

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 35 (1944)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Vom Blitzschlag bedingter Spannungsverlauf an einer am Ende einer Freileitung angeschlossener Kapazität  
**Autor:** Berger, K. / Giaro, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1056930>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de l'énergie à un prix de revient aussi bas que possible. Outre des usines au fil de l'eau, il faudra construire des usines à accumulation qui permettent de livrer un fort surplus d'énergie hivernale, ainsi que le recommande le programme décennal de l'ASE et de l'UCS pour l'aménagement de nouvelles usines hydroélectriques<sup>15)</sup>.

3° Seules les usines à accumulation les plus économiques peuvent entrer tout d'abord en ligne de compte. Il est indispensable de procéder sans tarder à l'aménagement de l'une des grandes usines à accumulation bien appropriées, qui devrait être celle du Rheinwald, puis à celle de la vallée d'Urseren, de même qu'aux usines de Rossens-Hauterive et de Blenio-Greina. Ce n'est qu'ensuite que les autres

<sup>15)</sup> Bull. ASE 1941, No. 22, p. 581, et No. 23, p. 612.

forces hydrauliques moins avantageuses de nos Alpes pourront et devront être aménagées, en renonçant en partie à la construction de bassins de retenue trop coûteux.

4° Si l'on renonce par contre à l'aménagement de grandes usines à accumulation et si l'on construit aussi économiquement que possible — en vue d'obtenir une énergie annuelle à peu près constante — les quelques usines à accumulation de moyenne importance qui peuvent entrer en ligne de compte, il ne sera plus possible d'obtenir à l'avenir une quantité suffisante d'énergie hivernale. En outre, près de la moitié des forces hydrauliques encore disponibles risquerait dans ce cas de ne pas être aménagée, en raison d'un rendement trop peu économique, au détriment de notre économie nationale.

## Vom Blitzeinschlag bedingter Spannungsverlauf an einer am Ende einer Freileitung angeschlossenen Kapazität

Bericht an die Forschungskommission des SEV und VSE für Hochspannungsfragen (FKH),  
von K. Berger, Zürich, und J. Giaro, Winterthur

621.316.936

*Calcul de l'effet protecteur d'une capacité, en cas de coup de foudre sur une ligne aérienne, en considérant un état quasistationnaire. Etablissement de formules valables en général et pour quelques cas particuliers; examen des courbes de tension. L'introduction des paramètres relatifs permet de ramener à deux le nombre des paramètres indé-*

*pendants pour les valeurs extrêmes de la tension. Ces valeurs peuvent ainsi être représentées par des groupes de courbes planes. Exemples de quelques réseaux de courbes.*

*Les résultats sont valables d'une manière générale pour les phénomènes transitoires engendrés par une f. é. m. d'allure exponentielle dans un circuit amorti.*

### I. Einleitung und Voraussetzungen der Rechnungsmethode

Der Spannungsverlauf an einem Kondensator, der am Ende einer vom Blitz getroffenen Freileitung angeschlossen ist, hängt von vielen Faktoren ab, z. B. Leitungseigenschaften, Erdungswiderstand, Grösse der Kapazität selbst, Höhe und Halbwertdauer der Blitzspannung. Es besteht eine grosse Mannigfaltigkeit der Kurvenformen, nach denen die Spannung am Kondensator ansteigt und abklingt. Die Untersuchung dieser Kurven und ihrer Abhängigkeit von den erwähnten Faktoren ist das Ziel dieser Arbeit.

Zunächst werden die theoretischen Unterlagen für die Kurven oder Kurvennetze geschaffen, welche für die gegebenen Leitungs-, Kondensator-, Blitz- und Erdungs-Eigenschaften die maximalen Spannungen und ihre Zeitpunkte bestimmen lassen. Dazu sind prinzipiell zwei Untersuchungsmethoden möglich: Eine wellenmässige und eine quasistationäre Berechnung. In der vorliegenden Arbeit wird die zweite Methode benützt, die für nahe und sehr nahe Blitzeinschläge genügend genau ist und einen guten Ueberblick über dieses ziemlich verwickelte Problem gibt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Der andere Grenzfall der sehr weit entfernten Blitzeinschläge, d. h. jener, bei denen das Spiel der Hin- und Rückwellen zwischen Einschlag und Kapazität keine Rolle spielt, weil die grösste Kondensatoraufladung bereits vor der Ankunft der 2. Hinwelle zustande kommt, lässt sich sehr einfach berechnen. Siehe dazu A. Métraux und Rutgers, CIGRE 1939, Bericht 107; H. Meyer, Bull. SEV 1940, S. 597.

Um das Problem rechnerisch behandeln zu können, sollen folgende Voraussetzungen über die Form des Blitzstromes und die Leitungskonstanten gemacht werden:

a) der Blitzstrom habe gemäss Fig. 1 einen exponentiellen Verlauf mit einer sehr steilen Stirn

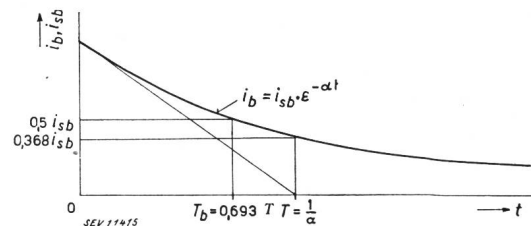


Fig. 1.  
Angenommener Blitzstromverlauf

(Frontdauer gleich Null oder jedenfalls  $< 1 \mu s$ ) und einer Halbwertdauer

$$T_b = T \cdot \ln 2 = 0,693 T$$

$$i_b = i_{sb} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} = i_{sb} \cdot \varepsilon^{-t/T}$$

$i_{sb}$  ist der Scheitelwert,  $\alpha$  die reziproke Rückenzeitkonstante des Blitzstromes.

b) Die Freileitung nehmen wir als kapazitäts- und verlustfrei an, ihre Induktivität  $L$  als räumlich konzentriert, was bei nicht zu langen Leitungen, d. h. bei nahen Blitzeinschlägen zulässig ist. Ferner bezieht sich die vorliegende Arbeit auf den Fall des einphasigen Blitzeinschlags (Fig. 2). Die

Uebertragung auf Mehrleitersysteme bietet keine Schwierigkeiten.

c) Auch die Kapazität nehmen wir als punktförmig an (Kondensator). Sie sei am Leitungsende angeschlossen<sup>2)</sup>.

d) Der beim Blitzeinschlag wirksame Erdungswiderstand  $R$  ist unter Vernachlässigung des Spannungsabfalles am Uberschlagslichtbogen auf der Leitung (Fig. 2) der aus Erdungswiderstand und

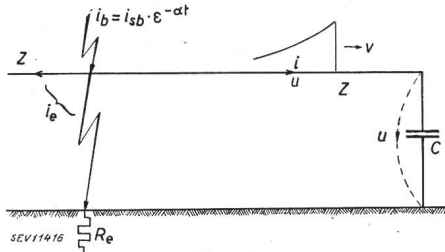


Fig. 2. Prinzipschema des Blitzeinschlages

abgewendeter Leitungsimpedanz resultierende Betrag. Er wird gegeben durch das als konstant angenommene Verhältnis von Spannung an der Erdung zum Strom, der aus dem Blitzkanal, nicht aber zur Schutzkapazität fließt.  $R_e$  ist höchstens gleich dem Wellenwiderstand der abgewendeten Leitungsseite (500  $\Omega$ ).

Nach diesen Voraussetzungen ergibt sich aus dem Prinzipschema der Fig. 2 das Ersatz-Schaltungs-schema der Fig. 3a bzw. Fig. 3b.

2. Formelzeichen

a) Leitungsgrößen:

- $L$  punktförmige Induktivität der Leitung,
- $C$  am Ende der Leitung angeschlossene Kapazität,
- $R$  aus Erdungswiderstand  $R_e$  beim Blitzeinschlag und Wellenwiderstand der abgewendeten Leitungsseite resultierender Ableitungswiderstand ( $R < 500 \Omega$ ),
- $\beta$  Dämpfungskonstante des aus Leitungsinduktivität  $L$ , Widerstand  $R$  und Kapazität  $C$  gebildeten elektrischen Kreises,
- $\nu_0$  Eigenkreisfrequenz des verlustlosen Kreises aus  $L$  und  $C$ ,
- $\nu$  Eigenkreisfrequenz des nicht verlustlosen schwingenden Kreises aus  $L$ ,  $C$  und  $R$ .
- $\mu$  Zeitfaktor des aperiodisch gedämpften Kreises,
- $\beta_0 = \beta/\nu_0$  relative Dämpfungskonstante oder Dämpfungszahl,
- $i$  Momentanwert des Leitungsstromes,

- $i_e$  Momentanwert des Stromes in der Leitungserdung,
- $u_e$  Momentanwert des Spannungsabfalles am Erdungs-Widerstand,
- $u, u_{max}$  Momentan- und Maximalwert der Spannung an der Kapazität,
- $\kappa, \xi$  Rechnungsgrößen,
- $\delta_0 = \beta_0 - \alpha_0$  Hilfsparameter;

b) Blitzstromgrößen:

- $T$  Rückzeitkonstante des Blitzstromes,
- $\alpha = 1/T$  reziproke Rückzeitkonstante,
- $\alpha_0 = \alpha/\nu_0$  relative reziproke Rückzeitkonstante des Blitzstromes,
- $i_h, i_{sb}$  Momentan- und Scheitelwert des Blitzstromes,
- $e_s = i_{sb} \cdot R$  Blitzstromspannungsabfall am Erdungswiderstand  $R$  (Scheitelwert);

c) Zeitgrößen:

- $t, t_m$  Zeit allgemein und Maximalspannungszeit,
- $\tau = t/T, \tau_m = t_m/T$  relative Zeit allgemein und relative Zeit des Spannungsmaximums,
- $\vartheta = \nu t, \vartheta_m = \nu t_m$  Zeitwinkel allgemein und Zeitwinkel der maximalen Spannung,
- $\Theta = \mu t, \Theta_m = \mu t_m$  Zeitargument allgemein und Zeitargument der maximalen Spannung.

3. Allgemeine Lösung des Problems

Nach den im vorigen Abschnitt angeführten Voraussetzungen dürfen wir die Schaltung Fig. 3a den weiteren Betrachtungen zugrunde legen. Diese Schaltung kann auch durch die Schaltung 3b er-

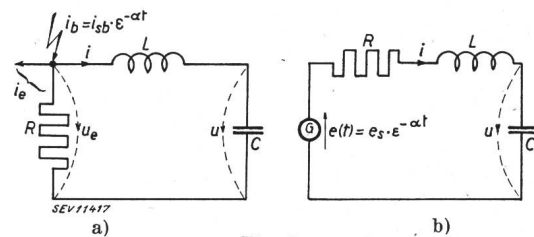


Fig. 3.

Quasistationäres Ersatzschema zur Fig. 2

setzt werden, was aus der Formel (1) ersichtlich ist<sup>\*)</sup>. Die Schaltung Fig. 3a gibt folgende Beziehungen:

$$i_b = i_e + i = i_{sb} \cdot e^{-\alpha t}$$

und

$$u_e = i_e \cdot R = L \cdot \frac{di}{dt} + u$$

Durch Einführen von

<sup>\*)</sup> Die Ersatzschaltung folgt auch direkt aus dem Helmholtzschen Satz von der Ersatzstromspannungsquelle in Netzen, siehe K. Kämpfmüller, Einführung in die theoretische Elektrotechnik, 1939, Springer, Berlin.

<sup>2)</sup> Praktisch dürfen auch kurze Kabelstücke als punktförmige Kondensatoren betrachtet werden. Dies gilt, solange das Kabel kürzer ist als die vorgeschaltete Freileitung und solange die Laufzeit einer Welle über das Kabel viel kleiner ist als die Zeit bis zum Erreichen des Spannungsmaximums. Diese Zeit  $t_m$  kann den Kurven der Fig. 7 und 8 des Berichtes entnommen werden.

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2u}{dt^2}$$

bekommt man

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = R \cdot i_{sb} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} = e_s \cdot \varepsilon^{-\alpha t} = e(t) \quad (1)$$

und schliesslich

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \nu_0^2 u = e_s \nu_0^2 \varepsilon^{-\alpha t} \quad (1a)$$

wo

$$R/L = 2\beta \quad (2)$$

$$1/LC = \nu_0^2 \quad (3)$$

$$R i_{sb} = e_s \quad (4)$$

$e_s$  ist der Scheitelwert der Blitzspannung am Erdungswiderstand, wenn der ganze Blitzstrom ihn durchfliesst.  $\beta$  ist die Dämpfungskonstante des behandelten Kreises und  $\nu_0$  die Eigenfrequenz, wenn kein Verlustwiderstand vorhanden wäre.

Die Gleichung (1), welche ohne weiteres dem Schaltungsschema 3b entspricht, können wir beispielsweise durch die Variation der Konstanten lösen.

Einfacher gelangen wir zur Lösung, wenn wir die Störungsfunktion in der Gleichung (1)

$$e(t) = e_s \varepsilon^{-\alpha t}$$

als Schwingung der komplexen Kreisfrequenz  $\mathfrak{h} = -\alpha + j\omega$  betrachten<sup>3)</sup>, wobei wir im Endresultat  $\omega = 0$  einsetzen. So erhalten wir

$$e(t) = e_s \varepsilon^{-\alpha t} = \text{Realteil von } e_s \varepsilon^{\mathfrak{h}t} = e_s \varepsilon^{\beta t}$$

und können jetzt das Problem in komplexer Schreibweise lösen.

Im allgemeinen Fall setzt sich die Spannung  $u$  an der Kapazität  $C$  (Fig. 3b) aus einer stationären Spannung  $u_{st}$  und einer Ausgleichsspannung  $u_a$  zusammen:

$$u = u_{st} + u_a \quad (5)$$

Die Ausgleichsspannung  $u_a$  bzw. ihr Momentanwert  $u_a$  ist gleich dem allgemeinen Integral der homogenen Gleichung ( $e_s = 0$ ),

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\beta \frac{du}{dt} + \nu_0^2 u = 0$$

und zwar

$$u_a = C_1 \varepsilon^{\varrho_1 t} + C_2 \varepsilon^{\varrho_2 t} \quad (6)$$

wo  $C_1$  und  $C_2$  die Integrationskonstanten sind, und

$$\varrho_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \nu_0^2} = -\beta \pm j\nu \quad (7)$$

$$\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2} \quad (8)$$

<sup>3)</sup> A. Hund, Hochfrequenzmesstechnik, 2. Aufl., Springer, Berlin 1928, S. 344 ff.

J. Fallou, Les réseaux de transmission d'énergie, Gauthier-Villars, Paris 1935, S. 288.

Die stationäre Spannung  $u_{st}$  bekommen wir direkt aus der Schaltung 3b.

$$u_{st} = e_s \frac{1/\mathfrak{h}C}{R + \mathfrak{h}L + 1/\mathfrak{h}C} = e_s \frac{1}{1 + \mathfrak{h}RC + \mathfrak{h}^2LC}$$

Mit  $e_s = e_s \varepsilon^{\mathfrak{h}t}$  und  $\mathfrak{h} = -\alpha$  sowie mit Benützung von (2) und (3) wird der Momentanwert

$$u_{st} = e_s \frac{\nu_0^2}{\nu_0^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2} \varepsilon^{-\alpha t} = e_s \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 + \nu^2} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \quad (9)$$

Durch Einsetzen der Werte aus (6) und (9) in (5) erhalten wir für den Momentanwert der Spannung am Kondensator

$$u = C_1 \varepsilon^{\varrho_1 t} + C_2 \varepsilon^{\varrho_2 t} + e_s \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 + \nu^2} \varepsilon^{-\alpha t} \quad (10)$$

oder bei Benützung von (7)

$$u = K \varepsilon^{-\beta t} \cos(\nu t - \kappa) + e_s \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 + \nu^2} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \quad (10a)$$

wo  $K$  und  $\kappa$  die neuen Integrationskonstanten sind.

Die Randbedingungen für  $t = 0$  heissen

$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{du}{dt} = 0$$

woraus sich die Integrationskonstanten als folgende Ausdrücke berechnen lassen:

$$K = -\frac{e_s}{\cos \kappa} \cdot \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 + \nu^2} = -e_s a \frac{1}{\cos \kappa}$$

wobei

$$a = \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 + \nu^2} \quad (11)$$

und

$$\text{tg } \kappa = \frac{\beta - \alpha}{\nu} \quad (11a)$$

Somit bekommen wir für die Spannung an der Kapazität  $C$

$$u = e_s a \varepsilon^{-\alpha t} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^{-(\beta - \alpha)t}}{\cos \kappa} \cos(\nu t - \kappa) \right] \quad (12)$$

Das ist die allgemeine Lösung der Gleichung (1) für die erwähnten Randbedingungen.

Wenn  $\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2}$  reell, d. h. wenn  $\beta < \nu_0$  ist, entsteht ein *schwingender Spannungsverlauf mit der Kreisfrequenz  $\nu$* . Ist  $\beta > \nu_0$ , so ist  $\nu$  nicht mehr reell, sondern imaginär:

$$\nu = \sqrt{-(\beta^2 - \nu_0^2)} = j\mu \quad (13)$$

wo

$$\mu = \sqrt{\beta^2 - \nu_0^2} = \text{reell} \quad (13a)$$

Es entsteht kein schwingender Vorgang mehr, sondern ein *aperiodischer*. Auch  $\kappa$  ist nicht mehr reell, sondern gemäss Gleichung (11a) und (13) imaginär oder komplex.

Wir benützen deshalb folgende Definitionen (14) oder (14a), je nachdem  $|\beta - \alpha|$  kleiner oder grösser als  $\mu$  ist:

Für  $\operatorname{tg} \kappa = -j \frac{\beta - \alpha}{\mu}$  wird gesetzt  
 $j \operatorname{tg} \kappa = \operatorname{tgh} \kappa' = \frac{\beta - \alpha}{\mu}$ , wenn  $|\beta - \alpha| < \mu$  (14)

oder  
 $j \operatorname{tg} \kappa = \operatorname{ctgh} \kappa' = \frac{\beta - \alpha}{\mu}$ , wenn  $|\beta - \alpha| > \mu$  (14a)

wo  $\kappa'$  wieder reell ist.

Durch Einsetzen von (13) und (14) oder (14a) in die Gleichung (12) bekommen wir folgende Ausdrücke für den aperiodischen Fall:

$$u = e_s a' \varepsilon^{-\alpha t} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^{-(\beta-\alpha)t}}{\cosh \kappa'} \cosh (\mu t + \kappa') \right] \quad (15)$$

wo  $a' = \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2 - \mu^2}$  (15a)

gültig für  $|\beta - \alpha| < \mu$

oder

$$u = e_s \cdot a' \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \left[ 1 - \frac{\varepsilon^{-(\beta-\alpha)t}}{\sinh \kappa'} \sinh (\mu t + \kappa') \right] \quad (15b)$$

gültig für  $|\beta - \alpha| > \mu$

Für den aperiodischen Verlauf der Spannung bestehen damit zwei Formeln (15) und (15b), die eine mit cosh-, die zweite mit sinh-Funktionen. Das bedeutet nicht, dass die Spannung an der Kapazität zwei verschiedenen Gesetzen gehorcht, sondern hängt damit zusammen, dass wir Exponentialfunktionen durch hyperbolische Funktionen ausgedrückt haben, welche, wie cosh, tgh und ctgh, in bestimmten Bereichen im Reellen nicht existieren. Darum ändert sich die Form des Ausdruckes für die Spannung, wenn wir sie mit durchwegs reellen Parametern  $\mu$  und  $\kappa'$  beschreiben.

Für den Fall  $\beta = \nu_0$  oder  $\nu = 0$  lässt sich die Gleichung (12) nicht verwenden. Dieser Fall stellt eine singuläre Lösung der Gleichung (1) dar und muss separat gelöst werden. Mit diesem Spezialfall werden wir uns im Abschnitt 5 näher befassen.

#### 4. Die Spannungsextremwerte

Aus der Bedingung  $\frac{du}{dt} = 0$  erhalten wir für die Gleichung (12)

$$\varepsilon^{-\beta t_m} [\beta \cos (\nu t_m - \kappa) + \nu \sin (\nu t_m - \kappa)] = \alpha \varepsilon^{-\alpha t_m} \cos \kappa$$

und durch den Ansatz

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\nu}{\beta} = \frac{\sqrt{\nu_0^2 - \beta^2}}{\beta} \quad (16)$$

$$\frac{\alpha}{\nu_0} \varepsilon^{-\alpha t_m} \cos \kappa = \varepsilon^{-\beta t_m} \cos (\nu t_m - \kappa - \xi) \quad (17)$$

oder

$$\frac{\alpha}{\nu_0} \varepsilon^{(\beta-\alpha)t_m} \cos \kappa = \cos (\nu t_m - \kappa - \xi) \quad (17a)$$

Die beiden Gleichungen (17) und (17a) sind zunächst nur für den periodischen Vorgang brauchbar. Für den aperiodischen Vorgang setzen wir  $\nu = j\mu$  in (17) oder differenzieren die Gleichungen (15) und (15b) und bekommen

$$\frac{\alpha}{\nu_0} \varepsilon^{-\alpha t_m} \cosh \kappa' = \varepsilon^{-\beta t_m} \cosh (\mu t_m + \kappa' - \xi') \quad (18)$$

für  $|\beta - \alpha| < \mu$

und

$$\frac{\alpha}{\nu_0} \varepsilon^{-\alpha t_m} \sinh \kappa' = \varepsilon^{-\beta t_m} \sinh (\mu t_m + \kappa' - \xi') \quad (18a)$$

für  $|\beta - \alpha| > \mu$

wo

$$\operatorname{tgh} \xi' = \frac{\mu}{\beta} = \frac{\sqrt{\beta^2 - \nu_0^2}}{\beta} < 1 \quad (19)$$

Durch Einsetzen von (16) bzw. (19) in die Gleichungen (17) oder (17a), (18) bzw. (18a) lässt sich leicht beweisen, dass diese Gleichungen zunächst für  $t = 0$  erfüllt werden. Das erste Extremum (Minimum) liegt im Nullpunkt.

Für den periodischen Vorgang bestimmen wir weitere Maxima und Minima am besten graphisch aus (17a) als Schnittpunkte einer Cosinuslinie  $\cos (\nu t - \kappa - \xi)$  mit einer Exponentialkurve

$$\frac{\alpha}{\nu} \varepsilon^{(\beta-\alpha)t} \cos \kappa$$

Die graphische Konstruktion ist nach Fig. 4 ohne besondere Erläuterungen verständlich. Aus Fig. 4 sehen wir, dass im allgemeinen Falle die Spannung  $u$  unendlich viele Maxima und Minima hat (Expo-

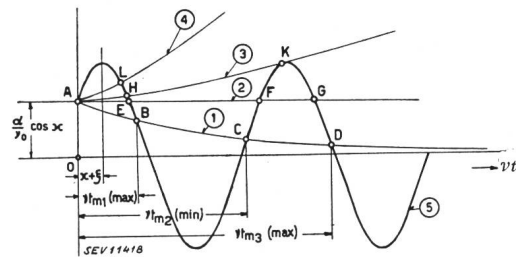


Fig. 4.

Graphische Bestimmung der Zeitpunkte der extremen Spannungswerte

- ①  $\varepsilon^{(\beta-\alpha)t}$  mit  $\beta < \alpha$
- ②  $\varepsilon^{(\beta-\alpha)t} = 1$ ; ( $\beta = \alpha$ )
- ③  $\varepsilon^{(\beta-\alpha)t}$  mit  $\beta > \alpha$
- ④  $\varepsilon^{(\beta-\alpha)t}$  mit  $\beta = \alpha$
- ⑤  $\cos (\nu t - \kappa - \xi)$

ponentialkurve 1), was dem periodischen Verlauf der Gleichung (12) entspricht. Unter Umständen ist aber auch ein einziges Maximum möglich (Exponentialkurve 4).

Im Falle des aperiodischen Vorganges ist der Spannungsverlauf wesentlich einfacher. Das erste Extremum (Minimum) besteht wieder im Nullpunkt der Zeitachse. Das zweite Minimum liegt bei  $t = \infty$ . Ein dritter Extrempunkt (Maximum) findet sich im Schnittpunkte der sinh- bzw. cosh-Linie des

Arguments  $(\mu t + \kappa' - \xi')$  mit der Exponentialkurve

$$\frac{\alpha}{\nu_0} \cosh \kappa' \varepsilon^{(\beta-\alpha)t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha}{\nu_0} \sinh \kappa' \cdot \varepsilon^{(\beta-\alpha)t}$$

Für die graphische Berechnung der Zeiten des Maximums bzw. des Minimums der Spannung ist es zweckmässig, die beiden Seiten der Gleichungen (17a), (18) und (18a) zu logarithmieren. Wir bekommen dann anstatt Exponentialkurven gerade Linien.

**5. Grenz- und Sonderfälle**

a) *Aperiodischer Grenzfall* ( $\beta = \nu_0$ ):

Dieser Fall liegt vor, wenn  $\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2}$  oder  $\mu = \sqrt{\beta^2 - \nu_0^2}$  nach Null streben. Die Lösung der Gleichung (1) bzw. (1a) für diesen Fall bekommen wir, indem wir in (10)  $\varrho_{1,2} = -\beta \pm \Delta$  einsetzen, wo

$$\Delta = \sqrt{\beta^2 - \nu_0^2}$$

eine kleine, nach Null strebende Grösse ist. Durch Grenzübergang der Funktion  $u$  ( $\Delta$ ) für  $\Delta \rightarrow 0$  und Reihenentwicklung des Ausdruckes  $\varepsilon^{\pm \Delta t}$  entsteht nach einer einfachen Umformung:

$$u = K_1 \varepsilon^{-\beta t} + K_2 t \varepsilon^{-\beta t} + e_s \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2} \varepsilon^{-\alpha t} \quad (20)$$

Dabei bedeuten, wie früher,  $K_1$  und  $K_2$  die Integrationskonstanten. Mit den Randbedingungen:

$$(u)_{t=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

wird

$$u = e_s a \varepsilon^{-\alpha t} \left\{ 1 - \varepsilon^{-(\beta-\alpha)t} [1 + (\beta-\alpha)t] \right\} \quad (21)$$

wo

$$a = \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2} \quad (21a)$$

Für die Spannungsextrema bekommen wir aus  $\frac{du}{dt} = 0$  die Bedingung:

$$\varepsilon^{-(\beta-\alpha)t_m} [\alpha \varepsilon^{(\beta-\alpha)t_m} - \alpha - \beta(\beta-\alpha)t_m] = 0 \quad (22)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass die Spannung  $u$  in diesem Falle 3 Extrema hat, und zwar für  $t_m = 0$  und  $t_m = \infty$  Minima, und ein einziges Maximum für einen weitem Wert von  $t_m$  (Fig. 5d).

Dieser letzte Wert lässt sich graphisch aus der Gleichung

$$\varepsilon^{(\beta-\alpha)t_m} = 1 + \frac{\beta}{\alpha} (\beta - \alpha) t_m \quad (22a)$$

berechnen.

b) *Blitzstrom sehr langer Dauer* ( $\alpha = 0$ ),  
(Einschalten einer Gleichspannung):

Diesem Fall entspricht der Blitzstrom von unendlich langer Rückenzeitkonstante  $T$ , d. h.

$$\alpha = \frac{1}{T} = 0$$

Durch Einsetzen von  $\alpha = 0$  in die Gleichung (12) folgt für den *periodischen Verlauf der Spannung*

$$u = e_s \left[ 1 - \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \cos (\nu t - \kappa) \right] \quad (23)$$

wobei

$$\text{tg } \kappa = \frac{\beta}{\nu} = \frac{1}{\text{tg } \xi}$$

Als Bedingung für die Spannungsextrema entsteht

$$\nu t_m = n \pi \quad (24)$$

wo  $n$  die Werte 0, 1, 2, 3, ... annehmen kann.

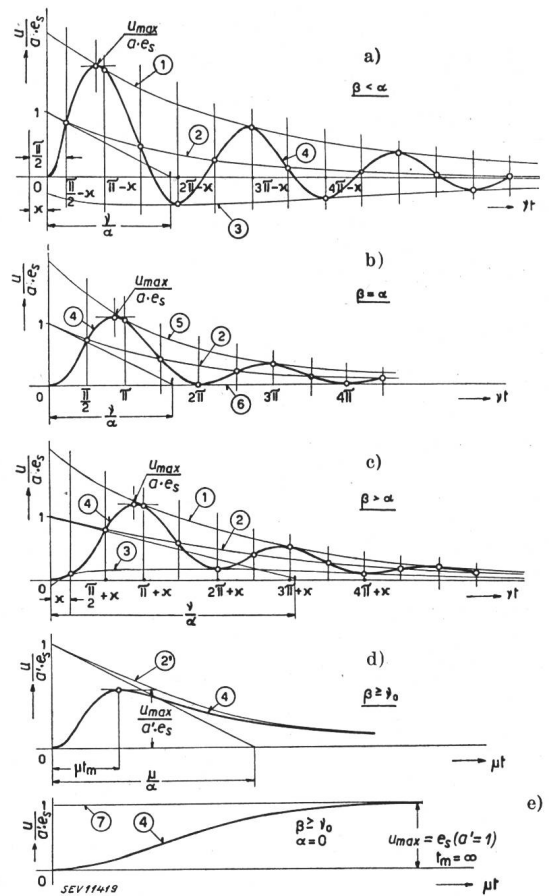


Fig. 5a...5e

**Zusammenstellung der Spannungskurven**

- ①  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot e_s} f_1(t) = \varepsilon^{-\alpha t} + \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \\ \text{obere Umhüllende der schwingenden Spannungskurve} \end{array} \right.$
- ②  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot e_s} \varphi(t) \quad \text{und} \quad \frac{1}{a' \cdot e_s} \varphi(t) = \varepsilon^{-\alpha t} \\ \text{Mittellinie der schwingenden Spannungskurve und} \\ \text{Kurvenasymptote der aperiodischen Spannungskurve} \end{array} \right.$
- ③  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot e_s} f_2(t) = \varepsilon^{-\alpha t} - \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \\ \text{untere Umhüllende der schwingenden Spannungskurve} \end{array} \right.$
- ④ Spannungskurve
- ⑤  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot e_s} f_1(t) = 2 \varepsilon^{-\alpha t} \\ \text{obere Umhüllende in dem Fall } \alpha = \beta \end{array} \right.$
- ⑥  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a \cdot e_s} f_2(t) = 0 \\ \text{untere Umhüllende in dem Fall } \alpha = \beta \end{array} \right.$
- ⑦  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{a' \cdot e_s} \varphi(t) = \varepsilon^{-\alpha t} = 1 \\ \text{Kurvenasymptote der aperiodischen Spannungskurve} \\ \text{für den Fall } \alpha = 0 \end{array} \right.$

Bei  $\nu t_m = 0, 2\pi, 4\pi \dots$  usw. sind Minima, bei  $\nu t_m = \pi, 3\pi \dots$  usw. Maxima der Kondensatorspannung  $u$ .

Aus (23) und (24) wird:

$$u_{max} = e_s (1 + \varepsilon^{-\beta t_m}) = e_s \left(1 + \varepsilon^{-\frac{\beta}{\nu} n\pi}\right) \quad (23a)$$

Für den *aperiodischen Verlauf* der Spannung an der Kapazität wird, indem wir in (15b)  $a = 0$  einsetzen ( $|\beta - \alpha| = \beta > \mu$ ):

$$u = e_s \left[1 - \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\sinh \kappa'} \sinh (\mu t + \kappa')\right] \quad (25)$$

wobei nach (14a) und (19)

$$\operatorname{cogh} \kappa' = \frac{\beta}{\mu} = \frac{1}{\operatorname{tgh} \xi'} \quad (25a)$$

Als Bedingung für Spannungsextrema ergibt sich aus (18a) und (25a)

$$\varepsilon^{-\beta t_m} \sinh \mu t = 0 \quad (26)$$

und weiter

$$\begin{aligned} t_{min} &= 0, & t_{max} &= \infty \\ u_{min} &= 0, & u_{max} &= e_s \end{aligned}$$

Der Spannungsverlauf entspricht der Kurve Fig. 5e.

Wenn  $\beta = \nu_0$  und gleichzeitig  $\alpha = 0$  ist, wird:

$$u = e_s [1 - \varepsilon^{-\beta t} (1 + \beta t)] \quad (27)$$

und

$$\begin{aligned} t_{min} &= 0, & t_{max} &= \infty \\ u_{min} &= 0, & u_{max} &= e_s \end{aligned}$$

Der Spannungsverlauf ist wieder durch Fig. 5e gegeben.

c) *Verlustloser Kreis* ( $\beta = 0$ ):

Wenn  $R = 0$  ist, gilt

$$\beta = \frac{R}{2L} = 0 \text{ und damit } \nu_0 > \beta, \nu = \nu_0 \text{ und}$$

$$u = e_s \cos^2 \kappa \cdot \varepsilon^{-\alpha t} \left[1 - \frac{\varepsilon^{\alpha t}}{\cos \kappa} \cos (\nu_0 t - \kappa)\right] \quad (28)$$

Spannungsextrema entstehen, wenn

$$-\varepsilon^{-\alpha t_m} \sin \kappa = \sin (\nu_0 t_m - \kappa) \quad (29)$$

Es entstehen unendlich viele Maxima und Minima, wobei wieder das erste Minimum bei  $t_m = 0$  liegt.

Für sehr grosse  $\alpha t_m$ -Werte, so dass wir  $\varepsilon^{-\alpha t_m} = 0$  annehmen dürfen, gilt

$$\nu_0 t_m \approx n\pi + \kappa$$

und

$$u_{max} \approx e_s \cos \kappa$$

d) *Dämpfungskonstante der Leitung gleich der reziproken Rückenkonstante des Blitzstromes* ( $\alpha = \beta$ ):

In diesem Falle gilt für den *periodischen Verlauf der Spannung*

$$\operatorname{tgh} \kappa = \frac{\beta - \alpha}{\nu} = 0 \text{ und } \kappa = 0$$

weil  $-\frac{\pi}{2} < \kappa < +\frac{\pi}{2}$  ist.

Es wird somit

$$u = e_s \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \varepsilon^{-\alpha t} (1 - \cos \nu t) \quad (30)$$

Für die Spannungsextrema ergibt sich

$$\frac{\alpha}{\nu_0} = \cos (\nu t_m - \xi) = \frac{\beta}{\nu_0} = \cos \xi \quad (31)$$

Dieser Gleichung entspricht auf der Zeichnung Fig. 4 die durch den Punkt A parallel zur  $\nu t$ -Achse laufende Gerade 2.

Die Gleichung (31) gibt weiter

$$\nu t_m - \xi = 2n\pi \pm \xi \text{ oder } \nu t_m = 2n\pi + (\xi \pm \xi) \quad (31a)$$

wo  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Das erste Minimum trifft bei  $n = 0$  und  $\nu t_m = 0$  zu, das erste Maximum bei  $n = 0$  und  $\nu t_m = 2\xi$ . Diese Ergebnisse lassen sich auch unmittelbar aus der Fig. 4 ablesen. Aus (30) und (31a) sehen wir, dass nicht nur das erste, sondern alle  $u_{min} = 0$  sind. Für  $\nu t_m = 2\xi$  bekommen wir als erstes Maximum

$$u_m = 2 e_s \varepsilon^{-\alpha t_m}$$

Wenn die *Spannung an der Kapazität aperiodisch* abklingt (stark gedämpfter elektrischer Kreis), gilt mit

$$|\beta - \alpha| = 0 < \mu$$

ähnlich wie oben (Gleichg. 14):

$$\operatorname{tgh} \kappa' = 0 \text{ und } \kappa' = 0$$

$$u = e_s \frac{\nu_0^2}{\mu^2} \cdot \varepsilon^{-\alpha t} (\cosh \mu t - 1) \quad (32)$$

Spannungsminima entstehen bei  $t_m = 0$  und  $t_m = \infty$ ; dabei ist  $u_{min} = 0$ . Ein Spannungsmaximum findet sich bei  $\mu t_m = 2\xi'$ . Es beträgt

$$u_{max} = 2 e_s \varepsilon^{-\alpha t_m}$$

Der Spannungsverlauf entspricht der Kurve 5d.

Wenn der *aperiodische Grenzfall* zutrifft und zugleich  $a = \beta$ , d. h.  $\alpha = \beta = \nu_0$  ist, bekommen wir nach der Aufhebung des unbestimmten Ausdrucks

$$u = \frac{1}{2} e_s a^2 t^2 \varepsilon^{-\alpha t} \quad (33)$$

und für die Spannungsextrema die Bedingung

$$t_m (2 - \alpha t_m) \varepsilon^{-\alpha t_m} = 0 \quad (34)$$

Diese Gleichung gibt  $t_{m1} = 0$  und  $t_{m2} = \infty$  für Spannungsminima, wobei  $u_{min} = 0$  und ferner

$$t_{m3} = \frac{2}{\alpha} = \frac{2}{\beta} = \frac{2}{\nu_0}$$

für das Spannungsmaximum.

Die maximale Spannung selbst ist

$$u_{max} = 2 e_s \varepsilon^{-2} = 0,27068 e_s$$

Den Spannungsverlauf gibt Kurve 5d.

e) *Sehr rasch abklingende Stromstöße* ( $\alpha = \infty$ ):

Dieser Fall hat weniger praktische, eher theoretische Bedeutung, insbesondere für die numerische Auswertung der Ergebnisse. Für solche rasch abklingende Spannungstöße nehmen wir im Grenzfalle  $\alpha = \infty$  an. Durch Grenzübergang in den Formeln (12), (15) und (15b) für  $\alpha \rightarrow \infty$  bekommen wir sowohl für den schwingenden als auch für den aperiodischen Vorgang

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} u = 0$$

Ferner

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\nu t_m) = \arccos \frac{\beta}{\nu_0} = \xi \quad (\text{schwingender Vorgang})$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\mu t_m) = 0 \quad (\text{aperiodischer Vorgang})$$

Wenn gleichzeitig  $\alpha \rightarrow \infty$  und  $\beta = 0$  ist, dann ist

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \beta \rightarrow 0}} (\nu t_m) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{schwingender Vorgang})$$

Diese Ergebnisse können wir direkt aus der Fig. 4 ablesen.

f) *Sonderfall im Gebiete des aperiodischen Verlaufes der Spannung, wenn  $|\beta - \alpha| = \mu$ :*

Für diesen Fall folgt ganz allgemein nach ziemlich langwierigen Berechnungen für die Spannung der Ausdruck

$$u = \frac{1}{2} e_s \frac{\nu_0^2}{(\beta - \alpha)^2} \varepsilon^{-\alpha t} \left[ (\beta - \alpha)t - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^{-2(\beta - \alpha)t}) \right] \quad (35)$$

und für den Zeitpunkt des Maximums bzw. Minimums der Spannung

$$1 - \varepsilon^{-2(\beta - \alpha)t_m} = 2 \left( \frac{\alpha}{\nu_0} \right)^2 (\beta - \alpha) t_m \quad (36)$$

Wenn wir (36) in (35) einsetzen, folgt für das Spannungs-Maximum bzw. -Minimum der Ausdruck

$$u_{\max} = e_s \left( \frac{\mu}{\beta - \alpha} \right) \alpha t_m \cdot \varepsilon^{-\left( \frac{\mu}{\beta - \alpha} \right) \alpha t_m} \quad (37)$$

In der letzten Formel (37) darf der Quotient  $\frac{\mu}{\beta - \alpha}$  nicht gekürzt werden, da er gleich +1 oder -1 ist, je nachdem  $\beta - \alpha$  grösser oder kleiner als Null ist.

## 6. Die Spannungskurven

Um ein genaues Bild über die Form des Spannungsverlaufes als Funktion der Zeit ( $t$ ) bzw. des Zeitwinkels ( $\nu t$ ) oder des Zeitargumentes ( $\mu t$ ) und über die Art und Weise, wie diese Kurven von den Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\nu_0$  abhängen, zu bekommen, benutzen wir noch einmal die Formel (12) und (15) und (15b) bzw. Fig. 4.

Im Falle des *periodischen Verlaufes der Spannung* gilt gemäss Gleichung (12):

$$u = e_s a \left[ \varepsilon^{-\alpha t} - \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \cdot \cos(\nu t - \kappa) \right] \quad (38)$$

Aus der Form der Gleichung sehen wir sofort, dass

$$f_{1,2}(t) = e_s a \left[ \varepsilon^{-\alpha t} \pm \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \right] \quad (39)$$

die Gleichungen der Umhüllenden der Spannungskurve sind, und dass

$$\varphi(t) = e_s a \varepsilon^{-\alpha t} \quad (40)$$

die Gleichung der Mittellinie der gedämpften Schwingung darstellt.

Es lässt sich leicht beweisen, dass, wenn  $\beta < \alpha$ , die untere Umhüllende

$$f_2(t) = e_s a \left[ \varepsilon^{-\alpha t} - \frac{\varepsilon^{-\beta t}}{\cos \kappa} \right]$$

stets unter der Zeitachse verläuft, so dass die Spannungsordinaten positive und negative Werte annehmen können (Fig. 5a).

Ist dagegen  $\beta > \alpha$ , so sind die untere Umhüllende und mit ihr die Spannungswerte stets positiv (Fig. 5c).

Den Spezialfall  $\beta = \alpha$  haben wir in Abschnitt 4 untersucht und gefunden, dass die Spannungskurve tangential zur Zeitachse verläuft, d. h. die Spannungsminima durchwegs gleich Null sind.

Das gleiche bekommen wir, wenn wir aus der Gleichung (30) oder (39) die Gleichungen der Umhüllenden

$$f_{1,2}(t) = e_s \frac{\nu_0^2}{\nu^2} (\varepsilon^{-\alpha t} \pm e^{-\alpha t})$$

und der Mittellinie

$$\varphi(t) = e_s \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \varepsilon^{-\alpha t}$$

aufstellen (Fig. 5b).

In der gleichen Weise können wir auch den Fall  $\beta = 0$  untersuchen. Er stellt ungedämpfte Schwingungen dar, deren Mittellinie die Gleichung aufweist:

$$\varphi(t) = e_s \cos^2 \kappa \varepsilon^{-\alpha t} = e_s \frac{\nu_0^2}{\alpha^2 + \nu_0^2} \cdot \varepsilon^{-\alpha t}$$

Die Betrachtung der Fig. 4 zeigt weiter, dass für  $\beta < \alpha$  die Spannung unendlich viele Maxima und Minima hat (Punkte A, B, C, D usw.), was gut mit der Fig. 5a übereinstimmt.

Das gleiche gilt auch im Falle  $\alpha = \beta$  (Punkte A, E, F, G usw.).

Wenn  $\beta > \alpha$  wird und  $(\beta - \alpha)$  immer grössere Werte annimmt, verschwinden die in der Ferne liegenden Maxima und Minima paarweise, weil die  $\varepsilon^{(\beta - \alpha)t}$  Kurve immer steiler wird.

Die Kurve 3 der Fig. 4 zeigt den Grenzfalle, wo das zweitletzte Maximum-Minimum-Paar verschwindet. Für noch grössere  $(\beta - \alpha)$ -Werte besteht nur ein Maximum und ein Minimum (Kurve 4, Fig. 4). Für die Zeit, welche dem Berührungspunkt



der Cosinus- mit der Exponentialkurve der Fig. 4 entspricht (Punkt *K*), hat die Spannungskurve demnach eine horizontale Wendetangente.

Im Bereiche des *aperiodischen Gebietes* sind höchstens zwei Arten Spannungskurven vorhanden: Die allgemeine steigt bis zu einem gewissen Maximum und klingt nachher wieder langsam asymptotisch bis auf Null ab (Fig. 5d). Die einzelnen Kurven unterscheiden sich voneinander nur durch die Höhe und den Zeitpunkt des Spannungsmaximums.

Zweitens die spezielle Art der Spannungskurve für  $\alpha = 0$ , bei welcher  $t_m = \infty$  und  $u_{max} = e_s$  ist (Fig. 5e). Sie entspricht dem Einschalten einer Gleichstromquelle.

Die in Fig. 5a...e beispielsweise angegebenen typischen Spannungskurven sind von oben nach unten nach wachsenden  $\beta$ -Werten angeordnet.

Die Kurve Fig. 5a zeigt demnach am wenigsten, die Kurven Fig. 5d und 5e am meisten gedämpfte Schwingungen.

### 7. Graphische Darstellung einzelner charakteristischer Grössen der Spannungskurven

In der vorliegenden Problemstellung interessieren vor allem das erste Spannungsmaximum der Kondensatorspannung und sein Zeitpunkt, die Rücken- oder Stirn-Halbwertdauer und die maximale Ladung der Kapazität.

Die numerische Auswertung der Resultate für die beliebig gegebenen Blitz-Leitungs- und Schutzkapazitäts-Werte stösst auf Schwierigkeiten, da alle erwähnten Grössen Funktionen mehrerer Unabhängiger sind, nämlich ausser dem Argument Zeit (*t*) folgender Parameter:

$$e_s, \alpha, \beta \text{ und } \nu_0$$

Das Argument (*t*) verschwindet im Ausdruck des maximalen Spannungswertes, weil die Zeit hier einen bestimmten Wert hat. Indem wir statt *u* den Quotienten  $u/e_s$  betrachten, fällt auch  $e_s$  als Variable fort, da *u* stets proportional  $e_s$  ist. Es bleiben die drei freien Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\nu_0$  übrig, oder statt des letzten, der abgeleitete Parameter:

$$\nu = \sqrt{\nu_0^2 - \beta^2} \text{ bzw. } \mu = \sqrt{\beta^2 - \nu_0^2}$$

Während  $\nu$  eine unmittelbare physikalische Grösse ist (Kreisfrequenz) und eine graphische Darstellung über  $\nu$  daher nicht ohne Interesse ist, lässt sich  $\nu_0$  leichter berechnen, so dass wir doch  $\nu_0$  als unabhängigen und  $\nu$  als abhängigen Parameter betrachten werden. Es bleiben uns somit die drei unabhängigen Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu_0$  und das Argument *t* bzw. für die Maximalwerte der Spannungen die Parameter

$$\alpha, \beta, \nu_0$$

Es ist natürlich ohne weiteres möglich, die  $u_{max}/e_s$ -Werte in einem *xyz*-System über zwei der drei Parameter als Argument und dem letzten als festem Parameter unmittelbar graphisch als räumliche Kurven-Schar darzustellen. Nun lässt sich aber aus der Homogenität der Gleichungen leicht nachwei-

sen, dass die Minima und Maxima dieselben sind für gleiche Quotienten

$$\frac{\alpha}{\beta} \text{ und } \frac{\nu_0}{\beta}, \text{ oder } \frac{\beta}{\alpha} \text{ und } \frac{\nu_0}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\alpha}{\nu_0} \text{ und } \frac{\beta}{\nu_0}.$$

Durch Einführen dieser «relativen Parameter» erhalten wir eine allgemeinere und einfachere Darstellung, da sich die Anzahl der unabhängigen Parameter somit auf 2 reduziert. Wir wählen

als ersten relativen Parameter  $\alpha_0 = \frac{\alpha}{\nu_0}$  = relative reziproke Zeitkonstante des Blitzstroms (41)

als zweiten relativen Parameter  $\beta_0 = \frac{\beta}{\nu_0}$  = relative

Dämpfungskonstante des elektrischen Kreises (42) ferner als abhängigen Hilfsparameter:

$$\delta_0 = \beta_0 - \alpha_0 = \frac{\beta - \alpha}{\nu_0} \quad (43)$$

Dieser Parametersatz bietet folgende Vorteile:

a) Gegenüber dem Netz mit  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\nu_0$  ist das Netz über  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  graphisch einfacher, da es nur 2 Parameter enthält, und trotzdem allgemein, da es für beliebige *R*, *L* und *C* gültig ist.

b) Die Einführung des abhängigen Parameters  $\delta_0$  ermöglicht, ein Kurvennetz zu konstruieren. Das ist von Vorteil, da Netze sich genauer zeichnen lassen und eine genauere Interpolation ermöglichen als einfache Kurvenscharen.

c) Für den relativen Parameter  $\beta_0$  lässt sich schreiben:

$$\beta_0 = \frac{\beta}{\nu_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z}$$

wo

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

der bekannte Schwingwiderstand des verlustlosen elektrischen Kreises ist. Der so definierte relative Parameter  $\beta_0$  kommt bereits in der Fachliteratur vor<sup>4)</sup>.

Aus praktischen Gründen führen wir noch einige Zeitgrössen ein, und zwar:

$$\vartheta = \nu \cdot t \text{ sei der «Zeitwinkel»} \quad (44)$$

$$\Theta = \mu t \text{ sei das «Zeitargument»} \quad (45)$$

woraus sich ergibt

$$t = \frac{\vartheta}{\nu} \text{ oder } t = \frac{\Theta}{\mu} \quad (46) \text{ und } (47)$$

Ferner sei

$$\tau = \alpha t = \frac{t}{T} \quad (48)$$

Während  $\tau$  die relative Zeit bezogen auf die «Eigenzeit» der Störungsfunktion (Blitzstrom-Zeitkonstante) darstellt, geben  $\vartheta$  und  $\Theta$  relative Zeitwerte bezogen auf die «Eigenzeit» des Stromkreises ( $1 : \nu$  bzw.  $1 : \mu$ ).

<sup>4)</sup> W. Jaeger, *El. Messtechnik*, Leipzig 1928, S. 33.  
J. Wallot, *Theorie der Schwachstromtechnik*, Berlin 1940, S. 99.

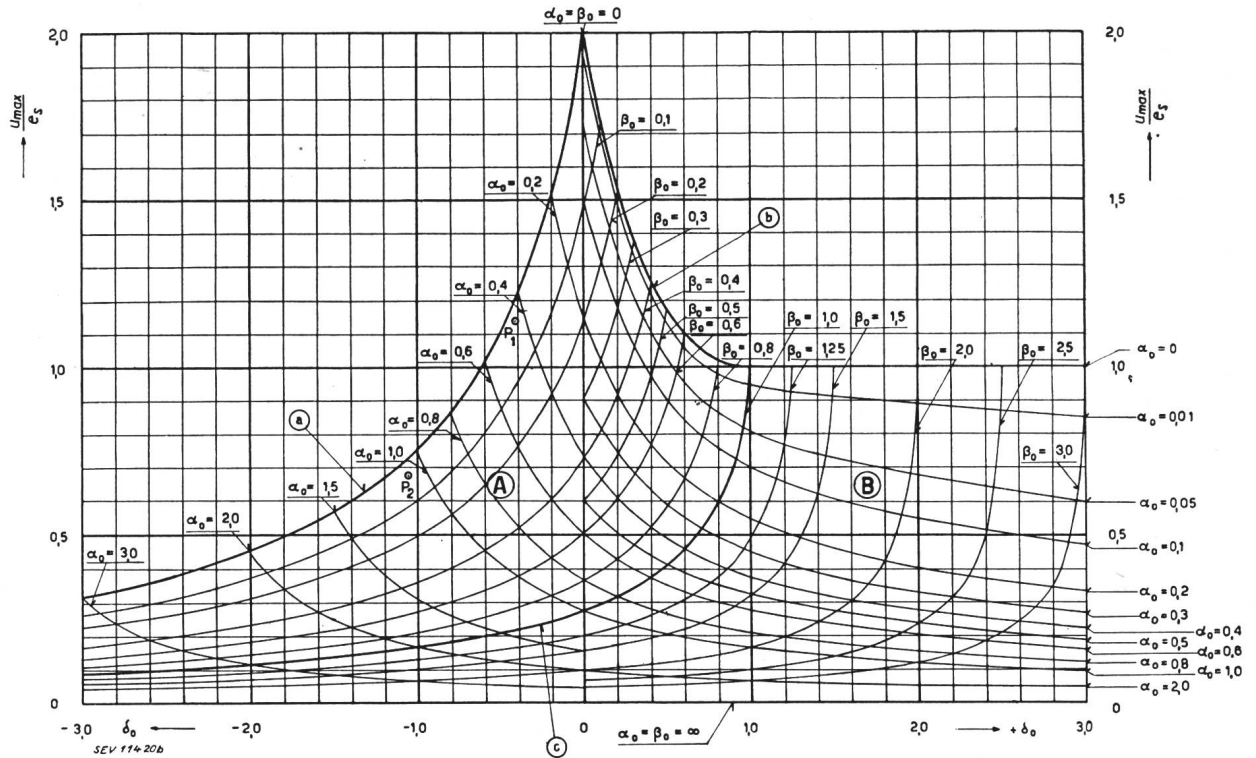


Fig. 6a: Spannungswerte im Abszissenintervall  $-3 < \delta_0 < +3$   
 Spannungsmaximum an der Kapazität in Abhängigkeit von  $\alpha_0, \beta_0$  und  $\delta_0$ .  
 Legende für alle 3 Bilder:

- a Verlustloser Kreis (Erdungswiderstand = 0)
- b Gleichstromstoss (Blitzstromzeitkonstante  $\rightarrow \infty$ )
- c Aperiodischer Grenzfall ( $\beta_0 = 1$ )
- A Gebiet des schwingenden Spannungsverlaufes
- B Gebiet des aperiodischen Spannungsverlaufes

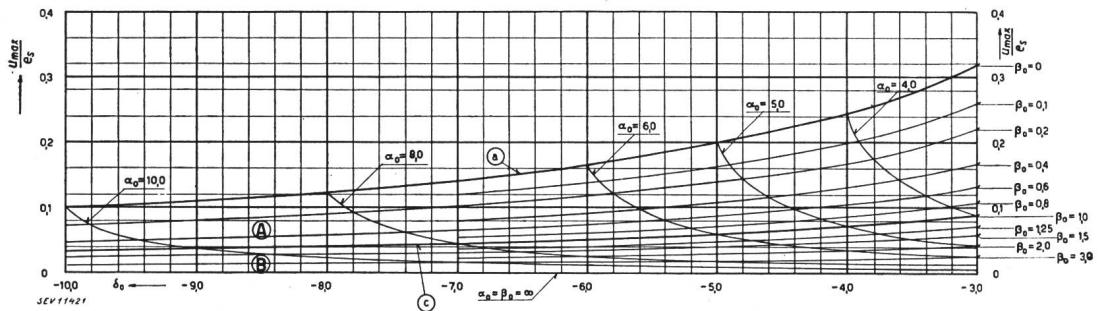


Fig. 6b: Spannungswerte im Abszissenintervall  $-10 < \delta_0 < -3$

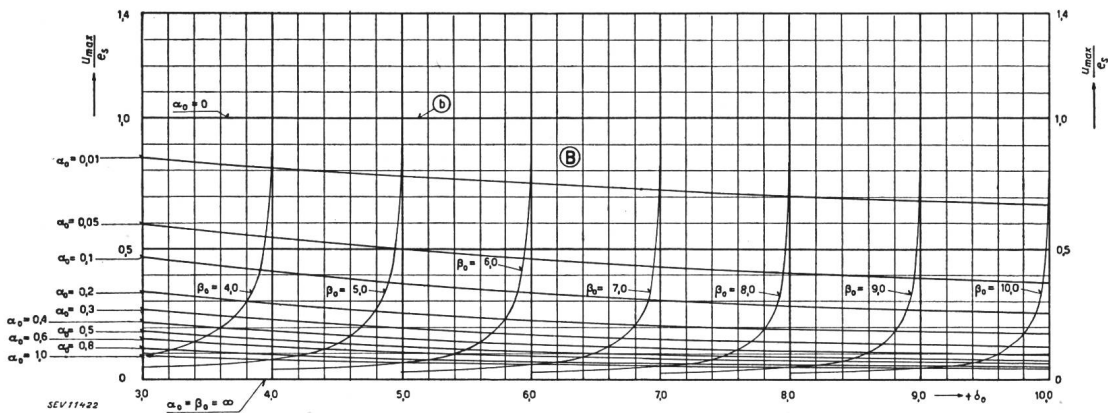


Fig. 6c: Spannungswerte im Abszissenintervall  $+3 < \delta_0 < +10$

Aus (48), (46), (41) und (16) bekommen wir

$$\tau = \frac{\alpha}{\nu} \vartheta = \frac{\alpha}{\nu_0} \cdot \frac{\nu_0}{\nu} \vartheta = \frac{\alpha_0}{\sin \xi} \cdot \vartheta$$

oder aus (48), (47), (41) und (19)

$$\tau = \frac{\alpha}{u} \Theta = \frac{\alpha}{\nu_0 u} \cdot \nu_0 \cdot \Theta = \frac{\alpha_0}{\sinh \xi'} \cdot \Theta$$

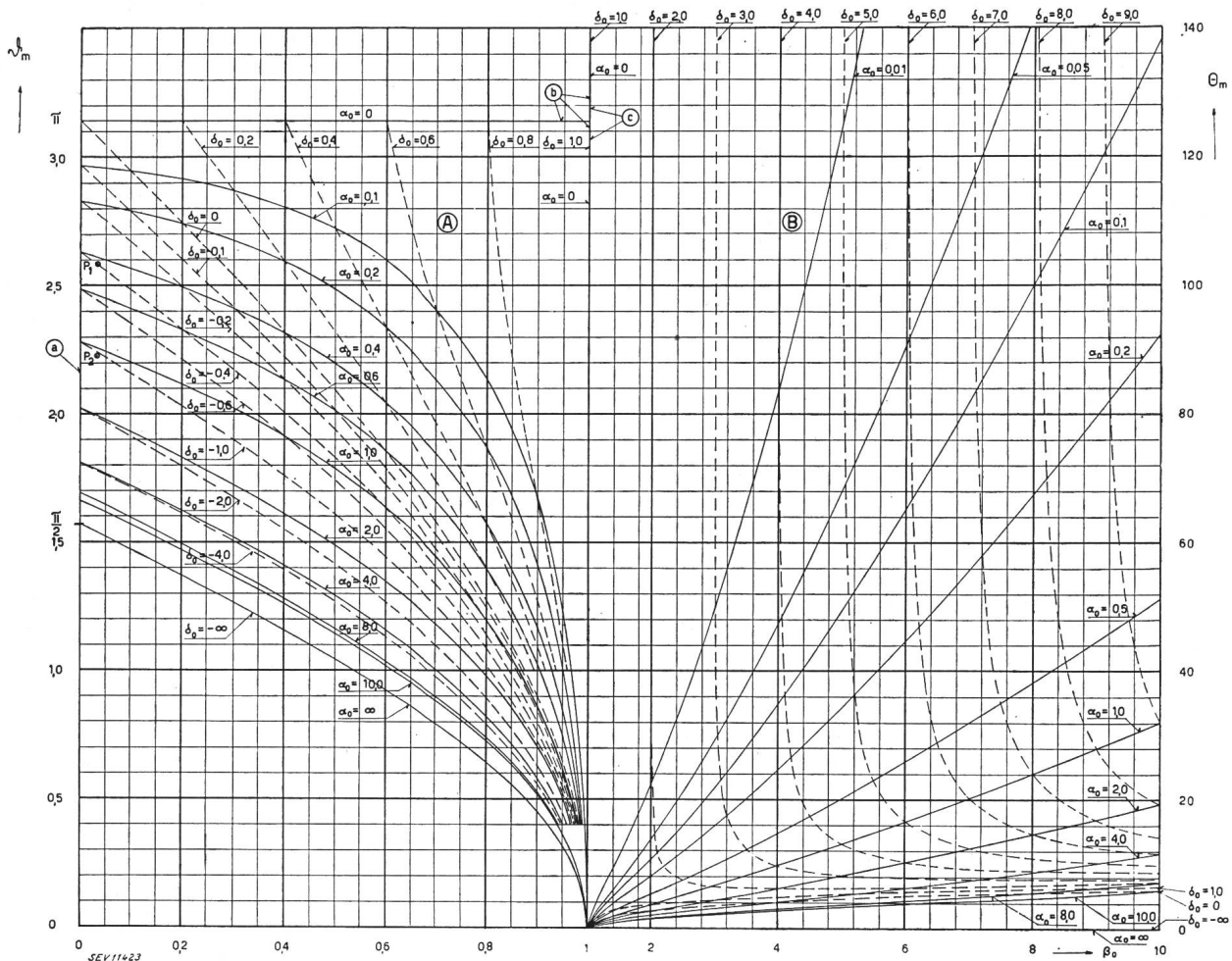


Fig. 7.

Zeitpunkte des Spannungsmaximums in Abhängigkeit von  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  und  $\delta_0$  (relative Werte  $\vartheta_m$  und  $\theta_m$ ).

- a Verlustloser Kreis (Erdungswiderstand = 0)
- b Gleichstromstoss (Blitzstromzeitkonstante  $\rightarrow \infty$ )
- c Aperiodischer Grenzfall ( $\beta_0 = 1$ )
- A Gebiet des schwingenden Spannungsverlaufes
- B Gebiet des aperiodischen Spannungsverlaufes

Die Einführung der relativen Parameter  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  (und  $\delta_0$ ) ermöglicht, sämtliche charakteristischen Größen der Spannungskurve graphisch darzustellen.

ten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  in der Ebene  $u_{max}/e_s - \delta_0$ . Darin kann man zu jedem Paar  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  den zugehörigen Wert von  $u_{max}/e_s$  ablesen, siehe Fig. 6. An den Stellen, wo das Kurvennetz nicht genügend dicht ist, lassen

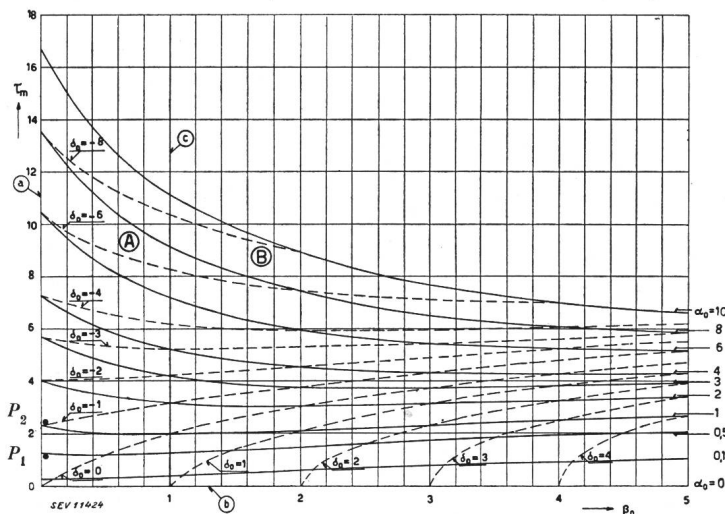


Fig. 8.

Zeitpunkte des Spannungsmaximums in Abhängigkeit von  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  und  $\delta_0$  (relative Werte  $\tau_m$ )

- a Verlustloser Kreis (Erdungswiderstand = 0)
- b Gleichstromstoss (Blitzstromzeitkonstante  $\rightarrow \infty$ )
- c Aperiodischer Grenzfall ( $\beta_0 = 1$ )
- A Gebiet des schwingenden Spannungsverlaufes
- B Gebiet des aperiodischen Spannungsverlaufes

Für die relative maximale Spannung  $u_{max}/e_s$  wird am besten  $\delta_0$  als Abszisse und  $u_{max}/e_s$  als Ordinate angenommen mit  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  als Parameter. Man erhält damit ein Netz krummliniger Koordina-

sich Zwischen-Werte wie üblich durch Interpolation bestimmen.

Für die Bestimmung und die graphische Darstellung der Zeit der maximalen Spannung können

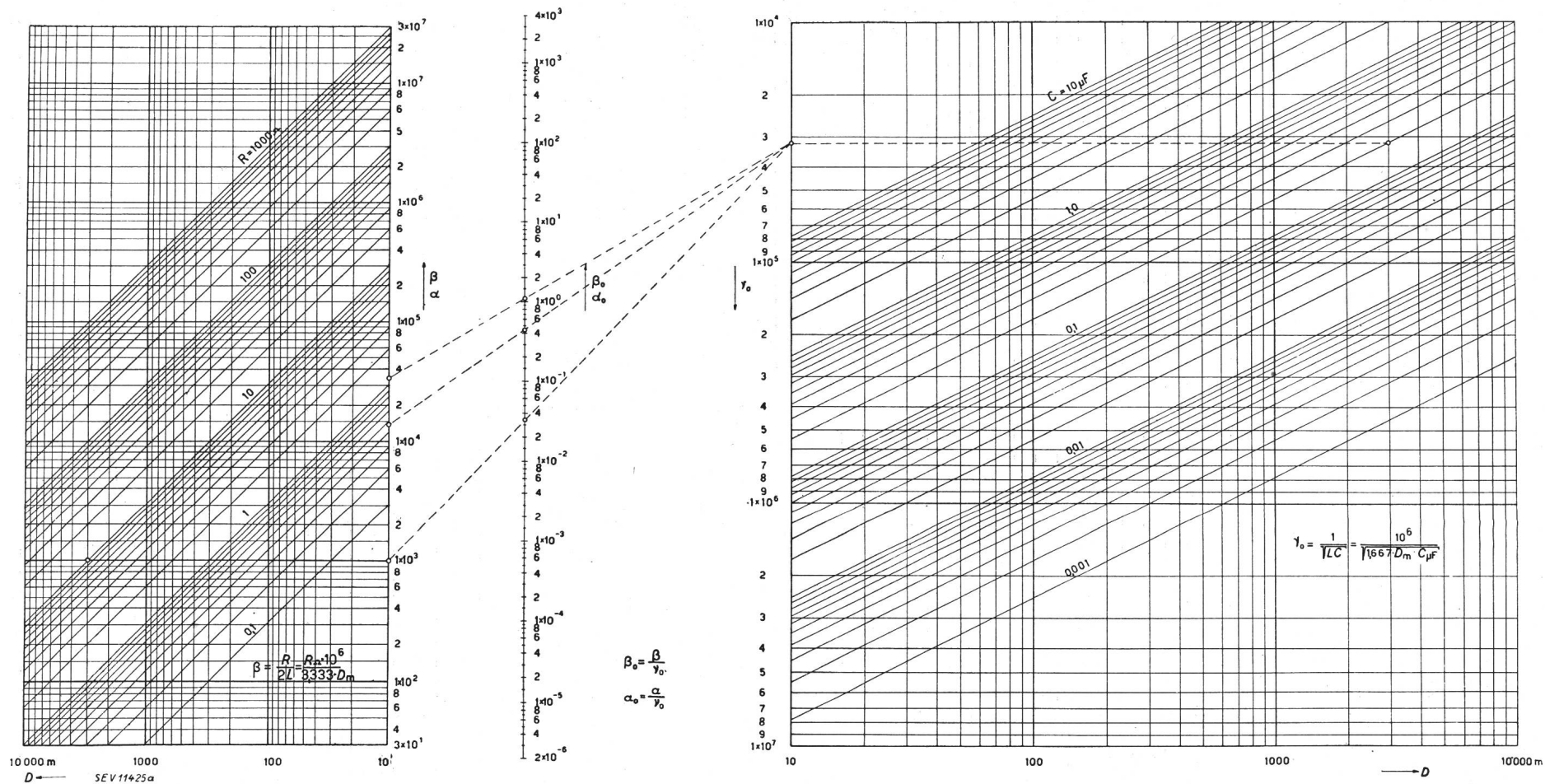


Fig. 9.

Nomogramm zur Bestimmung der Parameter  $v_0$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_0$  und  $\beta_0$

$(\alpha_0 = \beta_0 - \alpha_0)$

wir entweder  $\vartheta = \nu t$  bzw.  $\Theta = \mu t$  oder  $\tau = \alpha t$  benützen, und sodann  $\vartheta_m$ ,  $\Theta_m$  bzw.  $\tau_m$  entweder über  $\delta_0$  oder  $\beta_0$  bzw.  $\alpha_0$  als Abszisse darstellen. Wir geben beide Zeitgrößen in der Darstellung über  $\beta_0$  als Abszisse, da über  $\delta_0$  als Abszisse die  $\Theta_m$ -Linien sich teilweise schneiden:

Fig. 7 zeigt einige Kurven  $\vartheta_m(\beta_0)$  bzw.  $\Theta_m(\beta_0)$  für konstante  $\alpha_0$ - und  $\delta_0$ -Werte. Fig. 8 zeigt dieselbe Art der Darstellung für  $\tau_m(\beta_0)$ .

Aus den Fig. 6, 7 und 8 ist der Einfluss der Parameter  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  auf den Spannungsverlauf ersichtlich. Je kleiner  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  sind, um so grösser ist das relative Spannungsmaximum, welches schliesslich beim Einschalten einer Gleichspannung ( $\alpha_0 = 0$ ) in den verlustlosen Kreis ( $\beta_0 = 0$ ) den bekannten Höchstwert 2 erreicht. Für  $\alpha_0$  gleich 10 sind alle Spannungsmaxima bereits kleiner als 10 % von  $e_s$ .

In gleicher Weise lassen sich auch andere Kurvennetze, beispielsweise für Stirn- und Rücken-Halbwertdauer, konstruieren, worauf hier nicht näher eingetreten wird.

### 8. Graphische Ermittlung der Parameter und Beispiele

Fig. 9 gibt schliesslich ein Nomogramm, aus dem für jeden praktischen Fall die mathematischen Hilfsgrößen (Parameter)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\nu_0$  für gegebene Werte von  $R$ ,  $C$  und Abstand  $D$  der Einschlagstelle vom Kondensator direkt abgelesen werden können. Und zwar sind die Zahlenwerte der Leitungsinduktivität gleich angenommen wie im früheren Bericht über die Beanspruchung von idealen Ableitern durch nahe Blitzschläge<sup>5)</sup>, nämlich  $L = 1,667$  mH/km bzw.  $\omega L = 0,524$   $\Omega$ /km bei 50 Hz. Das entspricht etwa der Induktivität eines Phasenleiters mit der Erde als Rückleiter.

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die grössten Spannungen  $u_{max}/e_s$  an der Schutzkapazität  $C$  und der Zeitpunkt  $t_m$  ihres Auftretens aus den Fig. 6 bis 8 sofort ablesen.

Das Vorgehen soll an einem *Beispiel* gezeigt werden. Es erfolge ein Blitzschlag mit 50 000 A Scheitelwert und 50  $\mu$ s Halbwertdauer  $T_H$  (72,2  $\mu$ s Zeitkonstante  $T$ ) in einen Mast mit 10  $\Omega$  Erdungswiderstand. Eine Phase erleide einen Rücküberschlag und trage die Ueberspannung zu einem am 3 km entfernten Leitungsende angeschlossenen Schutzkondensator von 0,2  $\mu$ F. Wie gross ist die grösste Spannung am Leitungsende, d. h. am Schutzkondensator?

Zunächst ergibt sich der als EMK wirkende Spannungsabfall des Blitzstroms in der Masterdung zu  $e_s = 50\,000 \cdot 10 = 500$  kV. Ferner beträgt

$$\alpha = \frac{1}{T} = \frac{10^6}{72,2} = 1,386 \cdot 10^4$$

Aus Fig. 9, linker Teil, ergibt sich im Schnittpunkt (0) der Linien  $R = 10$   $\Omega$  und 3000 m ein Wert  $\beta = 1 \cdot 10^3$ .

Aus Fig. 9, rechter Teil, folgt weiter aus  $C = 0,2$   $\mu$ F und  $D = 3000$  m ein Wert  $\nu_0 = 3,17 \cdot 10^4$  für die Eigenkreisfrequenz des Kreises aus Leitungsinduktivität und Schutzkapazität.

Aus den Werten  $\beta$  und  $\nu_0$  folgt nun der rel. Parameter  $\beta_0 = \beta/\nu_0$  graphisch als Schnittpunkt der Verbindungs-Geraden  $\beta = 1 \cdot 10^3$  und  $\nu_0 = 3,17 \cdot 10^4$  mit der mittleren Skala,  $\beta_0 = 0,032$ .

Da  $\beta_0 < 1$  ist, verläuft die Spannung am Kondensator als schwach gedämpfte Schwingung (Fig. 5a).

Aus derselben Skala  $\alpha$  wie für  $\beta$  folgt weiter  $\alpha_0 = \alpha/\nu_0 = 0,44$ .

Zur Kontrolle ergibt sich  $\delta_0 = \beta_0 - \alpha_0 = 0,032 - 0,440 = -0,408$ .

Mit  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  ergibt sich nun aus Fig. 6a (Punkt  $P_1$ ) die relative maximale Spannung an der Kapazität zu

$$\frac{u_{max}}{e_s} = 1,14 \text{ oder } \underline{u_{max} = 570 \text{ kV.}}$$

Aus Fig. 7 und 8 folgt bei Benützung der  $\delta_0$ -Kurven als Träger der Teilung der  $\alpha_0$ -Kurvenschar gemäss der Gl. (43), (Punkt  $P_1$ ):

$$\begin{aligned} \vartheta_m &= 2,58 = \nu t_m, \quad t_m = \frac{\vartheta_m}{\nu} \approx \frac{\vartheta_m}{\nu_0} = \\ &= \frac{2,58}{3,17} \cdot 10^{-4} \approx 81,5 \mu\text{s} \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \tau_m &= 1,13 = \alpha t_m, \quad t_m = \frac{\tau_m}{\alpha} = \\ &= \frac{1,13}{1,386} \cdot 10^{-4} \approx 81,6 \mu\text{s} \end{aligned}$$

Ohne Schutzkondensator hätte die Spannung am Leitungsende den Wert  $2e_s = 1000$  kV erreicht, sofern von Leitungsverlusten abgesehen wird.

Hätte der Blitzstrom nur 20  $\mu$ s Halbwertdauer  $T_H$  bzw.  $20 : 0,693 = 28,9$   $\mu$ s Zeitkonstante aufgewiesen, so wäre  $\alpha = \frac{1}{T} = 3,46 \cdot 10^4$  und  $\alpha_0 = 1,09$ .

Der Wert  $\beta_0$  bleibt derselbe = 0,032,  $\delta_0 = \beta_0 - \alpha_0$  wird = -1,06. Somit betrüge die grösste Spannung an der Schutzkapazität nach Fig. 6a (Punkt  $P_2$ )

$$\frac{u_{max}}{e_s} = 0,675 \text{ oder } \underline{u_{max} = 338 \text{ kV}}$$

Sie ist nach Fig. 7 und 8 bei  $\vartheta_m = 2,22$  oder  $\tau_m = 2,43$  vorhanden (Punkt  $P_2$ ), d. h. nach

$$t_m = \frac{\vartheta_m}{\nu_0} \approx \frac{2,22}{3,17} \cdot 10^{-4} \approx 70,2 \mu\text{s}$$

bzw.

$$t_m = \frac{\tau_m}{\alpha} = \frac{2,43}{3,46} \cdot 10^{-4} \approx 70,4 \mu\text{s}$$

Ohne Schutzkondensator hätte die Spannung am Leitungsende den Wert  $2e_s = 1000$  kV erreicht,

<sup>5)</sup> K. Berger, Die Beanspruchung von Ueberspannungsableitern durch nahe Blitzschläge. Bull. SEV 1942, S. 272...284.

sofern von den Verlusten auf der Leitung abgesehen wird.

Es ist nicht uninteressant zu bemerken, dass die Durchschaltung der Leitung, d. h. der Uebergang von Kopf- zu Durchgangsstation, im ersten Beispiel als besserer Ueberspannungsschutz wirkt als ein Kondensator von  $0,2 \mu\text{F}$  pro Phase. Denn in der Durchgangsstation beträgt die Ueberspannung  $u_{\text{max}} = e_s = 500 \text{ kV}$ . Die am Schutzkondensator in

einer Durchgangsstation auftretende Ueberspannung ist im allgemeinen kleiner als in der ungeschützten Station (500 kV); sie kann aus der vorliegenden Rechnung, die für die Kopfstation gilt, nicht entnommen werden. Sie müsste in analoger Weise durch Auswertung der ähnlichen Gleichungen für die Durchgangsstation berechnet werden.

Im zweiten Beispiel (kleine Blitzdauer) wirkt dagegen der Schutzkondensator von  $0,2 \mu\text{F}$  günstiger als die Schaltung als Durchgangsstation.

## Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

### Einige Anwendungen der Wärmepumpe als Heizmaschine

(Nach Brown Boveri Mitt. 1943, Nr. 7/8, S. 146...167)

621.577

#### 1. Voraussetzungen für die Aufstellung einer Wärmepumpe als Heizmaschine

a) Es muss *Umweltwärme oder Abwärme* in ausreichender Menge vorhanden sein.

b) Die mit den Wärmepumpen zu überwindende *Temperaturdifferenz* zwischen der verfügbaren Wärmequelle und der gewünschten Nutztemperatur darf nicht zu gross sein, möglichst nicht über  $50...80^\circ \text{C}$ . a) und b) sind die Voraussetzungen für *hohe Leistungsziffern*<sup>1)</sup> der Wärmepumpe, d. h. nur dann wird die Ausnützung von Umwelt- bzw. Abwärme lohnend.

c) Die in Frage kommenden *Heizleistungen* müssen hoch genug sein, nach dem heutigen Stand der Technik möglichst nicht unter  $150\,000...300\,000 \text{ kcal/h}$ , liegen. Dies gilt insbesondere für Kaldampf-Wärmepumpen mit Turbokompressoren als Verdichter.

d) Die *jährliche Betriebsstundenzahl und die Benützungsdauer der Heizanlage* müssen möglichst hoch sein.

e) Falls elektrischer Antrieb der Wärmepumpe in Frage kommt — was die Regel sein wird — so muss die Elektrizität zu einem für den Betrieb tragbaren Preis erhältlich sein.

Zu a) und b): *Wärmequelle und Leistungsziffer*.

Soweit Umweltwasser als Wärmequelle dient, werden die Wärmepumpenanlagen in die Nähe von Bächen, Flüssen und Seen gelegt, um die Förderkosten klein zu halten. Als Richtwert für die nötige Wassermenge kann angenommen werden, dass mit einer Durchflussmenge im Verdampfer von  $1 \text{ m}^3/\text{s}$  eine stündliche Heizleistung von ca. 4,5 Millionen kcal abgegeben werden kann; dies gilt bei einer Temperatur der Wärmequelle von  $+2^\circ \text{C}$ , welche im Winter als Minimum angesehen werden darf und einer Vorlauftemperatur von  $60...70^\circ \text{C}$ .

Eine naheliegende Ueberlegung führt dazu, die überall vorhandene Frischluft als Wärmequelle zu verwenden. Obschon dies grundsätzlich ohne weiteres möglich ist, ergeben sich mit dem reinen Frischluftbetrieb gewisse Unzulänglichkeiten. Die Temperatur der Wärmequelle sollte nämlich eine gewisse Konstanz aufweisen, damit nicht die Heizleistung und die Vorlauftemperatur unzulässigen Schwankungen unterliegen. Auch kann die Ausscheidung des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes, sobald die Temperatur unter Null sinkt, durch Ansetzen von Reif oder sogar Eis an den Verdampferrohren Unannehmlichkeiten im Betrieb herbeiführen. Die Verwendung von Frischluft ohne entsprechende Massnahmen ist deshalb nicht ohne weiteres zu empfehlen.

Die *wirkliche Leistungsziffer*  $\varepsilon_{\text{kl}}$  des Wärmeprozesses, bezogen auf die Klemmen des Antriebsmotors, kann geschrieben werden:

$$\varepsilon_{\text{kl}} = \frac{Q}{P_{\text{el}} \cdot 860} = \frac{T_v}{T_v - T_{\text{ke}}} \cdot \eta = \frac{T_v}{\Delta t} \eta$$

$Q$  Heizleistung in kcal/h

$P_{\text{el}}$  aufgenommene Leistung des Elektromotors, gemessen in kW an den Anschlussklemmen

<sup>1)</sup> A. Meldahl: «Die Wärmepumpe als Kältemaschine und Heizmaschine», Brown Boveri Mitt. 1943, Nr. 5/6, S. 82.

$T_v$  Vorlauftemperatur des Nutz-Kreislaufes in  $^\circ \text{C}$

$T_{\text{ke}}$  Temperatur der Wärmequelle in  $^\circ \text{C}$   
(z. B. Flusswasser)

$\Delta t$  die Differenz zwischen obigen beiden Temperaturen

$\eta$  Gesamtwirkungsgrad der Anlage, der sämtliche Verluste der Anlage berücksichtigt.

Für Kaldampf-Heizmaschinen mit Turbokompressor kann bei Einheitsleistungen in der Grössenordnung von  $200\,000$  bis über  $3\,000\,000 \text{ kcal/h}$  mit einem Gesamtwirkungsgrad zwischen  $0,45$  und  $0,65$  gerechnet werden.

Aus der Formel für die Leistungsziffer ist ersichtlich, dass, abgesehen von der absoluten Höhe der Vorlauftemperatur, die im allgemeinen für ein bestimmtes Verwendungsgebiet gegeben ist, die Leistungsziffer um so grösser wird, je näher die Vorlauftemperatur und die Temperatur der Wärmequelle beieinander liegen.

Die Leistungsziffer, bezogen auf Motorklemmen, beträgt für die Raumheizung mit normalen Radiatoren ca.  $2,5...4$ , für Schwimmbäder ca.  $4...8$  und für Eindampfanlagen  $5...10$  und mehr. Aus Fig. 1 können die Leistungsziffern für verschiedene Vorlauftemperaturen  $t_v$  des Heisswassers und für verschiedene Temperaturen  $t_{\text{ke}}$  der Wärmequelle abgelesen werden. Dabei ist ein Gesamtwirkungsgrad  $\eta = 0,6$  vorausgesetzt.

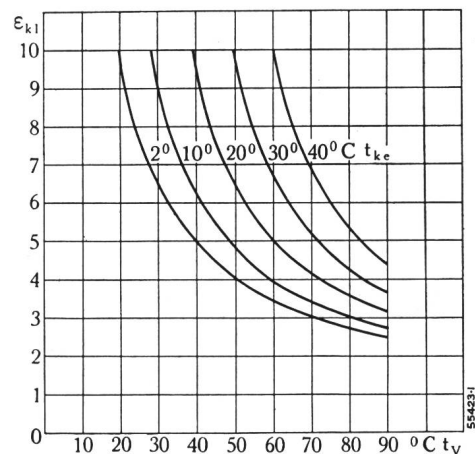


Fig. 1.

Leistungsziffern von Heizmaschinen grosser Leistung für Heisswassererzeugung mit Umweltwasser verschiedener Temperatur als Wärmequelle (Kaldampf-Wärmepumpen mit Turbokompressor als Verdichter)

$t_v$  Vorlauftemperatur des Heisswassers.

$t_{\text{ke}}$  Temperatur der Wärmequelle.

$\varepsilon_{\text{kl}}$  Leistungsziffer der Wärmepumpe, bezogen auf die Klemmenleistung des Antriebsmotors. (Gesamtwirkungsgrad:  $\eta = 0,6$ ).

Zu c): *Die Grösse der Einheitsleistung von Wärmepumpen als Heizmaschinen*

Nach Bauer und Peter<sup>2)</sup> liegt die installierte Leistung für Raumheizungen für die Klimaverhältnisse der Nord- und Ostschweiz zwischen  $17...22 \text{ kcal/h}$  und  $\text{m}^3$  umbauten Raumes,

<sup>2)</sup> B. Bauer und W. Peter: Wasser und Energiewirtschaft 1935, Nr. 7/8, S. 109.