Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 34 (1943)
Heft: 12

Artikel: Die Induktivität runder Spulen
Autor: Müller, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057731

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Signalons enfin le cas d'un homme qui, de son lit, voulut enclencher une lampe de chevet et reçut une décharge de 220 V entre les mains, en touchant simultanément le socle non protégé de la lampe et la douille qui présentait un défaut d'isolement. Contrairement aux prescriptions, la bague isolante de la douille de cette lampe de chevet était d'un modèle court.

Autres appareils d'éclairage.

Un accident mortel fut provoqué dans une porcherie par l'état défectueux d'un câble sous plomb, dont l'enveloppe se trouvait sous une tension de 220 V contre la terre. Bien qu'il eût été averti du danger, un agriculteur voulut déplacer ce câble suspendu librement. Il fut tué en saisissant l'enveloppe nue.

Un cas moins grave s'est produit dans une cuisine, où une jeune fille se proposait de remplacer une ampoule usée. N'arrivant pas à revisser la bague isolante qu'elle avait dévissée en enlevant l'ampoule, cette jeune fille vissa la nouvelle ampoule sans remettre la bague. Elle toucha la douille filetée non protégée, en même temps que la canalisation du gaz qui passait à proximité.

Au sujet de ces installations d'éclairage défectueuses, nous avons déjà signalé certains accidents, sous la rubrique des installations provisoires.

Autres installations intérieures.

La dernière colonne du tableau V mentionne un accident mortel et dixsept accidents légers. Une fillette fut tuée dans une baignoire. Sans que la mère s'en fusse aperçue, une douche à air chaud qui se trouvait sur une tablette et était raccordée à une prise murale, tomba dans la baignoire derrière la fillette. Celle-ci tenait probablement de la main gauche l'un des robinets. Le courant sous 220 V lui traversa le corps entre le dos et la main gauche. Il s'agissait d'une cuisine transformée en salle de bain, où l'ancienne prise de courant murale bipolaire n'avait pas été remplacée par une prise avec contact de terre, ainsi que l'exigent les dispositions du § 200 des Prescriptions sur les installations intérieures.

Parmi les autres accidents causés par des installations intérieures, nous ne signalerons que ceux qui furent provoqués par des personnes qui procédaient à des réparations, sans être du métier. C'est ainsi qu'une employée de maison fut électrisée par un fer à repasser, dont elle avait remis elle-même en place les conducteurs dégagés de la fiche. Elle avait confondu le fil de terre avec le conducteur actif.

Dans un autre cas, un mécanicien raccorda les conducteurs dans la prise d'appareil d'un fer à repasser, sans avoir préalablement enlevé la fiche de la prise murale. Le courant sous 280 V passa par ses mains et occasionna de graves brûlures qui exigèrent un traitement de plus de cinq mois.

Un ouvrier de fabrique désirait se confectionner un poste de soudure, pour ses travaux d'amateur. Il utilisa à cet effet un transformateur d'appareil de radio, mais raccorda par erreur les bornes à 600 V du transformateur aux électrodes de soudure, au lieu des bornes à 4 V. Il fut brûlé aux mains en touchant les électrodes.

Un menuisier fit courir un grave danger à d'autres personnes en cherchant à protéger ses groseilliers contre les voleurs par un fil de fer relié à un conducteur du réseau à 125/220 V, par l'intermédiaire d'une résistance liquide. Un enfant fut électrisé par ce fil et se blessa en tombant.

Les cas que nous venons d'exposer prouvent à nouveau qu'un grand nombre d'accidents dus au courant fort auraient pu être évités, si l'on avait agi avec toute la prudence nécessaire et si l'on s'était abstenu de travailler à des installations électriques, sans posséder les connaissances requises. Les accidents provoqués par des baladeuses défectueuses montrent, en particulier, que le public n'est pas encore suffisamment renseigné à cet égard.

Die Induktivität runder Spulen

Von *Karl E. Müller*, Zürich

621.318.4.011.3

Da in den üblichen Handbüchern nur unzulängliche Auskunft über die Induktivität eisenloser Spulen zu finden ist, wird eine neue, für alle Dimensionen auf 1 % genaue Näherungsformel (18) mitgeteilt. Ferner werden für die Spezialfälle der dünnen (einlagigen), sowie der unendlichlangen, mehrlagigen Spule neue Ausdrücke abgeleitet.

(Eingang des Manuskriptes: 28. 9. 1942.)

Les manuels ne donnant que des renseignements incomplets au sujet du coefficent de self-induction des bobines sans fer, l'auteur présente une nouvelle formule approchée, qui permet d'obtenir toutes les dimensions à 1 % près. Il a également établi de nouvelles expressions pour les cas spéciaux d'une bobine mince à une seule couche et d'une bobine infiniment longue, à plusieurs couches.

1. Einleitung

Unter den eisenlosen Spulen haben infolge der üblichen Herstellungsmethoden die runden oder zylindrischen Spulen mit rechteckigem Wicklungsquerschnitt die grösste praktische Bedeutung. Eine einfache und zuverlässige Methode zur Berechnung

ihrer Induktivität ist deshalb ein Bedürfnis. Wohl wurden in zahlreichen Arbeiten verschiedene Berechnungsmethoden entwickelt. Im Buche von *J. Hak* [1]) wird kurz und übersichtlich darüber referiert; dort finden sich auch Kurventafeln zur Berechnung der Induktivität. Eine Zusammenstellung der genauesten Formeln, in Form längerer Reihenentwicklungen sowie mehrseitige Tabellen, welche damit berechnet wurden, gab *Grover* [2]). In den Handbüchern findet man meist für Spezialfälle einfachere Formeln aufgeführt, jedoch fast durchwegs ohne Angabe des Gültigkeitsbereiches oder der Genauigkeit. Dies gilt auch für die als allgemein gültig betrachtete Näherungsformel von *Brooks und Turner* [3]), von der hier gezeigt wird, dass sie für lange Spulen unrichtig ist. Durch Vergleich mit den erwähnten Tabellen hat *K. Foelsch* [4]) Näherungsformeln abgeleitet, welche auch für dicke Spulen verwendbar sind; es sind im ganzen 8 Formeln, jede in einem gewissen Dimensionsbereich gültig und auf ca. 0,3 % genau.

Im folgenden wird nun eine neue Näherungsformel abgeleitet, welche *ohne Einschränkung* für beliebige Massverhältnisse nach Fig. 1 gültig ist;

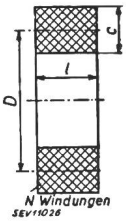


Fig. 1.
Querschnitt durch die Spulenachse
D mittlerer Durchmesser. l Spulenlänge.
c Spulendicke.

trotzdem erreicht sie die überraschend grosse Genauigkeit von 1 % im ganzen Bereich. Um dieses Resultat zu erreichen, musste für die Induktivität der unendlichlangen Spule ein neuer und einfacher Ausdruck abgeleitet werden. Einen weiteren Schritt gestattete eine neue Näherungsformel für den Spezialfall der dünnen Spule beliebiger Länge. Die Bedeutung der neuen Näherungsformel liegt einmal darin, dass sie einfacher ist als die genauen Reihenentwicklungen von beschränktem Gültigkeitsbereich, ferner dass sie einfacher und genauer ist als viele «genaue» Formeln, die zudem oft Hilfstabellen erfordern. Neben der vollständigen Befriedigung des praktischen Bedürfnisses kann die Formel wegen ihrer Genauigkeit auch zur Kontrolle der Resultate anderer Formeln dienen.

2. Die Grundformel

Um für eine allgemein gültige Näherungsformel einen physikalisch sinnvollen Ausgangspunkt zu erhalten, ist in Fig. 2 eine schematische mittlere Kraftlinie eingezeichnet; ihre Länge ergibt sich aus Figur, wenn man x auf $D/6$ schätzt zu $2\ (l + \pi x + c) =$ ca. $2\ (l + 0{,}5\,D + c)$ oder allgemeiner $= 2\ (l + a_1\ D + a_2\ c)$. Bezeichnet H die mittlere Feldstärke im Innern der Spule, so wird die Induktivität L als Flussverkettung aufgefasst

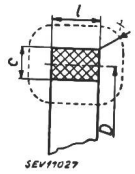


Fig. 2.
Schematische Kraftlinie
$x =$ ca. $D/6$.

$L = H\,N\,D^2\,\pi/4$. Für H berechnen wir aus der Länge der mittleren Kraftlinie den Betrag:

$$H = (4\,\pi\,m\,i\,N)\ /\ 2\ (l + a_1\,D + a_2\,c),$$

wo m ein Koeffizient ist, der alle Einflüsse der unhomogenen Feldverteilung einschliessen soll. Nun wird der Selbstinduktionskoeffizient (Strom $i = 1$):

$$L = 0{,}5\ m\ (\pi^2\,D^2\,N^2)\ /\ (l + a_1\,D + a_2\,c).$$

Für das dünne ($c = 0$) und lange Solenoid ($a_1\ D$ klein gegen l) ist die Induktivität bekanntlich: $L = \pi^2\,D^2\,N^2/l$. Demnach können wir für diesen Fall $0{,}5\ m = 1$ setzen und erhalten so die Grundformel (alles in cm):

$$L = \frac{\pi^2\,D^2\,N^2}{(l + a_1\,D + a_2\,c)} \qquad (1)$$

Aus der gegebenen Ableitung ist es naturgemäss noch vollständig ungewiss, ob diese Formel praktisch brauchbar ist. In einer früheren Arbeit [5]) hat der Verfasser festgestellt, dass für $c = 0$ und $a_1 = 0{,}45$ die Induktivität einer enggewickelten, einlagigen Spule (hier die dünne Spule genannt) für Werte von $D/l = 0...3{,}0$ auf 1 % genau gegeben wird. Obgleich demnach die Formel (1) für längere Spulen stimmt, wird sich zeigen, dass gerade für diese der Einfluss von c in anderer Weise zu berücksichtigen ist, weil in der Ableitung die unvollständige Verkettung bei mehrlagigen Spulen nicht in Betracht gezogen wurde. Die von *Perry* 1890 für «hohe» Spulen veröffentlichte Näherungsformel, wohl die erste überhaupt, hat den Aufbau nach (1); er gelangte allerdings auf anderem Wege dazu und bestimmte die Koeffizienten aus Messungen [6]).

3. Die dünne Spule

Für den Spezialfall der dünnen Spule liegen zur Berechnung der Induktivität Tabellen vor, welche zuerst *Nagaoka* [7]) veröffentlichte. Für ganz kurze Spulen gilt die Formel von *Rayleigh* [8]):

$$L = 4\,\pi\,R\,N^2 \left[\left(1 + \frac{l^2}{32\,R^2}\right) \ln \frac{8\,R}{l} - 0{,}5 + \frac{1}{128}\left(\frac{l}{R}\right)^2\right] \qquad (2)$$

wo R der Radius der Spule ist. Unter Anwendung

[1]) *J. Hak*, Eisenlose Drosselspulen, 1938, Koehler, Leipzig.
[2]) *Fred. W. Grover*, Tables for the calculation of the inductance of circular coils of rectangular cross section, Scientific Papers, Bureau of Standards, 18, 1922, S. 469.
[3]) *Morgan Brooks and H. M. Turner*, Inductance of coils, University of Illinois Bull., Vol. IX, No. 10.
[4]) *K. Foelsch*, Magnetfeld und Induktivität einer zylindrischen Spule, Arch. f. El., 1936, S. 156.
[5]) *K. E. Müller*, Einige Näherungsformeln zur Berechnung von Hochfrequenzkreisen, Bull. SEV 1935, Nr. 15, S. 418.
[6]) *J. Perry*, Phil. Mag. 30, 1890, S. 223.
[7]) Die Tabellenwerte von *Nagaoka* finden sich z. B. bei *Hak*, l. c., ferner bei *Grover*, l. c., und anderen.
[8]) *L. Rayleigh*, Proc. Royal Soc. 32, 118, 1881.

unserer Bezeichnungen und durch eine Umformung erhält man daraus:

$$L = 2\,\pi\,D\,N^2\,2{,}303\left[\log_{10}\left(\frac{2{,}426\,D}{l}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{l}{D}\right)^2 \log_{10}\left(\frac{4{,}13\,D}{l}\right)\right] \qquad (3)$$

Wird die Spule sehr kurz, also D/l gross, so ist nur das erste Glied der Klammer massgebend. Wenn wir nun eine Näherungsformel für die dünne Spule *beliebiger* Länge suchen, so müssen wir die Formeln (1) und (3) kombinieren; dies kann in ähnlicher Weise wie bei *Brooks und Turner* (siehe Formel 22) so geschehen:

$$L = \frac{a_3\,D^2\,N^2}{l + a_1\,D}\log_{10}\left(a_4 + \frac{2{,}4\,D}{l}\right) \qquad (4)$$

Für die noch unbekannten Koeffizienten a_1, a_3, a_4 sind Bestimmungsgleichungen zu suchen. Zunächst ist für die kurze Spule $a_3/a_1 = 14{,}47$ = dem Zahlenkoeffizienten in Gleichung (3). Dann ist für die lange Spule $a_3 \cdot \log a_4 = \pi^2$ = dem Zahlenkoeffizienten in Formel (1). Erfüllt man diese beiden Beziehungen, so wird die Formel (4) sowohl für sehr kurze als auch für sehr lange Spulen stimmen. Damit sie aber für eine mittlere Länge $2\,l = D$ richtig sei, muss noch sein:

$$1{,}0510 = \frac{a_3}{\pi^2}\left(\frac{D}{l + a_1\,D}\right)\log\left(a_4 + 4{,}8\,\frac{D}{l}\right)$$

weil 1,0510 der aus den Tabellen von Nagaoka abgeleitete Zahlenwert für $D/l = 2$ ist. Unter Berücksichtigung der zweiten, bereits genannten Bestimmungsgleichung wird daraus:

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{1{,}0510\,\pi^2}{\log\,(a_4 + 4{,}8)} - \frac{\pi^2}{\log\,(a_4)} \qquad (4a)$$

Da nun aber das Verhältnis a_3/a_1 schon zu 14,47 festgelegt ist, muss a_4 durch Probieren so gefunden werden, dass die Bedingung (4a) erfüllt wird. Die Durchführung der Rechnung ergibt:

$$a_4 = 21; \qquad a_3 = 7{,}46; \qquad a_1 = 0{,}515.$$

Um einfache Koeffizienten zu erhalten, wurden diese Werte auf 20, bzw. 7,6, bzw. 0,52 abgerundet und man erhält so als *Näherungsformel für die dünne Spule ($c = 0$):*

$$\boxed{L = \frac{7{,}6\,D^2\,N^2}{l + 0{,}52\,D}\log_{10}\left(20 + \frac{2{,}4\,D}{l}\right)} \qquad (5)$$

Von dieser Formel wissen wir allerdings erst, dass sie an den Grenzen und an einem Punkt in der Mitte stimmt; der tatsächliche Fehler über den ganzen Längenbereich ist für $c = 0$ aus Tabelle I zu entnehmen. Es zeigt sich, dass die Fehler über den ganzen Bereich $0 < D/l < \infty$ *innerhalb 1,0 % bleiben.* — In der erwähnten früheren Arbeit des Verfassers [5]) wurde ein anderer Näherungsausdruck abgeleitet, ebenfalls auf 1 % genau, der aber rein empirisch und etwas komplizierter ist. Mit Formel (5) ist ein Ausdruck gewonnen, der nicht nur genauer, sondern auch einfacher ist als die durch Einsetzen von $c = 0$ spezialisierte Formel 22 von *Brooks und Turner.*

4. Die lange, mehrlagige Spule

Nachdem in Formel (5) in einfacher Weise die dünne Spule beliebiger Länge auf 1 % genau dargestellt werden konnte, war es verlockend, die Erweiterung auf die dicke, d. h. mehrlagige Spule zu versuchen. Es gibt eine Formel von *Rosa* [9]), welche speziell für längere Spulen gilt und den Einfluss mehrerer Wicklungslagen durch eine Korrektur an der dünnen Spule berücksichtigt. Sie lautet, wenn L' die Induktivität der dünnen Spule ist:

$$L = L' - 2\,\pi\,D\,N^2\,(A - B)\cdot c/l, \qquad (6)$$

wo A und B aus Tabellen zu entnehmen sind. A bewegt sich für $c/D = 0 \ldots 1/8$ von $A = 0{,}6949 \ldots 0{,}6909$, also eigentlich nur wenig; B wächst für $l/c = 1 \ldots 30$ von $B = 0{,}00 \ldots 0{,}3218$, wobei für grössere Werte von l/c die Zunahme von B immer kleiner wird. Es wäre daher naheliegend, für eine Näherungsformel von der Aenderung von A und B abzusehen und so wenigstens für die lange Spule den Einfluss der Dicke c darzustellen. Durch Kombination der Formeln (5) und (6) kann man leicht den Korrektionsfaktor K ableiten, mit dem Formel (5) zu multiplizieren ist. Man findet dafür den Ausdruck $K = (1 - 0{,}66\ c/D)$. Da der Gültigkeitsbereich der Formel (6) nur klein ist, weiss man über die Genauigkeit dieses Korrekturgliedes für grössere c zunächst nichts. Glücklicherweise kann man aber für die unendlichlange Spule den Einfluss der Dicke genau berechnen und einfach darstellen, wie nun gezeigt wird.

5. Die unendlichlange Spule

Das magnetische Feld einer dünnen, unendlichlangen Spule ist im Innern homogen und im Aussenraume null. Man kann sich dies verdeutlichen, wenn man die Enden der Spule im Unendlichen zusammengebogen denkt, so dass ein Toroid entsteht. Auch in einem kleinen Toroid verlaufen die Kraftlinien nur innerhalb der Spule, im Aussenraum ist das Feld null, wenn die Amperewindungen gleichmässig verteilt sind. Die am Innenrande verlaufenden Kraftlinien sind um $\pi\,D$ kürzer, diejenigen am Aussenraume ebensoviel länger als die mittlere Kraftlinie, wenn D wiederum den Durchmesser der Einzelwindung bedeutet. Das Feld weicht darum überall um weniger als 1 % vom Mittelwert ab, sobald $D/l < 0{,}003$ ist; überdies heben sich die Abweichungen gegenseitig auf. Ist die Spule gerade, so tritt an den Enden eine unvollständige Kraftlinienverkettung auf, aber auch hier werden wir für $D/l \leqq 0{,}01$ annehmen können, dass die Verhältnisse der unendlichlangen Spule praktisch erreicht sind.

[9]) *E. B. Rosa,* Sci. Papers, B. S., No. 169, 1912, S. 200.

Mit dieser Vorstellung des Kraftlinienbildes kann man sich die mehrlagige Spule aus mehreren ineinandergesteckten einlagigen Spulen entstanden denken. Bei gleichmässig verteilten Amperewindungen steigt das Feld, wie in Fig. 3 dargestellt, von 0 am äusseren Radius R_2 linear an bis zum inneren

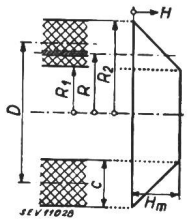


Fig. 3.
Feld der unendlichlangen Spule

Radius R_1 und bleibt im Hohlraum der Spule konstant. Der Fluss Φ innerhalb des Radius R beträgt somit:

$$\Phi_R = \pi R_1^2 H_m + \int_{R_1}^{R} H_R \cdot 2\pi R \cdot dR \qquad (7)$$

$$\text{wo } H_R = H_m - H_m \ (R - R_1)/c$$

Da auf dR eine Windungszahl $dN = (N/c)\ dR$ liegt, so beträgt die Flussverkettung:

$$\int_{R_1}^{R_2} \Phi_R \, dN = \frac{N}{c} \int_{R_1}^{R_2} \Phi_R \, dR \qquad (8)$$

Wären sämtliche N Windungen auf dem mittleren Durchmesser D konzentriert, so wäre die Flussverkettung: $H_m N D^2 \pi/4$. Das Verhältnis dieser beiden Flussverkettungen gibt den Korrektionsfaktor K, mit dem die Induktivität L' der dünnen Spule gleichen mittleren Durchmessers und gleicher Windungszahl zu multiplizieren ist:

$$K = L/L' = \frac{4 N \frac{1}{c}}{\pi^2 D^2 H_m N} \int_{R_1}^{R_2} \Phi_R \, dR \qquad (9)$$

Führt man die Integration durch, so erhält man als Resultat:

$$K = (2 c R_2^3 - 4 c R_1^3 + 2 R_1 R_2^3 - R_2^4 - R_1^4) \frac{2}{3 c D^2} \qquad (10)$$

Durch rein algebraische Umformung kann man dieses Resultat schliesslich auf folgende einfache Form bringen:

$$\boxed{K = 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{c}{D}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{c}{D}\right)^2} \qquad (11)$$

Demnach erhält man die Induktivität der unendlichlangen Spule zufolge der Verteilung der Windungen auf mehrere Lagen, indem man die Induktivität der dünnen Spule gleichen mittleren Durchmessers und gleicher Windungszahl mit diesem Faktor K multipliziert. Die Abnahme erfolgt nach einem einfachen Parabelbogen, wie in Fig. 4 gezeigt. An der Grenze $c/D = 1$ erreicht die Parabel ihren Scheitelpunkt; der Minimalwert von K beträgt dort $^2/_3$. Würde man die mehrlagige Spule, statt mit der dünnen Spule vom *mittleren* Durchmesser D, mit einer solchen vom *äusseren* Durchmesser $D_a = 2 R_2$ vergleichen, so hätte man in ähnlicher Weise einen andern Korrektionsfaktor K^* erhalten, vom Betrage:

$$K^* = 1 - \frac{8}{3}\left(\frac{c}{D_a}\right) + 2\left(\frac{c}{D_a}\right)^2 \qquad (12)$$

In diesem Fall steigt c/D_a von 0 bis zum Grenzwert 0,5 und gleichzeitig sinkt K^* von 1,0 bis auf $^1/_6$ (vgl. Fig. 4).

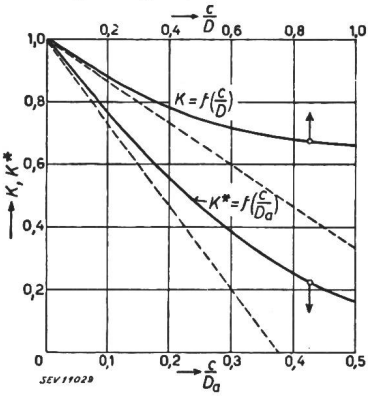


Fig. 4.
Abnahme der Induktivität der unendlichlangen Spule, wenn die Windungen auf mehrere Lagen verteilt werden, statt auf dem mittleren Durchmesse D einlagig konzentriert zu liegen.

Wenn wir das Resultat mit der Formel von *Rosa* vergleichen, also mit dem oben erwähnten Näherungswert für kleines c:
$K = (1 - 0{,}66\ c/D)$, so sehen wir, dass dieser Wert die Tangente an die Kurve von K für $c = 0$ darstellt. Ferner muss man aus dem Resultat schliessen, dass die Grundformel (1) zwar wohl die lange-dünne, aber nicht die lange-dicke Spule darstellt. Schon *Maxwell* hat auf anderem Wege [10]) einen Ausdruck für die Induktivität der unendlichlangen Spule abgeleitet; die durch Formel (11) gegebene einfache Beziehung scheint bisher unbekannt gewesen zu sein. Sie ist theoretisch genau und nicht etwa ein Näherungsausdruck.

6. Die kurze, mehrlagige Spule

Das für den Spezialfall der kurzen Spule von geringer Dicke c zu erarbeitende Teilresultat wurde zuerst mühselig aus der bekannten Formel von *Stefan* gewonnen [11]). Es ist aber einfacher aus einer älteren Näherungsformel abzuleiten, welche lautet [12]):

$$L = 2\pi D N^2 \left(\ln \frac{4D}{l+c} - 0{,}501\right) \text{ woraus} \qquad (13)$$

$$L = 14{,}47\ D N^2 \log_{10} \left(\frac{2{,}424\ D}{l+c}\right) \qquad (14)$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (3), so ergibt sich, dass man für kleine Werte von l und c Formel (5) verwenden darf, falls statt $\log (20 + 2{,}4\ D/l)$

[10]) Vergl. *Hak*, l. c., S. 14.
[11]) Vergl. *Hak*, l. c., S. 19, und *H. Hemmeter*, Die Berechnung von eisenlosen Drosselspulen, Arch. f. El., 1922, S. 155, und id. 1924, S. 460.
[12]) Vergl. *Hak*, l. c., S. 13.

nun log $(20 + 2{,}4\ D/[l + c])$ geschrieben wird, und zwar mit einem Fehler entsprechend der Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung. Die Formel von *Stefan* kann ebenfalls so geschrieben werden, dass neben dem Ausdruck (14) nur noch Glieder höherer Ordnung auftreten.

7. Die allgemeine Spulenformel

Nach diesen Vorarbeiten kann nun eine für alle Dimensionsverhältnisse von D, l, c nach Fig. 1 gültige Näherungsformel aufgestellt werden. Sie hat zunächst folgenden Aufbau:

$$L = \frac{7{,}6\ D^2\ N^2\ k}{l + 0{,}52\ D + a_2\ c} \log\left(20 + \frac{2{,}4\ D}{l + c}\right) \quad (15)$$

Die Formel erfüllt die bereits behandelten drei Spezialfälle. Für $c = 0$ geht sie über in die Formel (5), gültig für alle dünnen Spulen. Ferner stimmt sie mit der gleichen Genauigkeit für die sehr lange Spule, wo die Abhängigkeit von c durch den Faktor $k = K$ nach Formel (11) richtig erfasst wird, weil c in den anderen Gliedern, welche c enthalten, neben l vernachlässigbar ist. Schliesslich stimmt sie auch für ganz kleine Werte von l und c wie im vorigen Abschnitt gezeigt, weil dort der log den Ausschlag gibt.

Zunächst muss nun a_2 so bestimmt werden, dass die kurze Spule beliebiger Dicke möglichst genau dargestellt wird. Obgleich der Faktor K nach (11) für die *lange* Spule stimmt und es darum ungewiss ist, was er für einen Einfluss bei der kurzen Spule hat, zeigt sich durch direktes Probieren, dass man mit $k = K$ und $a_2 = 0{,}5$ eine befriedigende Uebereinstimmung mit den Vergleichswerten erhält, die aus den eingangs erwähnten Tabellen von *Grover* abgeleitet wurden. Vergleicht man aber Spulen von mittleren Längen mit den genauen Werten, so ergeben sich Fehler, die mit wachsender Dicke bis 7 % erreichen. Diesem Uebelstande kann mit einer Aenderung des Ausdrucks für k abgeholfen werden. Allerdings muss man dann an den Grenzen der kurzen und der langen Spule grössere Fehler, nämlich 3 % bzw. 4 % in Kauf nehmen, falls man im praktisch besonders wichtigen, mittleren Teil des Längenbereiches kleine Fehler anstrebt. Wenn also in Formel (15) $a_2 = 0{,}5$ und für k der Ausdruck

$$k = 1 - 0{,}61\left(\frac{c}{D}\right) + 0{,}31\left(\frac{c}{D}\right)^2 \quad (16)$$

verwendet wird, so erhält man bereits eine brauchbare Näherungsformel mit Fehlern innerhalb 3 %, ausgenommen für sehr lange und sehr dicke Spulen, für welche aber der Fehler wenigstens innerhalb 5 % liegt. Damit wäre diese Formel bereits besser als diejenige von *Brooks und Turner*.

Es gibt aber noch eine bessere Lösung. Angesichts der sehr verschiedenen Kraftlinienbilder der langen und der kurzen Spule kann man vermuten, dass der Faktor K nach Formel (11) wohl für die lange, aber nicht für die kurze Spule richtig sein wird. Setzt man aus dieser Ueberlegung heraus versuchsweise für die kurze Spule $k = 1$ und bestimmt a_2, so findet man für $a_2 = 1{,}0$ eine gute Uebereinstimmung. Der Einfluss von k muss also von Ausdruck (11) an «gleitend» auf 1 abnehmen, was beispielsweise durch folgenden Ansatz zu verwirklichen ist:

$$k = 1 - \frac{l}{l + a_6 D}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{c}{D}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{D}\right)^2\right] \quad (17)$$

Durch den Faktor $l/(l + a_6 D)$ wird der Einfluss von k mit abnehmender Spulenlänge kleiner gemacht; für die lange Spule, l gross, geht Ausdruck (17) in (11) über, während er für kleines l unabhängig von c zu 1,0 wird. Ausserdem kann nun durch geeignete Wahl von a_6 für eine mittlere Länge der Einfluss von k auf den passenden Wert gebracht werden. Es zeigt sich, dass $a_6 = 1{,}5$ ein gutes Resultat ergibt, wenigstens bis zu Dicken entsprechend $c/D \leqq 0{,}85$. Leider steigt der Fehler dann bei den dickeren Spulen, wenn sie gleichzeitig kurz sind, auf über 3 % an. Man könnte sich damit beruhigen, falls es nicht zu ändern wäre, mit dem Hinweis darauf, dass Spulen mit den entsprechenden Dimensionen praktisch keine Bedeutung besitzen. Um aber die Behauptung wahr zu machen, dass die neue Näherungsformel im *ganzen* Bereiche auf 1 % genau ist, schien es richtiger, durch ein zusätzliches Korrektionsglied diesem Uebelstande abzuhelfen. Dies gelingt, wenn statt $a_2\,c$ nun: $c - 0{,}05\ c\ (c/D)^6$ geschrieben wird. Somit erhalten wir nun die *endgültige Näherungsformel für die Induktivität der runden Spule* mit rechteckigem Wicklungsquerschnitt, aber *beliebigen Abmessungen* nach Fig. 1 (alles in cm):

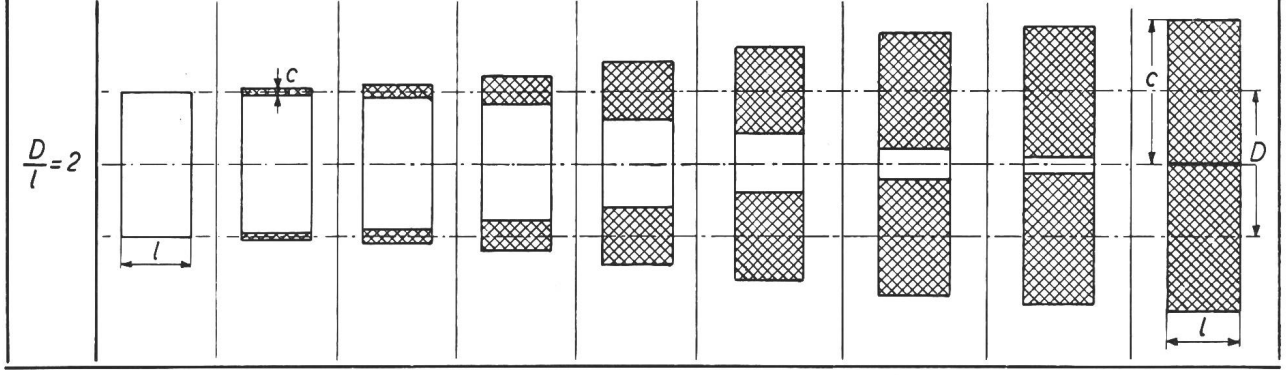
$$\boxed{\begin{aligned} L^{cm} &= \frac{7{,}6\ D^2\ N^2\ k \log_{10}\left(20 + \frac{2{,}4\ D}{l + c}\right)}{l + 0{,}52\ D + c - 0{,}05\ c\,(c/D)^6} \\ \text{mit } k &= 1 - \frac{l}{l + 1{,}5\ D}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{c}{D}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{D}\right)^2\right] \end{aligned}} \quad (18)$$

In Tabelle I sind nun die Fehler dieser Formel im Vergleich zu den Tabellen von *Grover* zusammengestellt. Von links nach rechts wird der ganze Bereich von der dünnen Spule bis zur dicksten (ohne inneren Hohlraum), bestrichen; von oben nach unten steigt die Spulenlänge von der unendlichdünnen Scheibe bis zur unendlichlangen Spule. Die *eingeklammerten* Fehler zeigen die Fehler der Formel, wenn das Korrekturglied $0{,}05\ c\ (c/D)^6$ weggelassen würde. Der Verlauf der Fehler ist überall sehr gleichartig und man erkennt, dass es gelang, die 1 %-Grenze einzuhalten. Man könnte übrigens die Fehler für $c/D = 0{,}2 \ldots 0{,}6$ bei kurzen Spulen noch um einige ‰ drücken, wenn man im Nenner von (18) statt: $c - 0{,}05\ c\ (c/D)^6$ nun $1{,}01\ c - 0{,}06\ c\ (c/D)^6$ schriebe.

%-Fehler der neuen Näherungsformel (18)
Die eingeklammerten Fehler beziehen sich auf den Fall, dass das Korrekturglied 0,05 c $(c/D)^6$ weggelassen würde.

Tabelle I.

D/l	$c/D =$ 0,0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0
∞	+ 1,0	+ 0,2	+ 0,5	+ 0,9	+ 0,9	+ 0,7 (+ 0,6)	+ 0,3 (− 0,5)	+ 0,1 (− 1,6)	+ 0,1 (− 3,3)
1000	+ 0,8	+ 0,2	+ 0,5	+ 0,8	+ 1,0	+ 0,7 (+ 0,6)	+ 0,3 (− 0,5)	+ 0,1 (− 1,6)	+ 0,1 (− 3,3)
100	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,5	+ 0,9	+ 1,0	+ 0,8 (+ 0,7	+ 0,3 (− 0,5)	+ 0,2 (− 1,6)	+ 0,2 (− 3,2)
20	+ 0,2	+ 0,4	+ 0,6	+ 0,8	+ 0,9	+ 0,6 (+ 0,5)	+ 0,3 (− 0,5)	+ 0,2 (− 1,5)	+ 0,2 (− 3,1)
10	+ 0,4	+ 0,6	+ 0,6	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,5 (+ 0,5)	+ 0,1 (− 0,6)	+ 0,0 (− 1,7)	+ 0,2 (− 3,1)
5	+ 0,7	+ 0,7	+ 0,5	+ 0,3	+ 0,3	+ 0,3 (+ 0,2)	+ 0,1 (− 0,5)	− 0,1 (− 1,6)	+ 0,0 (− 3,0)
2	+ 0,1	− 0,0	− 0,1	− 0,3	− 0,2	+ 0,1 (+ 0,0)	− 0,1 (− 0,7)	− 0,1 (− 1,4)	− 0,4 (− 3,0)
1	− 0,6	− 0,6	− 0,7	− 0,6	− 0,1	+ 0,2 (+ 0,1)	+ 0,1 (− 0,4)	− 0,2 (− 1,1)	− 0,5 (− 2,5)
0,5	− 0,9	− 0,8	− 0,7	− 0,5	+ 0,2	+ 0,6 (+ 0,6)	+ 0,5 (+ 0,2)	+ 0,3 (− 0,6)	− 0,2 (− 1,6)
0,2	− 0,5	− 0,5	− 0,3	+ 0,0	+ 0,6	+ 0,9 (+ 0,9)	+ 0,7 (+ 0,6)	+ 0,7 (+ 0,3)	+ 0,3 (− 0,5)
0,1	− 0,3	− 0,3	− 0,1	+ 0,1	+ 0,5	+ 0,7 (+ 0,7)	+ 0,7 (+ 0,6)	+ 0,5 (+ 0,4)	+ 0,4 (− 0,0)
0,01	− 0,1	+ 0,2	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,3	+ 0,3 (+ 0,3)	+ 0,2 (+ 0,2)	+ 0,2 (+ 0,2	+ 0,2 (+ 0,2)
0	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2	+ 0,2



8. Ein einfacher Näherungsausdruck

Die Formel (18) wird überall anwendbar sein, wo man gelegentlich eine Induktivität zu berechnen hat; die sichere Genauigkeitsgrenze von 1 % ohne Einschränkung des Gültigkeitsbereiches, verbunden mit relativer Einfachheit der Formel, sind dafür wertvoll. Wer häufig Drosselspulen auslegen muss, wird für den Entwurf vielleicht am raschesten mit Kurventafeln zum Ziel kommen. Da aber als Nebenprodukt vorliegender Arbeit auch ein für Entwurfsarbeiten tauglicher, einfacher Näherungsausdruck gefunden wurde, sei er hier mitgeteilt. Er benutzt neben der Grundformel (1) einen Näherungswert des Faktors k nach (16), nämlich $k = 1 : (1 + 0{,}6\ c/D)$. So erhalten wir den *Näherungsausdruck:*

$$L \text{ in cm} = \frac{\pi^2\ D^2\ N^2}{(l + 0{,}45\,D + 0{,}5\,c)\ (1 + 0{,}6\ c/D)} \quad (19)$$

Wenn wir durch die Bedingung: $10\ (l + c) > D$ eine kleine Ecke aus dem Anwendungsfeld ausschliessen, nämlich die kurzen und gleichzeitig dünnen Spulen, so sind bei Formel (19) an den Grenzen bis zu 11 % Fehler möglich. Im praktisch wichtigen Gebiete, für das $c/D \leqq 0{,}6$ und $D/l \leqq 3$ gelten wird, stimmt die Formel auf 2 % und im wichtigsten Teil sogar innerhalb 1 %.

9. Praktische Anwendung der Formel

Die neue Näherungsformel (18) bezieht sich auf die «ideale» Spule, bei welcher vorausgesetzt wird, dass der ganze Wicklungsquerschnitt gleichmässig mit Strom belegt sei. Dies ist praktisch nicht der Fall und bedingt eine Korrektur, die besonders bei wenigen Windungen merklichen Einfluss hat. Diese Korrektur, welche zu addieren ist, beträgt:

$$+ \Delta L = 14{,}47\ D\ N \log_{10}\left(\frac{1{,}16\ d}{d_0}\right) \quad (20)$$

wo d = der äussere Durchmesser des isolierten Drahtes, d_0 = Durchmesser des nackten Drahtes. Die

Windungszahl N steht in der ersten Potenz. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Drahtmitten benachbarter Windungen in den Ecken eines Quadrates stehen. Man kann aber die Formel (20) auch anwenden, wenn die Drähte eine andere Anordnung aufweisen. Dann ist an Stelle des Aussendurchmessers d nun:

$$d = (a_1 + a_2)/2 \qquad (21)$$

zu setzen, wo a_1 der Abstand der Drahtmitten einer Wicklungslage, a_2 der Abstand zweier Wicklungslagen ist. Diese Regel gewinnen wir daraus, dass der mittlere geometrische Abstand eines Rechtecks von sich selbst nach *Sumec* [13]) mit grosser Annäherung = 0,2235 $(a_1 + a_2)$ gesetzt werden kann, während d in Formel (20) eigentlich die Seitenlänge des erwähnten Quadrates darstellt [14]).

Formel (20) gilt nur näherungsweise, weil bei verschiedener Anzahl und Anordnung der Windungen ihre gegenseitige Induktion verschieden ausfällt und im Koeffizienten 1,16 nur ein mittlerer Wert dafür enthalten ist. Immerhin ist die ganze Korrektur gewöhnlich sehr klein. Formel (19) gilt auch, wenn die einzelnen Windungen, ob isoliert oder nicht, mit Abstand gewickelt sind; a_1 und a_2 behalten ihre oben gegebene Bedeutung. Wird von dieser Korrekturformel Gebrauch gemacht, dann ist zu beachten, dass in jeder Formel zur Berechnung der Induktivität, also auch in (18) die Aussenmasse zu korrigieren sind. Es ist dann: $l = n_1 \cdot a_1$, wo n_1 Drähte pro Lage, a_1 = Drahtabstand; $c = n_2 \cdot a_2$, wo n_2 Lagen mit a_2 = Lagenabstand; der mittlere Durchmesser D bleibt unverändert.

Es ist vorgekommen, dass *der einfache Kreisring aus rundem Draht* vom Durchmesser d_0 fälschlicherweise als Grenzfall der dünnen, d. h. einlagigen Spule betrachtet wurde. Wohl erhält man aus (18) einen Näherungswert für die Induktivität, wenn sinngemäss $l = c = d_0$ gesetzt wird. Um 1 % Genauigkeit zu erreichen, ist aber dann die Korrektur (20) unerlässlich, wobei $d = d_0$ zu setzen ist. — Weil in der Formel (20) die Windungszahl N in der ersten Potenz steht, erkennt man, dass die Frequenzabhängigkeit der Induktivität beim einfachen Kreisleiter infolge Stromverdrängung weitaus grösser sein muss, als bei einer Spule aus mehreren Windungen.

10. Die allgemeine Spulenformel von Brooks und Turner

Schon vor ca. 30 Jahren haben *Morgan Brooks und H. M. Turner* [3]) eine allgemeine Spulenformel veröffentlicht. Sie lautet mit Bezeichnungen nach Fig. 1:

$$L = \frac{\pi^2 D^2 N^2 K}{D + 2l + 3c} \log_{10}\left(100 + \frac{7D + 7c}{2l + 3c}\right) \qquad (22)$$

$$\text{wo } K = \frac{10\,l + 13\,c + D}{10\,l + 10{,}7\,c + 0{,}7\,D}$$

[13]) *Sumec*, ETZ, 1906, S. 1175.

[14]) Für die Ableitung der Formel vergl. z. B. *Hemmeter* l. c.; für die hier gegebene Erweiterung ist mir keine Literaturstelle bekannt.

Auf den ersten Blick ist diese Formel sehr ähnlich der neuen, hier abgeleiteten, und ihr Vorhandensein gab auch die Anregung zu der vorliegenden Arbeit. Die Ableitung des Verfassers ist jedoch durchaus selbständig, um so mehr als die Originalarbeit von *Brooks und Turner* nicht eingesehen werden konnte. Bei näherem Zusehen erkennt man aber in Formel (18) nicht nur andere Zahlenkoeffizienten und einen anderen Ausdruck für K, sondern auch einen prinzipiellen Unterschied: Der Einfluss von c verschwindet in der Brookschen Formel fast ganz bei langen Spulen, was durchaus falsch ist. Es schien nun lehrreich, eine gleiche Fehlertabelle aufzustellen, unter Verwendung derselben genauen Vergleichswerte nach *Grover*. Tabelle II gibt das Resultat dieser Berechnung und man ersieht daraus, dass das Fehlerniveau zwar allgemein höher liegt als bei der neuen Formel, dass aber im grössten Teil des praktisch wichtigen Anwendungsgebietes brauchbare Resultate damit erhalten wurden; nur bei dicken Spulen, besonders wenn sie lang sind, wird die Formel unbrauchbar. Die für diese Formel beanspruchte Genauigkeit von 3 % kann aber, wie man sieht, nur auf einen beschränkten Bereich zutreffen.

%-Fehler der Formel von Brooks und Turner

Tabelle II.

D/l	$c/D =$							
	0,0	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1000	+2,1	+2,3	+3,3	+1,9	−1,9	−5,2	−8,3	−12,2
100	+2,3	+2,4	+3,4	+2,0	−1,9	−5,0	−8,0	−11,9
20	+2,5	+3,1	+3,2	+1,9	−1,6	−4,4	−7,2	−11,0
10	+2,8	+3,2	+2,8	+1,6	−1,4	−3,7	−6,2	−9,9
5	+2,6	+2,7	+2,2	+1,3	−0,8	−2,3	−4,5	−8,0
2	+1,6	+1,6	+1,5	+1,4	+1,6	+0,9	+0,4	−2,8
1	+0,5	+1,0	+1,6	+3,0	+5,6	+7,3	+7,3	+4,4
0,5	−0,4	+1,2	+2,7	+5,8	+11,3	+15,3	+16,8	+14,7
0,2	−0,6	+2,2	+3,8	+9,4	+18,4	+25,7	+29,6	+29,1
0,1	−0,3	+2,7	+5,5	+11,3	+22,3	+31,5	+37,0	+38,0
0,01	−0,1	+3,2	+6,6	+13,5	+26,5	+38,0	+46,0	+48,6

11. Schlussbemerkungen

Auf die Berechnung der Induktivität runder Spulen ist im Laufe von Jahrzehnten unsagbar viel Mühe und Arbeit verwendet worden, hauptsächlich des theoretischen Interesses wegen. Wenn es hier gelang, eine relativ einfache Formel zu finden, die das ganze Feld möglicher Dimensionsverhältnisse auf 1 % genau darstellt, so nur dank dem Umstande, dass die Formel (18) in enger Anlehnung an mathematisch richtige Teillösungen aufgebaut werden konnte; das in Formel (11) gegebene Teilergebnis ist dafür besonders wichtig. Aus diesem Grunde kann man vermuten, dass es vielleicht möglich wäre, durch kleine Aenderungen der Formel die Fehlergrenze noch um eine Grössenordnung zu verengern. Eine solche Verbesserung müsste schon an Formel (5) ansetzen. Mit der jetzt erreichten Genauigkeit von 1 % im ganzen Bereich ist allerdings den Bedürfnissen der Praxis bereits Genüge geleistet. Es schien angezeigt, den Weg anzugeben, auf dem die neue Formel gefunden wurde, weil auf anderen Gebieten in ähnlicher Weise Fortschritte erzielt werden können.