

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 39 (1948)
Heft: 10

Artikel: Zur Theorie des Synchrotrons
Autor: Wideröe, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1057949>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

Zur Theorie des Synchrotrons

Von R. Wideröe, Zürich

621.384.63

Der Autor erklärt zunächst die Haupteigenschaften der bekanntesten, für die Atomforschung verwendeten Beschleunigungsapparate, nämlich des Zyklotrons, des Betatrons und des Synchrotrons. Dann werden die Bewegungsgleichungen für die im Synchrotron beschleunigten Ionen und Elektronen aufgestellt. Es wird die gleichförmig ungestörte Bewegung, als auch die Phasenschwingungen der Teilchen und der Einfluss einer ungleichförmig, stufenweise einsetzenden Beschleunigung behandelt. Nach einer Untersuchung der Übergangsverhältnisse zwischen zwei Synchronzuständen (Gigator), lässt der Autor ein Zahlenbeispiel folgen.

1. Einleitung

Unter den neueren Maschinen, die der Beschleunigung geladener Teilchen dienen, wird in Zukunft das Synchrotron, welches sowohl zur Elektronen- wie auch zur Ionenbeschleunigung geeignet ist, neben dem Zyklotron (Ionenbeschleuniger) und dem Betatron («Strahlentransformator»-Elektronenbeschleuniger) zweifelsohne eine grosse Bedeutung erhalten. Das Synchrotron wurde erstmalig von Veksler [1]¹⁾ und McMillan [2] vorgeschlagen. Unabhängig davon hat Wideröe [3] im Januar 1946 eine auf dem gleichen Prinzip beruhende Maschine angegeben und auch weitere Vorschläge für einen nach dem gleichen System arbeitenden Ionenbeschleuniger (Gigator) gebracht.

Die Theorie des Synchrotrons wurde bereits mehrmals in der Literatur behandelt [4, 5, 6]. Hier sei besonders auf die im September 1946 erschienene Arbeit von Bohm und Foldy [6] verwiesen, die für den Betrieb des Synchrotrons mit konstanter Frequenz (Elektronenbeschleunigung) eine Lösung der Bewegungsgleichungen angibt. Der entsprechende Teil der vorliegenden Arbeit wurde etwa zu gleicher Zeit und unabhängig davon durchgeführt. Die Arbeit bringt, sowohl für den Betrieb mit konstanter Frequenz, als auch mit konstantem Bahnradius allgemein gültige Lösungen der Bewegungsgleichungen. Diese Lösungen erwiesen sich, insbesondere für die Untersuchung der Ionenbeschleunigung, die sowohl in nicht relativistischen, als auch in relativistischen Bereichen erfolgt, als unbedingt notwendig.

2. Prinzip des Synchrotrons (Gigator)

Zur Beschleunigung geladener Teilchen auf hohe Geschwindigkeiten entsprechend einer Elektronenspannung von vielen MV wird heute fast ausschliess-

Après un exposé des caractéristiques essentielles des appareils d'accélération les plus connus, utilisés pour les recherches nucléaires, le cyclotron, le bétatron et le synchrotron, l'auteur établit les formules de mouvement des ions et électrons accélérés dans un synchrotron. Il traite du mouvement uniforme, sans perturbations, ainsi que des oscillations de phase des particules et de l'effet d'une accélération irrégulière, se produisant par paliers successifs. Il étudie les états transitoires entre deux synchronismes (gigator), puis présente un exemple numérique.

lich das von Ising [7] erwähnte System der mehrfachen Beschleunigung bzw. das von Slepian [8] und Wideröe [9] angegebene Prinzip der Beschleunigung in elektrischen Wirbelfeldern verwendet. Die Teilchen speichern dabei die vom Potentialfeld übernommene Energie als kinetische Energie auf und erreichen somit sukzessive eine sehr hohe Bewegungsenergie, die man auch in Spannungseinheiten pro Elementarladung (als «kinetische Spannung») ausdrücken kann.

Es gibt bei diesen Beschleunigungseinrichtungen allgemein zwei in der Ausführung grundsätzlich verschiedene Anordnungen, lineare und zirkulare Beschleuniger. Bei der linearen Beschleunigung durchfliegen die Teilchen, wie das Wort besagt, eine lineare Anordnung von recht vielen, hintereinandergereihten Beschleunigungsstrecken. Jede Beschleunigungsstrecke wird somit von den Teilchen nur einmal durchlaufen, und man gelangt deshalb zu einem Apparat von grosser Längsausdehnung, sobald man hohe Geschwindigkeiten erreichen will. Bei den zirkularen Beschleunigern wird die Bahnkurve des Teilchens mittels magnetischer Führungsfelder kreisförmig gestaltet, so dass die gleichen Beschleunigungsstrecken mehrmals durchlaufen werden können. Die zirkularen Beschleuniger vermeiden somit die grosse Längsausdehnung der linearen Apparate und können in den meisten Fällen auch mit relativ kleinen Beschleunigungsspannungen auskommen. Dafür verursacht aber die Herstellung des magnetischen Führungsfeldes erhebliche Kosten und Schwierigkeiten.

Beim Zyklotron wird ein zeitlich konstantes magnetisches Führungsfeld benutzt. Die Teilchen durchlaufen eine Spiralbahn und werden dabei bei jedem Umlauf von einer hochfrequenten Spannung beschleunigt. Im Prinzip lassen sich sowohl Elektronen wie auch Ionen beschleunigen. Bei der Be-

¹⁾ siehe Literaturverzeichnis am Schluss.

schleunigung von Elektronen muss aber die Frequenz der Beschleunigungsspannung sehr hoch werden, und es bereitet sehr grosse Schwierigkeiten, die (notwendigerweise recht grossen) Beschleunigungselektroden entsprechend zu erregen. Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten kann das von *Schwinger* und *Veksler* [1] vorgeschlagene, aber noch nicht realisierte Mikrotron [10] bringen.

Beim Strahltransformator [9...23] oder *Betatron* werden die Teilchen durch ein zeitlich zunehmendes Magnetfeld auf einer fast unveränderlichen Kreisbahn gehalten, während die Beschleunigung mittels eines transformatorisch hervorgebrachten elektrischen Wirbelfeldes erfolgt. Da die Höhe der erzeugten Spannung mit der Zahl der Teilchenumläufe proportional zunimmt, eignet sich das Betatron besonders zur Beschleunigung von Elektronen, die sich während des grössten Teils der Beschleunigungszeit mit fast Lichtgeschwindigkeit bewegen. Bei dieser Maschine gibt es keine Hochfrequenzschwierigkeiten. Dafür benötigt der für die Herstellung des elektrischen Wirbelfeldes notwendige magnetische Fluss einen grossen, kostspieligen Eisenkörper, dessen Magnetisierung auch eine recht grosse Blindleistung erfordert. Die höchste Spannung, die man mit dem Strahltransformator erreichen kann, dürfte deshalb aus wirtschaftlichen Gründen etwa 300...400 MV betragen. Bei dieser Spannung lässt sich die Strahlungsdämpfung der kreisenden Elektronen noch innerhalb vernünftiger Grenzen halten und die durch diese Dämpfung bedingten Schwierigkeiten können relativ leicht behoben werden [14].

Das *Synchrotron* lässt sich als ein Betatron beschreiben, bei welchem das magnetische Führungsfeld beibehalten worden ist, während das elektrische Wirbelfeld durch eine hochfrequente Beschleunigungsspannung ersetzt ist [10]. Man kann auf diese Weise die Grösse und das Gewicht des Eisenkörpers stark verkleinern, und da die Kosten der Hochfrequenzapparatur relativ klein sind, ergibt sich eine Beschleunigungsmaschine, die besonders für hohe Spannungen wesentlich billiger als ein entsprechender Strahltransformator sein wird. Da die Frequenz der Beschleunigungsspannung mit der Umlaufsfrequenz der Teilchen übereinstimmen muss, anderseits aber aus konstruktiven Gründen nur eine kleine Änderung der Kreisbahnradien möglich ist, eignet sich das Synchrotron in seiner ursprünglichen Form (nach *McMillan*) besonders gut zur Beschleunigung von bereits vorbeschleunigten Elektronen, deren Geschwindigkeit wegen der hohen Spannung fast konstant ist. In einer von *Pollock* [15] sowie von *Powell* und *Bohm* vorgeschlagenen Form kann man die Elektronen mit relativ kleiner Anfangsspannung in die Vakuumröhre einführen und sie mit einem elektrischen Wirbelfeld (Betatron) auf etwa 2 MV beschleunigen. Da der Eisenkern für den magnetischen Induktionsfluss nur einen kleinen Querschnitt besitzen soll, wird er jetzt gesättigt, und das elektrische Wirbelfeld geht praktisch auf Null zurück. Kurz vorher wird die hochfrequente Beschleunigungsspan-

nung eingeschaltet und in dieser Weise die Beschleunigung der Elektronen nach dem Synchrotronprinzip bis auf die höchste Spannung weitergeführt.

Bei der Beschleunigung von Ionen wird die Geschwindigkeit der Teilchen nicht wie bei der Elektronenbeschleunigung fast konstant sein, sondern nimmt dauernd mit ansteigender Spannung zu. Da aber der Bahnradius praktisch unveränderlich ist, wird die Umlaufsfrequenz der Teilchen steigen und folglich muss auch die Frequenz der Beschleunigungsspannung entsprechend erhöht werden.

Die Beschleunigungsfrequenz müsste in diesem Falle über einen sehr weiten Bereich (beispielsweise im Verhältnis 1 : 10) geändert werden, was bei den in Frage kommenden, recht hohen Frequenzen, grosse Schwierigkeiten bereitet.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, können die Ionen, nach dem System des *Gigators*, mit Wechselspannungen beschleunigt werden, deren Frequenzen genau ein Vielfaches der Ionenumlaufsfrequenz betragen. Wie man leicht erkennt, ist in diesem Falle auch eine mehrmalige Beschleunigung der Ionen möglich. Wenn die Geschwindigkeit der Ionen ansteigt, kann man zunächst innerhalb eines gewissen Bereiches den synchronen (bzw. untersynchronen) Lauf der Teilchen durch eine Erhöhung der Beschleunigungsfrequenz (oder auch des Bahnradius der Teilchen) aufrecht erhalten. Wenn aber dieser Geschwindigkeitsbereich überschritten wird, soll die Beschleunigungsfrequenz auf den ursprünglichen Wert herabgesenkt und die Ionenfrequenz jetzt mit einem kleineren Frequenzmultiplum der Spannungsfrequenz synchronisiert werden. Auf diese Weise kann man durch eine stufenweise Verkleinerung des Multiplums einen beliebig grossen Geschwindigkeitsbereich mit einem relativ kleinen Variationsbereich der Beschleunigungsfrequenz bewältigen²⁾. Die Durchführbarkeit eines derartigen Verfahrens hängt offenbar besonders davon ab, ob es gelingen wird, die Teilchen von einem in den nächstfolgenden Synchronzustand zu bringen. Man kann aber diesen Übergang sehr einfach gestalten, wenn man zwei getrennte Beschleunigungssysteme verwendet, die von zwei unabhängigen Hochfrequenzgeneratoren erregt werden. Die beiden Systeme sollen nun abwechselnd in Betrieb sein und nacheinander die Beschleunigung der Ionen übernehmen. Kurz bevor der erste Generator seine höchste Frequenz erreicht hat, wird die Spannung des zweiten Generators, welcher in diesem Moment seine kleinste Frequenz besitzt, eingeschaltet. Die Ionen können dann während einer kurzen Übergangszeit (jedenfalls theoretisch) von beiden Generatoren synchron beschleunigt werden, wobei der erste Generator mit dem Multiplum M_1 , der zweite mit dem kleineren Multiplum M_2 arbeitet. Nach Einschaltung des zweiten Generators wird der erste Generator wieder entregt und seine Frequenz auf den

²⁾ Wenn man beispielsweise die Beschleunigungsfrequenz um 25 % ändern kann, werden 5 und 4 die beiden kleinsten Multipla sein.

kleinsten Wert vermindert, während der Zeit, wo der zweite Generator die Beschleunigung übernommen hat.

Dieses Spiel kann mehrere Male wiederholt werden, wobei die Ionen mit einem Minimum an Übergangsstörungen von einem zum nächstfolgenden Synchronzustand übergehen.

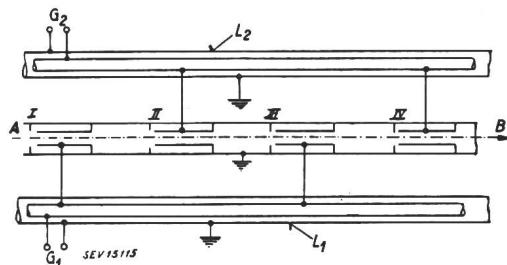


Fig. 1

Prinzipielle Darstellung eines Hochfrequenz-Beschleunigungsapparates (Synchrotron, Gigator), in linearer Darstellung A-B Laufweg der geladenen Teilchen, I...IV Beschleunigungsstrecken, L₁, L₂ koaxiale Leiter, G₁, G₂ Anschlussklemmen für Hochfrequenzgeneratoren

Fig. 1 zeigt einen Teil eines derartigen (geradlinig gezeichneten) Beschleunigungsapparates. Die Beschleunigungselektroden sind als Hohlzylinder ausgebildet, die von einer konzentrischen Energieleitung erregt werden und mit $1/4$ der Wellenlänge schwingen. Es bilden sich somit stehende Wellen, die an den Beschleunigungsstrecken I, II, III und IV Spannungsbäuche erzeugen, während am anderen Ende der Beschleunigungsrohren Spannungsknoten vorhanden sind. Innerhalb der Röhren sind die Teilchen dem elektrischen Felde entzogen, sie werden nur zwischen den Beschleunigungsstrecken beschleunigt und müssen, wie oben erörtert, zur richtigen Zeit hier eintreffen. Wie in der folgenden Untersuchung genauer gezeigt wird, besitzt eine derartige Anordnung gewisse phasenstabilisierende Eigenschaften. Wenn die Teilchen zur falschen Zeit an der Beschleunigungsstrecke eintreffen, ändert sich der Radius der Bahnkurve ein wenig, die Umlaufsfrequenz verändert sich ebenfalls und es ergibt sich eine Beeinflussung der Teilchen in Richtung der für die Beschleunigung richtigen Phasenlage. Es treten gewissermaßen rückführende Kräfte auf, und die zu beschleunigenden Partikel werden deshalb ähnlich wie der Rotor einer Synchronmaschine um eine Gleichgewichtslage (stabile Phasenlage) Schwingungen ausführen.

Es lässt sich leicht zeigen, dass es für die Phasenschwingungen auch eine Stabilitätsgrenze gibt. Wird diese Grenze überschritten (was besonders während des Übergangs zwischen zwei synchronen Zuständen möglich ist), so fallen die Teilchen aus dem Synchronismus heraus, sie können bei dem asynchronen Lauf keine weitere Spannung gewinnen und müssen somit für die weitere Beschleunigung als verloren betrachtet werden.

Wie die Berechnungen zeigen, reicht die Analogie mit der Synchronmaschine sogar noch weiter, indem die steigende Spannung der Teilchen eine adiabatische Dämpfung der Phasenschwingungen

ergibt, die ein allmähliches Abklingen derselben ermöglicht.

3. Gleichförmige Bewegung der Teilchen nach dem Synchronprinzip

Ein Teilchen bewegt sich mit der Geschwindigkeit v_0 entsprechend der Spannung U_0 auf der Kreisbahn R_0 im magnetischen Steuerfeld B_0 . Wie bereits aus der Theorie des Strahlentransformators [11, 12, 13] bekannt ist, muss das magnetische Steuerfeld nach aussen etwas abnehmen, beispielsweise nach dem Gesetz:

$$B_R = B_0 (R_0/R)^K; \quad 0 < K < 1 \quad (1)$$

Die Teilchen sollen dabei allseitig von stabilisierenden (d. h. senkrecht zur Umlaufrichtung wirkenden) Kräften beeinflusst werden. Wenn die Teilchen bei ihrer Bewegung eine einmalige transversale Störung erleiden, führen sie im Kraftfeld der Stabilisierungs Kräfte Schwingungen aus mit den Wellenlängen:

$$\lambda_{rad.} = \frac{2 \pi R}{\sqrt{1-K}} \text{ (radiale Störung)} \quad (2a)$$

$$\text{und } \lambda_{achs.} = \frac{2 \pi R}{\sqrt{K}} \text{ (achsiale Störung)} \quad (2b)$$

Die Frequenz dieser Transversalschwingungen nimmt mit steigender Geschwindigkeit der Teilchen zu, und die Amplituden derselben nehmen adiabatisch ab. Für die folgenden Betrachtungen soll von derartigen Transversalstörungen abgesehen und zunächst ein ungestörtes gleichförmig bewegtes Teilchen betrachtet werden, dessen Spannung kontinuierlich erhöht wird. Wenn die von dem Magnetfeld ausgeübte Lorentzkraft der auf das Teilchen ausgeübten Zentrifugalkraft gleichgesetzt wird, ergibt sich ganz allgemein:

$$e v B_R = \frac{m v_R^2}{R} = m \Omega_R^2 R \quad (3)$$

$$\text{wo } \Omega_R = \frac{v_R}{R}$$

die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens ist.

Zur Abkürzung wird die in Spannungseinheiten gemessene Ruhemasse ϵ des Teilchens eingeführt:

$$\epsilon = \frac{m_0 c^2}{e} = \begin{cases} 0,510 \text{ MV für Elektronen} \\ 931 \text{ MV für Protonen} \end{cases} \quad (4)$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehungen:

$$U = \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1 \right) \approx \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 \text{ (N.R.)} \quad (5a)$$

$$v = c \frac{\sqrt{U^2 + 2 U \epsilon}}{U + \epsilon} \approx c \sqrt{\frac{2 U}{\epsilon}} \text{ (N.R.)} \quad (5b)$$

$$m = m_0 \frac{U + \epsilon}{\epsilon}$$

³⁾ N. R. = nicht relativistisches Gebiet ($U \ll \epsilon$).

E. R. = extrem relativistisches Gebiet ($U \gg \epsilon$).

ergibt sich aus Gleichung (3):

$$B_R = \frac{U + \varepsilon}{c^2} \Omega_R = \frac{1}{cR} \sqrt{U^2 + 2U\varepsilon} \quad (6)$$

$$\text{bzw.: } B_R = \frac{\varepsilon}{c^2} \Omega_R = \frac{1}{cR} \sqrt{2U\varepsilon} \quad (\text{N.R.}) \quad (6a)$$

und entsprechend:

$$\begin{aligned} U_R &= \sqrt{\varepsilon^2 + c^2 B_R^2 R^2} - \varepsilon \approx \frac{B_R^2 c^2 R^2}{2\varepsilon} \\ &= \frac{B_0^2 c^2 R_0^{2K} R^{2(1-K)}}{2\varepsilon} \quad (\text{N.R.}) \quad (7) \end{aligned}$$

$$R = \left(\frac{U^2 + 2U\varepsilon}{c^2 B_0^2 R_0^{2K}} \right)^{\frac{1}{2(1-K)}} \approx \left(\frac{2U\varepsilon}{c^2 B_0^2 R_0^{2K}} \right)^{\frac{1}{2(1-K)}} \quad (\text{N.R.}) \quad (8)$$

$$\Omega_R = \frac{B_R c^2}{U_R + \varepsilon} = \frac{B_0 R_0^K R^{-K} c^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + c^2 B_R^2 R^2}} \approx \frac{B_0 R_0^K R^{-K} c^2}{\varepsilon} \quad (\text{N.R.}) \quad (9)$$

Wie bereits erwähnt, versucht die Umlaufsfrequenz Ω_R der Teilchen sich der Frequenz der Beschleunigungsspannung anzupassen und man erhält somit verschiedene Bahnkurven und verschiedene Betriebsbedingungen, je nachdem wie die Beschleunigungsfrequenz zeitlich verändert wird.

Zunächst soll der, insbesondere für die Beschleunigung von Elektronen, wichtige Fall einer konstanten Beschleunigungsfrequenz betrachtet werden. Im N.R.-Fall erhält man:

$$\Omega_R = \frac{B_{0t} R_0^K R_t^{-K} c^2}{\varepsilon} = \frac{B_0 c^2}{\varepsilon} = \text{konstant} \quad (10)$$

woraus sich mit den Gleichungen (7)...(9) für die Bewegung des Teilchens die folgenden Beziehungen ergeben:

$$R_t = R_0 \left(\frac{B_{0t}}{B_0} \right)^{1/K} \quad (11a)$$

$$U_t = U_0 \left(\frac{B_{0t}}{B_0} \right)^{2/K} \quad (11b)$$

Für die notwendige Spannungserhöhung pro Umlauf (hier Synchronspannung u_s genannt) ergibt sich aus den Gleichungen (11b), (7) und (5b):

$$u_s = \frac{U_0}{B_0} \frac{2}{K} \dot{B} \frac{2\pi R_0}{v} = \frac{2\pi R_0^2}{K} \dot{B} \quad (\text{N.R.}) \quad (12)$$

wo $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$ bedeutet.

Im allgemeinen Fall gestaltet sich die Berechnung der Synchronspannung ganz ähnlich. Man erhält:

$$u_s = 2\pi R_0^2 \dot{B} \frac{1}{1 - (1-K)A} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{2\pi R_0^2}{K} \dot{B} \quad (\text{N.R.}) \\ = 2\pi R_0^2 \dot{B} \quad (\text{E.R.}) \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\text{hier ist: } A = \left(\frac{\varepsilon}{U + \varepsilon} \right)^2 \quad (13a)$$

Es soll nun untersucht werden, nach welchem Gesetz man die Beschleunigungsfrequenz ändern muss, damit der Radius der Teilchenbahnen konstant bleibt. Es wird:

$$\Omega_{0t} = \frac{B_{0t} c^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + c^2 B_{0t}^2 R_0^2}} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{c^2}{\varepsilon} B_{0t} \quad (\text{N.R.}) \\ = \frac{c}{R_0} \quad (\text{E.R.}) \end{array} \right. \quad (14)$$

Für die Synchronspannung ergibt sich in diesem Falle:

$$u_s = \frac{B c^2 R_0^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + c^2 B^2 R_0^2}} \frac{2\pi R_0}{v} \dot{B} = 2\pi R_0^2 \dot{B} \quad (15)$$

Wie zu erwarten war, wird die Synchronspannung in diesem Falle die gleiche wie die Umlaufspannung des Strahlentransformators sein. Für $K = \frac{1}{2}$ wird die Synchronspannung im N.R.-Gebiet halb so gross wie bei dem Betrieb mit konstanter Beschleunigungsfrequenz.

4. Quasistationäre Phasenschwingungen

Es wurde bis jetzt die ungestörte Bewegung eines Teilchens im Synchrotron betrachtet und es sollen nun die bei einer Phasenstörung (longitudinale Störung) entstehenden quasistationären Störschwingungen untersucht werden.

Wenn das Teilchen die Beschleunigungsstrecke zu einem falschen Zeitpunkt erreicht, zu welchem an dieser ein von der Synchronspannung u_s verschiedener Spannungswert u vorhanden ist⁴⁾, so wird die Spannung des Teilchens nach Durchlaufen der Beschleunigungsstrecke um einen kleinen Betrag ΔU von der vorgeschriebenen Teilchenspannung U_0 abweichen. Die Spannungsabweichung ΔU wird zur Folge haben, dass auch die anderen Daten der Bewegung sich um kleine Beträge (Δv_0 , ΔR_0 und $\Delta \Omega_0$) verändern werden.

Aus der Gleichung (6) ergibt sich beispielsweise:

$$B_0 \left(\frac{R_0}{R_0 + \Delta R} \right)^K = \frac{U_0 + \Delta U + \varepsilon}{c^2} (\Omega_0 + \Delta \Omega)$$

$$\text{woraus folgt: } -K \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta U}{U_0 + \varepsilon} + \frac{\Delta \Omega}{\Omega_0} \quad (16)$$

Man gewinnt in ähnlicher Weise leicht die Beziehungen

$$\frac{\Delta U}{U_0} = \frac{U_0 + 2\varepsilon}{U_0 + \varepsilon} (1-K) \frac{\Delta R}{R_0} \approx 2(1-K) \frac{\Delta R}{R_0} \quad (\text{N.R.}) \quad (17a)$$

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_0} = - \left[1 - (1-K)A \right] \frac{\Delta R}{R_0} \approx -K \frac{\Delta R}{R_0} \quad (\text{N.R.}) \quad (17b)$$

⁴⁾ Es soll hier von evtl. elektrischen Wirbelfeldern sowie vom Einfluss der Strahlungsdämpfung abgesehen werden, um die Berechnung möglichst einfach zu gestalten.

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega_0} = - \frac{U_0 + \varepsilon}{U_0 + 2\varepsilon} \left(\frac{1}{1-K} - A \right) \frac{\Delta U}{U_0}$$

$$\approx \frac{K}{2(1-K)} \frac{\Delta U}{U_0} \quad (\text{N.R.}) \quad (17\text{c})$$

$$\frac{\Delta v}{v_0} = (1-K)A \frac{\Delta R}{R_0} \approx (1-K) \frac{\Delta R}{R_0} \quad (\text{N.R.}) \quad (17\text{d})$$

$$A = \left(\frac{\varepsilon}{U_0 + \varepsilon} \right)^2 \quad (13\text{a})$$

Wenn ω die Kreisfrequenz der beschleunigenden Hochfrequenzspannung, φ die Phasenwinkelabweichung vom Synchronwinkel φ_s der zu beschleunigenden Teilchen, u_m der Maximalwert der Beschleunigungsspannung und u die Abweichung der Beschleunigungsspannung von dem Synchronwert u_s ist, so besteht die Beziehung (φ soll klein sein):

$$u = u_m [\sin(\varphi + \varphi_s) - \sin \varphi_s] \approx u_m \cos \varphi_s \cdot \varphi \quad (18)$$

Die Abweichung u der Beschleunigungsspannung erzeugt, wie vorhin erwähnt, eine Abweichung ΔU der Teilchenspannung. Wenn zur Vereinfachung angenommen wird, dass die Beschleunigungsspannung gleichmäßig am ganzen Kreisumfang verteilt ist, so erhält man für ein Zeitelement:

$$d(\Delta U) = u \frac{d\varphi}{2\pi} = u \frac{\Omega_0}{2\pi} dt \quad (19)$$

Aus den Gleichungen (19), (18), (17c) und (6) ergibt sich für die Phasenschwingungen:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Omega} &= \ddot{\varphi} = \frac{-c^2}{2\pi R_0^2} \left(\frac{1}{1-K} - A \right) \frac{u_m \cos \varphi_s}{U_0 + \varepsilon} \varphi \\ &= -k^2 \varphi \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{cases} k = \frac{c}{R_0} \sqrt{\left(\frac{1}{1-K} - A \right) \frac{u_m \cos \varphi_s}{2\pi(U_0 + \varepsilon)}} \\ = \Omega_0 \sqrt{\frac{u_m \cos \varphi_s}{4\pi U_0} \frac{K}{1-K}} \quad (\text{N.R.}) \\ = \frac{c}{R_0} \sqrt{\frac{u_m \cos \varphi_s}{2\pi(U_0 + \varepsilon)} \frac{K}{1-K}} \quad (\text{E.R.}) \end{cases} \quad (20\text{a})$$

Die Differentialgleichung (20) zeigt, dass die Teilchen bei kleinen Störungen harmonische Schwingungen mit der durch den Ausdruck (20a) gegebenen Periode k ausführen werden.

Die Wellenlänge der Phasenschwingungen (in Umläufen gemessen) ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{v}{R_0 k} = \sqrt{\frac{U_0 + 2\varepsilon}{U_0 + \varepsilon} \frac{1}{\frac{1}{1-K} - A} \frac{2\pi U_0}{u_m \cos \varphi_s}} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi U_0 (1-K)}{u_m \cos \varphi_s K}} \quad (\text{N.R.}) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi (U_0 + \varepsilon)}{u_m \cos \varphi_s} \frac{1-K}{K}} \quad (\text{E.R.}) \end{aligned} \quad (20\text{b})$$

Wenn man die Frequenz der Beschleunigung M -mal grösser als die Umlaufsfrequenz der Teilchen macht, so wird die Frequenz der Phasenschwingungen \sqrt{M} -mal grösser. Die Wellenlänge λ sowie auch die räumlichen Amplituden der Schwingungen werden entsprechend um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{M}}$ verkleinert.

Wenn man die bis jetzt vernachlässigte Veränderung der Werte U und Ω mit der Zeit berücksichtigen will, kann man als neue Zeitveränderliche $\tau = t/t_0$ einführen, wobei t_0 die der Spannung U_0 entsprechende Zeit (für $t = 0$ soll $U = 0$ sein) bezeichnet. Nach den Gleichungen (6), (7) und (9) ergibt sich angenähert ($\tau \approx 1$):

$$B_{0t} = B_0 \tau \quad (21\text{a})$$

$$\Omega_{0t} = \Omega_0 \tau^A \quad (21\text{b})$$

$$U_t + \varepsilon = (U_0 + \varepsilon) \tau^{1-A} \quad (21\text{c})$$

$$\frac{1}{1-K} - A_t = \left(\frac{1}{1-K} - A_0 \right) \tau^{\frac{2A(1-A)(1-K)}{1-A(1-K)}} \quad (21\text{d})$$

und somit anstatt der Differentialgleichung (20) die neue Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - \frac{\mu}{\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + (k t_0 \tau^{\mu/2})^2 \varphi = 0 \quad (22)$$

$$\text{mit } \mu = (A-1) \frac{1-3A(1-K)}{1-A(1-K)} \quad (22\text{a})$$

Die Lösung dieser Besselschen Differentialgleichung wird im allgemeinen eine Summe zweier Zylinderfunktionen von der Ordnung $\frac{1+\mu}{2+\mu}$ mit dem Argument $\left(\frac{k t_0}{1+\mu/2} \tau^{1+\mu/2} \right)$ sein.

Wenn man die Zylinderfunktion durch die entsprechende trigonometrische Näherung ersetzt ($k t_0 \gg 1$), so ergibt sich als Lösung ($\varphi = \varphi_0$ für $t = t_0$):

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\mu/4} \cos k(t - t_0) \quad (23)$$

Der Dämpfungsfaktor der Phasenschwingungen wird somit:

$$\begin{cases} D_\varphi = \tau^{\mu/4} = \tau^{\frac{A-1}{4} \frac{1-3A(1-K)}{1-A(1-K)}} \\ = \tau^{\frac{U}{2\varepsilon} \left(\frac{2}{K} - 3 \right)} \quad (\text{N.R.}) \\ = \tau^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{E.R.}) \end{cases} \quad (24)$$

Wie man aus der Gleichung (24) ersieht, werden die Phasenschwingungen bei kleinen Teilchenspannungen (N.R.-Bereich) nur gedämpft, wenn $K > \frac{2}{3}$ ist. Der Dämpfungsexponent wird aber in diesem Bereich sehr klein sein und dürfte für die praktische Ausführung kaum genügen.

Für $K = \frac{1}{2}$ erhält man zunächst eine Entdämpfung der Phasenschwingungen, die bei $U = 80$ MV (Protonenbeschleunigung, $\varepsilon = 931$ MV) ein Maximum mit $\tau^{0,0725}$ erreicht, bei $U = 214$ MV verschwindet und für noch höhere Spannungen in eine schwache Dämpfung übergeht (bei $U = 931$ MV ist die Dämpfung $\tau^{-0,133}$).

Man kann eine stärkere Dämpfung beispielsweise dadurch erreichen, dass man die Beschleunigungsspannung u_m während der Beschleunigung abnehmen lässt. Wenn beispielsweise die Spannung u_m proportional mit der Zeit abnimmt, wird der Dämpfungsfaktor im N.R.-Bereich etwa $\tau^{-\frac{1}{4}}$ und im E.R.-Bereich $\tau^{-\frac{1}{2}}$.

Ein derartiges Verfahren lässt sich bei Anwendung von mehreren Frequenzmultiplika und zwei alternierenden Beschleunigungsspannungen relativ leicht anwenden. Wenn beispielsweise der Frequenzbereich eines Multiplums 25 % ist, muss die Beschleunigungsspannung während der gleichen Zeit auf etwa 80 % ihres Anfangswertes gesenkt werden und der Synchronwinkel φ_s würde beispielsweise nur von $17,4^\circ$ auf 22° ansteigen. Die Verkleinerung der Stabilitätsgrenze wird nicht sehr wesentlich sein, während die Phasenschwingungen um etwa 5...6 % gedämpft werden. Bei der «Umschaltung» auf ein neues Frequenzmultiplum wird die Beschleunigungsspannung von neuem mit seinem höchsten Wert beginnen und allmählich wieder verkleinert werden.

Für die relativen Frequenzschwankungen ergibt sich:

$$\left(\frac{\Delta\Omega}{\Omega_{0t}}\right)_{max} = \tau^{\mu/4-A} \varphi_0 \sqrt{\frac{U+\varepsilon}{U+2\varepsilon} \left(\frac{1}{1-K} - A\right) \frac{u_m \cos \varphi_s}{2\pi U}} \quad (25)$$

und für die relativen Radialschwankungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)_{max} &= \\ &= \tau^{\mu/4-A} \varphi_0 \sqrt{\frac{1}{U+2\varepsilon} \frac{\frac{1}{1-K} - A}{[1-(1-K)A]^2} \frac{u_m \cos \varphi_s}{2\pi U}} \end{aligned} \quad (26)$$

Wenn der Dämpfungsfaktor der Phasenschwingungen $\tau^{\mu/4}$ ist, werden somit die Radialschwankungen um den Faktor

$$\tau^{\mu/4-A} \quad (27)$$

gedämpft. Im obigen Beispiel werden die Radialschwankungen auf etwa 75 % ihres ursprünglichen Wertes vermindert.

Wenn man (wie bei der Elektronenbeschleunigung) die Beschleunigungsfrequenz konstant hält und die Synchronbedingung durch eine Vergrößerung der Bahnradien erfüllt, ergeben sich anstatt der Gleichung (21) die folgenden Beziehungen:

$$\Omega_{0t} = \Omega_0 \quad (28a)$$

$$R_t = R_0 \tau^{\frac{A}{1-(1-K)A}} \quad (28b)$$

$$U_t + \varepsilon = (U_0 + \varepsilon) \tau^{\frac{1-A}{1-(1-K)A}} \quad (28c)$$

$$\left(\frac{1}{1-K} - A_t\right) = \left(\frac{1}{1-K} - A_0\right) \tau^{\frac{-2A(1-A)(1-K)}{[1-(1-K)A]^2}} \quad (28d)$$

woraus:

$$\mu = - \left[\frac{1+A}{1-(1-K)A} - \frac{2A(1-A)(1-K)}{[1-(1-K)A]^2} \right] \quad (29)$$

Für die Dämpfungsfaktoren ergeben sich entsprechend:

$$D_\varphi = \tau^{\mu/4} \begin{cases} = \tau^{\frac{-1}{2K}} & (\text{N.R.}) \\ = \tau^{-\frac{1}{4}} & (\text{E.R.}) \end{cases} \quad (30)$$

$$D_{(\Delta R/R_0)} = \tau^{\frac{-\mu}{4}} - \frac{U+\varepsilon}{U} \frac{1-A}{1-(1-A)K} \begin{cases} = \tau^{\frac{-3}{2K}} & (\text{N.R.}) \\ = \tau^{-3/4} & (\text{E.R.}) \end{cases} \quad (31)$$

Man erhält also in diesem Falle ständig eine Dämpfung der Phasenschwingungen. Für $K = \frac{1}{2}$ werden die Radialschwankungen im E.R.-Gebiet dreimal so kräftig gedämpft wie bei dem vorhin untersuchten Betrieb mit konstantem Bahnradius.

Es wurden bis jetzt nur Phasenschwingungen mit kleinen Amplituden betrachtet, während, besonders bei einem Synchronismuswechsel, auch Schwingungen mit grossen Amplituden möglich sind. Da die mathematische Behandlung derartiger Schwingungen sich vollständig mit der üblichen Untersuchung von beispielsweise Pendelschwingungen deckt, sollen hier nur kurz die Ergebnisse dieser Berechnungen angegeben werden. Wenn man von der zeitlichen Veränderung der Spannung absieht und als Veränderliche den Winkel $\psi = \varphi + \varphi_s$ einführt, wird die Differentialgleichung der Phasenschwingungen:

$$\ddot{\psi} = -k_0^2 (\sin \psi - \sin \varphi_s) \quad (32)$$

$$k_0 = \Omega_0 \sqrt{\frac{U_0 + \varepsilon}{U_0 + 2\varepsilon} \left(\frac{1}{1-K} - A\right) \frac{u_m}{2\pi U_0}} \quad (32a)$$

Betrachtet man zunächst den einfacheren Fall: $\dot{\psi} = 0$, $\ddot{\psi} = \Delta\Omega_a$, so erhält man die für den Synchronbetrieb ($p \gtrless 1$) gültige Lösung der Differentialgleichung (32)⁵⁾:

$$\psi = 2 \arcsin p \cdot \operatorname{sn}_p k_0 t \quad (33a)$$

$$\dot{\psi} = \Delta\Omega = \Delta\Omega_a \operatorname{cn}_p k_0 t \quad (33b)$$

$$\Delta R = \Delta R_a \operatorname{dn}_p k_0 t \quad (33c)$$

Für den Modul p der elliptischen Funktionen erhält man:

⁵⁾ $\operatorname{sn} = \text{sinusamplitude}$, $\operatorname{cn} = \text{cosinusamplitude}$
 $\operatorname{dn} = \text{deltaamplitude}$ (Jacobische elliptische Funktion)

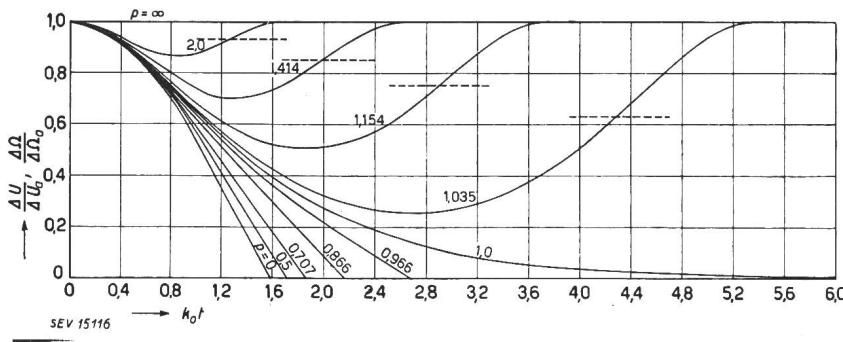
$$p = \frac{\Delta \Omega_a}{2 k_0} =$$

$$= \frac{\Delta \Omega_a}{\Omega_0} \sqrt{\frac{(U+2\varepsilon)\pi U_0}{(U+\varepsilon)\left(\frac{1}{1-K}-A\right)2u_m}} = \frac{\Delta \Omega_a}{\Delta \Omega_{a max}} \quad (34)$$

Fig. 2 zeigt den Verlauf der elliptischen Schwingungen für verschiedene Werte des Moduls p . Wenn $p = 1$ wird, d. h. für

$$\Delta \Omega_a = \Delta \dot{\Omega}_a =$$

$$= \Omega_0 \sqrt{\frac{U+\varepsilon}{U+2\varepsilon} \left(\frac{1}{1-K}-A\right) \frac{2u_m}{\pi U_0}} = 2k_0 \quad (35)$$



wird die Stabilitätsgrenze der synchronen Schwingungen erreicht, bei noch grösseren Amplituden fallen die Teilchen ausser Tritt und kommen in den asynchronen Zustand hinein. Die entsprechende Lösung der Differentialgleichung (32) wird:

$$\psi = 2 \arcsin \operatorname{sn}_{1/p} p k_0 t \quad (36a)$$

$$\dot{\psi} = \Delta \Omega = \Delta \Omega_a \operatorname{dn}_{1/p} p k_0 t \quad (36b)$$

Wenn $p \gg 1$ wird (asynchroner Betrieb mit grossem Schlupf), kann man angenähert die elliptischen Funktionen durch entsprechende trigonometrische ersetzen und bekommt:

$$\begin{aligned} \Delta \Omega / \Delta \Omega_a &\approx 1 - \frac{1}{2p^2} \sin^2 p k_0 t \\ &= \left(1 - \frac{1}{4p^2}\right) + \frac{1}{4p^2} \cos \Delta \Omega_a t \end{aligned} \quad (37)$$

Man erkennt hieraus, dass die Teilchen nun überlagerte Schwingungen mit der Schlupffrequenz $\Delta \Omega_a$ ausführen. Die Maximalwerte dieser überlagernten Schwingungen ergeben sich (an der Maximalabweichung $\Delta \Omega_{a max}$ gemessen) zu:

$$\Delta \Omega / \Delta \Omega_{a max} = \frac{1}{2} (p - \sqrt{p^2 - 1}) \approx \frac{1}{4p} = \frac{1}{4} \frac{\Delta \Omega_{a max}}{\Delta \Omega_a} \quad (38)$$

sie werden also etwa umgekehrt proportional mit dem Schlupf abnehmen.

Betrachtet man den Fall wo die Synchronspannung nicht gleich Null ist ($\sin \varphi_s \neq 0$), mit den Randbedingungen $t = 0, \psi = 0, \dot{\psi} = \Delta \Omega_a$, so lässt

sich die Differentialgleichung (32) auf die folgende Gleichung zurückführen:

$$\dot{\psi} = \Delta \Omega = \Delta \Omega_a \sqrt{1 - \frac{1}{p^2} \left(\sin^2 \frac{\psi}{2} - \frac{\psi}{2} \sin \varphi_s \right)} \quad (39)$$

$$p = \frac{\Delta \Omega_a}{2 k_0} \quad (34)$$

Das Integral (39) lässt sich mit bekannten Funktionen in geschlossener Form nicht lösen. Dagegen lässt sich die Stabilitätsgrenze für den synchronen Betrieb daraus berechnen, dass für die maximal zulässige Amplitude der Phasenschwingungen

Fig. 2
Darstellung ungedämpfter elliptischer Schwingungen der geladenen Teilchen im Synchrotron bei Betrieb ohne Energiezuwachs

$k_0 t$: Zeitmass, $\Delta U / \Delta U_0$: relative Änderung der Teilchenspannung, $\Delta \Omega / \Delta \Omega_a$: relative Änderung der Winkelgeschwindigkeit der Teilchen, $p = \Delta \Omega_a / 2k_0$: Modul der Schwingungsform

$p = 0$: harmonische Schwingung (nur $\frac{1}{4}$ der Sinuskurve eingezeichnet)
 $p = 1$: aperiodischer Grenzfall, Stabilitätsgrenze der synchronen Schwingungen

$p > 1$: asynchroner Betrieb mit überlagerten Schwingungen mit der Schlupffrequenz $\Delta \Omega_a$

$\psi = \pi - \varphi_s$, $\dot{\psi} = 0$ gesetzt werden kann. Man erhält dann:

$$\Delta \Omega_{a s max} = \Delta \Omega_{a max} \sqrt{\cos \varphi_s - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_s\right) \sin \varphi_s} \quad (40)$$

Fig. 3 zeigt die Abnahme der maximal zulässigen Abweichung der Winkelgeschwindigkeit mit zunehmendem Synchronwinkel φ_s .

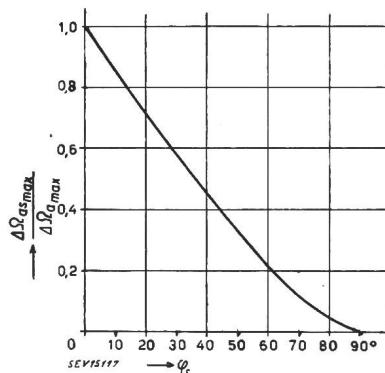


Fig. 3
Abhängigkeit der maximal zulässigen Abweichung der Winkelgeschwindigkeit der Teilchen vom Synchronwinkel
 φ_s : Synchronwinkel der zu beschleunigenden Teilchen,
 $\Delta \Omega_{a s max} / \Delta \Omega_{a max}$: relative Änderung der maximal zulässigen Abweichung von der Winkelgeschwindigkeit der Teilchen

Fig. 4 zeigt noch einige, durch numerische Integration berechnete Kurven der Winkelgeschwindigkeit (bzw. Radialabweichung), sowie auch eine Kurve für den Phasenwinkel eines asynchronen Teilchens entsprechend der Gleichung (32). Man erkennt aus den Bewegungskurven (die den Dämpfungseinfluss nicht berücksichtigen), dass die Teilchen nur in einem Grenzfall ($p = 0,529$ bzw. $p = 1,255$) beim Durchgang durch den Synchronismuspunkt ($\Delta \Omega = 0$) tatsächlich in den synchronen Zustand gebracht werden können. Mit zunehmen-

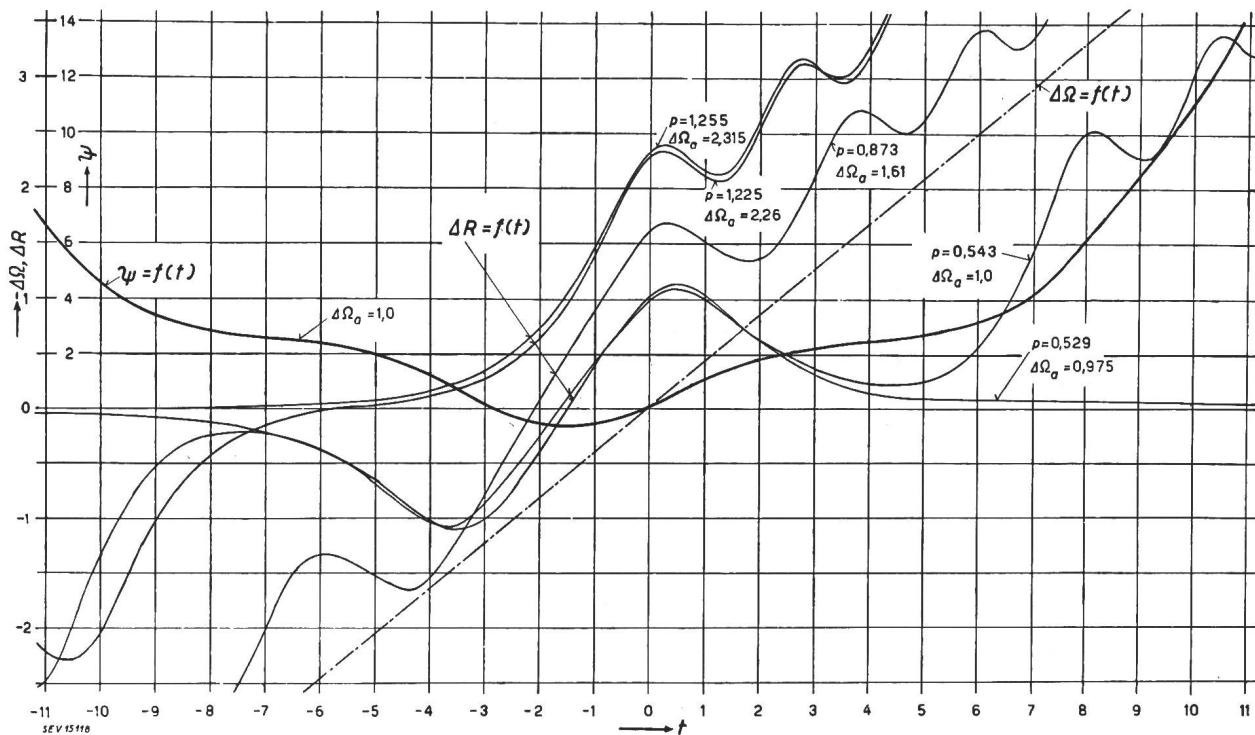


Fig. 4

Bewegungskurven geladener Teilchen bei Betrieb mit Energiezuwachs und ohne Dämpfung

$\Delta\Omega$ Winkelgeschwindigkeitsänderung, ΔR Radialabweichung, ψ Phasenwinkel, p Modul, $\Delta\Omega_0$ Frequenzabweichung der Teilchen zur Zeit $t = 0$ ($\Delta\Omega_0 = 0,975$ stellt die Grenze der synchronen Schwingungen dar). Die strichpunktierte Linie zeigt die Teilchenbewegung bei einer Beschleunigungsspannung $u_m = 0$, wenn also keine Beschleunigung erfolgt. Der Berechnung dieser Bewegungskurven lagen noch folgende Werte zugrunde: $k_0 = 0,922$, $\varphi_s = 30^\circ$, $u_s = \frac{1}{2} u_m$)

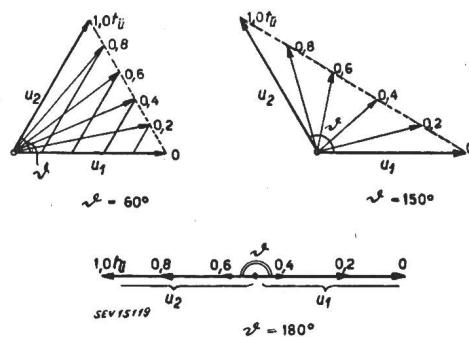
der Dämpfung kann der Bereich der Einfangmöglichkeit ständig vergrössert werden.

5. Übergangsverhältnisse zwischen zwei synchronen Zuständen im Gigator

Es sollen nun die Phasenschwingungen untersucht werden, die im Gigator beim Übergang zu einer neuen Beschleunigungsfrequenz mit kleinem Multiplum entstehen können. Man setze dabei voraus, dass die beiden Beschleunigungsfrequenzen (unter Berücksichtigung der verschiedenen Multipla) genau gleich sind und dass die erste Beschleunigungsspannung auf Null herabgesenkt wird, während die zweite Beschleunigungsspannung von Null auf ihren Nennwert erhöht wird. Die Zeit der Spannungsveränderung soll als Übergangszeit t_{ii} bezeichnet werden. Über den Phasenwinkel zwischen den beiden Beschleunigungsspannungen zu Beginn der Übergangszeit können keine Voraussetzungen gemacht werden, der Phasenwinkel kann somit alle Werte zwischen 0 und 2π annehmen. Fig. 5 zeigt, wie der Vektor sich während der Übergangszeit verändern muss, wenn der Phasenwinkel ϑ verschiedene Werte besitzt. Falls man zur Vereinfachung annimmt, dass sich die beiden Spannungen zeitproportional verändern, so bewirkt der Übergang von der einen zu der anderen Spannung eine plötzlich einsetzende (konstante) Frequenzveränderung. Wenn $\vartheta = \pi$ ist, wird diese Frequenzabweichung am grössten sein und zwar gleich

$$\Delta\Omega_1 = \frac{\pi}{t_{ii}} \quad (41)$$

oder an der Stabilitätsgrenze $\Delta\Omega_{as max}$ gemessen ($t_{ii} = \alpha T_0$, $T_0 = 2\pi/k_0$ = Zeit für eine volle Schwingung der Teilchen):



Vektorielle Darstellung der Veränderung der Beschleunigungsspannung beim Übergang vom ersten zum zweiten Hochfrequenzgenerator

t_{ii} Übergangszeit, u_1 , u_2 Beschleunigungsspannungen des ersten und zweiten Hochfrequenzgenerators, θ Phasenwinkel zwischen u_1 und u_2

$$\Delta\Omega_1/\Delta\Omega_{as max} = \frac{1}{4\alpha \sqrt{\cos \varphi_s - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_s\right) \sin \varphi_s}} \quad (42)$$

Wenn man beispielsweise eine maximale Frequenzabweichung erhalten will, die höchstens halb so gross wie die nach Gleichung (40) angegebene Stabilitätsgrenze $\Delta\Omega_{as max}$ sein soll, so würde sich bei $\sin \varphi_s = 17,4^\circ$ ($u_s/u_m = 0,3$) eine minimale Übergangszeit von $t_{ii} = 0,66 T_0$ ergeben. Man kann

somit in dieser Weise eine untere Grenze für die Übergangszeit t_{ii} bestimmen. Wie Fig. 5 zeigt, wird die resultierende Beschleunigungsspannung in der Übergangszeit auch etwas verkleinert. Im Grenzfall $\vartheta = \pi$ sinkt die Beschleunigungsspannung sogar kurzzeitig auf Null herunter. Eine derartige Spannungsabsenkung kann nun, je nach Phasenlage der Teilchen, zu einer Vergrösserung oder zu einer Verkleinerung der Phasenschwingungen führen. Hier soll lediglich der gefährlichere Fall einer Vergrösserung der Phasenschwingung betrachtet werden. Eine genaue Untersuchung der Phasenschwingungen erfordert die Lösung der entsprechenden Hillischen Differentialgleichung:

$$\ddot{\psi} + f(t) \cdot (\sin \psi - \sin \varphi_s) = 0 \quad (43)$$

Die numerische Integration dieser Gleichung ist sehr umständlich. Man kann aber einen Begriff von der Grösse der Störung erhalten, wenn man annimmt, dass die Beschleunigungsspannung für eine gewisse Zeit βT_0 ganz ausgeschaltet wird, so dass die Teilchen während dieser Zeit eine Verminde rung $\Delta\Omega_2$ ihrer Winkelgeschwindigkeit erhalten. Die entsprechende Abweichung ergibt sich durch Integration der Gleichung (32), wenn das $\sin \psi$ -Glied fortgelassen wird.

$$\Delta\Omega_2 = -k_0^2 \sin \varphi_s \cdot \beta T_0 \quad (44)$$

Gemessen an der Stabilitätsgrenze $\Delta\Omega_{as\ max}$ ergibt sich:

$$\Delta\Omega_1 / \Delta\Omega_{as\ max} = -\frac{\beta \pi \sin \varphi_s}{\sqrt{\cos \varphi_s - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_s\right) \sin \varphi_s}} \quad (45)$$

Wenn man für die Zeit βT_0 das Zeitintervall einsetzt, während welchem die Beschleunigungsspannung den Wert u_s unterschreitet, so ergibt sich für den Faktor β :

$$\beta = \frac{2 \varphi_s}{\pi} \alpha \quad (46)$$

Im beschriebenen Beispiel wird $\beta = 0,128$ und die Frequenzabweichung $\Delta\Omega_2 = 0,157 \Delta\Omega_{as\ max}$, d. h. die gesamte Frequenzabweichung kann etwa 66 % der Stabilitätsgrenze erreichen. Man kann durch eine Minimalrechnung leicht zeigen, dass sich die kleinste gesamte Frequenzabweichung für

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{8 \varphi_s \sin \varphi_s}} \quad (47)$$

d. h. im vorliegenden Beispiel ($\varphi_s = 17,4^\circ$) bei $\alpha = 1,17$ ergibt. Die gesamte Frequenzabweichung erreicht in diesem Falle etwa 56 % der Stabilitätsgrenze.

6. Beispiel

Als Beispiel soll ein Gigator mit $R_0 = 2$ m Bahnradius zur Beschleunigung von Protonen betrachtet werden. Bei einer maximalen Steuerinduktion von 6000 Gs lassen sich die Protonen in einer derartigen Maschine auf etwa 65 MV beschleunigen.

Wegen der grossen Ruheenergie der Protonen ($\varepsilon = 931$ MV) kann man fast im ganzen Bereich mit den N.R.-Gleichungen auskommen. Wenn man eine Anfangsspannung der Protonen von 1 MV annimmt, so wird die Geschwindigkeit derselben von $0,139 \cdot 10^{10}$ cm/s auf $1,06 \cdot 10^{10}$ cm/s ansteigen. Da die Frequenz der beiden Hochfrequenzgeneratoren um maximal 25 % geändert werden soll, ergeben sich für die kleinstmöglichen Multipla der beiden Beschleunigungssysteme etwa die folgenden Zahlen:

Erster Generator: $M = 25, 16, 11, 8, 6, 4$

Zweiter Generator: $M = 20, 13, 9, 7, 5$

Die Frequenz der beiden Generatoren muss innerhalb der Grenzen 27,7 und 34,6 MHz verändert werden, d. h. die Wellenlängen variieren zwischen 10,8 und 8,7 m.

Wird eine Frequenz von 50 Hz für das magnetische Steuerfeld gewählt, so wird die Synchronspannung am Anfang $u_s = 4,75$ kV betragen. Als Maximalwert für die Beschleunigungsspannung u_m soll 14,2 kV angenommen werden, d. h. ein Effektivwert von 10 kV. Man erhält dann einen Synchronwinkel $\varphi_s = 17,4^\circ$, d. h. $\sin \varphi_s = 0,3 = u_s/u_m$. Die Kreisfrequenz der Phasenschwingungen wird dann im Anfang (bei $K = \frac{1}{2}$, $U_0 = 1$ MV, $t_0 = 382 \mu s$, $B_0 = 720$ Gs, $M = 25$): $k = 0,164$, $\Omega_0 = 1,14 \cdot 10^6$ bzw. $k t_0 = 435$, während die Wellenlänge der Schwingungen $\Lambda = 6,1$ Protonenumläufe und die Vollschnüngszeit $T_0 = 5,5 \mu s$ sein wird. Die Stabilitätsgrenze der räumlichen Phasenschwingungen wird:

$$\Delta\Omega_{as\ max} / \Omega_0 = \frac{2 k_0}{M \Omega_0} \sqrt{\cos \varphi_s - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_s\right) \sin \varphi_s} = 1,02 \%$$

und die maximal möglichen Radialschwingungen erreichen den doppelten Wert. Falls man die Beschleunigungsspannung umgekehrt proportional mit der Zeit verändert, werden die Radialamplituden während einer Vollschnüngung um etwa 2,3 % gedämpft. Zwischen zwei Übergängen ($\tau = 1,25$) werden die Radialschwingungen auf etwa 75 % ihres ursprünglichen Wertes verkleinert.

Da die Wellenlänge der Phasenschwingungen verhältnismässig klein ist (die bisherigen Berechnungen gelten eigentlich nur für grosse Wellenlängen), wird man zweckmässig für jedes Beschleunigungssystem zwei getrennte, um 180° phasenverschobene Beschleunigungsspannungen verwenden. Man braucht dann an jeder Beschleunigungsstrecke nur die halbe Spannung (5 kV) anzulegen, während die Wellenlänge der Phasenschwingungen pro Beschleunigungsstrecke den doppelten Wert (12,2 Durchläufe) erreicht.

Man erkennt, dass durch eine entsprechend grosse Wahl des Multiplums M die Radialschwingungen verkleinert und auf diese Weise die Anwendung eines schmalen magnetischen Steuerfeldes ermöglicht werden kann.

7. Einfluss der diskontinuierlich verteilten Beschleunigung

Die bisherigen Berechnungen beruhen auf der Annahme, dass die Beschleunigung der Teilchen, wie beim Strahlentransformator, gleichmässig am ganzen Umfang erfolgt, während aber tatsächlich eine sprunghafte Beschleunigung der Teilchen in wenigen Beschleunigungsstrecken stattfindet. Man kann den Unterschied der Verhältnisse, wie in Fig. 6 gezeigt wird, dadurch berücksichtigen, dass der angenommenen, stetig ansteigenden Teilchen-

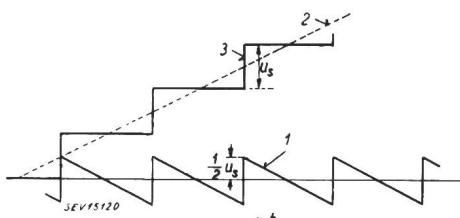


Fig. 6
Darstellung einer diskontinuierlich verteilten Beschleunigungsspannung

1 sägezahnförmige Wechselspannung mit der Amplitude $\frac{u_s}{2}$,
2 kontinuierliche Beschleunigungsspannung, 3 diskontinuierliche Beschleunigungsspannung (Überlagerung von 1 und 2),
 t Zeit

spannung eine sägezahnförmige Wechselspannung überlagert wird. Die Frequenz dieser Wechselspannung wird gleich der Durchlaufsfrequenz der Teilchen, d. h. gleich $q \Omega$, wenn q die Zahl der Beschleunigungsstellen am Kreisumfang ist. Die Maximalamplitude der Wechselspannung wird $\frac{1}{2} u_s$, während diejenige der Spannungs-Grundwelle $\frac{u_s}{\pi}$ betragen wird. Unter dem Einfluss der überlagerten Wechselspannung wird die longitudinale Geschwindigkeit der Teilchen moduliert, und es tritt dadurch eine periodisch wirkende, transversale Zusatzkraft ΔF auf. Bei N.R.-Verhältnissen wird:

$$\begin{aligned} \Delta F &= e(v_0 + \Delta v) B \left(\frac{R_0}{R_0 + \Delta R} \right)^K - \frac{m(v_0 + \Delta v)^2}{R_0 + \Delta R} \\ &= \frac{mv^2}{R} (1-K) \frac{\Delta R}{R} - \frac{mv^2}{R} \frac{\Delta U}{2U} \end{aligned} \quad (48)$$

Wenn man für die Spannungsabweichung ΔU die Grundwelle der überlagerten Wechselspannung einsetzt und nach der Weglänge $x = vt$ differenziert, so ergibt sich die folgende Gleichung (49) für die Teilchenbewegung:

$$\Delta R'' = \frac{1-K}{R_0^2} \Delta R + \frac{u_s}{2\pi U_0} \cos \frac{qx}{R} \quad (49)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt bekanntlich freie, von den Anfangsbedingungen abhängige Schwingungen sowie auch erzwungene Schwingungen mit der Modulationsfrequenz $q \Omega_0$. Die relative Amplitude der letzteren ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \Delta R_{erzw.}/R_0 &= \frac{1}{q^2 - 1 + K} \frac{u_s}{2\pi U_0} \\ &= \frac{1-K}{2K(q^2 - 1 + K)} \frac{u_s}{u_m} \left(\frac{\Delta \Omega_{a max}}{\Omega_0} \right)^2 \end{aligned} \quad (50)$$

Für $q = 1$, $u_s = 0,3 u_m$, $K = \frac{1}{2}$ wird der vor $\left(\frac{\Delta \Omega_{a max}}{\Omega_0} \right)^2$ stehende Faktor 0,3. Man sieht somit, dass die überlagerten Radialschwingungen sehr klein sind (Grössenordnung $\ll 1\%$ und deshalb gar keine Rolle spielen werden. Mit steigender Anzahl q der Beschleunigungsstellen nehmen die Radialamplituden ebenfalls stark ab. Für $K = \frac{1}{2}$ ergibt sich beispielsweise:

$q =$	1	2	4	8	10
$\Delta R_{erzw.}/R_0 =$	100	14,3	3,2	0,79	0,50 %

Die überlagerte Wechselspannung $\frac{u_s}{\pi} \cos q \Omega t$

bewirkt auch eine entsprechende Veränderung der Longitudinalgeschwindigkeit:

$$\Delta v/v = \frac{u_s}{2\pi U_0} \cos q \Omega t \quad (51)$$

Die entsprechende Phasenschwingung $\Delta \varphi_{el}$ (im elektrischen Winkelmaß gemessen) wird beim Multiplem M der Beschleunigungsfrequenz:

$$\Delta \varphi_{el} = M \int \Omega dt = \frac{Mu_s}{2\pi U_0 q} \sin q \Omega t \quad (52)$$

Für $q = 2$, $M = 25$, $u_s = 14,2$ kV, $U_0 = 1$ MV wird die Maximalamplitude der Phasenschwingung $1,62^\circ$ (elektrisch) und spielt somit noch keine grosse Rolle. Wird aber M noch grösser gewählt, so müsste auch die erzwungene Phasenschwingung und die daraus sich ergebende Spannungsmodulation berücksichtigt werden.

Die Transversalschwingungen der Teilchen bewirken wiederum longitudinale Oberschwingungen, man kann aber leicht zeigen, dass diese Schwingungen klein sind und keine Rolle spielen können.

Literatur

- [1] Veksler, V. J. Phys., Moskwa, Bd. 9(1945), S. 153 ff.
- [2] McMillan, Edwin M.: The Synchrotron, a Proposed High Energy Particle Accelerator. Phys. Rev. Bd. 68 (1945), Nr. 5/6, S. 143...144.
- [3] Wideröe, Rolf. Norwegische Pat.-Anm. Nr. 84 507 vom 31. Januar 1946.
- [4] Denison, David M., u. a.: The Stability of Synchrotron Orbits. Phys. Rev. Bd. 70(1946), Nr. 1/2, S. 58..67.
- [5] Frank, N. H.: The Stability of Electron Orbits in the Synchrotron. Phys. Rev. Bd. 70(1946), Nr. 3/4, S. 177...183.
- [6] Bohm, D., u. L. Foldy: The Theory of the Synchrotron. Phys. Rev. Bd. 70(1946), Nr. 5/6, S. 249..258.
- [7] Ising, Gustaf: Prinzip einer Methode zur Herstellung von Kanalstrahlen hoher Voltzahl. Ark. Matem. Astron. Fys. Bd. 18(1924/25), Nr. 30.
- [8] Slepian, Joseph: X-Ray Tube. Amerikanisches Pat. Nr. 1 645 304 vom 1. April 1922.
- [9] Wideröe, Rolf: Über ein neues Prinzip zur Herstellung hoher Spannungen. Arch. Elektrotechn. Bd. 21(1928/29), Nr. 4, S. 387...406.
- [10] Schiff, L. I. Rev. Sci. Instrum. Bd. 17(1946), Nr. 1, S. 6 ff.

- [11] Kerst, D. W.: The Acceleration of Electrons by Magnetic Induction. Phys. Rev. Bd. 60(1941), Nr. 1, S. 47...53.
- [12] Kerst, D. W., u. R. Serber: Electronic Orbits in the Induction Accelerator. Phys. Rev. Bd. 60(1941), Nr. 1, S. 53...58.
- [13] Wideröe, Rolf: Der Strahlentransformator. Schweiz. Arch. angew. Wiss. Techn. Bd. 13(1947), Nr. 8, S. 225...232, u. Nr. 10, S. 299...311.

- [14] Wideröe, Rolf. Schweizer Pat.-Anm. Nr. 12 017 vom 16. Mai 1946.
- [15] Pollock, H. C.: Combination of Betatron and Synchrotron for Electron Acceleration. Phys. Rev. Bd. 69(1946), Nr. 3/4, S. 125.

Adresse des Autors:

Dr. Rolf Wideröe, Giesshübelstrasse 114, Zürich 45.

Die Wicklungsisolation im Grossmaschinenbau

Vortrag, gehalten an der Isolationstagung des SEV vom 24. April 1947 in Zürich,
von F. Beldi, Baden

621.318.048

Im ersten Teil wird die Beanspruchung der Wicklungsisolation und ihre Verbesserung behandelt. Es zeigt sich, dass die wärmelektrischen Probleme im Dauerbetrieb für bedeutend höhere Spannungen gelöst sind, als solche heute zur Anwendung gelangen. Auch die Alterungsvorgänge sind abgeklärt, wobei festgestellt wurde, dass der Glimmer auch in starken elektrischen Feldern dem mechanischen und chemischen Angriff standhält. Gegen die Folgen von atmosphärischen Überspannungen muss die Wicklung durch zweckmässige Koordination der Isolationsfestigkeit und Überspannungsableiter geschützt werden.

Im zweiten Teil wird gezeigt, dass dank der weitgehenden Entwicklung der Maschinenisolation bedeutende Einsparungen an Material erzielt werden konnten und dass die Maschinen einen hohen Grad von Betriebssicherheit erreicht haben.

Das Gebiet der Isoliertechnik im Grossmaschinenbau ist sehr weitläufig. Deshalb sollen hier nur drei Hauptpunkte behandelt werden:

Die Materialverbesserung,
deren Einfluss auf die Maschinengrösse,
Betriebserfahrungen.

Neben der Orientierung über die genannten Punkte verfolgt der Vortrag noch einen weiteren Zweck. Es soll gezeigt werden, wie durch zu scharfe Abnahmeverbedingungen gerade das Gegenteil von dem erreicht werden kann, was eigentlich bezeichnet war. Die hohen Forderungen zwingen oft zu einer forcierten Lösung, die wohl die Abnahmeprüfung ohne Schwierigkeiten durchzuführen gestattet, unter Umständen aber auf Kosten der Dauerhaftigkeit der Isolation geht.

Im Einführungsvortrag hat A. Imhof¹⁾ die drei wesentlichen Werkstoffgruppen des Elektro-Maschinen- und Apparatebaus erwähnt. Von den drei genannten Gruppen «gute Stromleiter, Eisen und Isoliermaterial» wurde das letzte, also das Dielektrikum, als das Mannigfaltigste sowohl hinsichtlich der beteiligten Stoffe als auch ihrer Eigenschaften bezeichnet. Man kann noch einen Schritt weiter gehen und sagen, dass seit der Erfindung des elektromagnetischen Prinzips der Spannungserzeugung die Isoliertechnik einen ausschlaggebenden Einfluss auf die elektrischen Konstruktionen ausgeübt hat. So stellt sich seit etwa einem halben Jahrhundert in der Starkstromtechnik nicht mehr die Frage, wie man eine hohe Spannung erzeugt, sondern das Problem liegt in der günstigsten Isolier-

Dans la première partie, l'auteur s'occupe de la sollicitation de l'isolation des enroulements et de l'amélioration de cette isolation. Les problèmes thermoélectriques qui se posent en régime permanent sont déjà résolus pour des tensions bien supérieures à celles qui sont actuellement en usage. De même, les phénomènes de vieillissement sont maintenant élucidés et l'on a constaté que le mica est capable de supporter les attaques mécaniques et chimiques, même lorsque les champs électriques sont particulièrement intenses. Les enroulements doivent toutefois être protégés par une coordination judicieuse des isolements et par des parafoudres contre les méfaits des surtensions d'origine atmosphérique.

Dans la seconde partie de son exposé, l'auteur montre que les progrès considérables réalisés dans le domaine de l'isolation des machines ont permis d'importantes économies de matériaux et que la sécurité de service des machines a atteint un niveau élevé.

rung der Maschinenwicklung für diese hohe Spannung. Die Art und Weise der Isolierung einer Wicklung gegen den Eisenkörper oder in sich ist meist ausschlaggebend für die Abmessungen einer Maschine und damit für deren Ausführbarkeit. Dies trifft besonders für die Isolation gegen den aktiven Eisenkörper, also die Nutisolierung, zu. Sie ist auch immer wieder Gegenstand einer näheren Betrachtung in der Fachliteratur, und deshalb soll mit ihr begonnen werden.

Bei der Nutisolierung treten alle Probleme einer guten Isolierung in verschärftem Masse in Erscheinung. Man verlangt vom Material hohe Durchschlagfestigkeit, grosse Temperaturbeständigkeit, besonders gute Homogenität und hohe mechanische Festigkeit. Dazu kommt noch die Forderung grosser Wärmeleitfähigkeit, denn die im Nutleiter erzeugte Stromwärme muss durch die Isolation an das Eisen abgeführt werden. Es treffen sich damit auch entgegengesetzte Eigenschaften, weil gute Isolatoren, also schlechte Elektrizitätsleiter, auch schlechte Wärmeleiter sind.

Der Hauptbestandteil der Nutisolierung und zugleich der wärmebeständigste Teil ist auch heute noch der Glimmer, der in dünnen Plättchen auf Papierblätter geklebt wird. Eingehende Untersuchungen haben gezeigt, dass die Qualität des Lackes von überwiegendem Einfluss auf die Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Verluste ist. Fig. 1 zeigt den grossen Unterschied zwischen der von den meisten Firmen verlassenen Schellack-Isolation und der seit zwei Jahrzehnten eingeführten Asphalt-Isolation. Durch solche frappante Ergebnisse ermutigt, sucht der Versuchsingenieur nach weiteren Mitteln. So wurden durch eine zweck-

¹⁾ siehe Imhof, A.: Elektrische Isolierstoffe, eine Übersicht. Bull. SEV Bd. 39(1948), Nr. 5, S. 129...140.