Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 39 (1948)

Heft: 14

Artikel: Stromwärmeverluste (Skineffekt) an Leitern und Isolatoren mit leitender Oberflächenschicht

Autor: Dällenbach, Walter

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057959

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

39e année | N° 14 | Samedi, le 10 Juillet 1948

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Stromwärmeverluste (Skineffekt) an Leitern und Isolatoren mit leitender Oberflächenschicht

von *Walter Dällenbach*, Zürich

621.3.018.44

Der Stromwärmeverlust (Skineffekt) an einem Leiter bzw. Isolator mit ebener leitender Oberflächenschicht wird unter Berücksichtigung des Verschiebungsstromes gerechnet. Bei gut leitender Schicht auf schlecht leitender oder nicht leitender Unterlage hat der Stromwärmeverlust in Abhängigkeit von der Schichtdicke ein Minimum, nimmt für grössere Schichtdicke also wieder zu.

La perte par effet Kelvin (effet pelliculaire) dans un conducteur ou un isolateur à couche superficielle plane et conductrice, est calculée en tenant compte du courant de déplacement. Lorsqu'il s'agit d'une couche superficielle bien conductrice, sur une matière conduisant mal ou pas du tout le courant, la perte par effet Kelvin atteint un minimum au fur et à mesure que l'épaisseur de la couche augmente; pour des couches encore plus épaisses, la perte croît à nouveau.

1. Einleitung

Beim Bau von Hochfrequenzgeräten werden häufig dem hochfrequenten Wechselfeld ausgesetzte Körper, die beispielsweise aus Eisen oder Keramik bestehen, mit einer Schicht eines Hochfrequenz gut leitenden Metalls, z. B. Silber, überzogen. Auch der umgekehrte Fall, schlecht leitende Schicht auf gut leitendem Metall, kann gelegentlich vorkommen.

Die Stromverteilung über Schicht und Unterlage sowie die auftretenden Verluste sind von verschiedenen Verfassern für geschichtete, kreiszylindrische Leiter angenähert oder streng berechnet worden ([1] bis [6] im Literaturverzeichnis am Schluss dieser Mitteilung). Ein Sonderfall ist das kreiszylindrische leitende Rohr.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf den besonders einfachen Fall von Leitern und Isolatoren mit einer *ebenen*, leitenden Oberflächenschicht, ein Fall, der natürlich in den zitierten Veröffentlichungen [1] bis [6] mit enthalten ist. Wenn ich es für richtig halte, die folgenden Ergebnisse trotzdem mitzuteilen, so hat das folgende Gründe:

1. Im Gebiet der Meter-Wellen und darunter ist die Eindringtiefe im allgemeinen verschwindend klein zu den geometrischen Abmessungen von Leitern und Isolatoren mit leitender Oberflächenschicht. Es genügt also die Betrachtung des ebenen Falles.
2. Im ebenen Fall sind auch die streng richtigen Endformeln einfach und bequem zu diskutieren.
3. Der Verschiebungsstrom im Innern der Schicht konnte ohne Vernachlässigung mitberücksichtigt werden. In diesem Punkte geht die vorliegende Arbeit über die zitierten Veröffentlichungen hinaus.

Analog wie bei einem Lecherleitungsstück wird für eine senkrecht zur Schicht einfallende ebene Welle aus Schichtdicke, Materialkonstanten der Schicht und dem Feldstärkeverhältnis in der Trennebene zwischen Schicht und Unterlage, welches für das Verhalten (Impedanz) der Unterlage charakteristisch ist, das Feldstärkeverhältnis an der Oberfläche der Schicht berechnet. Dieses Feldstärkeverhältnis an der Oberfläche der Schicht — es ist zu vergleichen mit der gesamten Impedanz der der Schicht mit Unterlage entsprechenden Lecherleitung — ist an sich von Interesse. Ausserdem folgt aus ihm und dem Magnetfeld an der Schichtoberfläche der Poyntingsche Vektor, also die Energieeinströmung und folglich der Stromwärmeverlust pro cm².

Hervorzuheben ist, dass in die Endformeln, aus welchen das Feldstärkeverhältnis an der Oberfläche der Schicht und der Stromwärmeverlust pro cm² zu entnehmen sind, nur eingehen

1. das in geeigneter Weise reduzierte Feldstärkeverhältnis in der Trennebene zwischen Schicht und Unterlage,
2. das Verhältnis von Leitungsstrom und Verschiebungsstrom zu Eindringtiefe nahe verwandt sind.
3. zwei reine Zahlen, welche dem Verhältnis von Schichtdicke zu Eindringtiefe nahe verwandt sind.

Bei gut leitender Schicht auf schlecht leitender oder nicht leitender Unterlage zeigt sich, dass bei einer ganz bestimmten Schichtdicke der Stromwärmeverlust einen kleinsten Wert hat und von da mit zunehmender Schichtdicke wieder zunimmt. Es hat also keinen Sinn, etwa eine Silberschicht auf Eisen oder Calit dicker als die 1,6fache in üblicher Weise definierte Eindringtiefe in Silber zu machen. Dieses Minimum des Stromwärmeverlustes einer Silberschicht auf Eisen oder Calit ist um 8 % kleiner als der Stromwärmeverlust an einer zur Eindringtiefe dicken Silberschicht, ein Ergebnis, auf welches bereits *Kruse* und *Zinke* [6] im Sonderfall eines dünnwandigen Rohres hingewiesen haben.

2. Allgemeine Überlegungen

In Richtung der positiven x-Achse falle eine ebene Welle auf eine zwischen $0 < x < s$ befindliche Schicht mit

der *Leitfähigkeit* σ [Ω^{-1} cm^{-1}],
der *Dielektrizitätskonstanten* ε ,
der *Permeabilität* μ .

Die Welle sei linear polarisiert mit der *elektrischen Feldstärke* $\mathfrak{e}_y$ [Vcm^{-1}] in Richtung der positiven y-Achse, der *magnetischen Feldstärke* $\mathfrak{h}_z$ [Acm^{-1}] in Richtung der positiven z-Achse. Für $\mathfrak{e}_y$ und $\mathfrak{h}_z$ gelten dann innerhalb der Schicht die Gleichungen

$$-\frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} = \mathfrak{s}_y + \Delta \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial t} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathfrak{e}_y}{\partial x} = -\Pi \mu \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\mathfrak{s}_y = \sigma \mathfrak{e}_y \qquad (3)$$

Darin bedeuten $\mathfrak{s}_y$ die *Stromdichte* in [Acm^{-2}]

und $\Delta = 10^9/4\pi c^2$ [Ω^{-1} cm^{-1} s]

$\Pi = 4\pi 10^{-9}$ [Ω cm^{-1} s]

die bekannten *Maßsystemkonstanten.* Setzt man $\mathfrak{s}_y$ aus (3) in (1) ein und macht die Ansätze

$$\mathfrak{e}_y = \frac{1}{2}\left[E e^{j\omega t} + \bar{E} e^{-j\omega t}\right] \qquad (4)$$

und

$$\mathfrak{h}_z = \frac{1}{2}\left[H e^{j\omega t} + \bar{H} e^{-j\omega t}\right] \qquad (5)$$

so folgen aus (1) und (2)

$$-\frac{dH}{dx} = (\sigma + j\Delta\varepsilon\omega) E \qquad (6)$$

$$\frac{dE}{dx} = -j\Pi\mu\omega H \qquad (7)$$

E und H sind die *komplexen Amplituden* der Feldstärken, $\bar{E}$ und $\bar{H}$ deren *konjugiert komplexe* Werte, $\omega = 2\pi f$ die *Kreisfrequenz* und $j = \sqrt{-1}$.

Aus (6) und (7) folgt für H die Gleichung

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = j\Pi\mu\sigma\omega\left(1 + j\frac{\Delta\varepsilon\omega}{\sigma}\right) H \qquad (8)$$

Setzt man abkürzend

$$\alpha^2 = j\Pi\mu\sigma\omega\left(1 + j\frac{\Delta\varepsilon\omega}{\sigma}\right) \qquad (9)$$

so hat (8) die allgemeine Lösung

$$H = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x} \qquad [\text{Acm}^{-1}] \qquad (10)$$

A und B sind Integrationskonstanten, und für α, die positive Wurzel aus (9) mit stets positiven Werten sowohl des Real-, als auch des Imaginärteiles, kann gesetzt werden

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}(q + jp) \qquad (11)$$

Darin bedeutet

$$\lambda_0 = +\frac{2\pi}{\omega\sqrt{\Delta\Pi\varepsilon\mu}} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon\mu}} \qquad [\text{cm}] \qquad (12)$$

die Länge einer Welle in einem isolierenden und verlustlosen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ. Die Ausdrücke

$$p = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\varphi^2} + 1\right)} \qquad (13)$$

und

$$q = +\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\varphi^2} - 1\right)} \qquad (14)$$

sind Funktionen von

$$\varphi = \frac{\sigma}{\Delta\varepsilon\omega} \qquad (15)$$

dem Verhältnis von Leitungsstrom zum Verschiebungsstrom.

Für später interessieren die reellen, stets positiven Grössen

$$\alpha + \bar{\alpha} = \frac{4\pi q}{\lambda_0} \qquad (16)$$

$$\frac{1}{j}(\alpha - \bar{\alpha}) = \frac{4\pi p}{\lambda_0} \qquad (17)$$

Um die anschauliche Bedeutung der Ausdrücke p und q einzusehen, betrachten wir einen Augenblick den Fall des Skineffektes an der ebenen Oberfläche eines den Halbraum erfüllenden homogenen Körpers. Es sei also die Schichtdicke $s = \infty$, und die laufende Welle klinge für $x = \infty$ auf null ab. Dann muss in (10) die Integrationskonstante $B = 0$ sein und aus (5) folgt vermöge (10)

$$\mathfrak{h}_z = H_0 e^{-2\pi\frac{x}{\delta}} \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right) \qquad (18)$$

H_0 ist der Scheitelwert des Magnetfeldes in der Ebene $x = 0$, also an der Körperoberfläche und

$$\lambda = \lambda_0/p \qquad [\text{cm}] \qquad (19)$$

bedeutet die Wellenlänge,

$$\delta = \lambda_0/q \qquad [\text{cm}] \qquad (20)$$

eine für die Dämpfung charakteristische Länge des durch (18) bezeichneten gedämpften Wellenvorgangs im Innern des Körpers mit der Leitfähigkeit σ. Aus (19), (20) und (12) bis (15) folgt übrigens allgemein

$$\lambda\delta = \frac{\lambda_0^2}{pq} = \frac{10^9}{\mu\sigma f} \qquad [\text{cm}^2] \qquad (21)$$

Für ein nichtleitendes Dielektrikum ist $\varphi = 0$.

Also werden $p = 1$; $q = 0$; $\lambda = \lambda_0$; $\delta = \infty$.

Wenn umgekehrt der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigbar klein ist, wird $\varphi \gg 1$.

Also werden $p = q = \sqrt{\varphi/2}$ und wegen (21)

$$\lambda = \delta = \sqrt{\frac{10^9}{\mu\sigma f}} \qquad [\text{cm}] \qquad (22)$$

Nun kehren wir zum allgemeinen Fall des Leiters

bzw. Isolators mit leitender Oberflächenschicht zurück. Aus (6) und (10) folgt

$$E = -\frac{\alpha}{\sigma + j\Delta\varepsilon\omega}(A e^{\alpha x} - B e^{-\alpha x}) \; [\mathrm{Vcm^{-1}}] \quad (23)$$

Aus H und E, also (10) und (23), folgen nun für jeden beliebigen Querschnitt x der Schicht das komplexe *Feldstärkeverhältnis*

$$Z = \frac{E}{H} \quad [\Omega] \quad (24)$$

und die *Energieströmung*

$$S = \frac{1}{4}(E\bar{H} + \bar{E}H) = \frac{1}{4}H\bar{H}(Z + \bar{Z}) \quad [\mathrm{Wcm^{-2}}] \quad (25)$$

vorausgesetzt, dass die Integrationskonstanten A und B bekannt sind. Zu deren Bestimmung nehmen wir an, es seien

1. die komplexe Amplitude $H = H_0$ der magnetischen Feldstärke im Querschnitt $x = 0$
2. das komplexe Feldstärkeverhältnis $Z = Z_s$ im Querschnitt $x = s$ gegeben.

A und B lassen sich dann berechnen.

Aus (10) und (23) ist nämlich

$$H_0 = A + B \quad (26)$$

$$Z_s = \frac{E_s}{H_s} = -\frac{\alpha}{\sigma + j\Delta\varepsilon\omega}\frac{A e^{\alpha s} - B e^{-\alpha s}}{A e^{\alpha s} + B e^{-\alpha s}} \quad (27)$$

Daraus berechnen sich

$$A = H_0 \frac{(Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} \quad (28)$$

und

$$B = H_0 \frac{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s}}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} \quad (29)$$

Darin ist aus einem Grund, der sofort erkennbar wird, die Bezeichnung

$$Z_{0\infty} = \frac{\alpha}{\sigma + j\Delta\varepsilon\omega} \quad (30)$$

eingeführt. Mit den Werten (28) und (29) für A und B erhält man die noch unbekannten Feldgrössen *im Querschnitt* $x = 0$:

$$\frac{E_0}{H_0} = Z_0 = Z_{0\infty}\frac{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} - (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} \quad [\Omega] \quad (31)$$

und *im Querschnitt* $x = s$:

$$\frac{E_s}{H_0} = \frac{2 Z_{0\infty} Z_s}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} \quad [\Omega] \quad (32)$$

$$\frac{H_s}{H_0} = \frac{2 Z_{0\infty}}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} \quad (33)$$

Aus (31) erkennt man, dass $Z_{0\infty}$, welches nach (30) nur von der Frequenz und den Materialkonstanten ε, μ, σ der Schicht abhängt, nichts anderes bedeutet als das Feldstärkeverhältnis in der Schichtoberfläche $x = 0$ für unendlich dicke Schicht, also für $s = \infty$.

Aus den durch (31), (32) und (33) bestimmten Feldgrössen folgt die Energieströmung *im Querschnitt* $x = 0$:

$$S_0 = \frac{1}{4}H_0\bar{H}_0(Z_0 + \bar{Z}_0) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{4}H_0\bar{H}_0\left[Z_{0\infty}\frac{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} - (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}}{(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}} + \bar{Z}_{0\infty}\frac{(\bar{Z}_{0\infty} + \bar{Z}_s) e^{\bar{\alpha} s} - (\bar{Z}_{0\infty} - \bar{Z}_s) e^{-\bar{\alpha} s}}{(\bar{Z}_{0\infty} + \bar{Z}_s) e^{\bar{\alpha} s} + (\bar{Z}_{0\infty} - \bar{Z}_s) e^{-\bar{\alpha} s}}\right] \quad [\mathrm{Wcm^{-2}}]$$

und *im Querschnitt* $x = s$:

$$S_s = \frac{1}{4}H_s\bar{H}_s(Z_s + \bar{Z}_s) \quad (35)$$

$$= \frac{1}{4}H_0\bar{H}_0\frac{4 Z_{0\infty}\bar{Z}_{0\infty}}{[(Z_{0\infty} + Z_s) e^{\alpha s} + (Z_{0\infty} - Z_s) e^{-\alpha s}]} \cdot \frac{(Z_s + \bar{Z}_s)}{[(\bar{Z}_{0\infty} + \bar{Z}_s) e^{\bar{\alpha} s} + (\bar{Z}_{0\infty} - \bar{Z}_s) e^{-\bar{\alpha} s}]} \quad [\mathrm{Wcm^{-2}}]$$

S_0 ist also der gesamte Stromwärmeverlust pro cm² Leiteroberfläche in der Schicht mit den Konstanten ε, μ, σ und der hinter der Schicht befindlichen leitenden Unterlage mit von ε, μ, σ abweichenden Konstanten. S_s dagegen ist der Stromwärmeverlust pro cm² Leiteroberfläche allein in der hinter der Schicht befindlichen Unterlage.

Die Ausdrücke (31), (32), (33), (34) und (35) lassen sich für numerische Rechnungen auf reelle Grössen umformen. Das wird in Abschnitt 8 der vorliegenden Mitteilung durchgeführt werden. Jetzt sollen zunächst einige Sonderfälle betrachtet werden.

3. Unendlich ausgedehnter homogener Leiter mit ebener Oberfläche

Dieser bereits im Zusammenhang mit (18) kurz betrachtete einfache Sonderfall ergibt sich aus der bisher vorausgesetzten Schicht durch den Grenzübergang $s = \infty$. Man erhält aus (31) und (30) nach einer einfachen Rechnung:

$$Z_{0\infty} = W\frac{p + jq}{p^2 + q^2} \quad (36)$$

Darin ist

$$W = \sqrt{\frac{\Pi\mu}{\Delta\varepsilon}} \quad [\Omega] \quad (37)$$

das Feldstärkeverhältnis einer ebenen Welle in einem isolierenden, verlustlosen Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε und der Permeabilität μ.

Aus (34) folgt bei Berücksichtigung von (36)

$$S_{0\infty} = \frac{1}{2}H_0\bar{H}_0 W\frac{p}{p^2 + q^2} \quad [\Omega] \quad (38)$$

Denkt man sich den wirklichen Oberflächenstrom durch einen über die Eindringtiefe τ gleichmässig verteilten Strombelag ersetzt, so gilt

$$S_{0\infty} = \frac{1}{2} H_0 \bar{H}_0 \frac{1}{\sigma\tau} \tag{39}$$

Durch Vergleich mit (38) folgt

$$\tau = \frac{1}{\sigma W} \frac{p^2+q^2}{p} \quad [\mathrm{cm}] \tag{40}$$

Ist der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigbar klein, so werden aus (36), (38) und (40)

$$Z_{0\infty} = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,(1+\mathrm{j}) = 2\pi\sqrt{\frac{10^{-9}\mu f}{\sigma}}\,(1+\mathrm{j})\ [\Omega] \tag{41}$$

$$S_{0\infty} = \frac{1}{2} H_0 \bar{H}_0 \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}} = \frac{1}{2} H_0 \bar{H}_0 2\pi \sqrt{\frac{10^{-9}\mu f}{\sigma}} \quad [\mathrm{Wcm^{-2}}] \tag{42}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{\Pi\mu\sigma\omega}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^9}{\mu\sigma f}} \quad [\mathrm{cm}] \tag{43}$$

Dies sind die bekannten Formeln. Der Vergleich von (43) mit (22) zeigt, dass bei zum Leitungsstrom vernachlässigbar kleinem Verschiebungsstrom

$$\tau = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\delta}{2\pi} \tag{44}$$

d. h. die in üblicher Weise definierte Eindringtiefe ist im Verhältnis $1 : 2\pi$ kleiner als die Wellenlänge λ und die Dämpfungslänge δ des Vorganges.

Bemerkenswert ist, dass nach (41) der elektrische Vektor E_0 gegenüber dem magnetischen Vektor H_0, also gegenüber dem resultierenden Oberflächenstrom, stets eine Phasenvoreilung von $\pi/4$ hat, unabhängig von der Frequenz und den Materialkonstanten μ und σ.

4. Unendlich ausgedehnter homogener Leiter mit leitender Oberflächenschicht aus von der Unterlage abweichendem Material

In Schicht und Unterlage sollen die Verschiebungsströme gegenüber den Leitungsströmen vernachlässigbar klein sein. Die Materialkonstanten der Schicht seien wie bisher μ und σ, die der Unterlage μ' und σ'.

Das durch die Unterlage im Grenzquerschnitt $x = s$ geforderte Feldstärkeverhältnis Z_s bestimmt sich nach (41) zu

$$Z_s = \sqrt{\frac{\Pi\mu'\omega}{2\sigma'}}\,(1+\mathrm{j}) \tag{45}$$

Anderseits gilt (41). Setzt man diese Werte in (31), (32), (33), (34) und (35) ein, beachtet, dass in Zähler und Nenner der Brüche der Faktor $\sqrt{\frac{\Pi\omega}{2}}$ $(1+\mathrm{j})$ sich weghebt, und benützt die Abkürzungen

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\mu'\sigma}{\mu\sigma'}} \tag{46}$$

$$2\gamma = (\alpha+\bar{\alpha})\,s = \frac{1}{\mathrm{j}}(\alpha-\bar{\alpha})\,s \tag{47}$$

also nach (10) und (43) $\gamma = \frac{s}{\tau}$ (48)

so erhält man

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,(1+\mathrm{j})\,\frac{(1+\varkappa)\,\mathrm{e}^{\alpha s}-(1-\varkappa)\,\mathrm{e}^{-\alpha s}}{(1+\varkappa)\,\mathrm{e}^{\alpha s}+(1-\varkappa)\,\mathrm{e}^{-\alpha s}} \tag{49}$$

$$\frac{E_s}{H_0} = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,(1+\mathrm{j})\,\frac{2\varkappa}{(1+\varkappa)\,\mathrm{e}^{\alpha s}+(1-\varkappa)\,\mathrm{e}^{-\alpha s}} \tag{50}$$

$$\frac{H_s}{H_0} = \frac{2}{(1+\varkappa)\,\mathrm{e}^{\alpha s}+(1-\varkappa)\,\mathrm{e}^{-\alpha s}} \tag{51}$$

$$S_0 = \frac{1}{2} H_0 \bar{H}_0 \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}} \cdot \frac{(1+\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{2\gamma}-(1-\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{-2\gamma}-2\,(1-\varkappa^2)\sin 2\gamma}{(1+\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{2\gamma}+(1-\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{-2\gamma}+2\,(1-\varkappa^2)\cos 2\gamma} \tag{52}$$

$$S_s = \frac{1}{2} H_0 \bar{H}_0 \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}} \cdot \frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{2\gamma}+(1-\varkappa)^2\,\mathrm{e}^{-2\gamma}+2\,(1-\varkappa^2)\cos 2\gamma} \tag{53}$$

γ nach (47) und (48) ist also das Verhältnis der Schichtdicke s zur Eindringtiefe τ eines unendlich ausgedehnten homogenen Leiters mit ebener Oberfläche und gleichen μ und σ wie die Schicht der Dicke s. Die Ausdrücke (49) bis (53) lassen sich für numerische Rechnungen vereinfachen. Man ordnet nach Potenzen von $\varkappa$, führt Hyperbel- bzw. Kreis-Funktionen ein und bildet für (52) und (53) das Verhältnis zu $S_{0\infty}$ nach (42):

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,\frac{1}{N}\Big\{\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma + 2\varkappa\cosh 2\gamma + \varkappa^2(\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma) + \mathrm{j}\,[\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma + 2\varkappa\cosh 2\gamma + \varkappa^2(\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma)]\Big\} \quad [\Omega] \tag{54}$$

$$\frac{E_s}{H_0} = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,\frac{2\varkappa}{N}\Big\{\cosh\gamma\cos\gamma + \sinh\gamma\sin\gamma + \varkappa(\sinh\gamma\cos\gamma + \cosh\gamma\sin\gamma) + \mathrm{j}\,[\cosh\gamma\cos\gamma - \sinh\gamma\sin\gamma + \varkappa(\sinh\gamma\cos\gamma - \cosh\gamma\sin\gamma)]\Big\} \quad [\Omega] \tag{55}$$

$$\frac{H_s}{H_0} = \frac{2}{N}\left\{\cosh\gamma\cos\gamma + \varkappa\sinh\gamma\cos\gamma - \mathrm{j}\,[\sinh\gamma\sin\gamma + \varkappa\cosh\gamma\sin\gamma]\right\} \tag{56}$$

$$\frac{S_0}{S_{0\infty}} = \frac{1}{N}\left\{\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma + 2\varkappa\cosh 2\gamma + \varkappa^2(\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma)\right\} \tag{57}$$

$$\frac{S_s}{S_{0\infty}} = \frac{2\varkappa}{N} \tag{58}$$

Darin ist der Nenner

$$N = \cosh 2\gamma + \cos 2\gamma + 2\varkappa\sinh 2\gamma + \varkappa^2(\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma) \tag{59}$$

(57) ist das Verhältnis des gesamten Stromwärmeverlustes pro cm² Leiteroberfläche für einen Leiter mit Schicht der Dicke s zum Stromwärmeverlust pro cm² Leiteroberfläche für denselben Leiter, aber mit unendlich dicker Schicht. Dabei ist angenommen, dass in den beiden Fällen, die in (57) verglichen werden, der absolute Betrag der Amplitude der magnetischen Feldstärke an der Oberfläche der Leiterkonfiguration derselbe sei. In analoger Weise ist (58) das Verhältnis des Stromwärmeverlustes pro cm² Leiteroberfläche allein in der hinter der Schicht der Dicke s befindlichen leitenden Unterlage zum gesamten Stromwärmeverlust pro cm² Leiteroberfläche für dieselbe Leiterkonfiguration, aber mit unendlich dicker Schicht.

Bemerkenswert ist, dass diese Verhältnisse nur von der durch (48) definierten Variablen γ und dem durch (46) gegebenen Parameter $\varkappa$ abhängen. Dabei haben die Konstanten μ, σ der Schicht Einfluss auf γ und $\varkappa$, die Konstanten μ', σ' der Unterlage aber nur auf den Parameter $\varkappa$. Schichtdicke s und Kreisfrequenz ω gehen nur in γ ein.

Zu einer für Hochfrequenz gut leitenden Schicht auf für Hochfrequenz schlecht leitender Unterlage, also $\frac{\sigma}{\mu} \ll \frac{\sigma'}{\mu'}$, gehört $\varkappa \gg 1$, zu einer schlecht leitenden Schicht auf gut leitender Unterlage umgekehrt $\varkappa \ll 1$.

5. Unendlich ausgedehnter homogener Isolator mit leitender Oberflächenschicht

In der leitenden Oberflächenschicht sei wieder der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom zu vernachlässigen. Die Materialkonstanten der Schicht seien μ und σ, die der isolierenden Unterlage ε', μ' und $\sigma' = 0$.

Das Feldstärkeverhältnis im Isolator für eine von $x = s$ nach $x = \infty$ laufende ebene Welle ist unabhängig vom Querschnitt

$$Z_s = \sqrt{\frac{\Pi\mu'}{\Delta\varepsilon'}}$$

Für $Z_{0\infty}$ gilt (41). Damit erhält man für (31), (32), (33) und (34) nach derselben Umformung wie im vorausgehenden Abschnitt

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,\frac{1}{N}\left\{\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma + \varkappa(\cosh 2\gamma + \cos 2\gamma) + \frac{\varkappa^2}{2}(\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma) + \mathrm{j}\,[\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma + \varkappa(\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma) + \frac{\varkappa^2}{2}(\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma)]\right\} \quad [\Omega] \tag{60}$$

$$\frac{E_s}{H_0} = \sqrt{\frac{\Pi\mu\omega}{2\sigma}}\,\frac{2\varkappa}{N}\left\{\cosh\gamma\cos\gamma + \frac{\varkappa}{2}(\sinh\gamma\cos\gamma + \cosh\gamma\sin\gamma) + \mathrm{j}\,[-\sinh\gamma\sin\gamma + \frac{\varkappa}{2}(\sinh\gamma\cos\gamma - \cosh\gamma\sin\gamma)]\right\} \quad [\Omega] \tag{61}$$

$$\frac{H_s}{H_0} = \frac{2}{N}\left\{\cosh\gamma\cos\gamma + \frac{\varkappa}{2}(\sinh\gamma\cos\gamma + \cosh\gamma\sin\gamma) + \mathrm{j}\,[-\sinh\gamma\sin\gamma + \frac{\varkappa}{2}(\sinh\gamma\cos\gamma - \cosh\gamma\sin\gamma)]\right\} \tag{62}$$

$$\frac{S_0}{S_{0\infty}} = \frac{1}{N}\left\{\sinh 2\gamma - \sin 2\gamma + \varkappa(\cosh 2\gamma + \cos 2\gamma) + \frac{\varkappa^2}{2}(\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma)\right\} \tag{63}$$

$$\frac{S_s}{S_{0\infty}} = 0 \tag{64}$$

Darin ist

$$N = \cosh 2\gamma + \cos 2\gamma + \varkappa(\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma) + \frac{\varkappa^2}{2}(\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma) \tag{65}$$

der von (59) abweichende Nenner.

Diese Ausdrücke sind ähnlich gebaut wie (54) bis (59), aber $\varkappa$ hat hier die Bedeutung

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2\sigma\mu'}{\Delta\varepsilon'\omega\mu}} \tag{66}$$

6. Ein in der Dicke auf die Frequenz abgestimmter homogener Isolator mit ebener Oberfläche und leitender Oberflächenschicht der Dicke s

Nun sei der Isolator des vorausgehenden Abschnittes nicht mehr unendlich ausgedehnt, sondern erstrecke sich als Platte der Dicke $a - s$ von $x = s$ bis $x = a$. Bringt man bei $x = a$ eine gut leitende Schicht auf die Oberfläche des Isolators und wählt $a - s$ gleich ein Viertel der Wellenlänge im Innern des Isolators, so wirkt die Isolatorplatte als auf die Frequenz abgestimmter Resonator mit einem Spannungsbauch bei $x = s$ und einem Strombauch bei $x = a$. Bei $x = s$ ist also die magnetische Feldstärke $H_s = 0$ und folglich das Feldstärkeverhältnis $Z_s = \infty$. Dies in (31) bis (35) eingesetzt, führt zu Ausdrücken, die man auch aus (54) bis (59)

bzw. (60) bis (65) erhält, wenn man in diesen $\varkappa = \infty$ setzt, nämlich:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\Pi \mu \omega}{2\sigma}} \frac{\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma}{\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma} \quad [\Omega] \quad (67)$$

$$\frac{E_s}{H_0} = \sqrt{\frac{\Pi \mu \omega}{2\sigma}}\, 2 \left[\frac{\sinh\gamma \cos\gamma + \cosh\gamma \sin\gamma}{\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma} + j \frac{\sinh\gamma \cos\gamma - \cosh\gamma \sin\gamma}{\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma} \right] \quad [\Omega] \quad (68)$$

$$\frac{H_s}{H_0} = 0 \quad (69)$$

$$\frac{S_0}{S_{0\infty}} = \frac{\sinh 2\gamma + \sin 2\gamma}{\cosh 2\gamma - \cos 2\gamma} \quad (70)$$

$$\frac{S_s}{S_{0\infty}} = 0 \quad (71)$$

7. Beispiele

a) Auf *Eisen* mit

$$\mu' = 100; \qquad 1/\sigma' = 9{,}8 \cdot 10^{-6} \quad [\Omega\ \mathrm{cm}]$$

sei eine *Silberschicht* mit

$$\mu = 1; \qquad 1/\sigma = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \quad [\Omega\ \mathrm{cm}]$$

aufgebracht. Unabhängig von der Frequenz ist dann nach (46)

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\mu'\sigma}{\mu\sigma'}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 9{,}8 \cdot 10^{-6}}{1{,}6 \cdot 10^{-6}}} = 24{,}7$$

b) Bringt man auf *Calit* mit

$$\varepsilon' = 6{,}5; \qquad \mu' = 1$$

eine *Silberschicht* mit den obigen Daten und ist

$$\omega = 7{,}54 \cdot 10^8 \quad [\mathrm{s}^{-1}]$$

entsprechend einer Wellenlänge $\lambda = 2{,}5$ m, so erhält man für einen unendlich ausgedehnten, homogenen Isolator mit ebener Oberfläche und einer Oberflächenschicht aus Silber nach (66)

$$\varkappa = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi c^2}{1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot 10^9 \cdot 7{,}54 \cdot 10^8 \cdot 6{,}5}} = 5{,}38 \cdot 10^4$$

Für diesen Wert von $\varkappa$ nimmt der hier besonders interessierende Ausdruck (63) für den Stromwärmeverlust praktisch denselben Wert an wie für $\varkappa = \infty$, den Fall des auf die Frequenz abgestimmten Isolators. Für eine Silberschicht auf Calit kann daher bei einer Wellenlänge $\lambda = 2{,}5$ m mit $\varkappa = \infty$ gerechnet werden, gleichgültig, ob der Isolator auf die Frequenz abgestimmt oder unendlich ausgedehnt ist.

In Fig. 1 sind die für die Stromwärmeverluste der Beispiele lit. a und b charakteristischen Verhältnisse $S_0/S_{0\infty}$ und $S_s/S_{0\infty}$ der Tabelle I in logarithmischem Maßstab als Funktionen des Verhältnisses $\gamma = s/\tau$, also der Schichtdicke s dargestellt. Da die Kurven $S_0/S_{0\infty}$ für $\varkappa = 24{,}7$ und $\varkappa = \infty$ nahe zusammenfallen, ist in der Figur nur die Kurve für $\varkappa = \infty$ wiedergegeben. Ferner ist $S_s/S_{0\infty} \equiv 0$ für $\varkappa = \infty$. Die entsprechende Kurve fällt also weg.

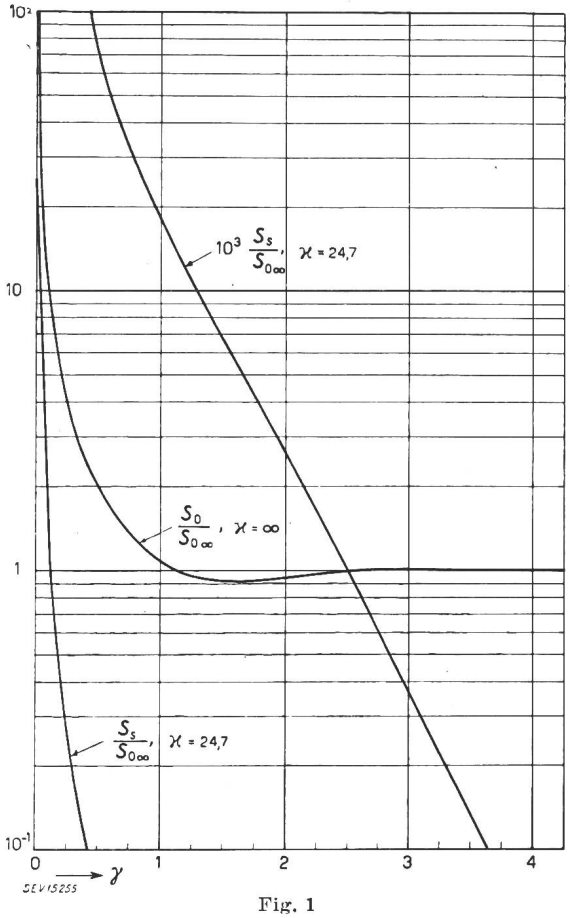

Fig. 1

Die dargestellten Kurven sind unabhängig von der Frequenz, solange der Parameter $\varkappa$ für Silber auf Calit als unendlich gross betrachtet werden darf.

Tabelle I

γ	$\varkappa = 24{,}7$		$\varkappa = \infty$
	$S_0/S_{0\infty}$	$S_s/S_{0\infty}$	$S_0/S_{0\infty}$
0	24,700	24,700	∞
0,5	1,945	0,0733	2,011
1	1,082	0,0180	1,086
1,5	0,925	0,00679	0,919
1,6	0,9235	—	0,917
1,7	0,927	—	0,921
2	0,953	0,00267	0,949
2,5	0,991	0,00101	0,991
3	1,003	0,000371	1,003
3,5	1,002	0,000136	1,003
4	1,001	0,0000500	1,001

Für $\gamma = 0$, also Schichtdicke $s = 0$, und Silber auf Eisen beginnen $S_0/S_{0\infty}$ und $S_s/S_{0\infty}$ bei $\varkappa$, also bei 24,7. Für $\gamma = 0$ und Silber auf Calit beginnt $S_0/S_{0\infty}$ bei ∞. Für von Null wachsendes γ nehmen bei Silber auf Eisen $S_0/S_{0\infty}$ und $S_s/S_{0\infty}$, bei Silber auf Calit $S_0/S_{0\infty}$ ab.

Für $\gamma = \infty$, also unendlich grosse Schichtdicken, nähern sich die $S_0/S_{0\infty}$ dem Werte 1 und $S_s/S_{0\infty}$

dem Werte 0. Bemerkenswert ist, dass $S_0/S_{0\infty}$ sowohl im Fall Silber auf Eisen, wie im Fall Silber auf Calit sich dem Werte 1 nicht etwa monoton abnehmend nähern, sondern, wie aus der Tabelle und der Figur zu erkennen ist, in der Gegend von $\gamma = 1{,}6$ den Wert 1 bis zu zirka 8 % unterschreiten; d. h. die gesamten Stromwärmeverluste sind bei einer Silberschicht auf Eisen oder Calit von 1,6 der Eindringtiefe τ zirka 8 % geringer als an einer unendlich dicken Silberschicht. Diese Tatsache wird man zusammen mit dem Einfluss von Unebenheiten der Oberfläche, die im Vergleich zur Eindringtiefe nicht vernachlässigbar klein sind, berücksichtigen müssen bei der Erklärung von Abweichungen gegenüber der Rechnung, welche bei Messungen der Resonanzschärfe von Hohlraumresonatoren aufgetreten sind. Auf die Existenz eines solchen Minimums haben bereits *Kruse* und *Zinke* [6] am Beispiel eines dünnwandigen Kupferrohres aufmerksam gemacht.

c) Bringt man eine *Eisenschicht* auf einer *Silberunterlage* auf, so erhält man den zum $\varkappa$-Wert von Beispiel lit. a reziproken Wert

$$\varkappa = 1/24{,}7 = 0{,}0403.$$

Den Verlauf von $S_0/S_{0\infty}$ und $S_s/S_{0\infty}$ zeigt Tab. II.

Für $\gamma = 0$ beginnen auch hier $S_0/S_{0\infty}$ und $S_s/S_{0\infty}$ bei $\varkappa$, also bei 0,0403. Für von Null wachsendes γ nehmen $S_0/S_{0\infty}$ zu, $S_s/S_{0\infty}$ ab und nähern sich für grosse Werte von γ asymptotisch dem Werte 1 bzw. 0. Dabei geht $S_0/S_{0\infty}$ bei $\gamma = 1{,}6$ über ein Maximum, das den Wert 1 um etwa 8 % überschreitet. Eine Eisenschicht der Dicke $s = 1{,}6$ der Eindringtiefe auf Silberunterlage ergibt also einen etwa um 8 % höheren Stromwärmeverlust, als an massivem Eisen. Dieses Maximum steht in Analogie zum Minimum bei Silberschicht auf Unterlage aus Eisen.

Tabelle II

γ	$\varkappa = 0{,}0403$	
	$S_0/S_{0\infty}$	$S_s/S_{0\infty}$
0	0,0403	0,0403
0,5	0,212	0,0370
1	0,831	0,0221
1,5	1,081	0,00814
1,6	1,083	0,00656
1,7	1,078	0,00528
2	1,048	0,00279
2,5	1,008	0,00100
3	0,997	0,000368
3,5	0,998	0,000136
4	0,999	0,0000500

8. Der allgemeine Fall

Anknüpfend an den zweiten Abschnitt soll nun noch gezeigt werden, wie die Ausdrücke (31) bis (35), die den Verschiebungsstrom mitberücksichtigen, zu numerischen Rechnungen auf reelle Grössen umgeformt werden können.

An Stelle des in der Trennebene $x = s$ zwischen Schicht und Unterlage bestehenden und bekannt vorausgesetzten Feldstärkeverhältnisses Z_s, führt man dessen durch

$$\frac{Z_s}{W} = \xi + \mathrm{j}\eta \tag{72}$$

definierten reduzierten Real- und Imaginärteil ξ und η ein. W ist dabei nach (37) das Feldstärkeverhältnis einer ebenen Welle in einem isolierenden, verlustlosen Medium mit Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ. Mit ξ und η erhält man durch Ausrechnung an Stelle der Ausdrücke (31) bis (35)

$$\begin{aligned}\frac{Z_0}{W} = \frac{1}{p^2+q^2}\frac{1}{N}\Big\{ & p\sinh 2\gamma_1 - q\sin 2\gamma_2 + 2p(p\xi+q\eta) \\ & \cdot \cosh 2\gamma_2 + 2q(q\xi - p\eta)\cos 2\gamma_2 + (p^2+q^2)(\xi^2+\eta^2) \\ & \cdot (p\sinh 2\gamma_1 + q\sin 2\gamma_2) + \mathrm{j}[q\sinh 2\gamma_1 + p\sin 2\gamma_2 \\ & + 2q(p\xi+q\eta)\cosh 2\gamma_1 - 2p(q\xi - p\eta)\cos 2\gamma_2 \\ & + (p^2+q^2)(\xi^2+\eta^2)\cdot(q\sinh 2\gamma_1 - p\sin 2\gamma_2)]\Big\}\end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\frac{E_s/H_0}{W} = \frac{2}{N}\Big\{ & \xi\cosh\gamma_1\cos\gamma_2 + \eta\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 \\ & + (\xi^2+\eta^2)(p\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 + q\cosh\gamma_1\sin\gamma_2) \\ & + \mathrm{j}[\eta\cosh\gamma_1\cos\gamma_2 - \xi\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 \\ & + (\xi^2+\eta^2)(q\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 - p\cosh\gamma_1\sin\gamma_2)]\Big\}\end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\frac{H_s}{H_0} = \frac{2}{N}\Big\{ & \cosh\gamma_1\cos\gamma_2 + (p\xi+q\eta)\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 \\ & - (p\eta - q\xi)\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 - \mathrm{j}[\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 \\ & + (p\xi+q\eta)\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + (p\eta - q\xi)\sinh\gamma_1\cos\gamma_2]\Big\}\end{aligned} \tag{75}$$

$$\begin{aligned}\frac{S_0}{S_{0\infty}} = \frac{1}{pN}\Big\{ & p\sinh 2\gamma_1 - q\sin 2\gamma_2 + 2p(p\xi+q\eta)\cosh 2\gamma_1 \\ & + 2q(q\xi - p\eta)\cos 2\gamma_2 + (p^2+q^2)(\xi^2+\eta^2)(p\sinh 2\gamma_1 \\ & + q\sin 2\gamma_2)\Big\}\end{aligned} \tag{76}$$

$$\frac{S_s}{S_{0\infty}} = \frac{2(p^2+q^2)\xi}{pN} \tag{77}$$

Darin ist

$$\begin{aligned}N = {} & \cosh 2\gamma_1 + \cos 2\gamma_2 + 2(p\xi+q\eta)\sinh 2\gamma_1 + 2(q\xi - p\eta) \\ & \cdot \sin 2\gamma_2 + (p^2+q^2)(\xi^2+\eta^2)(\cosh 2\gamma_1 - \cos 2\gamma_2)\end{aligned} \tag{78}$$

der allen Ausdrücken (73) bis (77) gemeinsame Nenner.

Im Unterschied zu Fällen, bei welchen der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann, spaltet sich hier die früher durch (47) und (48) definierte reduzierte Schichtdicke in zwei Variable

$$2\gamma_1 = (\alpha + \bar{\alpha})\, s = 4\pi q \frac{s}{\lambda_0} \tag{79}$$

und

$$2\gamma_2 = \frac{1}{\mathrm{j}}(\alpha - \bar{\alpha})\, s = 4\pi p \frac{s}{\lambda_0} \tag{80}$$

auf, wobei entsprechend (48) nun vermöge (13) bis (15)

$$\sqrt{\gamma_1\gamma_2} = \frac{s}{\tau} \tag{81}$$

gilt. Die Eindringtiefe τ hat dabei den speziellen Wert (43).

Die Ausdrücke (73) bis (78) degenerieren im Sonderfall, in dem der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann, also für $\varphi \gg 1$ zu den Ausdrücken (54) bis (59) von Abschnitt 4 bzw. zu den Ausdrücken (60) bis (65) von Abschnitt 5, falls für ξ und η die den respektiven Feldstärkeverhältnissen Z_s entsprechenden Real- und Imaginärteile eingesetzt werden.

9. Dielektrische Schichten geringer Leitfähigkeit auf gut leitender Unterlage

Ist die Unterlage praktisch unendlich gut leitend, so kann $Z_s = 0$ gesetzt werden. Aus (73) entsteht dann

$$\frac{Z_0}{W} = \frac{1}{p^2+q^2} \cdot \frac{p\sinh 2\gamma_1 - q\sin 2\gamma_2 + j[q\sinh 2\gamma_1 + p\sin 2\gamma_2]}{\cosh 2\gamma_1 + \cos 2\gamma_2} \tag{82}$$

Für ein Dielektrikum von geringer Leitfähigkeit ist $\varphi \ll 1$. Bis auf Grössen 1. Ordnung in φ sind dann nach (12), (13), (79) und (80)

$$p = 1\,; \quad q = \frac{\varphi}{2}\,; \quad 2\gamma_1 = 4\pi\frac{s}{\lambda_0}\frac{\varphi}{2}\,; \quad 2\gamma_2 = 4\pi\frac{s}{\lambda_0}$$

Damit wird aus (82)

$$\frac{Z_0}{W} = \frac{\sinh\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\varphi}{2}\sin\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\right)}{\cosh\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\right)} + j\,\frac{\left[\frac{\varphi}{2}\sinh\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\right)\right]}{\cosh\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\frac{\varphi}{2}\right) + \cos\left(4\pi\frac{s}{\lambda_0}\right)} \tag{83}$$

Da wegen $\varphi \ll 1$ der cosh im Nenner wenig grösser als 1 ist, nimmt $\frac{Z_0}{W}$ maximale Werte an für die Schichtdicken

$$s = \frac{\lambda_0}{4};\ 3\frac{\lambda_0}{4};\ 5\frac{\lambda_0}{4};\ \ldots \tag{84}$$

Für diese Werte ist ausserdem (83) reell und bis auf Grössen 1. Ordnung in φ

$$\frac{Z_0}{W} = \frac{1}{\pi\frac{s}{\lambda_0}\varphi}$$

Durch geeignete Wahl von φ kann offenbar erreicht werden, dass

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\Pi}{\Delta}}$$

wird, oder — was dasselbe bedeutet — dass eine auf die Schicht nach (84) auffallende ebene Welle reflexionsfrei absorbiert wird. Dazu muss

$$\varphi = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\pi s/\lambda_0} \text{ oder } \sigma = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{\Delta}{\Pi}} \tag{85}$$

sein. Es handelt sich um dieselben Schichten, welche in der Optik die Anlauffarben der Metalle verursachen und welche seinerzeit in [7] von *W. Kleinsteuber* und dem Verfasser näher untersucht worden sind. Formel (85) stimmt mit (6) von [7] überein.

Literatur

[1] *Dwight, H. B.:* Skin Effect in Tubular and Flat Conductors. Proc". Amer. Inst. Electr. Engr". Bd. 37(1918), Nr. 8, S. 977...998.

[2] *Fischer, J.:* Die allseitige Feldverteilung in zwei kreiszylindrischen, koaxial geschichteten Stoffen bei axialer Richtung des Wechselstromes. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 40(1932), Nr. 6, S. 207...214.

[3] *Strutt, Max J. O.:* Skineffekt in einem geschichteten Kreiszylinder. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 41(1933), Nr. 2, S. 62...63.

[4] *Fischer, J.*, u. *Max J. O. Strutt:* Skineffekt in einem geschichteten Kreiszylinder. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 41(1933), Nr. 6, S. 219.

[5] *Ekelöf, Stig:* Über den Wechselstromwiderstand von geraden Drähten mit kreisförmigem Querschnitt, die aus mehreren konzentrischen Schichten bestehen. Elektr. Nachr.-Techn. Bd. 10(1933), Nr. 3, S. 115...122.

[6] *Kruse, H.* u. *O. Zinke:* Stromverdrängung in geschichteten zylindrischen Leitern. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 44(1934), Nr. 6, S. 195...203.

[7] *Dällenbach, W.*, u. *W. Kleinsteuber:* Reflexion und Absorption von Dezimeterwellen an ebenen, dielektrischen Schichten. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 51 (1938), Nr. 5, S. 152...156.

Adresse des Autors:
Dr.-Ing. *Walter Dällenbach*, Beustweg 3, Zürich 32.

Welche Folgerungen ergeben sich für den Betrieb von Elektrizitätswerken aus dem Eisenbahnunglück von Wädenswil?

Von *A. Kleiner*, Zürich

621.316.37.0046

Wie es sich herausstellt, ist das Eisenbahnunglück in Wädenswil mit seinen furchtbaren Folgen nicht auf technische Fehler, sondern auf ein menschlich bedingtes Versagen des Lokomotivführers zurückzuführen. Es stellt sich daher automatisch die Frage, wie ein solches Versagen und seine Folgen hätten vermieden werden können. Wir möchten ausdrücklich weder dem Mann einen Vorwurf machen, noch die Notwendigkeit äusserster Konzentration und Pflichterfüllung bagatellisieren, sondern nur die