Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 36 (1945)
Heft: 19

Artikel: Zur Theorie des Doppelkäfigmotors
Autor: Michael, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1056509

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur Theorie des Doppelkäfigmotors

Von *W. Michael*, Bern

621.313.333.4

Die Stromgleichungen des Doppelkäfigmotors werden gewöhnlich mit Hilfe eines Ersatzschaltbildes ermittelt, meistens unter Einführung gewisser Vernachlässigungen, um die Theorie zu vereinfachen [I] [II] [1]). Im Gegensatz hierzu wird in der folgenden Untersuchung von einem Bezugsbild des Motors in Verbindung mit einem Raumvektordiagramm der Drehflusskomponenten ausgegangen und die Theorie nur unter Vernachlässigung der Eisenverluste entwickelt. Dieser Weg erscheint zunächst etwas umständlicher, führt aber ebenso schnell zum Ziel und bietet den Vorteil, einen unmittelbaren Einblick in die elektrodynamischen und mathematischen Zusammenhänge der in der Maschine wirkenden Grössen zu gewähren, die durch das Ersatzschaltbild verschleiert werden. Dieses bedarf eben selbst wieder einer Begründung. die schliesslich auf den hier eingeschlagenen Weg führt. Vom theoretischen und didaktischen Standpunkt aus dürfte der hier eingeschlagene Weg daher den Vorzug verdienen. — Ausser den Stromgleichungen und dem Stromdiagramm werden in einfacher Weise die Leistungen und das Drehmoment des Motors allgemein ermittelt. — Die Ergebnisse werden durch ein Zahlenbeispiel veranschaulicht. Zum Vergleich wird der Einkäfigmotor herangezogen.

Les équations du courant des moteurs à double cage d'écureuil sont généralement déterminées à l'aide d'un schéma équivalent et l'on néglige le plus souvent certains points, dans le but de simplifier la théorie [I] [II] [1]). L'auteur de la présente étude part d'une image de référence du moteur en combinaison avec un diagramme vectoriel des composantes du flux tournant et ne néglige que les pertes dans le fer. Ce procédé, qui peut paraître à première vue un peu compliqué, permet cependant d'arriver tout aussi vite au but et présente l'avantage d'indiquer directement les relations électrodynamiques et mathématiques des grandeurs qui entrent en jeu dans ce genre de moteur et qui n'apparaissent pas nettement lorsque l'on se base sur un schéma équivalent. Celui-ci doit en effet être motivé et c'est précisément ce qui a conduit au procédé qu'indique M. Michael et qui est préférable aussi bien au point de vue théorique que didactique. Outre les équations et le diagramme du courant, l'auteur détermine les puissances et le couple du moteur d'une manière simple et générale. Les résultats sont illustrés par un exemple numérique. Le moteur à simple cage d'écureuil sert de comparaison.

1. Bezugsbild und Raumdiagramm der Drehflüsse

Fig. 1 stellt einen Querschnitt durch einen Doppelkäfigmotor halbschematisch dar. Der Ständer S trägt eine normale Dreiphasenwicklung, deren Phasen je nur durch ihre mittlere Windung angedeutet sind. Wir greifen eine beliebige Phase a—a' im Ständer heraus und bezeichnen ihre magnetische Achse mit A.

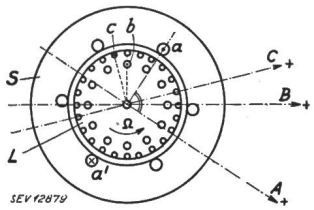


Fig. 1.
Bezugsbild für den Doppelkäfigmotor

Der Läufer L weist einen *äusseren* und einen *inneren* Käfig auf, deren Stabzahl (Phasenzahl) verschieden (wie gezeichnet) oder auch gleich sein kann. Der äussere Käfig besitzt einen grösseren Ohmschen Widerstand, aber eine kleinere Streureaktanz als der innere Käfig; der erste dient als Anlaufwicklung, der zweite als Arbeitswicklung. Die beiden Käfige können getrennte oder gemeinsame Seitenringe aufweisen, welche die Stäbe zu je einer Mehrphasenwicklung verbinden. Wir nehmen im folgenden getrennte Ringe, d. h. elektrisch ganz getrennte Käfige an.

Bei den Käfigen stellt jeder Stab eine Phase dar, deren Wicklung aus einer halben Windung besteht. (Die Stabzahl kann gerade oder ungerade sein.) Wir greifen aus jedem Käfig eine beliebige Phase, z. B. die Stäbe b und c heraus und zeichnen die entsprechenden magnetischen Achsen B und C. Die in der Windung a—a' bzw. in den Stäben b und c angegebenen positiven Zählrichtungen bilden mit den positiven Zählrichtungen auf den entsprechenden Achsen je ein Rechtssystem. Die so ergänzte Fig. 1 stellt das *Bezugsbild* für die in der Maschine auftretenden elektrischen und magnetischen Grössen dar.

Um die Beziehungen zwischen diesen Grössen mathematisch ohne Ersatzbilder und Ersatzgrössen erfassen zu können, wurde in Fig. 2 das Raumvektordiagramm des resultierenden Drehflusses Φ gezeichnet, der von den primären und sekundären Drehamperewindungen gemeinsam erzeugt wird. Die Grösse dieses Drehflusses wird im wesentlichen durch die aufgedrückte Primärspannung bestimmt, denn er muss in der Primärwicklung eine EMK in-

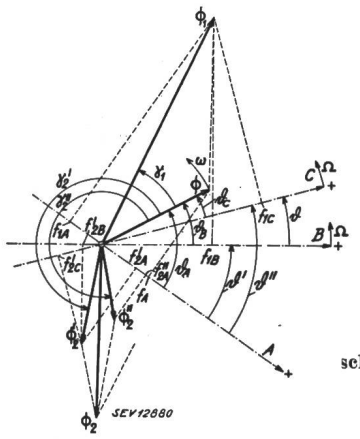


Fig. 2.
Raumdiagramm der Drehflüsse nebst schwingenden Komponenten

duzieren, die, abgesehen von den geringen Ohmschen und induktiven Spannungsverlusten in dieser Wicklung, der aufgedrückten Klemmenspannung das Gleichgewicht halten muss. Man kann Φ als den resultierenden Drehfluss der (fiktiven) Komponenten Φ_1, Φ_2', Φ_2'', welche von den Drehamperewindungen der Ständerwicklung bzw. des inneren und des äusseren Käfigs erzeugt werden, bezeichnen.

In Fig. 2 sind ferner die drei magnetischen Achsen A, B, C (Fig. 1) übernommen. Die Achse A

[1]) Die römischen Ziffern in Klammern beziehen sich auf die Literaturangaben am Schlusse.

[1]) Les chiffres romains entre crochets se rapportent à la bibliographie figurant à la fin de l'article.

ist fest im Raume, während sich die Achsen B und C mit der Läufergeschwindigkeit Ω drehen, so dass die Winkel ϑ' und ϑ'' von A nach B und C, die die Augenblickslage der bewegten Achsen bestimmen, lineare Funktionen der Zeit sind. Dagegen ist ϑ von B nach C konstant. Der Fluss Φ und seine Komponenten drehen sich im Raume, d. h. relativ zum Ständer, mit der Kreisfrequenz ω der Primärspannung dividiert durch die Polpaarzahl p, die wir hier gleich 1 annehmen. Relativ zum Läufer dreht sich Φ mit der Geschwindigkeit

$$\sigma = \omega - \Omega. \tag{1}$$

Führt man den Schlupf $s = \frac{\sigma}{\omega}$ ein, so ist $\sigma = s \cdot \omega$ zu setzen. Φ stellt den *Hauptfluss* der Maschine dar, der den Luftspalt durchsetzt und mit allen drei Wicklungen verkettet ist. Daneben treten noch Streuflüsse auf, die man in bekannter Weise durch Einführung der Streureaktanzen berücksichtigt.

Wir wollen nun die Flusskomponenten Φ_1, Φ_2' und Φ_2'' durch die sie erzeugenden Ströme ausdrücken. Es gilt [III]:

$$\Phi_1 = \frac{3}{2} \Lambda (k_1 N_1) i_{1\,max}; \qquad \Phi_2' = \frac{m_2'}{4} \Lambda i_{2\,max}';$$

$$\Phi_2'' = \frac{m_2''}{4} \Lambda i_{2\,max}'' \tag{2}$$

Darin bedeutet: Λ der magnetische Leitwert der Maschine für sinusförmig im Luftspalt verteiltes Feld (Grundwelle); k_1 und N_1 Wicklungsfaktor und Windungszahl einer Primärphasenwicklung; m_2' und m_2'' Stab- oder Phasenzahl des inneren bzw. des äusseren Käfigs. (Für diese ist $k = 1$ und $N = \frac{1}{2}$ zu setzen.)

Der Drehfluss einer Mehrphasenwicklung dreht sich relativ zu dieser bekanntlich so, dass die Achse des Drehflusses mit der magnetischen Achse der betreffenden Phasenwicklung zusammenfällt, wenn in einer Phase der Strom seinen Maximalwert erreicht. Umgekehrt, wenn der Strom null wird, stehen die beiden Achsen senkrecht aufeinander. Mit andern Worten: die Projektion des Drehflusses auf die magnetische Wicklungsachse stellt einen zeitlich sinusförmig schwingenden Fluss dar, der zeitlich in *Phase mit dem betreffenden Phasenstrom* ist, der ebenfalls eine Sinusfunktion der Zeit ist. Bezeichnen wir also die Projektion von

Φ_1 auf A mit f_{1A}, von Φ_2' auf B mit f_{2B}' und von Φ_2'' auf C mit f_{2C}'', so gelten die Gleichungen

$$f_{1A} = \frac{3}{2} \Lambda (k_1 N_1) i_1; \qquad f_{2B}' = \frac{m_2'}{4} \Lambda i_2';$$

$$f_{2C}'' = \frac{m_2''}{4} \Lambda i_2'', \tag{3}$$

welche eine Beziehung zwischen den Momentanwerten des Stromes in einer Phasenwicklung und des in deren Achse schwingenden Flusses darstellen.

2. Einführung komplexer Grössen

Statt nun mit Momentanwerten zu rechnen, ist es bekanntlich sehr zweckmässig, an ihre Stelle Zeitvektoren (Zeiger) zu setzen, die man durch komplexe Grössen darstellen kann [III]. Diese Zeitvektoren sind dann Drehvektoren in der komplexen Zahlenebene, die aber nicht mit den räumlichen Drehvektoren in Fig. 2 zu verwechseln sind, denn zu jeder Phase bzw. Achse gehören andere Zeitvektoren. Wir bezeichnen sie wie üblich mit grossen Frakturbuchstaben und entsprechenden Indices.

Nach diesen Bemerkungen ist die folgende Darstellung leicht zu verstehen. Wir denken uns Φ und seine Komponenten je auf die drei Achsen A, B und C projiziert. Die Projektionen von Φ bezeichnen wir mit f_A, f_B und f_C. Sie sind auch gleich der algebraischen Summe der Projektionen von Φ_1, Φ_2' und Φ_2'' auf die betreffenden Achsen. In Fig. 2 sind nur einige dieser Projektionen eingezeichnet, damit die Figur nicht überlastet wird. Es liefert

Φ_1	die Projektionen	f_{1A}, f_{1B}, f_{1C}
Φ_2'	„ „	$f_{2A}', f_{2B}', f_{2C}'$
Φ_2''	„ „	$f_{2A}'', f_{2B}'', f_{2C}''$

Aus Fig. 2 ist weiter zu entnehmen:

$$f_{1A} = \Phi_1 \cos(\vartheta_A + \gamma_1); \qquad f_{2A}' = \Phi_2' \cos(\vartheta_A + \gamma_2');$$
$$f_{2A}'' = \Phi_2'' \cos(\vartheta_A + \gamma_2'') \tag{4}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Grössen mit den Indices B und C.

Für die Winkel ϑ_A, ϑ_B und ϑ_C von A, B und C nach Φ ist zu setzen:

$$\vartheta_A = \vartheta_{A0} + \omega t; \quad \vartheta_B = \vartheta_{B0} + \sigma t; \quad \vartheta_C = \vartheta_{C0} + \sigma t.$$

(ϑ_{A0} beliebiger Wert zur Zeit $t = 0$.)

Den reellen Grössen (4) (Momentanwerten) kann man nun die komplexen Grössen (Zeitvektoren oder Zeiger) zuordnen:

$$\mathfrak{F}_{1A} = \Phi_1 e^{j(\vartheta_A + \gamma_1)}; \qquad \mathfrak{F}_{2A}' = \Phi_2' e^{j(\vartheta_A + \gamma_2')};$$
$$\mathfrak{F}_{2A}'' = \Phi_2'' e^{j(\vartheta_A + \gamma_2'')} \tag{5}$$

Für die Grössen mit den Indices $_B$ und $_C$ gelten entsprechende Gleichungen. Den reellen Gl. (3) entsprechen die komplexen oder vektoriellen Gleichungen:

$$\mathfrak{F}_{1A} = \frac{3}{2} \Lambda (k_1 N_1) \mathfrak{J}_1; \quad \mathfrak{F}_{2B}' = \frac{m_2'}{4} \Lambda \mathfrak{J}_2';$$
$$\mathfrak{F}_{2C}'' = \frac{m_2''}{4} \Lambda \mathfrak{J}_2''. \tag{6}$$

Ferner bestehen zwischen den komplexen Grössen (5) die folgenden durch Division je zweier Vektoren leicht zu findenden Beziehungen.

$$\mathfrak{F}_{1B} = \mathfrak{F}_{1A}\, e^{-j\vartheta'}; \quad \mathfrak{F}'_{2A} = \mathfrak{F}'_{2B}\, e^{j\vartheta'}; \quad \mathfrak{F}''_{2A} = \mathfrak{F}''_{2C}\, e^{j\vartheta''}$$
$$\mathfrak{F}_{1C} = \mathfrak{F}_{1A}\, e^{-\vartheta''}; \quad \mathfrak{F}'_{2C} = \mathfrak{F}'_{2B}\, e^{-j\vartheta}; \quad \mathfrak{F}''_{2B} = \mathfrak{F}''_{2C}\, e^{j\vartheta} \tag{7}$$

Hierin ist nach Fig. 2:

$$\vartheta' = \vartheta_A - \vartheta_B = \vartheta_{A0} - \vartheta_{B0} + \Omega t;$$
$$\vartheta'' = \vartheta_A - \vartheta_C = \vartheta_{A0} - \vartheta_{C0} + \Omega t;$$
$$\vartheta = \vartheta_B - \vartheta_C = \vartheta'' - \vartheta'.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (6) und (7) können wir *alle* Komponenten der in den Achsen *A*, *B* und *C* schwingenden Flüsse und damit auch diese selbst durch die Stromvektoren $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2'$ und $\mathfrak{J}_2''$ ausdrücken, indem wir bilden:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{F}_A &= \mathfrak{F}_{1A} + \mathfrak{F}'_{2A} + \mathfrak{F}''_{2A} = \mathfrak{F}_{1A} + \mathfrak{F}'_{2B}\, e^{j\vartheta'} + \mathfrak{F}''_{2C}\, e^{j\vartheta''} \\
\mathfrak{F}_B &= \mathfrak{F}_{1B} + \mathfrak{F}'_{2B} + \mathfrak{F}''_{2B} = \mathfrak{F}_{1A}\, e^{-j\vartheta'} + \mathfrak{F}'_{2B} + \mathfrak{F}''_{2C}\, e^{j\vartheta} \\
\mathfrak{F}_C &= \mathfrak{F}_{1C} + \mathfrak{F}'_{2C} + \mathfrak{F}''_{2C} = \mathfrak{F}_{1A}\, e^{-j\vartheta''} + \mathfrak{F}_{2B}\, e^{-j\vartheta} + \mathfrak{F}''_{2C}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Die komplexen Grössen $\mathfrak{F}_A$, $\mathfrak{F}_B$, $\mathfrak{F}_C$ stellen also die resultierenden, in Richtung der Achsen *A*, *B*, *C* schwingenden Flüsse dar, und zwar schwingt $\mathfrak{F}_A$ mit der Kreisfrequenz ω, $\mathfrak{F}_B$ und $\mathfrak{F}_C$ mit der Kreisfrequenz σ. Die Faktoren $e^{\pm j\vartheta'}$ und $e^{\pm j\vartheta''}$ sorgen für den Frequenzausgleich zwischen den verschiedenachsigen Zeitvektoren.

3. Berechnung der Haupt-EMKe und der Ströme

Durch den Fluss $\mathfrak{F}_A$ wird in der Phasenwicklung *a*—*a'* die primäre Haupt-EMK:

$$\mathfrak{E}_{1h} = -j\omega(k_1 N_1)\mathfrak{F}_A$$

induziert. Ebenso induzieren die Flüsse $\mathfrak{F}_B$ und $\mathfrak{F}_C$ in den Stäben *b* und *c*, beziehungsweise die sekundären HauptEMKe ($k = 1$, $N = 1/2$):

$$\mathfrak{E}'_{2h} = -j\sigma\frac{1}{2}\mathfrak{F}_B \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}''_{2h} = -j\sigma\frac{1}{2}\mathfrak{F}_C.$$

Unter Berücksichtigung der Gl. (8) und (6) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{1h} &= -j\omega\Lambda\left[\frac{3}{2}(k_1N_1)^2\mathfrak{J}_1 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2'}{4}(k_1N_1)\mathfrak{J}_2' e^{j\vartheta'} + \frac{m_2''}{4}(k_1N_1)\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta''}\right] \\
\mathfrak{E}'_{2h} &= -j\sigma\Lambda\left[\frac{3}{4}(k_1N_1)\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta'} + \frac{m_2'}{8}\mathfrak{J}_2' + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2''}{8}\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta}\right] \\
\mathfrak{E}''_{2h} &= -j\sigma\Lambda\left[\frac{3}{4}(k_1N_1)\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta''} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m_2'}{8}\mathfrak{J}_2' e^{-j\vartheta} + \frac{m_2''}{8}\mathfrak{J}_2''\right]
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wir führen die folgenden, auf die Primärfrequenz ω bezogenen Haupt- und Gegenreaktanzen ein:

$$x_{1h} = \omega\Lambda\frac{3}{2}(k_1N_1)^2; \quad x'_{12} = x''_{12} = x_{12} = \omega\Lambda\frac{3}{4}(k_1N_1)$$
$$x'_{2h} = \omega\Lambda\frac{m_2'}{8}; \quad x'_{21} = \omega\Lambda\frac{m_2'}{4}(k_1N_1)$$
$$x''_{2h} = \omega\Lambda\frac{m_2''}{8}; \quad x''_{21} = \omega\Lambda\frac{m_2''}{4}(k_1N_1) \tag{10}$$

Damit ergeben sich folgende Ausdrücke für die Haupt-EMKe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_{1h} &= -j\left[x_{1h}\mathfrak{J}_1 + x'_{21}\mathfrak{J}_2' e^{j\vartheta'} + x''_{21}\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta''}\right] \\
\mathfrak{E}'_{2h} &= -j\left[x_{12}\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta'} + x'_{2h}\mathfrak{J}_2' + x''_{2h}\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta}\right] s \\
\mathfrak{E}''_{2h} &= -j\left[x_{12}\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta''} + x'_{2h}\mathfrak{J}_2' e^{-j\vartheta} + x''_{2h}\mathfrak{J}_2''\right] s
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Um die *Spannungsgleichungen* der Maschine aufstellen zu können, müssen noch folgende Grössen gegeben sein:

$\mathfrak{U}_1$ primäre Klemmenspannung
r_1 Ohmscher Widerstand einer Primärphase
x_{1s} Streureaktanz einer Primärphase
r' Ohmscher Widerstand einer Phase des inneren Käfigs
x' Streureaktanz einer Phase des inneren Käfigs
r'' Ohmscher Widerstand einer Phase des äusseren Käfigs
x'' Streureaktanz einer Phase des äusseren Käfigs
x''' gegenseitige Streureaktanz zweier benachbarter Phasen der beiden Käfige.

Bei der Berechnung der sich auf die Käfige beziehenden Grössen sind Stab- und Ringanteil in bekannter Weise zu berücksichtigen [III]. Die Spannungsgleichungen für je eine Phase des Ständers bzw. Läufers lauten dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{E}_{1h} &= (r_1 + jx_{1s})\mathfrak{J}_1 \\
\mathfrak{E}'_{2h} &= (r' + jsx')\mathfrak{J}_2' + jsx'''\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta} \\
\mathfrak{E}''_{2h} &= (r'' + jsx'')\mathfrak{J}_2'' + jsx'''\mathfrak{J}_2' e^{-j\vartheta}
\end{aligned}$$

Setzt man für die EMKe die Werte (11) ein und ordnet man nach den gesuchten Strömen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&[r_1 + j(x_{1h} + x_{1s})]\mathfrak{J}_1 + jx'_{21}\mathfrak{J}_2' e^{j\vartheta'} + \\
&\qquad + jx''_{21}\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta''} = \mathfrak{U}_1 \\
&jsx_{12}\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta'} + [r' + js(x'_{2h} + x')]\mathfrak{J}_2' + \\
&\qquad + js(x''_{2h} + x''')\mathfrak{J}_2'' e^{j\vartheta} = 0 \\
&jsx_{12}\mathfrak{J}_1 e^{-j\vartheta''} + js(x'_{2h} + x''')\mathfrak{J}_2' e^{-j\vartheta} + \\
&\qquad + [r'' + js(x''_{2h} + x'')]\mathfrak{J}_2'' = 0
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Zur Vereinfachung führen wir noch die folgenden Grössen ein:

$x_{11} = x_{1h} + x_{1s}$ totale primäre Reaktanz einer Phase,
$x'_{22} = x'_{2h} + x'$ totale Reaktanz einer Phase des inneren Käfigs,
$x''_{22} = x''_{2h} + x''$ totale Reaktanz einer Phase des äusseren Käfigs,
$x'_g = x'_{2h} + x'''$ Gegenreaktanz des inneren Käfigs auf eine Phase des äusseren Käfigs,
$x''_g = x''_{2h} + x'''$ Gegenreaktanz des äusseren Käfigs auf eine Phase des inneren Käfigs. (13)

Die Gl. (12) gehen damit über in:

$$\begin{aligned}(r_1+jx_{11})\mathfrak{J}_1+jx'_{21}\mathfrak{J}'_2e^{j\vartheta'}+jx''_{21}\mathfrak{J}''_2e^{j\vartheta''} &= \mathfrak{U}_1\\ jsx_{12}\mathfrak{J}_1e^{-j\vartheta'}+[r'+jsx'_{22}]\mathfrak{J}'_2+jsx''_g\mathfrak{J}''_2e^{j\vartheta} &= 0\\ jsx_{12}\mathfrak{J}_1e^{-j\vartheta''}+jsx'_g\mathfrak{J}'_2e^{-j\vartheta}+[r''+jsx''_{22}]\mathfrak{J}''_2 &= 0\end{aligned} \tag{14}$$

Aus den Gl. (14) lassen sich nun die Phasenströme $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2'$ und $\mathfrak{J}_2''$ am besten mittels Determinanten leicht bestimmen. Zu dem Zwecke bilden wir zunächst die *Systemdeterminante*

$$\begin{aligned}\Delta = (r_1+jx_{11})\,[(r'+jx'_{22}s)\,(r''+jx''_{22}s)-j^2x'_gx''_gs^2]-\\ -jx_{12}se^{-j\vartheta'}[jx'_{21}e^{j\vartheta'}(r''+jx''_{22}s)-j^2x''_{21}x'_gse^{j(\vartheta''-\vartheta)}]\\ +jx_{12}se^{-j\vartheta''}[j^2x'_{21}x''_gse^{j(\vartheta'+\vartheta)}-jx''_{21}e^{j\vartheta'}(r'+jx'_{22}s)].\end{aligned}$$

Die Ausrechnung ergibt, wenn man beachtet, dass $j^2=-1$ und $\vartheta''-\vartheta=\vartheta'$, $\vartheta'+\vartheta=\vartheta''$ (Abb. 2) ist:

$$\begin{aligned}\Delta = r_1[r'r''+(x'_gx''_g-x'_{22}x''_{22})s^2]+[r'x_{12}x''_{21}+\\ +r''x_{12}x'_{21}-x_1(r'x''_{22}-r''x'_{22})]s+j\{r_1(r'x''_{22}+\\ +r''x'_{22})s+x_{11}r'r''+[x_{11}(x'_gx''_g-x_{12}x''_{22})-\\ -x_{12}(x''_{21}x'_g-x'_{21}x''_{22}+x'_{21}x''_g-x''_{21}x'_{22})]s^2\}\end{aligned} \tag{15}$$

Für die *Ströme* ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{U}_1}{\Delta}\left\{r'r''+(x'_gx''_g-x'_{22}x''_{22})s^2+j(r'x''_{22}+r''x'_{22})s\right\} \tag{16}$$

$$\mathfrak{J}'_2 = \frac{\mathfrak{U}_1}{\Delta}x_{12}\left\{(x''_{22}-x'_g)s^2-jr''s\right\}e^{-j\vartheta'} \tag{17}$$

$$\mathfrak{J}''_2 = \frac{\mathfrak{U}_1}{\Delta}x_{12}\left\{(x'_{22}-x'_g)s^2-jr's\right\}e^{-j\vartheta''} \tag{18}$$

Diese Gleichungen stellen *bizirkulare Quartiken* dar. Die Faktoren $e^{-j\vartheta'}$ und $e^{-j\vartheta''}$ in den Gl. (17) und (18) sind durch den Frequenzunterschied zwischen der Primärspannung $\mathfrak{U}_1$ und den Sekundärströmen $\mathfrak{J}_2'$ und $\mathfrak{J}_2''$ bedingt. Durch Multiplikation der Gl. (17) und (18) mit $e^{j\vartheta'}$ bzw. $e^{j\vartheta''}$ und je mit dem entsprechenden Uebersetzungsverhältnis zwischen den Käfigwicklungen und der Ständerwicklung kann man die Sekundärströme auf die Primärfrequenz und Primärwindungszahl reduzieren[2]). Da wir jedoch die Sekundärströme für die weiteren Berechnungen nicht benötigen, brauchen wir uns mit ihnen nicht weiter zu befassen.

4. Leistungen und Drehmoment

Die *primäre Leistung* berechnet sich nach der Formel

$$P_1 = m_1U_1I_1\cos\varphi_1,$$

worin U_1 und I_1 die Effektivwerte der Klemmenspannung bzw. des Primärstromes und $\cos\varphi_1$ den Leistungsfaktor bedeuten. $I_1\cos\varphi_1$ ist die Wirkkomponente des Stromes, die wir mit I_{1w} bezeichnen. Man erhält sie aus Gl. (16), indem man darin $\mathfrak{U}_1$ durch U_1 ersetzt und den reellen Teil der rechten Seite ausrechnet. Den (mit $\sqrt{2}$ dividierten) Bezugsvektor $\mathfrak{U}_1$ lässt man nämlich mit der positiven reellen Achse zusammenfallen, so dass $I_{1w}=I_1\cos\varphi_1$ als die Projektion von I_1 auf die reelle Achse erscheint. Der imaginäre Teil der Gl. (16) liefert dann den Blindstrom $I_{1b}=I_1\sin\varphi_1$. Wir können also auch schreiben ($m_1=3$): $P_1=3U_1I_{1w}$. Ziehen wir davon die *primären Kupferverluste* $P_{v1}=3r_1I_1^2$ ab, (die Eisenverluste bleiben hier unberücksichtigt), so erhalten wir die durch das Drehfeld auf den Läufer übertragene *Drehfeldleistung*

$$P_d=P_1-P_{v1}=3\,(U_1I_{1w}-r_1I_1^2).$$

Diese Leistung ist auch gleich dem Drehmoment M multipliziert mit der Geschwindigkeit ω des Drehfeldes (bzw. ω/p bei der Maschine mit p Polpaaren). Man kann sich nämlich das Drehfeld auch durch einen Magneten erzeugt denken, der mit der Geschwindigkeit ω bzw. ω/p angetrieben wird und auf den das Drehmoment M wirken muss, um das vom Läufer ausgeübte Gegendrehmoment zu überwinden; es ist also $P_d=M\cdot\omega$ und somit $M=\frac{P_d}{\omega}$. Ist Ω die Läufergeschwindigkeit, so ist die erzeugte mechanische Leistung $P_m=M\Omega=M\omega\,(1-s)$. In Wärme umgewandelt werden die *sekundären Kupferverluste* $P_{v2}=P_d-P_m=P_d\cdot s$.

Um die Rechnung übersichtlich zu gestalten, führen wir die folgenden Konstanten ein:

$$\left.\begin{aligned}K_0 &= r'r''\\ K_1 &= x'_{22}x''_{22}-x'_gx''_g\\ K_2 &= x_{12}(r'x''_{21}+r''x'_{21})\\ K_3 &= r'x''_{22}+r''x'_{22}\\ K_4 &= x_{12}(x'_{21}x''_{22}-x''_{21}x'_g+x''_{21}x'_{22}-x'_{21}x''_g)\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Mit diesen Konstanten schreiben sich die Gl. (15) und (16) wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta = r_1K_0+(K_2-x_{11}K_3)s-r_1K_1s^2+\\ +j\{x_{11}K_0+r_1K_3s+(K_4-x_{11}K_1)s^2\}\end{aligned} \tag{15a}$$

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{U}_1}{\Delta}[K_0-K_1s^2+jK_3s] \tag{16a}$$

Um I_{1w} zu berechnen, muss man in Gl. (16a) den Nenner reell machen, indem man den ganzen Bruch rechter Hand mit dem konjugierten Wert $\tilde{\Delta}$ erweitert. Für den Nenner erhält man dann den reellen Ausdruck:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\Delta} = |\Delta|^2 = [r_1K_0+(K_2-x_{11}K_3)s-r_1K_1s^2]^2+\\ +[x_{11}K_0+r_1K_3s+(K_4-x_{11}K_1)s^2]^2\end{aligned} \tag{20}$$

Multipliziert man noch den Zähler von Gl. (16a) mit $\tilde{\Delta}$ und ersetzt man $\mathfrak{U}_1$ durch U_1, so ergibt der reelle Teil des Bruches den Wert I_{1w}. Fügt man noch den Faktor $3U_1$ hinzu, so ergibt sich

[2]) Wenn man dann noch auf der rechten Seite der Gl. (16), (17) und (18) Zähler und Nenner durch s^2 dividiert, so treten die Verhältnisse r'/s und r''/s auf, während die sek. Reaktanzen den Faktor s nicht mehr aufweisen. Hierauf gründet sich die Einführung des bekannten Ersatzdiagrammes, das, wie man sieht, ein recht abstraktes Hilfsmittel darstellt.

$$P_1 = 3\,U_1 I_{1w} = \frac{3\,U_1^2}{|\Delta|^2}\{r_1(K_0 - K_2 s^2)^2 + (K_0 - K_1 s^2)\,K_2 + (r_1 K_3 + K_4 s)\,K_3 s^2\} \quad (21)$$

Zur Bestimmung von P_{v1} braucht man I_1^2. Dieser Wert lässt sich als «Norm» [3]) der rechten Seite von Gl. (16a) unmittelbar hinschreiben. Durch Multiplikation mit $3r_1$ erhält man somit:

$$P_{v1} = 3\,r_1 I_1^2 = \frac{3\,U_1^2}{|\Delta|^2}\{r_1[K_0 - K_1 s^2]^2 + r_1 K_3^2 s^2\} \quad (22)$$

Indem wir Gl. (21) von (20) abziehen, erhalten wir nach Ausrechnung die *Drehfeldleistung*

$$P_d = \frac{3\,U_1^2}{|\Delta|^2}\{K_0 K_2 + (K_3 K_4 - K_1 K_2)\,s^2\}\,s = \omega M \quad (23)$$

wodurch auch das Drehmoment M, sowie die mechanische Leistung $P_m = P_d\,(1-s)$ und die sekundären Verluste $P_{v2} = P_d \cdot s$ bestimmt sind.

Von besonderem Interesse sind das *Anlaufmoment*, das man erhält, wenn man in Gl. (23) $s = 1$ einsetzt; ferner das *Kippmoment*, d. h. das maximale Drehmoment in der Nähe der synchronen Drehzahl, wo also s relativ klein gegen *1* ist. Um den entsprechenden Schlupf (Kippschlupf) zu finden, hat man $\frac{dP_d}{ds}$ zu bilden und gleich Null zu setzen und s aus der so erhaltenen Gleichung zu berechnen. Zu dem Zweck entwickeln wir Zähler und Nenner von Gl. (23) nach Potenzen von s und erhalten

$$P_d = 3\,U_1^2 \frac{a s + b s^3}{c + d s + e s^2 + f s^3 + g s^4} \quad (24)$$

wobei die Konstanten a bis g folgende *Werte haben:*

$$a = K_0 K_2; \qquad b = K_3 K_4 - K_1 K_2;$$
$$c = (r_1^2 + x_{11}^2)\,K_0^2; \qquad d = 2\,r_1 K_0 K_2;$$
$$e = r_1^2(K_3^2 - 2\,K_0 K_1) + 2\,x_{11} K_0 (K_4 - x_{11} K_1) + (K_2 - x_{11} K_3)^2;$$
$$f = 2\,r_1(K_3 K_4 - K_1 K_2); \qquad g = r_1^2 K_1^2 + (K_4 - x_{11} K_1)^2 \quad (25)$$

Setzt man den Zähler von $\frac{dP_d}{ds}$ gleich Null, so erhält man zunächst die Gleichung:

$$a c + (3\,b c - a e)\,s^2 + (b d - a f)\,s^3 - (b e - 3\,a g)\,s^4 - b g s^6 = 0.$$

Nun ist aber aus (25) zu ersehen, dass $bd - af = 0$ ist; mithin reduziert sich obige Gleichung auf folgende:

$$ac - (3bc - ae)\,s^2 + (be - 3ag)\,s^4 - bgs^6 = 0.$$

Das ist aber eine kubische Gleichung in s^2. Setzen wir $s^2 = y$ und ordnen wir die Gleichung nach y^3, so erhalten wir

$$y^3 + \left(\frac{3\,a}{b} - \frac{e}{g}\right)y^2 + \left(\frac{a\,e}{b\,g} - \frac{3\,c}{g}\right)y - \frac{a\,c}{b\,g} = 0 \quad (26)$$

Den drei Wurzeln dieser Gleichung entsprechen sechs Werte von s. Sind die drei Wurzeln reell und positiv, so gibt es drei positive und drei negative Werte von s, wofür die Kurve einen Extremalwert aufweist. In diesem Fall gibt es also drei positive und drei negative Kippmomente, die paarweise symmetrisch zur Ordinatenachse liegen. Wie die Erfahrung zeigt, befinden sich zwei dieser Kippmomente in der Nähe des Leerlaufs, wo also s klein gegen *1* ist, während das dritte Kippmoment bei s grösser als 1 vorkommt. Nur die beiden ersten Kippmomente haben praktische Bedeutung.

Für diese ist also auch y sehr klein gegen 1. Man kann diese y-Werte mit praktisch genügender Genauigkeit aus der quadratischen Gleichung berechnen

$$\left(\frac{3\,a}{b} - \frac{e}{g}\right)y^2 + \left(\frac{a\,e}{b\,g} - \frac{3\,c}{g}\right)y - \frac{a\,c}{b\,g} = 0 \quad (27)$$

die man aus (26) bei Vernachlässigung von y^3 erhält. Die etwas zeitraubende Lösung der kubischen Gl. (26) ist daher entbehrlich. Werden die Wurzeln der Gl. (27) mit y_1 und y_2 bezeichnet, so sind die entsprechenden Schlupfwerte für die Kippmomente:

$$s_1 = \pm\sqrt{y_1}, \quad s_2 = \pm\sqrt{y_2}.$$

Das im folgenden Paragraphen berechnete Zahlenbeispiel wird die Brauchbarkeit der Gl. (27) erweisen.

5. Sonderfall:

Beide Käfige haben dieselbe Stabzahl, jedoch getrennte Seitenringe (Fig. 3). Zahlenbeispiel und Vergleich mit einem Einkäfigmotor

Bei diesem praktisch wichtigen Sonderfall haben beide Käfige dieselbe Phasenzahl $m_2' = m_2'' = m_2$.

Fig. 3.
Doppelkäfiganker mit $m'_2 = m''_2 = m_2$

Die sekundären Reaktanzen nach Gl. (10) und (13) erhalten jetzt folgende Werte:

$$x'_{2h} = x''_{2h} = x_{2h} = \omega\Lambda\,\frac{m_2}{8}$$

$$x'_{21} = x''_{21} = x_{21} = \omega\Lambda\,\frac{m_2}{4}(k_1 N_1)$$

$$x'_{22} = x_{2h} + x'$$

$$x''_{22} = x_{2h} + x''$$

$$x'_g = x''_g = x_g = x_{2h} + x'''$$

Unverändert bleiben

$$x_{1h} = \omega\Lambda\,\frac{3}{2}(k_1 N_1)^2; \qquad x_{12} = \omega\Lambda\,\frac{3}{4}(k_1 N_1)$$

$$x_{11} = x_{1h} + x_{1s}.$$

[3]) Norm = Betrag des Zählers im Quadrat durch Betrag des Nenners im Quadrat.

Für die Konstanten K erhalten wir folgende Werte:

$$K_0 = r'\,r''$$
$$K_1 = x'_{22}\,x''_{22} - x_g^2 = x_{2h}\,(x' + x'' - 2\,x''') + x'\,x'' - x'''^2$$
$$K_2 = (r' + r'')\,x_{12}\,x_{21}$$
$$K_3 = r'\,x''_{22} + r''\,x'_{22} = (r' + r'')\,x_{2h} + r'\,x'' + r''\,x'$$
$$K_4 = x_{12}\,x_{21}\,(x' + x'' - 2\,x''') \qquad (19a)$$

Um einen Einblick in das Verhalten des Doppelkäfigankermotors in Abhängigkeit von den Konstanten der Maschine zu gewinnen, wollen wir ein bestimmtes Zahlenbeispiel behandeln, dessen Daten etwas aufgerundet sind, in der Grössenordnung aber einem praktisch ausführbaren Modell entsprechen. Zum Vergleich wird dann ein analoges Modell eines Einkäfigmotors mitbehandelt.

Der erste Motor sei eine zweipolige Maschine mit einer dreiphasigen, in Dreieck geschalteten Primärwicklung und zwei Käfigwicklungen mit je 50 Stäben und zwei getrennten Seitenringen. Die Daten dieses *Zweikäfigmotors* seien folgende:

$x_{1h} = 30$ Ohm	$x_{2h} = 8 \cdot 10^{-3}$ Ohm	$x_{12} = 0{,}12$ Ohm
$x_{1s} = 1$ »	$x' = 6 \cdot 10^{-4}$ »	$x_{21} = 2$ »
$x_{11} = 31$ »	$x'' = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ »	
$r_1 = 0{,}3$ »	$r' = 1 \cdot 10^{-4}$ »	
$U_1 = 200$ V	$r'' = 3 \cdot 10^{-4}$ »	

(Die hier gewählten Ohmschen Widerstände wurden relativ klein angenommen, um günstige Verhältnisse für den Doppelkäfigmotor zu erhalten). Mit Hilfe der Gl. (27) erhalten wir für die Konstanten:

$$K_0 = 0{,}3 \cdot 10^{-7} \qquad K_0\,K_2 = 288 \cdot 10^{-14}$$
$$K_1 = 43{,}41 \cdot 10^{-7} \qquad K_3\,K_4 - K_1\,K_2 = 2183 \cdot 10^{-14}$$
$$K_2 = 960 \cdot 10^{-7}$$
$$K_3 = 33{,}84 \cdot 10^{-7}$$
$$K_4 = 1296 \cdot 10^{-7}$$

Die Gl. (15A) und (16a) für den Primärstrom $\mathfrak{J}_1$ ergeben die Gleichung

$$\mathfrak{J}_1 = 200\,\frac{0{,}3 - 43{,}41\,s^2 + j\,33{,}84\,s}{0{,}09 - 89{,}04\,s - 13{,}02\,s^2 + j\,[9{,}3 + 10{,}15\,s - 49{,}71\,s^2]}$$

Diese bizirkulare Quartik hat im Punkte $s = 0$ den Tangentialkreis [*IV*]

$$T_0 = 200\,\frac{0{,}3 + j\,33{,}84\,s}{0{,}09 + j\,9{,}3 + [-89{,}04 - j\,10{,}15]\,s}$$

und im Punkte $s = \infty$ den Tangentialkreis

$$T_\infty = 200\,\frac{j\,33{,}84 - 43{,}41\,s}{-89{,}04 + j\,10{,}15 - [13{,}02 + j\,49{,}71]\,s}$$

Die Quartik ($\mathfrak{J}_1$) mit den beiden Tangentialkreisen T_0 und T_∞ ist in Fig. 4 gezeichnet. Obwohl das Arbeitsgebiet des Motors sich nur vom Punkte $s = 1$ (Stillstand, Anlauf) bis zum Punkte $s = 0$ (Synchronismus, Leerlauf) erstreckt, wurde die ganze Kurve berechnet und aufgezeichnet. Auffallend ist die Einsenkung zwischen den Punkten 0,2 und 1 bzw. —0,2 und —1. Diese Einsenkung kann mehr oder weniger ausgeprägt sein, je nach der Grösse der Ohmschen Widerstände relativ zu den Reaktanzen der Maschine.

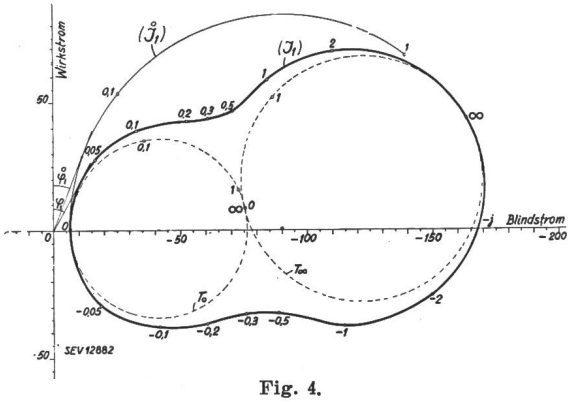


Fig. 4.
Stromdiagramm des Doppelkäfigmotors

Um die *Vor- und Nachteile* des Doppelkäfigmotors gegenüber dem Einkäfigmotor deutlich erkennen zu können, ist in Fig. 5 das Stromdiagramm eines Einkäfigmotors gezeichnet, dessen Ständer genau gleich dem des soeben betrachteten Motors ist und dessen Läufer nur einen äusseren Käfig trägt von derselben Stabzahl wie der frühere. Wir wollen für diesen Käfig dieselbe Kupfermenge verwenden, wie für die beiden Käfige zusammen, so dass der ohmsche Widerstand r_2 je Sekundärphase gleich dem Widerstand der parallelgeschalteten Phasen der beiden Käfige im Synchronismus ist. Es ist also $r_2 = \frac{r'\,r''}{r' + r''}$ angenommen. In der Nähe des Synchronismus, d. h. im Dauerarbeitsgebiet, tritt der Einfluss der Streureaktanz im Sekundärstromkreis stark zurück gegenüber demjenigen des Ohmschen Widerstandes. Wir wählen die Streureaktanz $x_{2s} = x''$, d. h. gleich derjenigen des äusseren Käfigs des ersten Motors. Die beiden Motoren werden sich in ihrem Verhalten in der Nähe des Synchronismus (Arbeitsgebiet) nicht wesentlich voneinander unterscheiden, dagegen um so mehr mit wachsendem Schlupf und also namentlich im Anlauf.

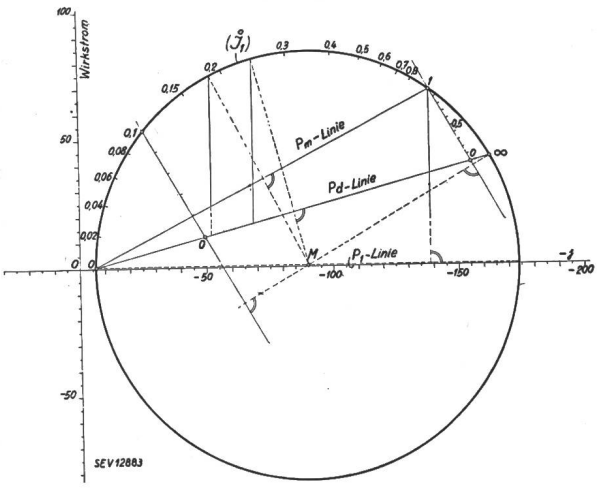


Fig. 5.
Stromdiagramm des Einkäfigmotors

Für den *Einkäfigmotor* gelten also die Daten:

$x_{1h} = 30$ Ohm	$x_{2h} = 8 \cdot 10^{-3}$ Ohm	$x_{21} = 2$ Ohm
$x_{1s} = 1$ „	$x_{2s} = 0{,}4 \cdot 10^{-4}$ „	$x_{12} = 0{,}12$ „
$x_{11} = 31$ „	$x_{22} = 8{,}04 \cdot 10^{-3}$ „	$U_1 = 200$ V
$r_1 = 0{,}3$ „	$r_2 = 0{,}75 \cdot 10^{-4}$ „	

Zur Berechnung des *Ortskreises des Primärstromes* $\mathring{\mathfrak{J}}_1$ (siehe Fig. 5) benutzen wir die bekannte Gleichung [III]:

$$\mathring{\mathfrak{J}}_1 = \mathfrak{U}_1 \frac{r_2 + j\,x_{22}\,s}{r_1\,r_2 - (x_{11}\,x_{22} - x_{1h}\,x_{2h})\,s + j\,[r_2\,x_{11} + r_1\,x_{22}\,s]}$$

In unserem Falle erhalten wir

$$\mathring{\mathfrak{J}}_1 = 200 \frac{0{,}075 + j\,8{,}04\,s}{0{,}0225 - 9{,}24\,s + j\,[2{,}325 + 2{,}412\,s}$$

Für die Hauptpunkte ergeben sich hieraus die Werte:

$$s = 0; \qquad \mathring{\mathfrak{J}}_L = (0{,}062 - j\,6{,}46)\ \text{A}$$
$$s = \infty; \qquad \mathring{\mathfrak{J}}_G = (42{,}50 - j\,162{,}9)\ \text{A}$$
$$s = 1; \qquad \mathring{\mathfrak{J}}_K = (68{,}80 - j\,138{,}7)\ \text{A}$$

Zur Kontrolle wurde noch der Punkt $s = 0{,}1$ berechnet:

$$s = 0{,}1; \qquad \mathring{\mathfrak{J}}_{0,1} = (53{,}66 - j\,25{,}07)\ \text{A}$$

Damit kann der Kreis samt Schlupfskala in bekannter Weise gezeichnet werden. Nach Eintragung der P_d-Linie und der P_m-Linie können dem Kreisdiagramm sämtliche Betriebsgrössen für jeden Schlupfwert ohne weitere Rechnung entnommen werden. Mit den aus Fig. 4 graphisch ermittelten Werten wurden die Kurven P_1, P_d und P_m in Fig, 6 konstruiert. Ausserdem wurde aus Fig. 4 der Betrag des Stromes $\mathring{\mathfrak{J}}_1$ entnommen und im Maßstabe 1 : 2 über den jeweiligen Schlupfwert in Fig. 5 eingetragen und damit die Kurve $\mathring{I}_1$ gezeichnet.

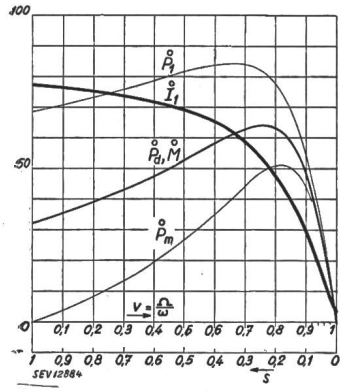


Fig. 6.
Einkäfigmotor

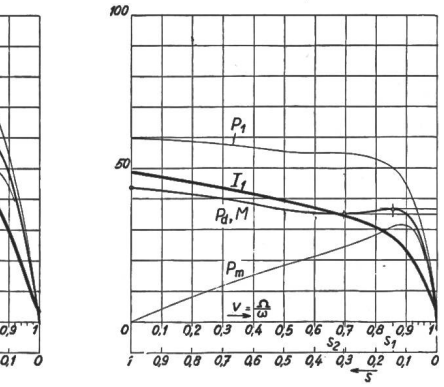
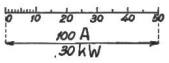


Fig. 7.
Doppelkäfigmotor



In Fig. 7 sind die entsprechenden Kurven für den *Doppelkäfigmotor* aufgezeichnet. Von diesen können nur die P_1-Kurve und die I_1-Kurve mit Hilfe der Fig. 4 konstruiert werden. Die P_d-Kurve muss mit Hilfe der Gl. (23) punktweise berechnet werden. Diese erhält den Zahlenwert:

$$P_d = 3 \cdot 200^2 \frac{(288 + 2183 \cdot s^2)\,s}{[0{,}09 - 89{,}04\,s - 13{,}02\,s^2]^2 + [9{,}3 + 10{,}15\,s - 49{,}71\,s^2]^2}$$

Für die Konstanten der Gl. (24) erhalten wir mit Hilfe der Ausdrücke (25) die Zahlenwerte:

$$a = 288 \cdot 10^{-14}; \qquad e = 7096 \cdot 10^{-14};$$
$$b = 2183 \cdot 10^{-14}; \qquad f = 1310 \cdot 10^{-14};$$
$$c = 86{,}5 \cdot 10^{-14}; \qquad g = 2641 \cdot 10^{-14}.$$
$$d = 172{,}8 \cdot 10^{-14};$$

Wir berechnen damit die Konstanten der Gl. (27) zu:

$$\frac{3\,a}{b} - \frac{e}{g} = -2{,}2911; \qquad \frac{a\,e}{b\,g} - \frac{3\,c}{g} = 0{,}2562;$$
$$\frac{a\,c}{b\,g} = 0{,}00432.$$

Die Gl. (27) liefert dann die zwei Wurzeln:

$$y_1 = 0{,}0207 \quad \text{und} \quad y_2 = 0{,}0916,$$

denen die Schlupfwerte für die Scheitelwerte von P_d bzw. M entsprechen:

$$s_1 = \pm 0{,}1439 \quad \text{und} \quad s_2 = \pm 0{,}3027.$$

Der Gl. (24) entspricht die numerische Gleichung

$$P_d = 3 \cdot 200^2 \frac{288s + 2183s^3}{86{,}5 + 172{,}8\,s + 7096\,s^2 + 1310\,s^3 + 2641\,s^4} \qquad (24a)$$

Setzt man hierin der Reihe nach die Werte $s = 0$; s_1; s_2; 1 ein, so erhält man die folgenden Hauptpunkte der P_d-Kurve:

$s =$	0	s_1	s_2	1
$P_d =$	0	2187	2105	2622 Watt
$M = \frac{P_d}{314} =$	0	6,96	6,70	8,34 Joule

Weitere Punkte der P_d-Kurve lassen sich mit Hilfe der Gl. (26a) oder (27a) leicht bestimmen; z. B. für $s = 0{,}02$; 0,04...0,08; 0,1...0,9, wie dies für die Fig. 7 geschehen ist. Doch bestimmen schon die obigen vier Hauptpunkte im wesentlichen den Verlauf der P_d-Kurve im Betriebsgebiet $s = 0$ bis $s = 1$. Dem Schlupf s_1 entspricht das eigentliche Kippmoment, dem Schlupf s_2 entspricht ein kleineres Kippmoment (Sattelmoment), das theoretisch das grösste Belastungsmoment vorschreibt, das der Motor beim Anlaufen ohne Gefahr hängen zu bleiben, d. h. die Betriebsdrehzahl nicht zu erreichen, übernehmen kann.

Bevor wir zum Vergleich des Doppelkäfigmotors mit einem Einkäfigmotor übergehen, wollen wir noch die Brauchbarkeit der Gl. (27) nachweisen.

Löst man die kubische Gl. (26) nach Einsetzung der Zahlenkoeffizienten mit den bekannten Formeln auf, so erhält man die Wurzeln bzw. die genauen Schlupfwerte:

$$\bar{y}_1 = 0{,}020641; \quad \bar{y}_2 = 0{,}096292; \quad \bar{y}_3 = 2{,}174143$$
$$\bar{s}_1 = \pm\,0{,}14367; \quad \bar{s}_2 = \pm\,0{,}31031; \quad \bar{s}_3 = \pm\,1{,}4745.$$

Die Näherungswerte s_1 und s_2 stimmen mit den genauen Werten $\bar{s}_1$ und $\bar{s}_2$ ausreichend überein, umso mehr, als sich die Ordinaten von P_d in der Umgebung der Scheitelwerte nur geringfügig mit den Abzsissen ändern. Der dritte Scheitelwert fällt in das übersynchrone Gebiet $|s| > 1$ und hat praktisch keine Bedeutung.

Die Ordinaten der P_m-Kurve ergeben sich aus der Beziehung

$$P_m = P_d - P_{v2} = P_d - P_d \cdot s$$

Der elektrische Wirkungsgrad ist $\eta = \frac{P_m}{P_1}$. Er ist in den Diagrammen nicht dargestellt.

Der Vergleich der Fig. 4 und 5 einerseits mit den Fig. 6 und 7 anderseits zeigt die Vor- und Nachteile der beiden betrachteten Motoren.

Im *Anlauf* ($s = 1$) ist das Verhältnis der *Kurzschlußströme:*

$$\varkappa = \frac{I_K}{\overset{o}{I}_K} = \frac{102{,}5}{154} = 0{,}666.$$

und das Verhältnis der *Drehmomente:*

$$\delta = \frac{M_a}{\overset{o}{M}_a} = \frac{P_{da}}{\overset{o}{P}_{da}} = \frac{2622}{1932} = 1{,}357.$$

Im Anlauf ist somit der Doppelkäfigmotor im Vorteil, da er den kleineren Kurzschlußstrom und das grössere Drehmoment besitzt. Darauf beruht seine Verwendung für Betriebe, die mit verhältnismässig grosser Last anfahren müssen.

Gegenüber dem Einkäfigmotor besitzt dagegen der Doppelkäfigmotor das *kleinere* Kippmoment. In unserem Beispiel ist

$$\frac{M_K}{\overset{o}{M}_K} = \frac{P_{dK}}{\overset{o}{P}_{dK}} \frac{2187}{3840} = 0{,}5696.$$

Das hat zur Folge, dass die *Ueberlastbarkeit* des Doppelkäfigmotors *geringer* als beim Einkäfigmotor ist; in unserem Fall beträgt sie nur ca. 57 % derjenigen des Einkäfigmotors. Ein weiterer Nachteil ist die Einsenkung der Drehmomentkurve (Sattel) zwischen Anlauf und eigentlichem Kippmoment. In unserem Beispiel ist diese Einsenkung wenig ausgesprochen und daher nicht von Belang. Je grösser jedoch die Einsenkung ist, desto kleiner wird das zulässige Anlauf-Lastmoment.

Auch der Leistungsfaktor ($\cos \varphi$) ist beim Doppelkäfigmotor kleiner als beim Einkäfigmotor, wie man aus Fig. 4 deutlich ersieht, in welcher das Bogenstück 0...1 des Kreises der Fig. 5 bezeichnet ist und die kleinsten Winkel φ_1 und $\overset{o}{\varphi}_1$ angegeben sind. Infolgedessen ist auch der Wirkungsgrad beim Doppelkäfigmotor schlechter als beim Einkäfigmotor. Damit sind die wesentlichen Vor- und Nachteile der beiden Motorenarten klargestellt. Die Wahl zwischen denselben hängt von den gegebenen Betriebsbedingungen ab [V].

Literatur

[I] *Punga* und *Raydt:* Drehstrommotoren mit Doppelkäfiganker usw. Berlin: J. Springer 1931.

[II] *Richter:* Elektrische Maschinen, Band IV, Die Induktionsmaschinen. Berlin: J. Springer 1936. (Daselbst weitere Literaturangaben.)

[III] *Michael:* Theorie der Wechselstrommaschinen in vektorieller Darstellung. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner 1937.

[IV] *Michael:* Die Konstruktion des singulären Punktes der bizirkularen Quartik und der durch ihn gehenden Tangentialkreise. Arch. f. Elektrotechn., Bd. XXX (1936), S. 199.

[V] *Dünner:* Anlauf und Betriebsverhältnisse der Induktionsmotoren bei Verwendung verschiedener Rotorarten. Bull. SEV 1934, Nr. 20, S. 525.

Adresse des Autors:
Dr. *W. Michael*, Adjunkt des Eidg. Amtes für geistiges Eigentum, Bern.

La station radiotélégraphique de Münchenbuchsee en 1945

Par *S. C. Anselmi*, Münchenbuchsee

621.396.712(494)

La station émettrice de Münchenbuchsee est située à environ 10 km au NE de Berne et a été construite en 1921. Elle sert exclusivement au service radiotélégraphique avec l'Europe et l'Amérique du Nord.

Les émetteurs de la station, au nombre de 11 en 1944 (1 seul existait en 1921), sont alimentés sur le réseau triphasé des Forces motrices bernoises. La tension de 16 000 V du réseau est transformée à la station même en 500 V, 50 Hz. Ce courant est amené à un tableau de distribution principal, d'où il repart sur les pupitres de commande des émetteurs. En cas de panne de courant, un moteur Diesel, à démarrage automatique, couplé à un alternateur de 250 kVA, permet d'alimenter toute la station. La mise en marche du groupe Diesel se fait en 15 secondes, les boutons de démarrage et d'arrêt se trouvant sur le tableau de distribution principal.

Les émetteurs, au nombre de 11, peuvent être répartis comme suit:

2 émetteurs travaillant sur ondes longues,
9 émetteurs travaillant sur ondes courtes.

Les 2 émetteurs à ondes longues, chacun d'une puissance anodique de 18 kW, travaillent sur les fréquences de 95,85 kHz (3130 m) et 82,6 kHz (3632 m). Ils sont tous deux utilisés pour le service radiotélégraphique européen (principalement Londres et Lisbonne). Ces émetteurs travaillent sur des antennes supportées par des pylônes métalliques de 92 et 125 m de hauteur. L'une des antennes est constituée par une nappe de 4 conducteurs horizontaux et est en forme de L. L'autre antenne est composée d'une nappe de 6 conducteurs et est en forme de T.

Les émetteurs à ondes courtes, au nombre de 9 — dont plusieurs, c'est-à-dire les plus anciens, sont de fabrication anglaise, tandis que les plus récents ont été fabriqués entièrement en Suisse — possèdent des puissances variant entre 4 et 40 kW au circuit anodique. Quatre de ces émetteurs, d'un ancien type, travaillent sur des fréquences fixes. Les 5 autres émetteurs, de conception plus moderne, couvrent une gamme de fréquences allant de 20 000 kHz à 3 750 kHz (15 à 80 m).

Tous les émetteurs ondes courtes à Münchenbuchsee sont munis de maîtres oscillateurs système