Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 40 (1949)
Heft: 1

Artikel: Beitrag zur Theorie der mathematischen Behandlung nichtlinearer Vorgänge

Autor: Rosenhamer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1056342

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

det werden kann [3]). Auch scheint es zweckmässig, wenn einmal eine gewisse Normung, wenigstens für Leuchten, die für Arbeitsstätten in Betracht kommen, durchgeführt würde, was wohl am ehesten auf freiwilliger Basis unter den solche Produkte herstellenden Firmen erfolgen könnte. Es ist sicher nicht nötig, dass wieder eine grosse Menge der verschiedensten Leuchtentypen zur Anwendung gelangt, wie es beim Glühlampenlicht der Fall war und heute noch ist, wobei sich unter diesen Leuchten immer solche befinden, die lichttechnisch unbefriedigend sind.

Schlussbemerkungen

Schliesslich möge noch eine Anregung gestattet sein, zu welcher die Installation von Fluoreszenzlampen in der Textilindustrie geführt hat. Bis vor kurzem wurden die Fluoreszenzlampen parallel zu den Webstühlen, Spinn- und Zwirnmaschinen angeordnet, neuerdings senkrecht. Diese Anordnung ist zweifellos wesentlich vorteilhafter als die frühere, nach welcher nun eine ganze Reihe von Anlagen ausgeführt wurden, die nun schon wieder bis zu einem gewissen Grad veraltet sind. Warum führt man nicht für die Beleuchtung so zahlreich vorhandener Maschinen, z. B. von Webstühlen, Spinnmaschinen, Nähmaschinen oder Werkzeugmaschinen, systematische Versuche durch, um die beste Beleuchtungsart herauszufinden, bevor Anlagen in den Betrieben eingerichtet werden?

Zum Schlusse sei der Hoffnung Ausdruck gegeben, dass die kritischen Betrachtungen des Vortrages in dem Sinne verstanden worden sind, wie sie gemeint waren: als Beitrag zum Vermeiden von Fehlern in der Beleuchtung von Arbeitsstätten, Fehlern, die sich zum Nachteil von Arbeitgebern und Arbeitnehmern auswirken.

[3]) Zur Zeit werden verschiedene solche Leuchten gebaut, von denen eine bereits von der Materialprüfanstalt des SEV geprüft und zum Anschluss zugelassen wurde.

Adresse des Autors:
E. Bitterli, Dipl.-Ing., Adjunkt des eidgenössischen Fabrikinspektors des III. Kreises, Utoquai 37, Zürich 8.

Beitrag zur Theorie der mathematischen Behandlung nichtlinearer Vorgänge

Von *H. Rosenhamer*, Västerås (Schweden)

517.9 : 621.3

Um eine allgemeine Differentialgleichung n-ter Ordnung, wie sie sich z. B. bei der mathematischen Behandlung eines nichtlinearen elektrischen Vorganges ergibt, lösen zu können, stellt der Verfasser zunächst die Gleichung als Summe von Produkten linearer Differentialquotienten mit Koeffizientenfunktionen dar und ersetzt diese punktweise durch geeignet zu wählende Konstanten, worauf die Integration in bekannter Weise durchgeführt wird. Das so erhaltene Ergebnis, das der ursprünglichen Differentialgleichung natürlich nur mit gewisser Näherung genügt, wird weiter zur Bestimmung neuer, modifizierter Koeffizientenfunktionen benutzt, die zu einer befriedigenden Lösung der Differentialgleichung des vorgelegten Problems führen. Dabei kann man die den nichtlinearen Systemelementen entsprechenden Funktionen unverändert lassen und die erforderliche Modifizierung lediglich mit Hilfe von Konstanten bewirken.

Als Anwendungsbeispiel dieser «Methode der Funktionskonstanten» werden die Vorgänge untersucht, die sich bei einer Reihenschaltung einer Induktivität, einer Kapazität und eines Widerstandes einstellen können, wenn eine sinusförmige Spannung angelegt wird. Es zeigt sich dabei u. a., dass Kipperscheinungen an das Auftreten eines stationären Ausgleichgliedes gebunden sind, während Unterschwingungen besonders dann entstehen, wenn der Maximalwert des Zeitintegrals der aufgezwungenen Spannung gerade gleich dem Maximalwert des entsprechenden, vom System selbst gegebenen inneren Spannungsintegrals ist. Das Beispiel lässt gleichzeitig erkennen, dass diese Methode zur übersichtlichen und anschaulichen Behandlung auch schwierigerer Aufgaben geeignet ist.

L'auteur présente une méthode pour résoudre les équations différentielles générales de n^e-ordre, du type de celles rencontrées, par exemple, dans l'étude mathématique des phénomènes électriques non-linéaires. Il réduit tout d'abord l'équation à une somme de produits de quotients différentiels linéaires à coefficients variables, puis remplace successivement ces coefficients par des constantes à déterminer; il effectue ensuite l'intégration par les méthodes habituelles. Le résultat ainsi obtenu ne satisfait l'équation différentielle primitive que de façon approchée. Par contre il peut servir à déterminer de nouveaux coefficients variables qui permettent de trouver une solution plus satisfaisante de l'équation donnée. Cette modification des coefficients peut s'obtenir uniquement à l'aide de constantes, sans transformer les fonctions correspondant aux éléments non linéaires.

Comme exemple d'application de cette «méthode de la variation des constantes», l'auteur étudie un circuit, comprenant en série une self-induction, une capacité et une résistance, lorqu'on lui applique une tension sinusoïdale. On constate entre autres, que les phénomènes de relaxation sont liés à la présence d'un terme de compensation stationnaire. D'autre part, des oscillations de fréquence sous-multiple de l'onde fondamentale peuvent apparaître quand la valeur maximale de l'intégrale sur le temps de la tension aux bornes est égale à la valeur maximale de l'intégrale de la tension induite correspondante du système. Cet exemple démontre comment la méthode permet de traiter d'une façon simple et claire des problèmes particulièrement difficiles.

I. Das Verfahren

Verhältnismässig oft kommen Fälle vor, bei denen die Komponenten des betrachteten Vorgangs nicht nur proportional den Zustandsgrössen selbst und ihren Differentialquotienten sind, sondern auch in weniger einfacher Weise von diesen Grössen abhängen, die also im Falle nur *einer* unabhängigen Veränderlichen durch eine allgemeine Differentialgleichung *n*-ter Ordnung,

$$\varphi\left(x,\ y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \cdots \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\right) = 0 \qquad (1)$$

dargestellt werden. Bekannte Beispiele, die ein derartiges nichtlineares Verhalten zeigen, sind der Widerstand mit Lichtbogenentladung, die Induktionsspule mit Eisenkern, die Kapazität mit beweglichen Elektroden, sowie die mechanischen Anlogie-Fälle, nämlich die geschwindigkeitsabhängige Reibung, die geschwindigkeitsabhängige Masse, die wegabhängige

Elastizität. Bekanntlich gelingt es mit Hilfe dieser mechanischen Systeme ungedämpfte periodische Bewegungen bei zeitlich konstanten Kräften zu erzeugen. Der stromabhängige Widerstand bewirkt jedoch einen Austausch von Gleich- und Wechselstromenergie, während bei der feldabhängigen Induktivität und Kapazität ein Austausch von elektrischer und mechanischer Energie stattfindet [1] [1]).

Eine geschlossene mathematische Behandlung derartiger Probleme ist nicht möglich, da es keine Methoden gibt, durch die man eine Differentialgleichung der erwähnten Art in jedem Falle integrieren könnte. Dies gilt auch noch für die verhältnismässig einfache, aber technisch besonders wichtige Form

$$y\ \mathrm{f}_0(y) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}_1(y) + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}_2(y) = \sin x \quad (2)$$

Eine solche Gleichung lässt sich z. B. für eine mit sinusförmiger Spannung gespiesene Reihenschaltung einer stromabhängigen Kapazität, eines stromabhängigen Widerstandes und einer stromabhängigen Induktivität aufstellen. Man hat versucht [26, 27], Ansätze der Form

$$\begin{aligned} y = B_0 &+ \left(A_{\frac{1}{n}} \sin\frac{1}{n}x + B_{\frac{1}{n}} \cos\frac{1}{n}x\right) + \\ &+ \left(A_{\frac{2}{n}} \sin\frac{2}{n}x + B_{\frac{2}{n}} \cos\frac{2}{n}x\right) + \ldots \\ &+ \left(A_{\frac{n-1}{n}} \sin\frac{n-1}{n}x + \mathrm{B}_{\frac{n-1}{n}} \cos\frac{n-1}{n}x\right) + \\ &+ \left(A_1 \sin x + B_1 \cos x\right) + \\ &+ \left(A_{\frac{n+1}{n}} \sin\frac{n+1}{n}x + B_{\frac{n+1}{n}} \cos\frac{n+1}{n}x\right) + \ldots \end{aligned} \quad (3)$$

in Gl. (2) einzusetzen und damit die Konstanten $\mathrm{A}_{\frac{l}{n}}$ und $\mathrm{B}_{\frac{l}{n}}$ zu bestimmen. Ohne dies selbst durchzuführen, erkennt man, dass die Rechenarbeit bei diesem Verfahren trotz verschiedener Vereinfachungen und Vernachlässigungen bedeutend ist, sehr zum Nachteil der praktischen Anwendbarkeit und der physikalischen Klarheit. Die bei diesem Lösungsverfahren auftretenden Schwierigkeiten liegen im wesentlichen darin begründet, dass mit *Komponenten* gearbeitet wird, die wegen der hier vorliegenden gestörten Superposition nicht unabhängig voneinander sind.

Bei einer zweiten Methode, die, im Gegensatz zur vorhergehenden, oft Anwendung findet, wird jede Kennlinie durch verschiedene Geradenstücke ersetzt, deren Zahl man aus Gründen der Einfachheit so klein wie möglich wählt. Für jedes Geradenstück werden konstante Koeffizienten bestimmt und in die zugehörige Differentialgleichung eingesetzt. Die bei diesem Verfahren erreichbare Genauigkeit ist im allgemeinen mittelmässig, denn abgesehen von den Abweichungen, die beim Ersatz einer krummen Kennlinie durch wenige Geradenstücke auftreten, entstehen an den Stoßstellen zweier aufeinanderfolgender Geradenstücke Übergangserscheinungen, deren Berücksichtigung bei diesem Näherungsverfahren recht umständlich wäre. Immerhin leistet diese *Ersatzmethode* oft gute Dienste, beispielsweise in der Reglertheorie [2, 3, 4, 5].

Noch eine dritte Methode, ihrem Wesen nach eine *Integralmethode*, verdient Erwähnung. Man rechnet mit den für gewisse Kurvenformen bestimmbaren Effektivwerten und kann daher zwar keinen Aufschluss über die Augenblickszustände geben, wohl aber leistet diese Methode oft wertvolle Hilfe bei der Beurteilung der sich einstellenden Betriebszustände. Auf diese Weise können z. B. die Stabilität von Arbeitspunkten oder die Grenzen für das Auftreten von Kipperscheinungen bei Serie- oder Parallelschaltung von Kapazitäten und Induktivitäten untersucht werden [16, 17].

In der vorliegenden Arbeit soll ein neuer Weg eingeschlagen werden, indem ein nichtlinearer Vorgang durch Differentialgleichungen von der Form

$$y\ \mathrm{f}_0(x, y) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}_1(x, y) + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{f}_n(x, y) = \mathrm{F}(x) \quad (4)$$

dargestellt wird und die Koeffizientenfunktionen $\mathrm{f}_\nu(x, y)$ (die im allgemeinen auch Ableitungen enthalten dürfen) punktweise konstant gehalten und den Werten gleichgesetzt werden, die sie für geeignet gewählte Werte von x und y annehmen. Die Differentialgleichung (4) kann dann wie eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten behandelt werden und liefert daher eine implizite Gleichung $g(x, y) = 0$ für die beiden Variabeln, aus der y als Funktion $\mathrm{f}(x)$ prinzipiell bestimmbar ist. Diese Lösung wird aber im allgemeinen die Gl. (4) nicht recht befriedigen, da deren Integration nicht längs der Funktionen f_ν erfolgt ist, sondern längs konstanter Ersatzwerte. Immerhin wird der erhaltene Funktionsverlauf ein qualitativ brauchbares Bild vermitteln, das bei entsprechender Modifizierung der Koeffizientenfunktionen auch zu einer quantitativ befriedigenden Lösung führen kann. Wird also der durch $y = \mathrm{f}(x)$ gegebene Funktionsverlauf als der tatsächliche angesehen, so kann Gl. (4) für eine Anzahl von Wertepaaren x, y bei vorerst noch unbestimmten Koeffizientenfunktionen f_ν^* neu angeschrieben und diese Koeffizientenfunktionen aus den so erhaltenen Bedingungen ermittelt werden. Dabei lassen sich die Verhältnisse so einrichten, dass die den ursprünglichen Koeffizientenfunktionen $\mathrm{f}\,\nu$ entsprechenden nichtlinearen Kennlinien unverändert bleiben und sich die erforderlichen Modifizierungen lediglich auf Konstantwerte erstrecken.

Es lässt sich zeigen (der Beweis musste mit Rücksicht auf den Umfang der Arbeit wegbleiben), dass sich etwa vorhandene Integrationskonstanten bei diesem Verfahren stetig und lediglich nach Massgabe der Koeffizientenfunktionen f_ν ändern und dass daher, so lange der Vorgang stetig verläuft, keine Ausgleichglieder entstehen. Im Falle von Unstetigkeit können aber Ausgleichglieder auch für den Dauerzustand vorkommen.

[1]) siehe Literaturverzeichnis am Schluss des Artikels.

II. Die Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern und einer konstanten Kapazität

1. Die möglichen Betriebszustände

Das im Teil I angedeutete Verfahren soll jetzt dazu benutzt werden, einen näheren Einblick in die Physik derjenigen Erscheinungen, insbesondere des Kippvorganges und des Unterschwingungszustandes, zu ermitteln, die an Serieschaltungen von Induktivität mit Eisenkern und konstanter Kapazität beobachtet werden.

Unter *Kippen* versteht man bekanntlich das plötzliche Umschlagen vom induktiven in den kapazitiven Betriebszustand, was bei einer mit sinusförmigem Strom gespiesenen Serieschaltung einer stromabhängigen Induktivität und einer Kapazität dann eintritt, wenn bei stetiger Spannungserhöhung die Differenz zwischen den Effektivwerten der über der Induktivität und über der Kapazität gemessenen Spannungen ihr Maximum erreicht. Ein entsprechendes Umschlagen vom kapazitiven in den induktiven Zustand tritt auch bei Verkleinerung der Spannung ein, in diesem Fall aber wesentlich durch den stets von Null verschiedenen Widerstand des Stromkreises bedingt [6...19]. Beachtenswert ist hier die Tatsache, dass der Zustand innerhalb einer Periode erfahrungsgemäss nur induktiv oder nur kapazitiv sein kann, dass der Strom also bei positiver Eingangsspannung nur zunehmen bzw. nur abnehmen kann. Nun zeigt aber eine einfache Überlegung (z. B. bei der Berechnung der Induktivitäts- und der Kapazitätsspannung, die durch einen sinusförmigen Strom erzeugt werden), dass es Fälle gibt, bei denen wegen der mit dem Strome zunehmenden Sättigung der Induktivität der Zustand innerhalb derselben Periode bei kleinen Strömen induktiv, bei grossen dagegen kapazitiv sein sollte. Wie dieser Widerspruch gelöst werden kann, wird aus den folgenden Ausführungen ersichtlich werden.

Während der Kippvorgang in der Literatur bereits 1907 erwähnt wurde, scheint der *Unterschwingungszustand* erstmalig 1926 erkannt worden zu sein [20]. Er äussert sich darin, dass ausser der durch eine rein sinusförmige Eingangsspannung erzeugten Grundschwingung des Stromes auch noch Unterschwingungen auftreten, deren Frequenzen beliebige rationale Teile der Grundfrequenz f sind; vorzugsweise stellt sich dabei die Frequenz $\frac{1}{3}f$ ein, während die übrigen Frequenzen $\frac{m}{n}f$ (wo m und n ganze, teilerfremde Zahlen bedeuten) weniger stabil sind [20...34]. Ähnlich wie der Kippvorgang ist auch der Unterschwingungszustand mit dem Auftreten von Überspannungen und Überströmen verbunden. Was die Physik des Unterschwingungszustandes anbelangt, scheint man bisher nicht über Hypothesen hinausgekommen zu sein, obschon man für eine Anzahl konkreter Fälle seine Existenzbedingungen empirisch feststellen konnte und es auch gelungen ist Unterschwingungsformen mit Rechenmaschinen (Differentialanalysatoren) zu erzeugen [32].

Betont sei, dass hier nur einfache Reihenschaltungen betrachtet werden, die von einfrequenten, also rein sinusförmigen Spannungen gespiesen werden; davon zu unterscheiden sind die Fälle, in denen einfache nichtlineare Systeme durch mehrfrequente Spannungen oder gekoppelte, nichtlineare Elemente enthaltende Systeme durch einfrequente Spannungen erregt werden. In solchen Fällen entstehen Unterschwingungen bekanntlich als Kombinationsschwingungen [18, 19]. Auch die Unterschwingungen, welche bei vollkommen linearen Elementen auftreten können, wenn eine Asynchronmaschine in Reihe mit einer Kapazität von einer einfrequenten Spannung gespiesen wird, und die dadurch zustande kommen, dass die Maschine als Motorgenerator arbeitet, sollen nicht Gegenstand dieser Betrachtungen sein. Im übrigen sollen sich die folgenden Untersuchungen ausschliesslich auf den Dauerzustand beziehen; Übergangserscheinungen sollen hier nicht behandelt werden.

Nimmt man an, die Eingangsspannung sei

$$u = \bar{U} \sin \omega t \tag{5}$$

so lautet die Systemgleichung

$$\int \frac{i\,\mathrm{d}t}{C} + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} N = \bar{U} \sin \omega t \tag{6}$$

oder

$$\frac{i}{C} + \frac{\mathrm{d}^2 i\,\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t^2\,\mathrm{d}i} N + \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}i^2} N = \omega \bar{U} \cos \omega t \tag{7}$$

wo C die Kapazität, Φ den Induktionsfluss und N die Windungszahl der Induktionsspule bedeuten. Dies ist nun freilich eine Differentialgleichung zweiten Grades. Werden aber nach dem oben erwähnten Verfahren die Koeffizienten des zweiten Gliedes punktweise durch noch zu definierende konstante Werte L (Induktivität) ersetzt, so verschwindet das dritte Glied und Gl. (7) nimmt die Form (4) an. Die Lösung lautet bekanntlich

$$i = -\frac{\bar{U}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \cos \omega t + k_1 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + k_2 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} \tag{8}$$

wo jedoch die Integrationskonstanten k_1 und k_2 als Funktionen von L zu verstehen sind. Setzt man abkürzungsweise für das Ausgleichglied

$$k_1 \cos \frac{t}{\sqrt{LC}} + k_2 \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} = \Delta \frac{\bar{U}}{\omega L - \frac{1}{\omega C}} \tag{9}$$

so lässt sich für (8) auch schreiben

$$y \equiv i \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\bar{U}} = w \equiv \Delta - \cos \omega t = \Delta + v \tag{10}$$

Diese Gleichung ist die *allgemeine Zustandsgleichung* des Systems. Die Systemfunktion y ist lediglich eine Funktion des Stromes und soll zunächst für sich allein untersucht werden.

Zu diesem Zweck stellt man die Kennlinie der Induktivität in mathematischer Form dar, z. B. indem man die sich hier recht gut eignende Exponentialform wählt [1])

$$\Phi = a\,\Theta + b\left(1 - e^{-c\theta}\right) \tag{11}$$

Den Konstanten b und c ist dasselbe Vorzeichen zu geben wie es die Durchflutung Θ hat, während a stets positiv ist. Hier lässt sich sofort eine Vereinfachung dadurch erzielen, dass man alle möglichen Kennlinien auf dieselbe Exponentialfunktion reduziert, indem man an Stelle der Durchflutung Θ als neue Veränderliche ξ oder ϑ gemäss der Definition

$$\xi = \frac{c}{|c|}\vartheta = c\,\Theta = cNi \tag{12}$$

verwendet, von denen ξ wegen der eben genannten Vorschrift nur positiv sein kann. Gl. (11) geht damit über in

$$\Phi = b\left[\frac{a}{b\,|c|}\vartheta + \left(1 - e^{-\frac{c}{|c|}\vartheta}\right)\right] = b\left[\frac{a}{b\,c}\xi + \left(1 - e^{-\xi}\right)\right] \tag{13}$$

Die Induktivität soll als Mittelwert

$$L = \frac{\Phi N}{i} = b\,|c|\,N^2\left(\frac{a}{b\,|c|} + \frac{1 - e^{-\frac{c}{|c|}\vartheta}}{\vartheta}\right) = b\,c\,N^2\left(\frac{a}{b\,c} + \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}\right) \tag{14}$$

definiert werden, was der wirklichen Kennlinie längs eines Integrationsweges $0...i$ besser entspricht als die Definition $L = \frac{\mathrm{d}\Phi N}{\mathrm{d}\,i}$. Damit ergeben sich die Grenzwerte

$$L_0 = L_{i=0} = (a + b\,c)\,N^2 \tag{15}$$

sowie

$$L_\infty = L_{i=\infty} = a\,N^2 \tag{16}$$

für die noch die Beziehung gilt

$$\frac{a}{b\,c} = \frac{1}{\frac{L_0}{L_\infty} - 1} = \lambda \tag{17}$$

Für die Systemfunktion y ergibt sich jetzt nach Gl. (10) der einfache Ausdruck

$$y = p\,(1 - e^{-\xi}) - q\,\xi \tag{18}$$

wo die dimensionlosen Grössen p und q bedeuten

$$p = \frac{b\,N\omega}{\bar{U}} \tag{19}$$

$$q = \frac{a\,N\,\omega}{c\,\bar{U}}\left(\frac{1}{a\,N^2\,\omega^2\,C} - 1\right) = \frac{\omega\,L_\infty}{c\,N\,\bar{U}}\left(\frac{1}{\omega^2\,C\,L_\infty} - 1\right) \tag{20}$$

Führt man noch Relativwerte gemäss den Definitionen

$$y_0 = \frac{y}{p},\quad q_0 = \frac{q}{p} = \lambda\left(\frac{1}{\omega^2\,C\,L_\infty} - 1\right) \tag{21}$$

ein, so bekommt man schliesslich für die *Systemfunktion*

$$y_0 = (1 - e^{-\xi}) - q_0\,\xi \tag{22}$$

Das Klammerglied dieser Gleichung nimmt, wie es dem Wesen ferromagnetischer Stoffe entspricht, mit steigendem Strome immer langsamer zu, während das letzte Glied stets proportional mit dem Strom wächst; bei einem gewissen Strom nimmt daher die Systemfunktion ein Maximum an. Man findet für den Ort dieses Maximums

$$q_0 = e^{-\xi'} \tag{23}$$

und für den Betrag

$$\bar{y}_0 = 1 - e^{-\xi'}\,(1 + \xi') \tag{24}$$

Der Verlauf der Systemfunktion ist für einige Parameter q_0 in Fig. 1 wiedergegeben. Man ersieht, dass

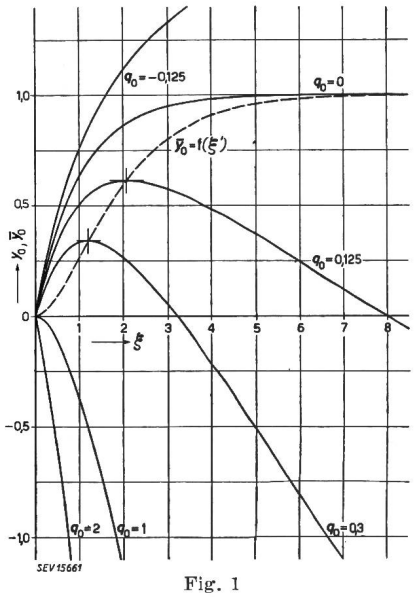

Fig. 1

Verlauf der Systemfunktion bei der Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern und einer Kapazität

y_0 Systemfunktion; q_0 Parameter; $\bar{y}_0$ Kurve der Maximalwerte der Systemfunktion; ξ dem Strom i proportionale Grösse

Maximalwerte $\bar{y}_0$ nur für Werte von q_0 zwischen 0 und 1 auftreten können.

Um die Zeitabhängigkeit des Stromes zu ermitteln, geht man von der Zustandsgleichung (10) aus, in der vorerst vom Ausgleichglied abgesehen und dementsprechend w durch v ersetzt wird. Da v unabhängig vom Strom und also auch von ξ ist, können die jeweiligen Betriebspunkte als Schnittpunkte

[1]) Weniger geeignet wäre die Potenzform $\Phi = ai + bi^c$. Bei dieser muss nämlich $0 < c < 1$ sein, da ja Φ konkav gegen die i-Achse hin zunehmen soll; dies hat aber zur Folge, dass die Steigung beim Strom Null unendlich gross, die Abweichung von der Wirklichkeit also bedeutend wird. Hingegen ermöglicht die inverse Darstellung, $i = a\,\Phi + b\,\Phi^c$, ebenso wie die Exponentialform eine sehr gute Anpassung an empirische Kennlinien, wenn man von der tatsächlichen Verkleinerung der Permeabilität bei geringen Durchflutungen absieht.

der Systemfunktion (22) mit der harmonisch schwingenden Parallelen zur ξ-Achse

$$v_0 = -\frac{\cos \omega t}{p} \qquad (25)$$

erhalten werden. An Hand der Fig. 1 kann man folgenden, für das Verhalten des Stromkreises entscheidenden Umstand erkennen: Während die Reihenschaltung einer konstanten Induktivität und Kapazität oder eine konstante oder auch stromabhängige Induktivität allein jeder beliebigen Werte v_0 fähig ist (d. h. jedes beliebigen Eingangsspannungsintegrals), da y_0 hier mit dem Strom dauernd zunimmt, ist das von der Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern und einer Kapazität abhängige Spannungsintegral gewissen Einschränkungen unterworfen. Je nach dem Verhältnis zwischen dem Maximalwert $\bar{y}_0$ dieses inneren Spannungsintegrals und dem Maximalwert $\bar{v}_0$ des Eingangsspannungsintegrals sind die folgenden *sechs typischen Betriebszustände* möglich:

a) Rein induktiver Zustand, gekennzeichnet durch

$$-\infty \leqq q_0 < 0$$

b) Induktiver Resonanzzustand, gekennzeichnet durch

$$q_0 = 0, \qquad \bar{y}_0 = \frac{1}{p} = 1$$

c) Induktiv-isoliertkapazitiver Zustand, gekennzeichnet durch

$$0 \leqq q_0 \leqq +1, \qquad \bar{y}_0 > \frac{1}{p}$$

d) Induktiv-kapazitiver Zustand, gekennzeichnet durch

$$0 \leqq q_0 \leqq +1, \qquad \bar{y}_0 < \frac{1}{p}$$

e) Knotenpunktzustand, gekennzeichnet durch

$$0 \leqq q_0 \leqq +1, \qquad \bar{y}_0 = \frac{1}{p} < 1$$

f) Rein kapazitiver Zustand, gekennzeichnet durch

$$+1 \leq q_0 \leqq +\infty$$

In Fig. 2 ist die in der erwähnten Weise aus Fig. 1 konstruierte Zeitabhängigkeit des auf seinen jeweiligen Höchstwert bezogenen Stromes für den Fall $p = \frac{1}{0{,}615} = 1{,}626$ sowie für die Betriebszustände c)...f) dargestellt und zwar für

q_0	= 0	0,3	0,125	2
$p\bar{y}_0$	= 1,626	0,551		1

Der *rein induktive* und der *rein kapazitive Betriebszustand* weisen keine Besonderheiten auf; eine rein sinusförmige Eingangsspannung hat einen Strom zur Folge, der je nach dem Grad der Kennlinienkrümmung ($q_0 < 0$ bzw. $q_0 \geqq 1$) mehr oder weniger von der Sinusform abweicht. Der *induktive Resonanzzustand* entsteht gemäss Gl. (21), wenn die Kapazität in Resonanz mit der Sättigungsinduktivität ist und äussert sich im Auftreten eines induktiven Stromes, dessen Betrag für $\omega t = k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \ldots$), unendlich gross wird. Tatsächlich ist jedoch der Sättigungsteil der Induktivitätskennlinie niemals so geradlinig, wie dies nach der Ersatzfunktion Gl. (11) vorausgesetzt wird, und der Strom wird deshalb, wie auch wegen der auftretenden Verluste stets auf endliche Werte begrenzt. Der *induktiv-isoliertkapazitive Betriebszustand* besitzt ähnlichen Stromverlauf wie der rein induktive Zustand; im Gegensatz zu diesem treten hier aber isolierte Kurvenzweige auf (Fig. 1), die jedoch im Dauerzustand niemals durchlaufen werden können. Der induktiv-kapazitive Zustand sowie der Knotenpunktszustand sollen im folgenden eingehender behandelt werden.

2. *Der induktiv-kapazitive Zustand*

Der induktiv-kapazitive Zustand ist in Fig. 2 durch die Kurve $q_0 = 0{,}3$ wiedergegeben. Wollte man diesem Kurvenverlaufe folgen, so wäre man gezwungen, in gewissen Abschnitten zeitlich rückwärts zu schreiten, sofern man sich nicht zu Stromsprüngen entschliessen möchte. Der erste Weg ist für den natürlichen Ablauf des Vorgangs undenkbar und auch zu einem Stromsprung kann es wegen des Vorhandenseins der Induktivität nicht kommen. Dagegen wird durch die Unstetigkeitstendenz des Stromes ein Ausgleichglied hervorgerufen, so dass nun hier das Glied Δ der Zustandsgleichung (10) berücksichtigt werden muss. In Erweiterung des bisherigen Verfahrens kann man sich vorstellen, dass der jeweilige Betriebspunkt als Schnittpunkt der Systemfunktion (22) mit einer Kurve

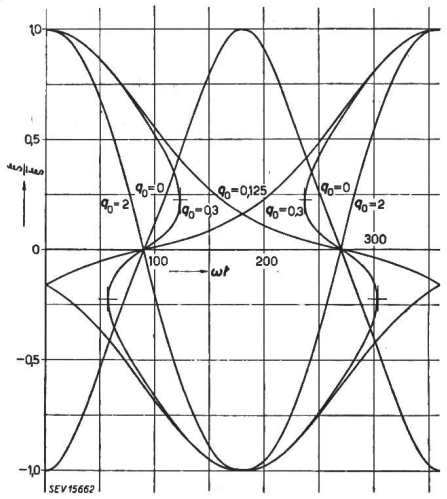

Fig. 2
Zeitlicher Verlauf des Stromes
für den Fall $p = 1{,}626$
$\frac{\xi}{\bar{\xi}}$ dem Ausdruck $\frac{i}{\bar{I}}$ proportionale Grösse
(i Momentanwert, $\bar{I}$ Amplitudenwert des Stromes);
ωt Zeitmass; p, q_0 Parameter

$$w_0 = \frac{\Delta - \cos \omega t}{p} \qquad (26)$$

gewonnen wird, die sich additiv zusammensetzt aus der harmonisch schwingenden Parallelen zur ξ-Achse, Gl. (25), und der relativ zu dieser bewegten, strom- und zeitabhängigen Kurve

$$\Delta_0 = \frac{\Delta}{p} \tag{27}$$

Das Ausgleichglied Δ_0 ist durch die endgültigen Koeffizientenfunktionen f_ν^* der Gl. (4) vorgeschrieben, die aber in ihrer genauen Form von vornherein nicht bekannt sind. Man wählt deshalb umgekehrt Δ_0 willkürlich und schreibt damit die definitiven Koeffizientenfunktionen vor. Gleichzeitig erspart man sich durch diese Festsetzung auf die Strom- bzw. Zeitabhängigkeit des Ausgleichgliedes (27) einzugehen. Wie es sich später zeigen wird, entsprechen bei gegebener Induktivitätskennlinie jedem Funktionsverlauf, der für Δ_0 gewählt wird, bestimmte Werte der Kapazität und der Eingangsspannungsamplitude, nach denen sich der induktiv-kapazitive Betriebszustand einstellt. Aus der zweifachen Unendlichkeit, die sich demnach für die Wahl von Δ_0 ergibt, soll der für die Ausbildung eines Stromes der aufgezwungenen Frequenz einfachste Fall gewählt werden, nämlich

$$\Delta_0 = -\bar{y}_0 \cos 3\omega t + \frac{1}{p} \cos \omega t \tag{28}$$

wobei man sich aus Symmetriegründen auf das Intervall $\omega t = -\frac{\pi}{2} \ldots + \frac{\pi}{2}$ beschränken kann. Damit ergibt sich für Gl. (26) der einfache Ausdruck

$$w_0 = -\bar{y}_0 \cos 3\omega t \tag{29}$$

w_0 erscheint im Diagramm der Systemfunktion (Fig. 1) als eine harmonisch mit der dreifachen Frequenz schwingende Parallele zur ξ-Achse, deren Amplitude w_0 gleich dem Maximalwert $\bar{y}_0$ der Systemfunktion ist. Für diesen Maximalwert nimmt die Stromänderungsgeschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,\omega t} = \frac{\frac{\mathrm{d}\,w_0}{\mathrm{d}\,\omega t}}{\frac{\mathrm{d}\,y_0}{\mathrm{d}\,\xi}} \tag{30}$$

gerade den zur Erzeugung des erforderlichen Ausgleichgliedes notwendigen Wert an. Wäre $\bar{w}_0 > \bar{y}_0$, so bekäme man den erwähnten Fall der Stromsprungtendenz, der die Vergrösserung eines zu kleinen Ausgleichgliedes bewirkte. Wäre $\bar{w}_0 < \bar{y}_0$, so wären nur endliche sowie stetige Stromänderungsgeschwindigkeiten möglich, welche die Verkleinerung eines zu grossen Ausgleichgliedes zur Folge hätten. Dass in Gl. (28) gerade die dreifache erzwungene Frequenz gewählt wurde, beruht darauf, dass der damit erzeugte Strom in der Hauptsache mit der erzwungenen Frequenz schwingt (siehe Abschnitt *3*), wodurch die Energieaufnahme aus dem Netz erleichtert wird.

Der in der beschriebenen Weise konstruierte Stromverlauf ist in Fig. 3 als Relativwert $\frac{i}{J} = \frac{\xi}{\bar{\xi}}$ mit $\bar{\xi} = 4{,}421$ aufgezeichnet und kann, entsprechend dem in Teil I erwähnten Verfahren, als der tatsächliche Stromverlauf betrachtet werden. Gleichzeitig ist damit aber auch der zeitliche Differentialquotient

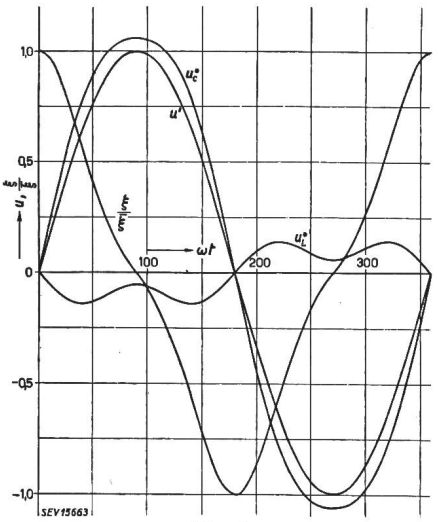

Fig. 3
Induktiv-kapazitiver Zustand (Kippzustand)
für den Fall $p = 1{,}626$; $q_0 = 0{,}3$; $w_0 = -\bar{y}_0 \cos 3\omega t$

$$d = \frac{\mathrm{d}\,\xi}{\mathrm{d}\,\omega t} \tag{31}$$

und das Zeitintegral

$$j = \int \xi \,\mathrm{d}\,\omega t \tag{32}$$

des Stromes auf Grund graphischer Differentiation bzw. Integration für jeden Augenblick angebbar.

Der zweite Teil der Aufgabe besteht nun darin, mit dem gefundenen Stromverlauf und einer vorgegebenen Induktivitätskennlinie (bestimmt durch die Konstanten *a*, *b* und *c*) die Systemgleichung (6) zu erfüllen. Um die Höhe der Spannung an der Induktivität nicht von vornherein festzulegen, muss die Windungszahl frei bleiben. Werden die definitiven Werte, soweit sie von den bisherigen abweichen, durch einen Stern gekennzeichnet, so kann man setzen

$$\xi^* = c\,\Theta^* = c\,N^* i^* = c\,N^* i = \frac{N^*}{N}\,\xi = m^*\,\xi \tag{33}$$

Für den Windungsfluss der Induktivität kann nach Gl. (11) geschrieben werden

$$\Phi^* = a\,\Theta^* + b\,(1 - e^{-c\,\theta^*}) = \frac{a}{c}\,m^*\xi + b\,(1 - e^{-m^*\xi}) \tag{34}$$

Als Induktivität soll die in Fig. 4 dargestellte gewählt werden. Im zugehörigen Diagramm sind gemessene Werte durch Kreuze bezeichnet. Die eingetragene analytische Ersatzkurve wurde mit den Konstanten

$$a = 6{,}81 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Wb}}{\text{A}}, \quad b = 1{,}78 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb},$$

$$c = 48{,}5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{A}}$$

berechnet.

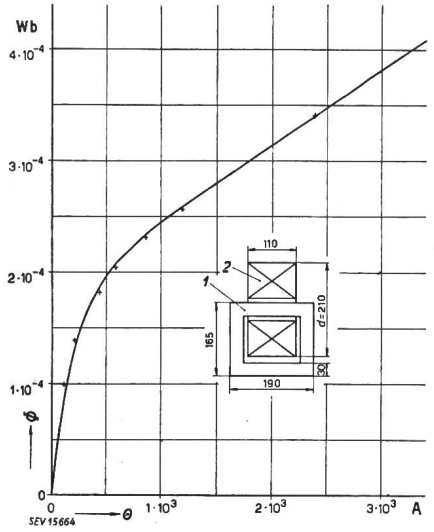

Fig. 4

Induktivität einer Spule mit Eisenkern in Abhängigkeit des Stromes

(Messpunkte und berechnete Kurve)

Rechts: Skizze in der Spule, *1* Eisenkern, *2* Spulenquerschnitt

Soll nun die Spannungsgleichung (6) erfüllt sein, so muss die Summe der relativen Induktivitätsspannung

$$u_L^* = \frac{N^*}{\bar{U}} \frac{\mathrm{d}\Phi^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega N^*}{\bar{U}} \frac{\mathrm{d}\Phi^*}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\,\omega t} = p^* \,\mathrm{d}(\lambda + e^{-m^*\xi}) \tag{35}$$

mit

$$p^* = \frac{bN^*m^*\omega}{\bar{U}} = p\,m^{*2} \tag{36}$$

und der relativen Kapazitätsspannung

$$u_C^* = \frac{1}{\bar{U}C}\int i^*\,\mathrm{d}t = \frac{m^*}{c\,N^*\,\bar{U}\,\omega\,C}\int \xi\,\mathrm{d}\omega t = q^* j \tag{37}$$

mit

$$q^* = \frac{m^*}{c\,N^*\bar{U}\,\omega\,C} = (\lambda + q_0)\,p \tag{38}$$

in jedem Augenblick gleich sein der relativen Eingangsspannung

$$u' = \frac{u}{\bar{U}} = \sin\omega t \tag{39}$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten m^* könnte diese Forderung für einen bestimmten Zeitpunkt erfüllt werden. In Anbetracht des Näherungsverfahrens, das bei der Integration der Systemgleichung angewandt wurde, dürfte aber kaum eine befriedigende Übereinstimmung für andere Zeitpunkte erwartet werden. Deshalb soll der Zusammenhang zwischen p^* und p sowie zwischen q^* und q nicht weiter berücksichtigt, sondern drei willkürliche Richtpunkte gewählt werden, entsprechend drei bestimmten Augenblicken, in denen volkommene Übereinstimmung gefordert wird und durch die die Konstanten m^*, p^* und q^* eindeutig bestimmt werden. Man findet als Bedingungsgleichungen

$$\mu \sum_1^3 \delta_\mu\,(v_{\mu+1} - v_{\mu+2})\,(\lambda + \varepsilon_\mu) = 0 \tag{40}$$

$$p^* = \frac{v_\mu - v_{\mu+1}}{\delta_\mu(\lambda+\varepsilon_\mu) - \delta_{\mu+1}(\lambda+\varepsilon_{\mu+1})} \tag{41}$$

$$q^* = v_\mu - p^*\delta_\mu\,(\lambda + \varepsilon_\mu) \tag{42}$$

wobei abkürzungsweise gesetzt wurde

$$\delta_\mu = \frac{d_\mu}{j_\mu},\ v_\mu = \frac{u'_\mu}{j_\mu},\ \varepsilon_\mu = e^{-m^*\xi_\mu},\ (\mu = 1,2,3) \tag{43}$$

Fordert man z. B. Übereinstimmung in den Augenblicken $\omega t = 30$, 60 und 80°, in welchen nach Fig. 3 $\xi = 3{,}201$, 1,203 und 0,298, $d = -3{,}88$, $-3{,}22$ und $-1{,}84$ sowie $j = 2{,}10$, 3,23 und 3,49 ist, so findet man zunächst aus Gl. (40) $m^* = 1{,}067$ und 16,0. Der erste Wert führt nach Gl. (41) und Gl. (42) auf ein negatives p^* und ein positives q^* und ist daher physikalisch nicht möglich. Hingegen bekommt man mit $m^* = 16{,}0$ die Werte $p^* = 0{,}435$ und $q^* = 0{,}302$, so dass, da $\lambda = \frac{a}{b\,c} = \frac{6{,}81}{1{,}78 \cdot 48{,}5} = 0{,}079$ ist, die relative Induktivitäts- bzw. Kapazitätsspannung gleich wird

$$u_L^* = 0{,}435\,(0{,}079 + e^{-16{,}0\xi})\,d$$
$$u_C^* = 0{,}302\,j$$

Die Spannungsgleichung (6) wird mit diesen Werten in allen Punkten ziemlich genau erfüllt und nur in nächster Nähe von $\omega t = 90°$ treten grössere Abweichungen auf; diese entsprechen aber grossen Werten von

$$\frac{\mathrm{d}\Phi^*}{\mathrm{d}\xi} = \frac{u_L^*}{d}\,\frac{bm^*}{p^*} \tag{44}$$

und lassen sich daher leicht als Einfluss der in Wirklichkeit reduzierten Anfangspermeabilität deuten. Eine völlige Übereinstimmung liesse sich natürlich ohne prinzipielle Schwierigkeiten durch eine Modifizierung des Stromverlaufs in der Umgebung des Nulldurchganges erreichen, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen werden kann. In Fig. 3 sind auch noch die Spannungen u', u_C^* und $u_L^{*\prime} = u' - u_C^*$ eingetragen. Für die Eingangsspannungsamplitude und die Kapazität, die zur Erzielung des berechneten Zustandes erforderlich sind, findet man, wenn z. B. $N^* = 300$ gewählt wird,

$$\bar{U} = \frac{bN^*m^*\omega}{p^*} = \frac{1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot 16{,}0 \cdot 300 \cdot 2\pi\,50}{0{,}435} = 618\ \text{V}$$

$$C = \frac{m^*}{c\,N^*\omega\,q^*\,U} =$$

$$= \frac{16{,}0}{48{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 300 \cdot 2\,\pi\,50 \cdot 0{,}302 \cdot 618} = 187\ \mu\text{F}$$

Die Durchflutung erreicht den relativ hohen Maximalwert

$$\bar{\Theta}^* = \frac{m^*}{c}\bar{\xi} = \frac{16{,}0}{48{,}5 \cdot 10^{-4}} 4{,}421 = 1{,}46 \cdot 10^4 \text{ A}$$

Zusammenfassend kann man feststellen: Kennzeichnend für das Zustandekommen des induktivkapazitiven Zustandes, der offenbar nichts anderes ist als der *gekippte Betriebszustand,* ist, dass der Maximalwert $\bar{v}_0$ des Eingangsspannungsintegrals grösser ist als der Maximalwert $\bar{y}_0$ der Systemfunktion; kennzeichnend für die sich im gekippten Zustande abspielenden Vorgänge ist das Auftreten eines *stationären Ausgleichsgliedes* Δ_0, das für die Gleichheit $\bar{y}_0 = \bar{w}_0 = \Delta_0 + \bar{v}_0$ sorgt und dessen Quellen in den Maximalpunkten $\bar{y}_0$ liegen.

3. Der Knotenpunktszustand

Lässt man in Fig. 2 den Parameter q_0 von 1 bis 0,125 abnehmen, so erkennt man, dass die symmetrisch zu $\omega t = 0$ und 180° liegenden Unstetigkeitsstellen des Stromes einander immer näher rücken und sich schliesslich treffen; zwei getrennte Kurvenpunkte haben sich in einem Doppelpunkt vereinigt, den man üblicherweise, da es sich um reelle Zweige handelt, als Knotenpunkt bezeichnet. Gleichzeitig ist die Tangentenrichtung nach Gl. (30), in der nur w_0 durch v_0 zu ersetzen ist (von einem Ausgleichsglied soll zunächst abgesehen werden), doppelwertig geworden und man findet dafür die entgegengesetzt gleichen Werte

$$\frac{d\xi}{d\omega t} = \pm \sqrt{\frac{\frac{d^2 v_0}{d(\omega t)^2}}{\frac{d^2 y_0}{d \xi^2}}} = \pm \left(\sqrt{\frac{\cos \omega t}{-p q_0}}\right)_{\omega t = \pi} =$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1{,}626 \cdot 0{,}125}} = \pm 2{,}22 \qquad (45)$$

Diese Werte erhält man auch rein graphisch mit $\bar{\xi} = 12{,}95$ aus Fig. 2. Physikalisch bedeuten die Knotenpunkte eine Gleichsetzung der Maximalwerte $\bar{y}_0$ und $\bar{v}_0$. Wichtig ist dabei, dass die harmonisch schwingende Parallele v_0 in drei aufeinanderfolgenden Halbperioden Arbeitspunkte auf drei verschiedenen Zweigen der Systemfunktion bildet und dass daher eine rein sinusförmige Zwangsspannung ohne Auftreten irgendwelcher Ausgleichglieder eine *Unterschwingung der Ordnung* $\frac{1}{3}$ zur Folge hat. Eine analoge Erscheinung ist bereits im vorhergehenden Abschnitt erwähnt worden, bei der allerdings ein Ausgleichglied aufgetreten war.

In der Systemfunktion (22) wurde bisher nur die erzwungene Frequenz berücksichtigt. Der derart ermittelte Strom, der mit i' bezeichnet werden soll, wird nun noch durch den Strom i'' ergänzt, der durch die Systemfunktion für $\frac{1}{3}\omega$ geliefert wird. Der Gesamtstrom ergibt sich zu $i = i' + i''$. Nach den Gl. (19)...(21) ist

$$p'' = \frac{1}{3} p' \qquad (46)$$

$$q'' = \frac{a N \omega}{3 c \bar{U}} \left(\frac{9}{a N^2 \omega^2 C} - 1\right) = p'' (9 q_0' + 8 \lambda) \qquad (47)$$

und die Systemfunktion lautet daher für die Frequenz $\frac{1}{3}\omega$

$$y_0'' = \frac{1}{3}\left[\left(1 - e^{-\frac{c}{|c|}\vartheta''}\right) - \left(9 q_0' + 8\lambda\right)\frac{c}{|c|}\vartheta''\right] \qquad (48)$$

In Fig. 5 sind die beiden Komponenten ϑ' und ϑ'' sowie ihre Resultante $\vartheta = \vartheta' + \vartheta''$ aufgezeichnet. Der zeitliche Verlauf des Gesamtstromes, wie er

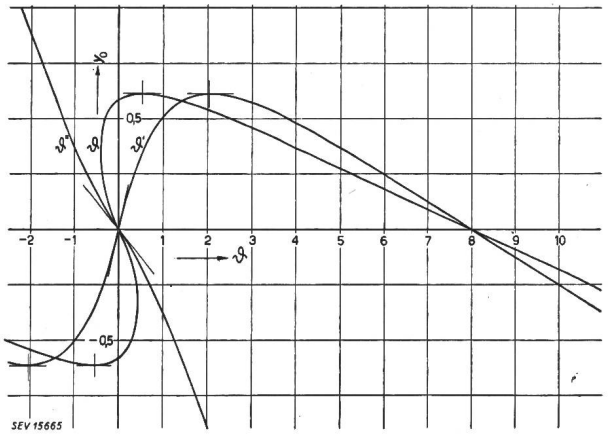

Fig. 5
Systemfunktion für den Knotenpunktzustand (Unterschwingungszustand)
$q_0 = 0{,}125$

nach der früher beschriebenen Weise erhalten wurde, mit Hilfe der harmonisch schwingenden Parallelen zur ϑ-Achse

$$\frac{v_0}{p} = -\frac{\cos \omega t}{p} = -\frac{\cos \omega t}{1{,}626}$$

und reduziert auf seinen Maximalwert

$$\bar{I} = \frac{\bar{\vartheta}}{|c| N} = \frac{14{,}48}{|c| N}$$

ist in Fig. 6 für eine Unterschwingungsperiode 6π aufgetragen.

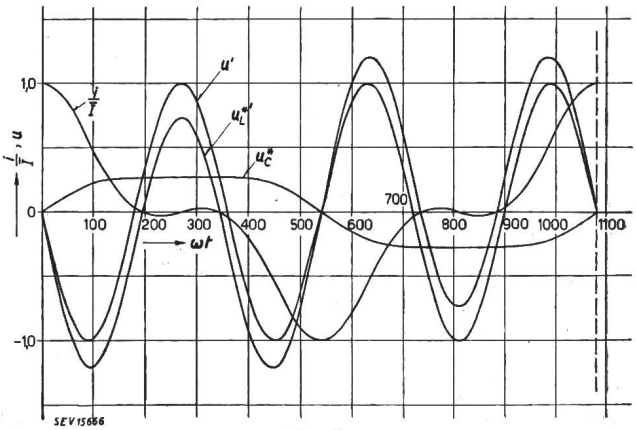

Fig. 6
Strom- und Spannungskurven für den Knotenpunktzustand
$p = 1{,}626$; $q_0 = 0{,}125$; $m^* = 1{,}51$

Um mit diesem Stromverlauf und der Induktivitätskennlinie der Fig. 4 der Spannungsgleichung (6) zu genügen, verfährt man gleich wie bei der Untersuchung des Kippzustandes. Wählt man als Richtpunkte z. B. die Augenblicke $\omega t = 30$, 135 und 240°, bei denen nach der Stromkurve der Fig. 6 $\vartheta = 13{,}67$, 3,26 und $-0{,}40$, $d = -3{,}15$, $-4{,}77$ und 0,4 sowie $j = 7{,}44$, 23,62 und 24,84 ist, so erhält man als Wurzeln der Gl. (40) die beiden Werte $m^* = 0{,}027$ und 1,51. Beide Werte führen nach den Gl. (41) und (42) zunächst auf negative Werte für p^* und q^*. Ersetzt man aber die relative Spannung $u' = \sin \omega t$ durch $u' = \sin(\omega t + \pi)$, so erhält man $p^* = 0{,}297$ und $q^* = 0{,}0297$ bzw. $p^* = 2{,}33$ und $q^* = 0{,}0108$. Für den ersten Unterschwingungszustand ergeben sich die Relativspannungen nach den Gl. (35) und (37) zu

$$u_L^* = 0{,}297\ (0{,}079 + e^{-0{,}027\xi})\ d$$
$$u_C^* = 0{,}0297\ j$$

Diese Werte erfüllen die Spannungsgleichung (6) recht gut, sofern man von den kleinen Stromwerten absieht. Die Kapazitäts- und Induktivitätsspannungen u_C^* und $u_L^{*\prime} = u' - u_C^*$ weisen den in Fig. 6 ersichtlichen Verlauf auf und zwar mit ungefähr doppelt so grossen Werten für u_C^*. Für die Amplitude der aufgezwungenen Spannung $\bar{U}$ und die Kapazität C erhält man für diesen ersten Unterschwingungszustand nach den Gl. (36) und (38), wenn für die Windungszahl N^* der Induktivität 2880 gewählt wird,

$$\bar{U} = \frac{1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}027 \cdot 2880 \cdot 2\pi\, 50}{0{,}297} = 14{,}6\ \text{V}$$

$$C = \frac{0{,}027}{0{,}0297 \cdot 48{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 2880 \cdot 2\pi\, 50 \cdot 14{,}6} = 14{,}2\ \mu\text{F}$$

Der Maximalwert der Durchflutung wird nach Gl. (33)

$$\bar{\Theta}^* = \frac{14{,}48}{48{,}5 \cdot 10^{-4}}\ 0{,}027 = 0{,}009 \cdot 10^4\ \text{A}$$

Sowohl $\bar{U}$ wie $\bar{\Theta}^*$ sind also recht klein und da gerade bei kleinen Strömen die Abweichungen zwischen der theoretischen und der wirklichen Magnetisierungskurve gross sind, ist es nicht sicher, dass sich dieser Unterschwingungsfall tatsächlich nachweisen lässt.

Der zweite Unterschwingungszustand, welcher der Konstanten $m^* = 1{,}51$ entspricht, gibt hinwiederum die Relativspannungen

$$u_L^* = 2{,}33\ (0{,}079 + e^{-1{,}51\xi})\ d$$
$$u_C^* = 0{,}0108\ j$$

welche die Spannungsgleichung mit ungefähr derselben Genauigkeit erfüllen wie beim vorhergehenden Fall. Die Werte u_C^* und $u_L^{*\prime} = u' - u_C^*$ sind in Fig. 6 aufgetragen, deren Strom- und Spannungskurven mit denjenigen des vorhergehenden Falles identisch sind. Für die aufgezwungene Spannung, die Kapazität und die Durchflutung findet man diesmal

$$\bar{U} = \frac{1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}51 \cdot 2880 \cdot 2\pi\, 50}{2{,}33} = 104{,}5\ \text{V}$$

$$C = \frac{1{,}51}{0{,}108 \cdot 48{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 2880 \cdot 2\pi\, 50 \cdot 104{,}5} = 304{,}5\ \mu\text{F}$$

$$\bar{\Theta}^* = \frac{14{,}48}{48{,}5 \cdot 10^{-4}}\ 1{,}51 = 0{,}450 \cdot 10^4\ \text{A}$$

Dabei fallen die theoretisch und praktisch durchlaufenen Abschnitte der Induktivitätskennlinie grösstenteils zusammen; es ist daher zu erwarten, dass sich der Kurvenverlauf der Fig. 6 tatsächlich einstellt, wenn nur die Induktivität hinreichend verlustfrei ist.

Bei den ausgeführten Versuchen war diese Voraussetzung nicht erfüllt. Abgesehen davon, dass der Kern der Induktivität (Kennlinie nach Fig. 4) aus normalem Dynamoblech aufgebaut war, betrug der Widerstand des Stromkreises 18 Ω. Der Bereich, in welchem Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{3}$ möglich waren, fiel daher bedeutend enger aus, als es bei völliger Verlustfreiheit der Fall gewesen wäre. Tatsächlich konnten auch solche Unterschwingungen bei 50 Hz Zwangsfrequenz und mit $N = 2880$ nur innerhalb der Grenzen $\bar{U} = 30...500$ V und $C = 0...122$ µF nachgewiesen werden. Fig. 7 zeigt die oszillographische Wiedergabe eines dieser Unterschwingungszustände mit $\bar{U} = 185$ V, $C = 40$ µF und $\bar{\Theta} = 0{,}180 \cdot 10^4$ A. In Anbetracht der getroffenen Vernachlässigungen ist die Übereinstimmung mit den berechneten Kurven der Fig. 6 durchaus befriedigend.

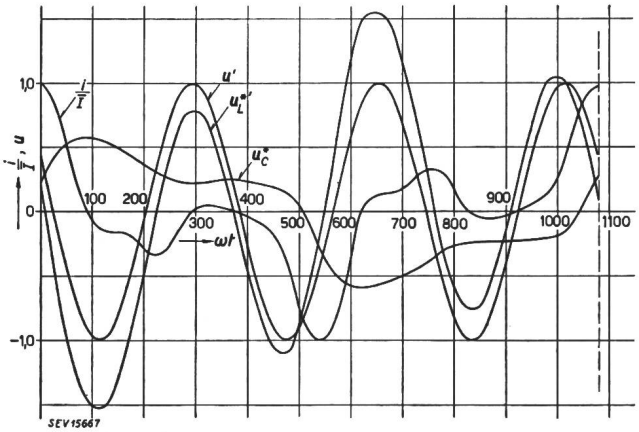

Fig. 7
Oszillographisch aufgenommene Strom- und Spannungskurven für den Knotenpunktzustand
(vergleiche die berechneten Kurven, Fig. 6)

Auser diesen Unterschwingungen wurden noch beobachtet

Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{2}$ in den Bereichen $\bar{U} = 85...410$ V und $C = 0...49$ µF,

Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{5}$ in den Bereichen $\bar{U} = 226...243$ V, und $C = 20$ µF, die in der angeführten Reihenfolge immer weniger stabil wur-

den. Mit $C = 434$ µF konnte noch eine Unterschwingung der Ordnung $\frac{1}{19}$ wahrgenommen werden, die jedoch nur vorübergehend auftrat. Die Gebiete kleiner Kapazitäten, bis hinauf zu etwa 18 µF, waren stets von den Kippbereichen überdeckt. Allgemein gilt, dass Unterschwingungen nur durch plötzliche Schaltvorgänge oder andere Unstetigkeiten angeregt werden können, nicht aber durch langsame Änderungen, wie z. B. der aufgezwungenen Spannung.

Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{3}$ entstehen also bei Abwesenheit von Verlusten, wenn bei allmählicher Steigerung der Eingangsspannung der Maximalwert $\bar{v}_0$ des relativen Eingangsspannungsintegrals gerade gleich dem Maximalwert $\bar{y}_0$ der Systemfunktion wird, wodurch es zur Bildung von Knotenpunkten und zum Weiterwandern des Arbeitspunktes auf den fallenden Zweigen der Systemfunktion kommt. Bei gegebener Kapazität trifft dies, wie gezeigt wurde, jeweils für einen bestimmten Wert der Eingangsspannung ein. Sind, wie es praktisch stets der Fall ist, auch Verluste vorhanden, so ist zur Erzielung eines Unterschwingungszustandes auch das Auftreten eines stationären Ausgleichgliedes erforderlich, was im Teil III gezeigt werden soll. Hieraus folgt, dass einerseits bei gegebener Kapazität der Unterschwingungszustand sich über einen endlichen Eingangsspannungsbereich erstrecken wird und dass anderseits zur Erzeugung des Ausgleichgliedes ein geeigneter magnetischer Anstoss erforderlich ist.

III. Die Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern, einer konstanten Kapazität und eines konstanten Widerstandes

Der Strom in einem Kreise mit konstanter Induktivität L und konstantem Widerstand R ist bei rein sinusförmiger Eingangsspannung bekanntlich bestimmt durch

$$i = \frac{\bar{U}}{Z} \sin(\omega t - \psi_0), \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_0 = \frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R} \tag{49}$$

Den Strom kann man aber auch (wie in Teil II) durch die Schnittpunkte einer Systemfunktion z mit einer harmonisch schwingenden Parallelen v zur Stromachse darstellen. Löst man z. B. nach $\cos \omega t$ auf, so erhält man die Systemgleichung

$$z_1 \equiv sX \pm R\sqrt{\frac{1}{Z^2} - s^2} = v_1 \equiv -\cos \omega t, \quad s = \frac{i}{\bar{U}} \tag{50}$$

Löst man nach $\sin \omega t$ auf, so lautet die Systemgleichung

$$z_2 \equiv sR \pm X\sqrt{\frac{1}{Z^2} - s^2} = v_2 \equiv \sin \omega t \tag{51}$$

Beide Systemfunktionen z_1 und z_2 stellen Ellipsen dar, deren Mittelpunkte im Ursprung liegen und deren Achsen gegenüber dem Koordinatensystem im allgemeinen verdreht sind. Setzt man, wenn die Maßstabfaktoren der s- und der z-Achse mit α und β bezeichnet werden, abkürzungsweise

$$g = \left(\frac{\alpha}{\beta} Z\right)^2, \quad h_1 = 2\frac{\alpha}{\beta} X, \quad h_2 = 2\frac{\alpha}{\beta} R \tag{52}$$

wobei sich die Indizes 1 und 2 auf die Systemfunktion (50) bzw. (51) beziehen, so findet man nach einfacher Zwischenrechnung für den Winkel ε, um den die Ellipsenachsen gegenüber dem Koordinatensystem s, x vorgedreht sind,

$$\operatorname{tg} 2\varepsilon = \frac{h}{1-g} \tag{53}$$

und für das Verhältnis ζ der Achsenlängen

$$\zeta^2 = \frac{1+g+\sqrt{h^2+(1-g)^2}}{1+g-\sqrt{h^2+(1-g)^2}} \tag{54}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Systemfunktion (50) für $R = 0$ in eine Gerade übergeht mit dem Verdrehungswinkel

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\frac{\alpha}{\beta} X}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta} X\right)^2}$$

entsprechend $\zeta = \infty$. Für den Fall $\frac{\alpha}{\beta X} = 1$ wird $\varepsilon = 45°$; für $X = 0$ wird $\varepsilon = 0$ und das Achsenverhältnis $\zeta = \frac{\beta}{\alpha R}$, so dass man im Falle $\frac{\alpha}{\beta} R = 1$ einen Kreis erhält. Für die Systemfunktion (51) liegen die Verhältnisse umgekehrt: Für $R = 0$ wird der Verdrehungswinkel $\varepsilon = 0$ und das Achsenverhältnis $\zeta = \frac{\beta}{\alpha X}$, was im Falle $\frac{\alpha}{\beta} X = 1$ wiederum einen Kreis ergibt; für $X = 0$ anderseits erhält man eine Gerade mit dem Verdrehungswinkel

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\frac{\alpha}{\beta} R}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta} R\right)^2}$$

der im Falle $\frac{\alpha}{\beta} R = 1$ gleich 45° wird. Für die Extremwerte jeder der Systemfunktionen (50) und (51) findet man durch Differenzieren $z_e = \pm 1$.

Handelt es sich nun um eine Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern, einer konstanten Kapazität und eines konstanten Widerstandes, so können entsprechend dem bisherigen Verfahren auch hiefür die Systemgleichungen (50) und (51) verwendet werden, sofern man in diesen, entsprechend den Gl. (10) und (18), sX durch y ersetzt. Führt man ferner

$$sR = \frac{i}{\bar{U}} R = \xi r = x, \quad r = \frac{R}{c\,N\,\bar{U}} \tag{55}$$

ein, so lauten die Systemgleichungen

$$z_1 \equiv y \pm x \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2} - 1} = v_1 \equiv -\cos \omega t \qquad (56)$$

$$z_2 \equiv x \pm y \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2} - 1} = v_2 \equiv \sin \omega t \qquad (57)$$

Die erste dieser Gleichungen wurde für den Fall $R = 0$ bereits im Teile II benutzt, doch hätte auch die zweite Gleichung natürlich zu denselben Ergebnissen geführt. Die für den Fall $p = 1{,}626$ und $q_0 = 0{,}125$ dargestellte Systemfunktion z_2, die also der Kurve $q_0 = 0{,}125$ der Fig. 1 entspricht, ist in Fig. 8 aufgezeichnet. Auch für die weitere Behandlung des Problems mit $R \neq 0$ sind die beiden Systemgleichungen (56) und (57) gleichberechtigt, es wird sich jedoch zeigen, dass Gl. (57) zu übersichtlicheren Darstellungen führt, weshalb diese bevorzugt werden soll.

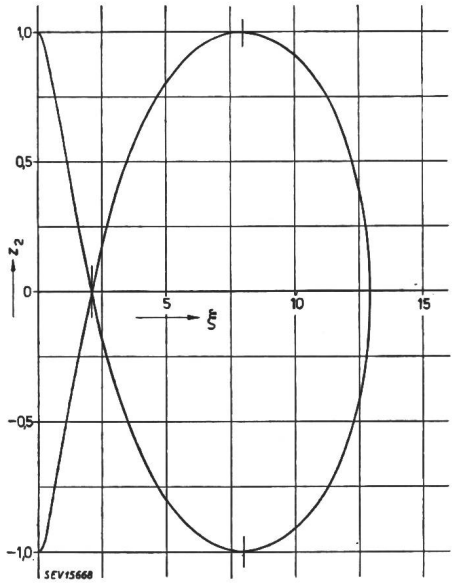

Fig. 8
Verlauf der Systemfunktion bei Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern und eines Kondensators
$p = 1{,}626$; $q_0 = 0{,}125$; $r = 0$

Es soll nun vor allem die Frage behandelt werden, welchen Einfluss der Widerstand auf das Zustandekommen des Knotenpunktzustandes hat und wie gross man den Widerstand wählen muss, um diesen Zustand zu vermeiden. Kennzeichnend für das Auftreten eines Knotenpunktes ist die Doppelwertigkeit der Systemfunktion, also das Verschwinden der Wurzel in Gl. (57), sowie die gleichzeitige Existenz zweier verschiedener Tangentenrichtungen

$$\frac{d\xi}{d\omega t} = \frac{\frac{dv}{d\omega t}}{\frac{dz_2}{d\xi}} \qquad (58)$$

(vergleiche Fig. 2, Kurve $q_0 = 0{,}125$). Bedenkt man, dass im Knotenpunkt die Systemfunktion z_2 wegen des Verschwindens der Wurzel in Gl. (57) stets zwischen 0 und 1 liegen muss (abgesehen vom Fall $\xi = 0$) und dass daher $\frac{dv}{d\omega t} \neq 0$ ist, so folgt, dass auch $\frac{dz_2}{d\xi}$ einen endlichen Wert annehmen muss. Nun ist aber, wenn die in den Systemgleichungen auftretende Wurzel mit W bezeichnet wird

$$\frac{dz_2}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi} \pm \frac{dy}{d\xi} W \mp \left(x \frac{dx}{d\xi} + y \frac{dy}{d\xi}\right) \frac{y}{W(x^2+y^2)} \qquad (59)$$

Dieser Ausdruck nimmt für $W = 0$ nur dann endliche Werte an, wenn

$$y \left(x \frac{dx}{d\xi} + y \frac{dy}{d\xi}\right) = 0 \qquad (60)$$

ist. Ein Knotenpunkt wird also auftreten sowohl für

$$x \frac{dx}{d\xi} + y \frac{dy}{d\xi} = 0 \qquad (61)$$

wie auch für

$$y = 0 \qquad (62)$$

Der erste Knotenpunkt entspricht dem in Teil II mit $R = 0$ erhaltenen Fall $\frac{dy}{d\xi} = 0$. Der zweite Knotenpunkt dagegen ist hier neu hinzugekommen und würde bei verschwindendem Widerstand zusammen mit der Bedingung $W = 0$ auf widersprechende Forderungen führen. Diese zweifache Knotenpunktsmöglichkeit besagt (wie aus den folgenden Beispielen noch deutlicher hervorgehen wird) nichts anderes, als dass sich bei Vorhandensein eines Widerstandes auch eine *Unterschwingung der Ordnung* $\frac{1}{5}$ ausbilden kann.

Um den Mindestwiderstand zu bestimmen, der zur Abdämpfung des Unterschwingungszustandes erforderlich ist, genügt es die Knotenpunktsbedingung (61) näher zu untersuchen. Die Möglichkeit des Auftretens des zweiten Knotenpunktes nach Bedingung (62) hängt nämlich mit der Existenz des ersten Knotenpunktes eng zusammen, was die folgenden Beispiele zeigen werden. Die Nebenbedingung $W = 0$ würde zwar gestatten, die Eingangsspannung an Stelle des Stromes einzuführen, was aber unnötig ist, da der Strom im vorliegenden Fall doch nur als Hilfsgrösse auftritt. Aus Gl. (61) findet man mit den Beziehungen (55) und (18) für denjenigen Widerstand, bei dem sich der erste Knotenpunktszustand einstellt (unter Voraussetzung fehlender Eisenverluste und fehlenden Ausgleichgliedes)

$$r_0 = \sqrt{(q_0 - e^{-\xi})\left(\frac{1-e^{-\xi}}{\xi} - q_0\right)},$$

$$r_0 = \frac{r}{p} = \frac{R}{bcN^2\omega} \qquad (63)$$

Bei gegebenen Werten für q_0 und r_0 sind im allgemeinen zwei Knotenpunktszustände der Ordnung $\frac{1}{3}$ möglich, und r_0 besitzt ein Maximum, oberhalb wel-

chem kein Knotenpunktszustand mehr erreichbar ist. Setzt man $\frac{d r_0}{d\xi} = 0$, so ergibt sich für den Ort ξ' dieses Maximums

$$q_0 = e^{-\xi'} \frac{1 + \xi' - e^{-\xi'}(1 + 2\xi')}{1 + e^{-\xi'}[\xi'(\xi' - 1) - 1]} \tag{64}$$

Führt man diesen Wert in Gl. (63) ein, so erhält man für den Betrag des Maximums

$$\bar{r}_0 = \frac{1 - e^{-\xi'}(1 + \xi')}{1 + e^{-\xi'}[\xi'(\xi' - 1) - 1]} \sqrt{e^{-\xi'}[1 - e^{-\xi'}(1 + \xi')]} \tag{65}$$

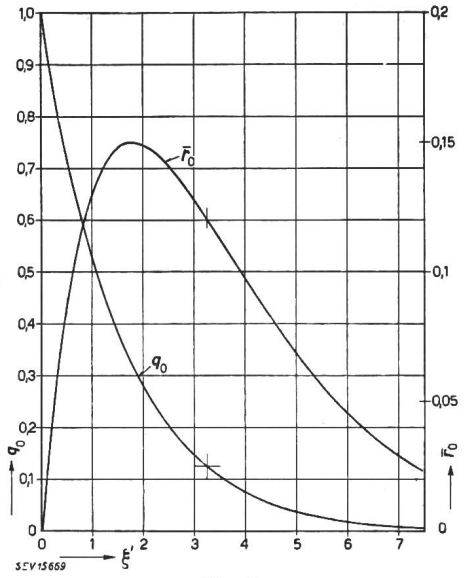

Fig. 9
Erforderlicher Mindestwiderstand zur Abdämpfung der Unterschwingungen
$\bar{r}_0$ Relativwert des Mindestwiderstandes

$$R = \bar{r}_0 bcN^2 \omega \tag{66}$$

Für den Parameter $q_0 = 0{,}125$ findet man z. B.

$\bar{r}_0 = 0{,}121$ und damit

$\bar{R} = 0{,}121 \cdot 1{,}78 \cdot 10^{-4} \cdot 48{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 2880^2 \cdot 2\pi\, 50 = 272\ \Omega$
worin die Eisenverluste mit eingeschlossen sind.

Es sollen nun noch einige Systemfunktionen unter besonderer Berücksichtigung des Knotenpunktzustandes untersucht werden, ohne jedoch auf die Erfüllung der Systemgleichung einzugehen, was gegenüber dem im Teil II Gesagten nichts wesentlich Neues bringen würde, abgesehen davon, dass eine bessere Übereinstimmung zwischen den Induktivitätsspannungen u_L^* und $u_L^{*\prime}$ erzielbar wäre, da dank des Widerstandes ein vierter Richtpunkt zur Verfügung steht. Wählt man zunächst $r_0 = 0{,}0125$ bei $q_0 = 0{,}125$, so findet man nach Gl. (65) für den Knotenpunktstrom $\xi = 2{,}085$. Die zugehörigen Werte x_0 und y_0 berechnen sich nach Gl. (55) und (22) zu

$$x_0 = \frac{x}{p} = 2{,}085 \cdot 0{,}0125 = 0{,}0261$$

$$y_0 = \frac{y}{p} = 1 - e^{-2{,}085} - 0{,}125 \cdot 2{,}085 = 0{,}615$$

$$\text{wo } p = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}0261^2 + 0{,}615^2}} \approx 1{,}626$$

$$r = 0{,}0125 \cdot 1{,}626 \approx 0{,}0203$$

werden. p ist praktisch ebenso gross wie im Fall ohne Widerstand. Beliebige Punkte der Systemfunktion z_2, die in Fig. 10 aufgezeichnet ist, berechnen sich nach Gl. (57) zu

$$x = r\xi = 0{,}0203\,\xi,\quad y = (1 - e^{-\xi} - q_0\xi)\,p = 1{,}626\,y_0$$

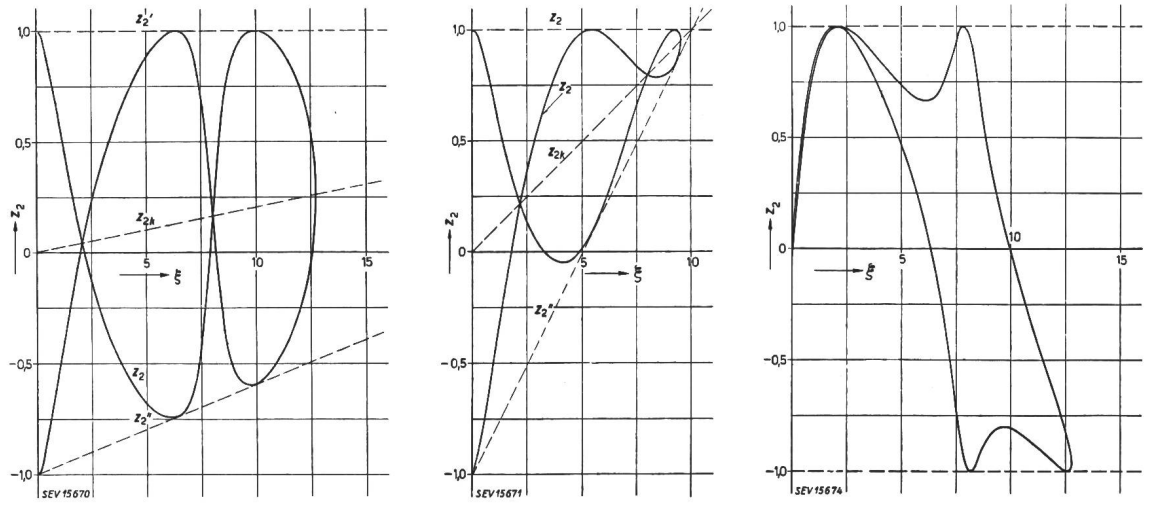

Fig. 10, 11, 14
Systemfunktion der Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern, einer Kapazität und eines Widerstandes für den Knotenpunktzustand
Fig. 10: $q_0 = 0{,}125$; $r_0 = 0{,}0125$; $p = 1{,}626$
Fig. 11: $q_0 = 0{,}125$; $r_0 = 0{,}0625$; $p = 1{,}589$
Fig. 14: $q_0 = 0{,}125$; $r_0 = 0{,}0125$; $p = 1{,}626$

Die Funktionen (64) und (65) sind in Fig. 9 dargestellt und ermöglichen bei gegebenem q_0 den *Mindestwert $\bar{R}$ des zur Abdämpfung der Unterschwingungen erforderlichen Widerstandes* zu bestimmen,

Insbesondere findet man $(z_2)_{\xi=0} = \pm 1$, während die Knotenpunkte wegen $W = 0$ auf der Geraden $z_{2k} = x = r\xi$ liegen. Rechts von der Ordinatenachse wird die Systemfunktion durch die beiden Gera-

den $z_2' = +1$ und $z_2'' = -1+2r\xi$ begrenzt; für die Schnittpunkte dieser beiden Geraden mit der Systemfunktion gilt nämlich die gemeinsame Gleichung

$$(1-x)^2 = y^2\left(\frac{1}{x^2+y^2}-1\right)$$

oder

$$y^2 = (1-x)\,x \pm 0 \qquad (67)$$

Danach besitzen y und damit auch z_2 in den Schnittpunkten zwei zusammenfallende Werte. Zur Bildung der Arbeitspunkte genügt nun nicht mehr die Funktion v_2 und die ihr entsprechende schwingende Parallele zur Stromachse allein, sondern es ist hierzu ein Ausgleichglied erforderlich, das diesmal eine Komponente der Form

$$\Delta' = (1-\sin\omega t)r\xi \qquad (68)$$

enthalten muss.

Wählt man einen grösseren Widerstand, entsprechend etwa $r_0 = 0{,}0625$ bei $q_0 = 0{,}125$, so findet man in derselben Weise für den Knotenpunkt

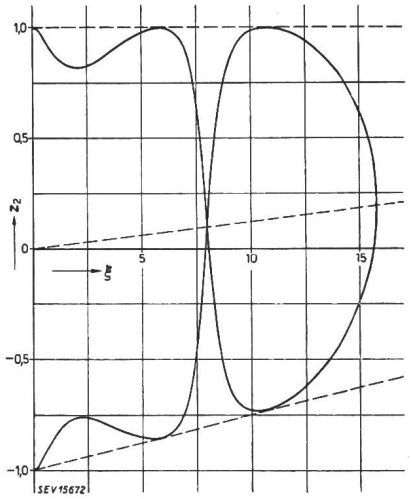

Fig. 12

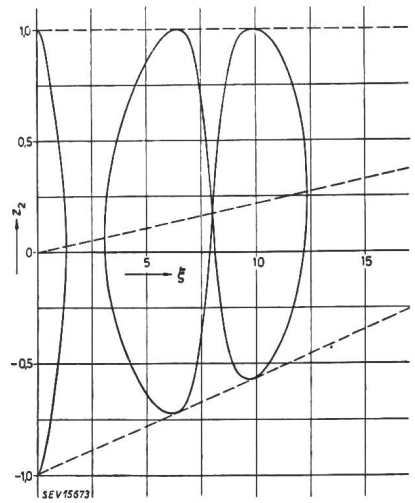

Fig. 13

Systemfunktion der Reihenschaltung einer Induktivität mit Eisenkern, einer Kapazität und eines Widerstandes bei Nichterfüllung der Knotenpunktsbedingung

Fig. 12: $q_0 = 0{,}125$; $r_0 = 0{,}0125$; $p = 1$
Fig. 13: $q_0 = 0{,}125$; $r_0 = 0{,}0125$; $p = 1{,}75$

$\xi = 2{,}198$, $x_0 = 0{,}1373$, $y_0 = 0{,}6148$ und damit $p = 1{,}589$ und $r = 0{,}0993$, so dass für beliebige Kurvenpunkte $x = 0{,}0993\xi$ und $y = 1{,}589\,y_0$ sind. Die Systemfunktion, die gegenüber dem vorherigen Fall schon bedeutend zusammengeschrumpft ist, ist in Fig. 11 aufgezeichnet.

Fig. 12 und 13 zeigen für die oben genannten Werte q_0 und r_0 noch einige Fälle der Systemfunktion (57), in welchen die Knotenpunktbedingung nicht erfüllt ist. Fig. 12 entspricht dem induktivkapazitiven Zustand mit zu kleinem p, Fig. 13 dagegen mit zu grossen p dem induktiv-isoliert-kapazitiven Zustand.

Fig. 14 zeigt, wie die Systemfunktion bei Benutzung der Gl. (56) in dem der Fig. 10 entsprechenden Knotenpunktfall aussieht. Das Ausgleichglied, das zum selben Stromverlauf führt wie dort, hat hier offenbar weniger einfache Form.

Die beschriebene Entstehungsweise von Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ lässt auch die Möglichkeit des Zustandekommens von *Unterschwingungen anderer Ordnungszahlen* vermuten. Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{n}$ können nämlich für Fälle, wo n eine ungerade Zahl > 5 ist, dadurch entstehen, dass der Arbeitspunkt beim Auf- und Niederschwingen der Zwangsfunktionsgeraden eine oder mehrere Schleifen (siehe Fig. 10) öfters hintereinander nach Massgabe der zur Verfügung stehenden Energie durchläuft. Analog dazu erklärt sich das Auftreten von Unterschwingungen der Ordnung $\frac{1}{3}$ bei Vorhandensein eines Widerstandes daraus, dass die Schlinge am weitesten rechts in Fig. 10 überhaupt nicht durchlaufen wird. Ist aber n irgend eine gerade Zahl, so kann man sich vorstellen, dass wegen einer remanenten Magnetisierung der erste Knotenpunkt rechts von der Ordinatenachse (Fig. 10) gerade auf diese zu liegen kommt, so dass beliebige geradzahlige Werte von n durch ein- oder mehrmaliges Durchlaufen einer oder zweier Schlingen beidseits der Ordinatenachse gewonnen werden. Eine andere Möglichkeit für das Zustandekommen von Unterschwingungen mit geradzahligen Werten n ist, dass die Kurve der Fig. 10 sowie die ihr entsprechende, links von der Ordinatenachse zu denkende, infolge irgend einer periodischen Unsymmetrie wechselweise verschieden oft durchlaufen werden, und zwar so, dass sich die Zahl der Durchläufe um eine ungerade Zahl voneinander unterscheiden. In sämtlichen Fällen stellen sich selbstverständlich die Verhältnisse immer so ein, dass das über eine Unterschwingungsperiode gebildete Zeitintegral verschwindet. Auch Unterschwingungen allgemeiner Ordnung $\frac{m}{n}$ lassen sich aus der Systemfunktion der Fig. 10 unter Benutzung der Darstellung der schwingenden Funktionsgeraden herleiten, wenn man geeignete Ausgleichglieder ansetzt. Natürlich spielt beim Zustandekommen der Unterschwingungen auch der

den Eisenverlusten entsprechende veränderliche Widerstand eine Rolle. Da aber unter normalen Verhältnissen die Reaktanz eisengeschlossener Spulen gross ist im Vergleich zu ihrem ohmschen Widerstand, so darf man auch vermuten, dass der Einfluss des Widerstandes auf das Zustandekommen der Unterschwingungen von geringerer Bedeutung ist.

Literatur

[1] *Barkhausen, Heinrich:* Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen. IV + 113 S. — Leipzig, 1907. — S. 11 u. 13 ff.

[2] *Boucherot, P.:* Résonance électrique dans un circuit dont la self-induction contient du fer. Rev. gén. Electr. Bd. 7(1920), Nr. 19, S. 615...616.

[3] *Juillard, Ernest:* Die selbsttätige Regelung elektrischer Maschinen. VIII + 165 S. — Berlin, 1931. — S. 16 ff., 110 ff.

[4] *Leonhard, A.:* Die selbsttätige Regelung in der Elektrotechnik. VIII + 192 S. — Berlin, 1940. — S. 11 ff., 24 ff.

[5] *Lamm, Uno:* The Transductor; D. C. Pre-Saturated Reactor with Special Reference to Transductor-Control of Rectifiers. 230 S. — Diss. TH Stockholm. Stockholm, 1943. — S. 42 ff.

[6] *Blondel, A.:* Sur la décharge des condensateurs alimentés par courants alternatifs et sur le réglage des transformateurs à la résonance. Eclair. électr. Bd. 51(1907), Nr. 20, S. 217...228; Nr. 21, S. 253...264, u. Nr. 23, S. 325...334.

[7] *Bethenod, J.:* Sur le transformateur à résonance. Eclair. électr. Bd. 53(1907), Nr. 43, S. 115...119; Nr. 44, S. 145...151; Nr. 46, S. 217...224; Nr. 48, S. 289...296; Nr. 50, S. 377...382, u. Nr. 52, S. 454...460.

[8] *Barkhausen, Heinrich:* Über labile Zustände elektrischer Ströme. Verh". dtsch. phys. Ges. Bd. 11(1909), Nr. 10/11, S. 267...272.

[9] *Martienssen, O.:* Über neue Resonanzerscheinungen in Wechselstromkreisen. Phys. Z. Bd. 11(1910), Nr. 10, S. 448...460.

[10] *Barkhausen, Heinrich,* u. *H. Lichte:* Quantitative Unterwasserschallversuche. Ann". Phys., 4. Folge, Bd. 62 (1920), Nr. 14, S. 485...516.

[11] *Zenneck, J.:* Zur Theorie der magnetischen Frequenzwandler. Jb. drahtl. Telegr. Teleph. Bd. 17(1921), Nr. 1, S. 2...21.

[12] *Biermanns, J.:* Die Theorie des Schwingungskreises mit eisenhaltiger Induktivität. Arch. Elektrotechn. Bd. 10 (1921/22), Nr. 1/2, S. 30...47.

[13] *Margand, F.:* Au sujet de l'existence de deux régimes en ferro-résonance. Rev. gén. Electr. Bd. 9(1921), Nr. 19, S. 635...637.

[14] *Fleischmann, L.:* Eine graphische Darstellung der Kipperscheinung bei Reihenschaltung von Widerstand, Kondensator und Eisendrossel und bei Berücksichtigung des Eisenverlustes. Elektrotechn. Z. Bd. 43(1922), Nr. 42, S. 1288...1290.

[15] *Rüdenberg, Reinhold:* Einige unharmonische Schwingungsformen mit grosser Amplitude. Z. angew. Mathem. Mech. Bd. 3(1923), Nr. 6, S. 454...467.

[16] *Fraenckel, Alfred:* Theorie der Wechselströme. VII + 352 S. — 3. erw. Aufl. Berlin, 1930. — S. 151 ff.

[17] *Rüdenberg,* Reinhold: Elektrische Schaltvorgänge. XI + 634 S. — 3. erw. Aufl. Berlin, 1933. — S. 337 ff.

[18] *Heegner, Kurt:* Über Selbsterregungserscheinungen bei Systemen mit gestörter Superposition. Z. Phys. Bd. 29 (1924), Nr. 2, S. 91...109.

[19] *Heegner, Kurt:* Über Systeme mit gestörter Superposition. Z. Phys. Bd. 33(1925), Nr. 1/2, S. 85...112.

[20] *Fallou, Jean,* u. *A. Mauduit:* Entretien d'une oscillation libre non sinusoïdale par résonance de l'un de ses harmoniques. Rev. gén. Electr. Bd. 19(1926), Nr. 9, S. 339...340.

[21] *Mauduit, A.:* A propos d'essais effectués sur des interrupteurs à résistance de choc. Rev. gén. Electr. Bd. 19 (1926), Nr. 24, S. 937...942.

[22] *Fallou, Jean:* Sur un démultiplicateur de fréquence statique. Rev. gén. Electr. Bd. 19(1926), Nr. 25, S. 987...991.

[23] *Rouelle, Edmond:* Sur le démultiplicateur de fréquence ferro-magnétique. C. R". Acad. Sci". Bd. 185(1927), Nr. 25, S. 1450...1452. [Referat in: Rev. gén. Electr. Bd. 23(1928), Nr. 2, S. 78.]

[24] *Rouelle, Edmond:* Sur quelques propriétés du démultiplicateur de fréquence. C. R". Acad. Sci". Bd. 186 (1928), Nr. 4, S. 224...226. [Referat in: Rev. gén. Electr. Bd. 23(1928), Nr. 11, S. 498.]

[25] *LaPierre, C. W.:* Theory of Abnormal Line-to-Neutral Transformer Voltages. Trans". Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 50(1931), Nr. 1, S. 328...342.

[26] *Pedersen, P. O.:* Om undertoner i inducerede svingninger. Ingenioren Bd. 1933, S. 31 ff.

[27] *Pedersen, P. O.:* Sub-harmonics in Forced Oscillations in Dissipative Systems. 86 S. — Kobenhavn, 1933.

[28] *Fallou, Jean:* Les réseaux de transmission d'énergie. — Paris, 1934. — S. 390 ff.

[29] *Rouelle, Edmond:* Contribution à l'étude expérimentale de la ferro-résonance. Rev. gén. Electr. Bd. 36(1934), Nr. 21, S. 715...738; Nr. 22, S. 763...780; Nr. 23, S. 795...819, u. Nr. 24, S. 841...858.

[30] *Aretz, E.:* Mehrere stabile Gleichgewichtszustände bei Reihenschaltung von Eisendrossel und Kondensator. Elektrotechn. Z. Bd. 57(1936), Nr. 11, S. 305...310.

[31] *Rouelle, Edmond:* Quelques nouvelles expériences de démultiplication de fréquence dans un circuit oscillant dont la bobine est à noyau de fer. Rev. gén. Electr. Bd. 40(1936), Nr. 26, S. 811...819.

[32] *Butler, J. W.,* u. *C. Concordia:* Analysis of Series Capacitor Application Problems. Electr. Engng. Bd. 56(1937), Nr. 8, S. 975...988.

[33] *Aretz, E.:* Über das Wesen der stabilen Gleichgewichtszustände bei Reihenschaltung von Eisendrossel und Kondensator. Elektrotechn. Z. Bd. 58(1937), Nr. 43, S. 1160...1162.

[34] *Meyer, H.:* Spannungsverlagerungen durch Ferroresonanz in Anlagen mit zwischen Phase und Erde geschalteten Spannungswandlern oder Drosselspulen. Brown Boveri Mitt". Bd. 33(1946), Nr. 12, S. 405...410.

Adresse des Autors:
Dr.-Ing. *H. Rosenhamer,* Stora Gatan 44A, Västerås (Schweden).

Nachrichten- und Hochfrequenztechnik — Télécommunications et haute fréquence

Schweizerisches Fernsehkomitee

06.049 : 621.397 (494)

Das am 11. Dezember 1947 gegründete Schweizerische Fernsehkomitee hielt im Jahre 1948 drei Sitzungen ab. Über die erste Sitzung vom 21. Januar 1948 wurde an dieser Stelle schon berichtet [1]).

Am 24. Juni 1948 fand in der ETH die zweite Sitzung statt. Der Präsident des Schweizerischen Fernsehkomitees, Prof. Dr. *F. Tank* brachte zur Kenntnis, dass er in Zukunft auch den SEV im Komitee vertreten werde. Die Mitglieder wurden namentlich bestätigt, und die Ernennung neuer Mitglieder gutgeheissen. Haupttraktandum bildete der Stand der Vorarbeiten für die Internationale Fernsehtagung 1948 in Zürich [2]). Das Komitee beschloss, diese Tagung unter dem Patronat der ETH und des Schweizerischen Fernsehkomitees

[1]) siehe Bull. SEV Bd. 39(1948), Nr. 2, S. 60...61.

[2]) siehe Bull. SEV Bd. 39(1948), Nr. 15, S. 492.