ausdruck in die Bewegungsgleichung ein und dividieren noch durch die Polpaarzahl p so haben wir schliesslich

$$\frac{J}{p^2} \cdot \frac{d\omega}{dt} + (\Psi_q i_d - \Psi_d i_q) = \frac{M_{antrieb}}{p} \quad (62)$$

Klassifizierung der Probleme

Nachdem wir die allgemeinen Grundlagen haben, lassen sich die Probleme eingermassen übersehen. Sie gliedern sich vom mathematischen Standpunkt aus in drei Klassen.

1. Die erste Klasse umfasst die Probleme, bei denen die Geschwindigkeit konstant bleibt oder wenigstens mit genügender Näherung als konstant betrachtet werden kann. In diesem Falle sind die Gleichungen linear. Man geht dann mit Vorteil auch mit Gl. (22) in den Bildbereich über:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_d \\ \tilde{u}_q \end{pmatrix} = -R \cdot \begin{pmatrix} \tilde{i}_0 \\ \tilde{i}_d \\ \tilde{i}_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s - \omega \\ 0 & \omega & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ \tilde{\Psi}_d \\ \tilde{\Psi}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{00} \\ \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{pmatrix} \quad (63)$$

Die Bewegungsgleichung braucht man nicht. In diese Klasse fallen z. B. Kurzschlussvorgänge, Spannungs- und Winkelfehler beim Synchronisieren, Spannungsänderungen bei Belastungsstössen mit oder ohne Einwirkung von Spannungsreglern.

2. Die zweite Klasse umfasst solche Vorgänge, bei denen ω zwar veränderlich ist, bei denen aber alle Grössen nur um kleine Beträge von einem stationären Zustand abweichen. Man kann dann, indem man diese Abweichungen (Störungen) als neue Variable einführt, in bekannter Weise die Gleichungen für den stationären Zustand abspalten und den Rest durch Vernachlässigung der Produkte von Störungsgliedern linearisieren. Typische Beispiele für diese Klasse sind: Kleine Pendelungen unter dem Einfluss von periodisch schwankendem Antriebs- (Dieselgeneratoren) oder Lastmoment (Kolbenkompressoren), Reguliervorgänge unter dem Einfluss des Kraftmaschinenreglers und Stabilitätsuntersuchungen.

3. Die dritte Klasse bilden solche Probleme, bei denen wesentliche Geschwindigkeitsänderungen vorkommen. Das Gleichungssystem ist dann wegen den Gliedern $\omega \Psi$ in den Spannungsgleichungen und Ψi in der Bewegungsgleichung nichtlinear. Geschlossene mathematische Lösungen für Probleme dieser Klasse sind mir nicht bekannt. Man ist auf numerische und mechanische Methoden (Bush-Maschinen) angewiesen. Einige Beispiele sind: Anlaufvorgänge, Synchronisieren mit grossem Frequenzfehler, In-Tritt-ziehen von Synchronmotoren.

Zur Illustration soll ein ausgewähltes Beispiel aus jeder der drei Klassen behandelt werden.

Dreisträngiger Kurzschluss

Als Beispiel für ein Problem der ersten Klasse wählen wir den dreisträngigen Kurzschluss der Synchronmaschine ausgehend von einer beliebigen Vorbelastung. Dieses Problem ist zwar altbekannt und oft behandelt worden, hat aber den Vorteil, dass es nicht nur als Beispiel dient, sondern auch einen guten Einblick in die Bedeutung der verschiedenen Konstanten gibt, die eine Maschine kennzeichnen.

Der bessern Übersicht halber führen wir von Anfang an eine Vereinfachung ein. Der Statorwiderstand ist praktisch stets klein. Das Glied $R \cdot \|i'\|$ spielt nur die Rolle einer kleinen Korrektur. Zur Berechnung von i_d und i_q in diesen Gliedern benutzen wir daher nicht die genauen Ausdrücke, sondern eine konstante Induktivität $2 L''_{dd} \cdot L''_{qq} / (L''_{dd} + L''_{qq})$. Mit der Abkürzung

$$\alpha_R = \frac{R (L''_{dd} + L''_{qq})}{2 L''_{dd} L''_{qq}} \quad (64)$$

haben wir dann statt (63) die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_d \\ \tilde{u}_q \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L_0} & 0 & 0 \\ 0 & s + \alpha_R & -\omega \\ 0 & \omega & s + \alpha_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_0 \\ \tilde{\Psi}_d \\ \tilde{\Psi}_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_{00} \\ \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Im Kurzschluss ist $\|u\| = 0$. Gl. (65) lässt sich nach den $\tilde{\Psi}$ auflösen. Bei symmetrischer Vorbelastung ist $\Psi_{00} = 0$. Daher wird auch $\tilde{\Psi}_0 = 0$ und $i_0 = 0$. Der Rest gibt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_d \\ \tilde{\Psi}_q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s + \alpha_R & -\omega \\ \omega & s + \alpha_R \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(s + \alpha_R)^2 + \omega^2} \begin{pmatrix} s + \alpha_R & \omega \\ -\omega & s + \alpha_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow e^{-\alpha_R t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{pmatrix} \quad (66) \end{aligned}$$

Vor dem Kurzschluss war

$$u_d = U_0 \sqrt{3} \cdot \sin \delta_0 = \omega \Psi_{q0}; \quad u_q = U_0 \sqrt{3} \cdot \cos \delta_0 = -\omega \Psi_{d0} \quad (67)$$

also wird

$$\left. \begin{aligned} \Psi_d &= -\frac{U_0 \sqrt{3}}{\omega} e^{-\alpha_R t} \cdot \cos(\omega t + \delta_0) \\ \Psi_q &= \frac{U_0 \sqrt{3}}{\omega} e^{-\alpha_R t} \cdot \sin(\omega t + \delta_0) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Darin ist δ_0 der der Vorbelastung entsprechende Polradwinkel. Durch Einsetzen in Gl. (54) und (58) erhalten wir die Komponenten des Kurzschlussstroms

$$i_d = I_{d0} + U_0 \sqrt{3} \left[\frac{1}{x_d} + \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d} \right) e^{-\beta_{d1} t} + \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d} \right) e^{-\beta_{d2} t} \right] \cos \delta_0 - \frac{U_0 \sqrt{3}}{x''_d} e^{-\alpha_R t} \cos (\omega t + \delta_0) + \beta_{d1} \cdot \frac{L_{df}}{L_{dd}} \int_0^t \left[\frac{u_f(t-z)}{R_f} + I_{f0} \right] e^{-\beta_{d1} z} \cdot dz \quad (69)$$

$$i_q = I_{q0} - U_0 \sqrt{3} \left[\frac{1}{x_q} + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q} \right) e^{-\beta_{q1} t} \right] \sin \delta_0 + \frac{U_0 \sqrt{3}}{x''_q} e^{-\alpha_R t} \cdot \sin (\omega t + \delta_0) \quad (70)$$

Die Gleichungen sind bereits ein wenig vereinfacht unter Berücksichtigung der Tatsache, dass unter den praktisch vorkommenden Verhältnissen alle α und β klein gegen ω sind. An Stelle der Induktivitäten haben wir die Reaktanzen eingeführt:

$$\omega L_{dd} = x_d; \quad \omega L'_{dd} = x'_d; \quad \omega L''_{dd} = x''_d; \\ \omega L_{qq} = x_q; \quad \omega L''_{qq} = x''_q \quad (71)$$

Das letzte Glied von Gl. (69) gestattet das Eingreifen eines Spannungsreglers oder besonderer Schnell-erregungs- oder Entregungs-Einrichtungen zu berücksichtigen. Sind keine solchen vorhanden, so bleibt $u_f = -R_f I_{f0}$ konstant und dieses Glied verschwindet.

Den im Stator auftretenden wirklichen Strom finden wir mit Hilfe der inversen Park-Transformation

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = C_p^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (72)$$

Wir können uns auf einen beliebigen Strang z. B. a beschränken, da sich die andern nur durch den Schaltwinkel ϑ_0 unterscheiden:

$$i_a = \sqrt{2/3} \cdot (i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) = \\ = \sqrt{2/3} [i_d \cos (\omega t + \vartheta_0) - i_q \sin (\omega t + \vartheta_0)] = \\ = I_0 \sqrt{2} \cos (\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2} + \vartheta_0 - \delta_0) + \\ + U_0 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\cos^2 \delta_0}{x_d^2} + \frac{\sin^2 \delta_0}{x_q^2}} \cdot \cos \left[\omega t + \vartheta_0 - \arctg \left(\frac{x_d}{x_q} \operatorname{tg} \delta_0 \right) \right] + \\ + U_0 \sqrt{2} \left(\frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x_d} \right) \cos \delta_0 \cdot e^{-\beta_{d1} t} \cdot \cos (\omega t + \vartheta_0) +$$

$$+ U_0 \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d} \right)^2 \cos^2 \delta_0 + \left(\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q} \right)^2 \sin^2 \delta_0} \cdot e^{-\beta_{d2} t} \cdot \cos \left[\omega t + \vartheta_0 - \arctg \left(\frac{\frac{1}{x''_q} - \frac{1}{x_q}}{\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x'_d}} \operatorname{tg} \delta_0 \right) \right] - \\ - U_0 \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x''_d} + \frac{1}{x''_q} \right) e^{-\alpha_R t} \cdot \cos (\vartheta_0 - \delta_0) - \\ - U_0 \sqrt{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x''_d} - \frac{1}{x''_q} \right) e^{-\alpha_R t} \cdot \cos (2\omega t + \vartheta_0 + \delta_0) \quad (73)$$

Der Strom i_a besteht aus fünf Gliedern. Das erste Glied bildet den stationären Kurzschlußstrom (zu dem auch der Vorbelastungsstrom gehört). Er bleibt nach genügend langer Zeit allein übrig. Das zweite Glied ist ein Wechselstrom der gleichen Frequenz, dessen Amplitude aber mit einer Zeitkonstanten $T'_d = 1/\beta_{d1}$ exponentiell abnimmt. Man nennt dieses Glied den «transienten» Anteil des Kurzschlußstroms, T'_d die «transiente» Zeitkonstante. Das dritte Glied hat den gleichen Charakter, nur ist seine Zeitkonstante $T''_d = 1/\beta_{d2}$ bedeutend kürzer. Man nennt es den «subtransienten» Anteil, T''_d die «subtransiente» Zeitkonstante. In der deutschen Literatur findet man gelegentlich die Bezeichnung «Stoss»-Kurzschlußstrom für den zweiten und «flüchtiger Stoss»-Kurzschlußstrom für den dritten Anteil. Das vorletzte (vierte) Glied von Gl. (73) ist ein abklingender Gleichstrom, das letzte ein Wechselstrom doppelter Frequenz. Beide haben die gleiche Zeitkonstante $T_R = 1/\alpha_R$. Die Grösse der einzelnen Glieder ist ausser durch die Vorbelastung hauptsächlich durch die verschiedenen Reaktanzen bestimmt. x_d und x_q , die für die Grösse des stationären Kurzschlußstroms und auch sonst für den stationären, also synchronen Betrieb massgebend sind, heissen die synchronen Reaktanzen. Nach den Gliedern, auf die sie hauptsächlich Einfluss haben, heissen x'_d die «transienten», x''_d und x''_q die «subtransienten» Reaktanzen. Das Gleichstromglied ist zum Unterschied von allen andern in seiner Grösse auch vom Schaltwinkel ϑ_0 abhängig. Die Spannung am betrachteten Strang war unmittelbar vor dem Kurzschluss

$$u_{a0} = -U_0 \sqrt{2} \cdot \sin (\vartheta_0 - \delta_0) \quad (74)$$

Das Gleichstromglied ist am grössten, wenn diese Spannung gleich 0 war (Kurzschlussmoment grösster Asymmetrie; Fig. 2a). In diesem Fall tritt auch die zweite Harmonische entsprechend dem letzten Glied am deutlichsten hervor. Wenn die Spannung u_{a0} ihren Maximalwert erreicht hat, verschwindet das Gleichstromglied (symmetrischer Kurzschlussmoment; Fig. 2b). Hier ist die zweite Harmonische fast nicht zu erkennen, trotzdem ihre Amplitude gleich geblieben ist. Sie hat ihre Maxima in Nähe des Nulldurchgangs der Hauptkomponenten.

Typische Werte der Konstanten. An dieser Stelle ist es vielleicht nützlich, eine kleine Zusammen-

Charakteristische Konstanten von Drehstrom-Maschinen

Tabelle I

	x_d	x'_d	x''_d	$\frac{1}{\alpha_{d1}} = \frac{1}{T'_{d0}}$ s	$\frac{1}{\beta_{d1}} = \frac{1}{T'_d}$ s	$\frac{1}{\beta_{d2}} = T''_d$ s	$\frac{1}{\alpha_R} = T_R$ s	$\frac{x_q}{x_d}$	$\frac{x''_q}{x''_d}$	$\frac{H}{\text{kWs}}$ kVA
Turbogeneratoren	2,0...2,3	0,25...0,30	0,15...0,20	4...7	0,6...1	0,02...0,04	0,10...0,25	0,8...0,9	1	5...7
Wasserkraftgeneratoren										
Ohne Dämpferwicklung	0,9...1,6	0,3...0,4	0,25...0,35	3...7	0,8...2	0,01	0,4...0,6	0,55...0,70	2...3	2...4
Polgitter	0,9...1,6	0,3...0,4	0,25...0,30	3...7	0,8...2	0,03...0,08	0,2...0,4	0,55...0,70	2,5...3,5	2...4
Vollständige Dämpferwicklung	0,9...1,6	0,3...0,4	0,20...0,25	3...7	0,8...2	0,03...0,08	0,15...0,30	0,55...0,70	0,9...1,3	2...4
Massive Pole	0,9...1,6	0,3...0,4	0,20...0,30	3...7	0,8...2	0,04	0,2...0,4	0,55...0,70	1,2...1,5	2...4
Synchronmotoren	1,0...1,5	0,25...0,50	0,15...0,35	2...3	0,5...1,5	0,01...0,02	0,02...0,10	0,6...0,8	1	0,5...1,5
Asynchronmotoren	3...5	—	0,20...0,40	—	—	0,01...0,05	0,01...0,1	1	1	0,05...1,5

stellung der Konstanten verschiedener Maschinenarten zu geben (Tab. I). Die Reaktanzen sind im sog. «per-Unit»-System ausgedrückt, d. h. die Werte in Ohm sind mit dem Nennstrom multipliziert und durch die Nennspannung dividiert. Diese Art der Darstellung hat den Vorteil, dass die Zahlen für bestimmte Maschinenarten nur in mässigen

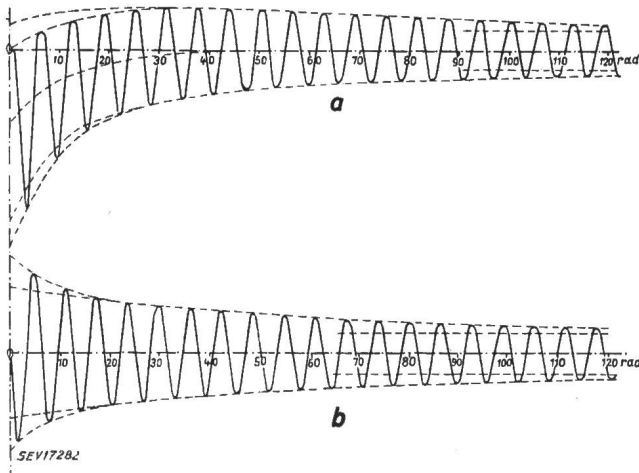


Fig. 2

Kurzschlussoszillogramme des Statorstroms einer Synchronmaschine mit Polgittern

- a Kurzschlussmoment grösster Asymmetrie
b symmetrischer Kurzschlussmoment

Grenzen schwanken und für Maschinen beliebiger Spannung und Leistung vergleichbar sind. Die Zahlen beziehen sich auf schweizerische Maschinen. In der Literatur findet man bis jetzt solche Tabellen fast nur amerikanischer Herkunft, die für unsere Verhältnisse nicht ohne weiteres zutreffen. Es wäre erwünscht, wenn solche Daten in vermehrtem Masse publiziert würden, z. B. bei der Beschreibung neuer Kraftwerke.

Synchronisierfehler. Die Resultate für den drei-strängigen Kurzschluss lassen sich leicht auf den Fall einer ungenauen Synchronisierung übertragen, wenigstens sofern es sich um Spannungs- und Winkelfehler handelt. Für einen reinen Spannungsfehler hat man $\delta_0 = 0$, für einen reinen Winkelfehler $\delta_0 = \frac{\pi}{2}$. Statt U_0 hat man die (geometrische)

Differenz zwischen Maschinenspannung und Netzspannung einzusetzen.

Stabilitätsproblem

Als Beispiel für ein Problem der zweiten Klasse werde ich den Rechnungsgang einer Stabilitätsuntersuchung skizzieren. Eine Maschine sei über eine Leitung mit dem Widerstand R und eine Seriiekapazität c an ein starres Netz angeschlossen (Fig. 3). Die Aufgabe besteht darin, den Bereich der R - und c -Werte abzugrenzen, bei denen die Maschine stabil, d. h. ohne zu pendeln, läuft. $u^{(1)}$ ist die Span-

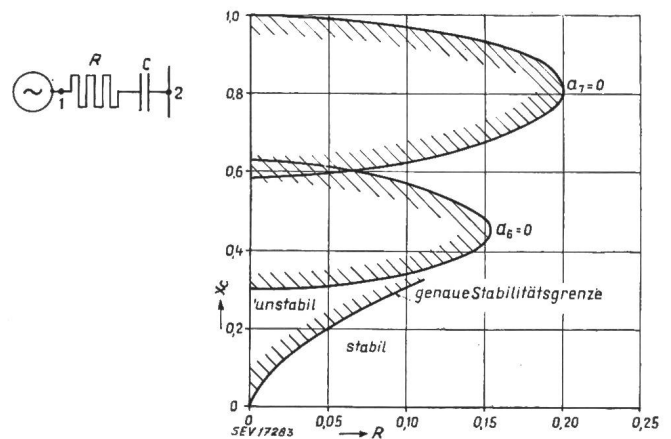


Fig. 3

Stabilität eines Generators mit Seriiekapazität nach Concordia & Carter

$$x_d = 1,0; \quad x'_d = 0,30; \quad x''_d = 0,22; \quad x_q = 0,6; \\ x''_q = 0,31 \quad T'_d = 0,8 \text{ s}; \quad T''_d = 0,029 \text{ s}; \quad T_R = 0,021 \text{ s}$$

nung an den Maschinenklemmen, $u^{(2)}$ ist die feste Netzspannung. Der innere Widerstand der Maschine sei vernachlässigt oder mit R zusammengefasst. Die Gleichung der Maschine kennen wir in Park-Koordinaten:

$$\|u^{(1)}\| = \left(\omega K - \frac{d}{dt} \right) \cdot \|\Psi\| \quad (75)$$

Die Gleichung der restlichen Schaltung lässt sich hingegen einfacher in Strangspannungen und Linienströmen schreiben. Wir bezeichnen die Ladung des Seriiekondensators mit Q . Dann ist

$$\|u^{(1)}\| = R \cdot \|i\| + \frac{1}{c} \cdot \|Q\| + \|u^{(2)}\| \quad (76)$$

oder

$$\left(\frac{1}{c} + R \frac{d}{dt}\right) \cdot \|i\| = \frac{d}{dt} \|u^{(1)} - u^{(2)}\| \quad (77)$$

Damit wir diese Gleichung mit (75) kombinieren können, setzen wir in (77) Park-Komponenten ein:

$$\left. \begin{aligned} \|u^{(1)'}\| &= C_p \cdot \|u^{(1)}\| ; \quad \|i'\| = C_p \cdot \|i\| \\ \|u^{(2)'}\| &= C_p \cdot \|u^{(2)}\| = \begin{Bmatrix} 0 \\ U\sqrt{3} \cdot \sin \delta \\ U\sqrt{3} \cdot \cos \delta \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

$$\left(\frac{1}{c} + R \frac{d}{dt}\right) C_p^{-1} \|i'\| = \frac{d}{dt} C_p^{-1} \cdot \|u^{(1)'} - u^{(2)'}\| \quad (79)$$

Hierin ersetzt man $\|u^{(1)'}\|$ durch Gl. (75) und multipliziert vorn mit C_p

$$\left[\frac{1}{c} - R \left(\omega K - \frac{d}{dt}\right)\right] \cdot \|i'\| = - \left(\omega K - \frac{d}{dt}\right) \cdot \left[\left(\omega K - \frac{d}{dt}\right) \|\Psi'\| - \|u^{(2)'}\|\right] \quad (80)$$

Diese Gleichung gilt noch für beliebige Vorgänge, ist aber nicht linear bei veränderlichem ω . Nun führen wir die kleinen Störungen ε für den Polradwinkel, $\|\Delta i\|$ für den Strom und $\|\Delta \Psi\|$ für die Flussverkettungen ein. Die stationären Werte werden durch den Index 0 gekennzeichnet. Wir haben also

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_0 + \varepsilon ; \quad \omega = \omega_0 + \frac{d\varepsilon}{dt} \\ \|u^{(2)'}\| &= (1 + \varepsilon K) \cdot \|u'_0\| \\ \|i'\| &= \|I'_0\| + \|\Delta i\| ; \quad \|\Psi'\| = \|\Psi'_0\| + \|\Delta \Psi\| \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \|u'_0\| &= U\sqrt{3} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \sin \delta_0 \\ \cos \delta_0 \end{Bmatrix} ; \quad \|I'_0\| = \begin{Bmatrix} 0 \\ I_{d0} \\ I_{q0} \end{Bmatrix} \\ \|\Psi'_0\| &= \begin{Bmatrix} 0 \\ \Psi_{d0} \\ \Psi_{q0} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (81a)$$

Nach dem Einsetzen in Gl. (80) und ausmultiplizieren können wir den stationären Teil

$$(x_c - R K) \cdot \|I'_0\| + \omega_0 K^2 \cdot \|\Psi'_0\| = K \cdot \|u'_0\| \quad (82)$$

abspalten. Darin haben wir die kapazitive Reaktanz $x_c = \frac{1}{\omega_0 c}$ eingeführt. Als Rest bleiben bei Vernachlässigung der Produkte kleiner Grössen lineare Integro-Differentialgleichungen. Wir schreiben direkt die entsprechende Matrizengleichung im Bildbereich an:

$$\begin{aligned} \left(x_c + \frac{R s}{\omega_0} - R K\right) \cdot \|\Delta \tilde{i}\| + \frac{1}{\omega_0} (s - \omega_0 K)^2 \cdot \|\Delta \tilde{\Psi}\| &= \\ = K \left[\frac{2s^2}{\omega_0} \cdot \|\Psi'_0\| + s \left(\frac{R}{\omega_0} \|I'_0\| - 2 K \|\Psi'_0\| \right) + \right. & \\ \left. + K \|u'_0\| \right] \tilde{\varepsilon} & \quad (83) \end{aligned}$$

Bei konstanter Spannung des Erregers hat man

$$\|\Delta \tilde{\Psi}\| = \omega_0 \begin{Bmatrix} L_0 \\ L_d(s) \\ L_q(s) \end{Bmatrix} \cdot \|\Delta \tilde{i}\| = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_d(s) \\ x_q(s) \end{Bmatrix} \cdot \|\Delta \tilde{i}\| \quad (84)$$

Setzt man das ein, so erhält man aus Gl. (83) $\Delta \tilde{i}_d$ und $\Delta \tilde{i}_q$ als Funktionen von $\tilde{\varepsilon}$ (Δi_0 wird Null). Die Bewegungsgleichung wird nach Abspaltung des stationären Teils

$$\begin{aligned} J s^2 \tilde{\varepsilon} + \frac{p^2}{\omega_0} \{ [\omega_0 \Psi_{q0} - J_{q0} x_d(s)] \Delta \tilde{i}_d - \\ - [\omega_0 \Psi_{d0} - I_{d0} x_q(s)] \Delta \tilde{i}_q \} = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

Setzt man darin $\Delta \tilde{i}_d$ und $\Delta \tilde{i}_q$ ein und bringt auf gleichen Nenner, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$F_n(s) \cdot \tilde{\varepsilon} = (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) \tilde{\varepsilon} = 0 \quad (86)$$

Das Polynom $F_n(s)$ ist vom 7. Grad für Maschinen ohne, und vom 9. für Maschinen mit Dämpferwicklung. $F_n(s) = 0$ ist die charakteristische Gleichung des Problems. Stabilität bedeutet, dass keine exponentiell anwachsenden Schwingungen unter den Lösungen sind, dass also alle 7 bzw. 9 Wurzeln der Gleichung $F_n(s) = 0$ negativen Realteil haben. Das ist dann der Fall, wenn bei $a_0 > 0$ alle Hurwitzschen Determinanten positiv sind:

$$D_v = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2v-1} & a_{2v-2} & a_{2v-3} & \dots & a_v \end{vmatrix} > 0 \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (87)$$

Schon die Koeffizienten a_v selbst sind zum Teil ziemlich lange Ausdrücke. Die Determinanten D_v , besonders die höherer Ordnung, sind explizite kaum anschreibbar. In unserem und in manchen ähnlichen Fällen hilft aber oft ein kleiner Trick. Eine notwendige, wenn auch nicht hinreichende Bedingung dafür, dass die Realteile der Wurzeln negativ werden ist, dass die Koeffizienten a_v selbst alle positiv sind. Das ist immerhin schon viel einfacher zu kontrollieren. Man zeichnet also die Kurven $a_v = 0$ in Funktion derjenigen Parameter, deren Einfluss auf die Stabilität untersucht werden soll. Die labilen Zonen, die sich so ergeben sind auf alle Fälle zu vermeiden. Zur Kontrolle der Sicherheitsmarge, die man darüber hinaus braucht, genügt es meistens für einen einzigen ausserhalb liegenden passend gewählten Punkt festzustellen ob er stabil sei. Das ist aber viel einfacher, da dazu nur noch eine Gleichung mit bestimmten numerischen Koeffizienten gelöst werden muss, wofür ja viele praktische Methoden bekannt sind. Für die hier behandelte Aufgabe zeigt Fig. 3 ein solches Diagramm. Es ist einer Arbeit von Concordia und Carter [33] entnommen. Die Parameter sind hier R und x_c . Es zeigt sich, dass das Nullsetzen von a_6 und a_7 labile Zonen gibt. Eine Kontrolle ergab, dass der Punkt $R = 0,1$; $x_c = 0,6$ noch knapp stabil ist, dass sich also offen-

bar bei grösseren x_c die wirkliche Stabilitätsgrenze sehr eng der durch $a_6 = 0$ und $a_7 = 0$ bestimmten Kontur anschmiegt.

In andern Fällen ist es praktischer die Methode der kleinen Schwingungen anzuwenden und die Frequenzgangkurven in der komplexen Zahlenebene nach einem der bekannten Stabilitätskriterien (Nyquist, Leonhard) zu untersuchen. Der Übergang von den Gleichungen im Bildbereich der Laplace-Transformation zum Frequenzgang ist sehr einfach infolge der Beziehung

$$F(j\lambda) = [s \cdot f(s)]_{s=j\lambda} \quad (88)$$

Anlauf eines Asynchronmotors

Als Abschluss soll noch ein Beispiel aus der dritten Klasse gezeigt werden. Je nach der angewandten Integrationsmethode müssen die Gleichungen zuerst in eine passende Gestalt gebracht werden. Zur numerischen Integration ohne mechanische Hilfsmittel ist das Verfahren von Runge-Kutta praktisch, da es bei genügender Genauigkeit die Wahl von grossen Intervallen erlaubt. Zu seiner Anwendung müssen die Gleichungen als System simultaner Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden. Für die einfache Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (89)$$

zeigt Tabelle II das Schema.

Schema von Runge-Kutta zur numerischen Integration
Tabelle II

x	y	$f(x, y)$	k	
x_0	y_0	f_1	$k_1 = f_1 \cdot h$	
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_1}{2}$	f_2	$k_2 = f_2 \cdot h$	$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$
$x_0 + \frac{h}{2}$	$y_0 + \frac{k_2}{2}$	f_3	$k_3 = f_3 \cdot h$	
$x_0 + h$	$y_0 + k_3$	f_4	$k_4 = f_4 \cdot h$	
$x_1 = x_0 + h$	$y_1 = y_0 + k$	

Dieses lässt sich ohne Mühe auf den Fall mehrerer Variablen erweitern.

Die Spannungsgleichungen für Ψ_d und Ψ_q und die Bewegungsgleichung für ω haben bereits die passende Form. Es ist nur noch eine geeignete Umformung der Beziehungen zwischen den Ψ und den i nötig. Der Asynchronmotor, der uns hier als Beispiel dient, ist ein Spezialfall der Synchronmaschine. Die Feldwicklung fehlt und die Konstanten der Längs- und Querachse sind gleich. Daher ist

$$\frac{1}{L_d(s)} = \frac{1}{L_q(s)} = \frac{1}{L} + \left(\frac{1}{L''} - \frac{1}{L} \right) \frac{s}{s + \beta} \quad (90)$$

Also gilt für die Ströme:

$$i_v = I_{v0} + \left(\frac{d\Psi_v}{dt} \right) * \left[\frac{1}{L} + \left(\frac{1}{L''} - \frac{1}{L} \right) e^{-\beta t} \right] \quad (91)$$

$v = d, q$

Differenziert man (91) nach t und addiert die mit β

multiplizierte ursprüngliche Gleichung dazu, so hat man bereits die gewünschte Form:

$$\beta i_v + \frac{di_v}{dt} = \beta \left(I_{v0} - \frac{1}{L} \Psi_{v0} \right) + \left(\frac{\beta}{L} \Psi_v + \frac{1}{L''} \cdot \frac{d\Psi_v}{dt} \right) \quad (92)$$

Wir haben also das folgende System von fünf Differentialgleichungen nach dem Runge-Kutta Schema zu behandeln:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{dt} &= -u_d - R i_d + \omega \Psi_q \\ \frac{d\Psi_q}{dt} &= -u_q - R i_q - \omega \Psi_d \\ \frac{di_d}{dt} &= \beta \left(I_{d0} - i_d - \frac{\Psi_{d0} - \Psi_d}{L} \right) + \frac{1}{L''} \cdot \frac{d\Psi_d}{dt} \\ \frac{di_q}{dt} &= \beta \left(I_{q0} - i_q - \frac{\Psi_{q0} - \Psi_q}{L} \right) + \frac{1}{L''} \cdot \frac{d\Psi_q}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{P^2}{J} (\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Die Rechnung wurde durchgeführt für den Leeranlauf eines Käfigankermotors. Dabei dient das ganze Drehmoment zur Beschleunigung des Rotors. Die Geschwindigkeitsänderung und ihr Einfluss auf den Vorgang werden daher sehr gross. Die Zahlenwerte der Konstanten sind

$$x_d = \omega L = 3,57; \quad x''_d = \omega L'' = 0,218; \quad R = 0,032;$$

$$T''_d = \frac{1}{\beta} = 0,0186 \text{ s}$$

$$H = \frac{J \omega_{syn}^2}{2 P_n} = 0,046 \text{ kW s / kVA}$$

Fig. 4 zeigt das Ergebnis der Rechnung. Links (4a) ist das Drehmoment als Funktion der Geschwindigkeit, rechts die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit aufgetragen. Zum Vergleich ist in 4a auch das

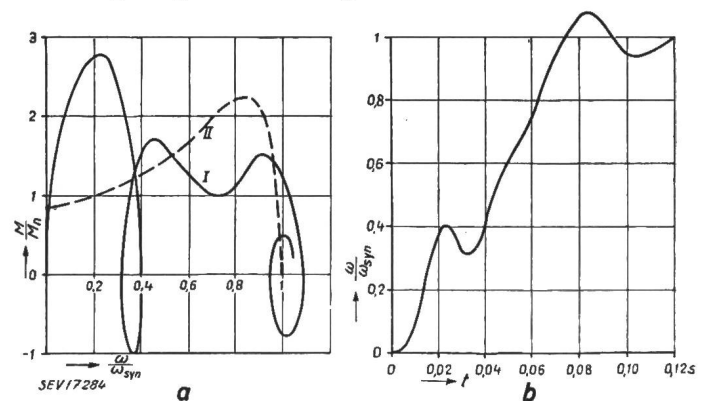


Fig. 4

Leeranlauf eines Asynchronmotors

- a Drehmoment-Drehzahl-Charakteristik
- I Drehmoment beim Leeranlauf
- II stationäres Drehmoment
- b Drehzahl-Zeit-Charakteristik

stationäre Drehmoment, wie es aus dem Kreisdiagramm erhalten werden kann eingezeichnet. Je mehr man den Anlauf verlangsamt, z. B. durch

Ankuppeln zusätzlicher Schwungmassen oder durch Belastung an der Welle, desto mehr nähert sich das Drehmoment diesen stationären Werten. Bemerkenswert an den in Fig. 4 gezeigten Ergebnissen sind vor allem folgende drei Tatsachen:

1. Der Verlauf und die Grösse des Drehmoments bei sehr raschem Anlauf sind vom stationären Drehmoment völlig verschieden.
2. Es treten am Anfang sehr hohe, rasch pulsierende Drehmomente auf.
3. Der Endzustand wird nicht stetig, sondern in Form einer gedämpften Schwingung erreicht. Die synchrone Geschwindigkeit wird vorübergehend überschritten.

Alle diese Erscheinungen sind auch schon experimentell festgestellt worden (z. B. R. Schiz, E. u. M. Bd. 59(1941) S. 553). Besonders die Aufnahme der raschen Drehmomentschwankungen bietet aber beträchtliche messtechnische Schwierigkeiten. Die erste Spitze des Drehmomentes kann mit guter Näherung berechnet werden, indem man den Motor als stillstehend annimmt. Das ist dann eine Aufgabe der ersten Klasse. Im Beispiel liefert diese Rechnung als erste Spitze 2,86 statt dem genauen Wert 2,82. Frequenz und Dämpfung der Schwingung am Schluss können ebenfalls annähernd berechnet werden. Man führt das Problem auf ein solches der zweiten Klasse zurück, indem man sowohl den Schlupf wie auch die Abweichungen des Stromes und der Flussverkettung von den stationären Leerlaufwerten als klein annimmt. Bei Vernachlässigung des Statorwiderstandes erhält man so die charakteristische Gleichung

$$s(s + \beta) + \left(\frac{1}{x_d''} - \frac{1}{x_d}\right) \cdot \frac{\omega_{syn}}{2H} = 0 \quad (94)$$

Literatur

Zur Ergänzung der etwas knappen Darstellung soll hier noch die wichtigste Literatur angeführt werden, einerseits solche, die ein gründlicheres Studium der Methoden ermöglicht, andererseits eine Auswahl von Zeitschriftenartikeln, die weitere Beispiele bieten.

a. Geeignete Darstellungen der Matrizentheorie

- [1] Cauer, W.: Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Leipzig 1941.
- [2] Frazer, R. A., W. J. Duncan u. A. R. Collar: Elementary Matrices. Cambridge 1938.
- [3] Kron, G.: A Short Course in Tensor Analysis for Electrical Engineers. New York 1942.
- [4] Kron, G.: Tensor Analysis of Networks. New York 1939.
- [5] Le Corbeiller, P.: Matrix Analysis of Electric Networks. New York 1950.

b. Lehrbücher der Laplace-Transformation

- [6] Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
- [7] Doetsch, G.: Tabellen zur Laplace-Transformation. Berlin/Göttingen 1947.
- [8] Parodi, M.: Applications physiques de la transformation de Laplace. Paris 1948.
- [9] Ghizzetti, A.: Calcolo simbolico. Bologna 1943.

c. Numerische und graphische Integrationsmethoden

- [10] Runge, C.: Graphische Methoden. Leipzig 1919.
- [11] Runge, C. u. H. König: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin 1924.
- [12] Sanden, H. von: Praktische Analysis. Leipzig 1923.

d. Integration mit Maschinen

- [13] Hartree, D. R.: Calculating Instruments and Machines. University of Illinois Press 1949.

e. Historisch wichtige Arbeiten für die Zwei-Achsen-Theorie

- [14] Dreyfus, L.: Ausgleichsvorgänge in der symmetrischen Mehrphasenmaschine. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 30(1912), Nr. 2, S. 25...32; Nr. 6, S. 121...127; Nr. 7, S. 139...144.
- [15] Dreyfus, L.: Ausgleichvorgänge beim plötzlichen Kurzschluss von Synchrongeneratoren. Arch. Elektrotechn. Bd. 5(1916), Nr. 4, S. 103...140.
- [16] Blondel, A.: Application de la méthode des deux réactions à l'étude des phénomènes oscillatoires des alternateurs accouplés. Rev. gén. Electr. Bd. 13(1923), Nr. 7, S. 235...251; Nr. 8, S. 275...282; Nr. 9, S. 331...343; Nr. 10, S. 387...396; Nr. 13, S. 515...531.
- [17] Doherty, R. E. u. C. A. Nickle: Synchronous Machines I, II. An Extension of Blondels Two-Reaction Theory. AIEE-Trans". Bd. 45(1926), S. 912, 927...942.
- [18] Doherty, R. E. u. C. A. Nickle: Synchronous Machines III. Torque-Angle Characteristics under Transient Conditions. AIEE-Trans". Bd. 46(1927), S. 1...14.
- [19] Doherty, R. E., u. C. A. Nickle: Synchronous Machines IV. Single-Phase Short Circuits. AIEE-Trans". Bd. 47(1928), S. 457...487.
- [20] Doherty, R. E., u. C. A. Nickle: Synchronous Machines V. Three-Phase Short Circuits. AIEE-Trans". Bd. 49(1930), S. 700...714.
- [21] Park, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines I. AIEE-Trans". Bd. 48(1929), S. 716...727.
- [22] Park, R. H.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines II. AIEE-Trans". Bd. 52(1933), S. 352...354.
- [23] Waring, M. L. u. S. B. Cray: The Operational Impedances of a Synchronous Machine. Gen. Electr. Rev. Bd. 35(1932), Nr. 11, S. 578...582.
- [24] Lauder, A. H.: Salient Pole Motors out of Synchronism. AIEE-Trans". Bd. 55(1936), S. 636...649.
- [25] Cray, S. B.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines. AIEE-Trans". Bd. 56(1937), S. 27...31.
- [26] Concordia, C.: Two-Reaction Theory of Synchronous Machines with any Balanced Terminal Impedance. AIEE-Trans". Bd. 56(1937), S. 1124...1127.
- [27] Stanley, H. C.: An Analysis of the Induction Machine. AIEE-Trans". Bd. 57(1938), S. 751.

f. Beispiele zur 1. Klasse

- [28] Harder, E. L. u. R. C. Cheek: Regulation of A. C. Generators with suddenly Applied Loads. AIEE-Trans". Bd. 63(1944), S. 310...318.
- [29] Rosenberg, L. T.: Voltage Dip in A. C. Generators. AIEE-Trans". Bd. 68(1949), S. 589.
- [30] Kazowski, E. Y.: Ausgleichvorgänge in Asynchronmotoren beim Anlauf und Kurzschluss. Elektrizitätsw 1947, Nr. 6, S. 19...27.
- [31] Stolor, L. I.: Einfluss der Ausgleichsvorgänge auf den Anlauf von Asynchronmotoren. Elektrizitätsw 1948, Nr. 6, S. 54...56.

g. Beispiele zur 2. Klasse

- [32] Butler, J. W. u. C. Concordia: Analysis of Series Capacitor Application Problems. AIEE-Trans". Bd. 56(1937), S. 975...988.
- [33] Concordia, C. u. G. K. Carter: Negative Damping of Electrical Machinery. AIEE-Trans". Bd. 60(1941), Seiten 116...118.
- [34] Concordia, C.: Steady-State Stability of Synchronous Machines as Affected by Voltage-Regulator Characteristics. AIEE-Trans". Bd. 63(1944), S. 215...220.

h. Beispiele zur Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe des Frequenzgangs

- [35] Waldvogel, P.: Theorie der Spannungshaltung einer auf eine lange leerlaufende Leitung arbeitenden Drehstrommaschine. Brown Boveri Mitt". Bd. 32(1945), Nr. 8, S. 251...263.

- [36] Frey, W.: Stabilisierung von Synchrongeneratoren durch rasche Regelung der Erregung bei der Energieübertragung auf grosse Entfernung. Brown Boveri Mitt. Bd. 33 (1946), Nr. 11, S. 335...347.

i. Beispiele zur 3. Klasse (Integration mit Bush-Maschinen)

- [37] Shoults, D.R., S.B. Crary u. A.H. Lauder: Pull-In Characteristics of Synchronous Motors. AIEE-Trans. Bd. 54 (1935), S. 1385...1395.
 [38] Clarke, E., C.N. Weygandt u. C. Concordia: Overvoltages Caused by Unbalanced Short Circuits. AIEE-Trans. Bd. 57 (1938), S. 453...468.

- [39] Maginniss, F. J. u. N.R. Schultz: Transient Performance of Induction Motors. AIEE-Trans. Bd. 63 (1944), S. 641...646.
 [40] Crary, S.B., C. Concordia, C.E. Kilbourne u. C.N. Weygandt: Synchronous Starting of Generator and Motor. AIEE-Trans. Bd. 64 (1945), S. 629...634.
 [41] Weygandt, C.N., u. S. Chapp: Electromechanical Transient Performance of Induction Motors. AIEE-Trans. Bd. 65 (1946), S. 1000...1009.
 [42] Concordia, C. u. M. Temoshok: Resynchronizing of Generators. AIEE-Trans. Bd. 66 (1947), S. 1512...1518.

Adresse des Autors:

Th. Laible, dipl. Ingenieur, Bahnhaldenstrasse 6, Zürich 52.

Das Thermoelement als Energieumformer

Von L. Geiling, Palaiseau, France

621.362

Unter vereinfachenden Annahmen wird untersucht, wie hoch der Wirkungsgrad eines aus Thermoelementen gebildeten Umformers sein kann. Der theoretische Grenzwert wird zu $66\frac{2}{3}\%$ gefunden, was höher ist, als man bisher annahm (50%), und durch die Eigenart des Thermoumformers bedingt ist, in dem ein Teil der Jouleschen Wärme wieder in elektrische Energie übergeführt wird. Der praktisch erreichbare Wirkungsgrad liegt wesentlich niedriger und hängt im wesentlichen von der Kühlung der kalten Lötstellen ab, er liegt unter 6% . Praktisch kann der Thermoumformer etwa zur Verwertung der Abgaswärme von Kraftwerken oder auch als Thermokühlmaschine Verwendung finden. Der Materialaufwand ist gross.

Les recherches sur le rendement d'une thermopile comme transformateur seront faites à partir d'hypothèses simplificatrices. La limite théorique du rendement a été trouvée de $66\frac{2}{3}\%$ ce qui est une valeur plus élevée que ce qui a été admis jusqu'ici (50%) et qui est conditionnée par les propriétés du transformateur thermoélectrique, dans lequel une partie de l'effet Joule est réutilisée sous forme d'énergie électrique. Le rendement pratique que l'on peut atteindre est essentiellement plus bas et dépend du refroidissement des soudures froides, il est en dessous de 6% . En pratique, le transformateur thermoélectrique peut utiliser les gaz d'évacuation des usines ou peut servir de machine réfrigérante. La quantité de matière première est importante.

Das Thermoelement ist die einfachste Maschine zur Umformung von Wärme in elektrische Energie. Es hat keine bewegten Teile, wenig Verschleiss, braucht fast keine Wartung und wäre demnach vorzüglich geeignet, auch im grossen als Energieumformer eingesetzt zu werden. Als Energiequellen kommen in erster Linie die Brennstoffe in Frage, die Abwärme von Kraftwerken, aber auch Sonnenenergie oder die Wärme von heissen Quellen usw. Die direkte Erzeugung elektrischer Energie aus Brennstoffen kann auch in der «Brennstoffkette» geschehen¹⁾, die durch hohen Wirkungsgrad ausgezeichnet ist (60%), in ihrer praktischen Ausführung jedoch sehr kompliziert und teuer ist, weshalb sie bis heute keine praktische Anwendung gefunden hat. Zur Verwertung von «Abfallwärme» oder Strahlungswärme ist das Thermoelement allein geeignet.

Die Patentliteratur ist reich an Vorschlägen für die Herstellung solcher Thermoumformer; trotzdem hat noch keiner bis heute praktische Bedeutung erlangt. Der Grund ist der schlechte Wirkungsgrad, der allen Thermoumformern anhaftet. In der vorliegenden Arbeit soll nun der Wirkungsgrad eines Thermoumformers errechnet werden.

Einer genaueren Berechnung stehen Schwierigkeiten entgegen, die in der Temperaturabhängigkeit der Materialeigenschaften liegen. Exakt könnte die Rechnung nur für ein ganz bestimmtes Metallpaar durchgeführt werden, dessen Kennwerte für den ganzen betrachteten Temperaturbereich bekannt sein müssen. Da es hier aber darauf ankommt, eine Übersicht über das Verhalten der Metalle zu erhal-

ten, müssen, um zu verhältnismässig einfachen und übersichtlichen Formeln zu kommen, vereinfachende und verallgemeinernde Annahmen gemacht werden.

Kurz seien noch die thermoelektrischen Effekte in Erinnerung gebracht.

Der *Seebeck-Effekt*: Im Jahre 1821 entdeckte Th. J. Seebeck, dass in einem geschlossenen Stromkreis, der aus zwei verschiedenen Metallen besteht, die an zwei Stellen, den sogenannten «Lötstellen», verlötet sind, ein Strom fliesst, wenn die eine dieser Lötstellen erwärmt wird.

Sind die Temperaturen der Lötstellen T_1 und T_2 , so ist die den Strom I hervorbringende elektromotorische Kraft E

$$E = u (T_1 - T_2) \text{ V} \quad (1)$$

Der Proportionalitätsfaktor u (V/Grad) wird als «Thermokraft» oder «Seebeckkoeffizient» bezeichnet.

Der *Peltier-Effekt*: Schickt man einen elektrischen Strom durch die Verbindungsstelle (Lötstelle) zweier Metalle, so wird ausser der Jouleschen Wärme auch eine positive oder negative Wärme entwickelt, die mit der Stromrichtung ihr Zeichen umkehrt (entdeckt 1834 von J. C. Peltier). Die erzeugte Wärmemenge Q ist proportional der Stromwärme I und der Dauer t des Stromdurchflusses.

$$Q = \Pi \cdot I \cdot t \cdot T \text{ cal} \quad (2)$$

Zwischen dem Peltierkoeffizienten und dem Seebeckkoeffizienten besteht ein Zusammenhang der Form:

$$\Pi = T \cdot \frac{du}{dT} \quad (3)$$

¹⁾ siehe E. Baur: Über das Problem der elektrotechnischen Verbrennung der Brennstoffe. Bulletin SEV, Bd. 30 (1939), Nr. 17, S. 478...481.