**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens
**Band:** 32 (1941)
**Heft:** 14

**Artikel:** Diviseurs de tension et câbles retardateurs dans l'enregistrement oscillographique des phénomènes transitoires rapides
**Autor:** Angelini, A.M.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1057640

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 08.08.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

# BULLETIN

RÉDACTION:
Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité, Zurich 8

ADMINISTRATION:
Zurich, Stauffacherquai 36 ♦ Téléphone 5 17 42
Chèques postaux VIII 8481

Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

XXXIIe Année — N° 14 — Vendredi, 18 Juillet 1941

## Diviseurs de tension et câbles retardateurs dans l'enregistrement oscillographique des phénomènes transitoires rapides.

Par *A. M. Angelini*, Turin *).

621.316.722.4 : 621.317.755

*Les systèmes diviseurs de tension et retardateurs pour oscillographes cathodiques à grande vitesse d'enregistrement doivent satisfaire à certaines conditions qui sont analysées dans cet article eu égard particulièrement aux facteurs qui influencent la précision des relevés concernant les phénomènes transitoires rapides. — L'influence des caractéristiques du câble retardateur est considérée d'une façon spéciale et des conséquences pratiques sont déduites des résultats de l'analyse. — On démontre en particulier qu'il est possible de réaliser d'une façon très économique un câble retardateur ayant des caractéristiques de précision tout à fait satisfaisantes.*

*Dans cette étude l'auteur ne tient pas compte des courants capacitifs traversant les résistances lors de brusques variations de tension.*

*Die Bedingungen, welche verschiedene Spannungsteiler und Verzögerungseinrichtungen für Kathodenstrahloszillographen zur Aufzeichnung rasch verlaufender Vorgänge zu erfüllen haben, sowie ihren Einfluss auf die die Genauigkeit dieser Aufzeichnungen beeinflussenden Faktoren werden näher geprüft. Der Einfluss der Bestimmungsgrössen der Verzögerungskabel wird untersucht und es werden praktische Folgerungen aus den Resultaten abgeleitet. Es wird gezeigt, dass mit einfachen Mitteln Verzögerungskabel genügender Genauigkeit hergestellt werden können.*

*In dieser Abhandlung sind die kapazitiven Ströme nicht berücksichtigt, welche bei raschen Spannungsänderungen durch die Widerstände fliessen.*

### 1° Introduction.

L'enregistrement des phénomènes transitoires de très courte durée, tels que les surtensions provoquées par la foudre dans les installations d'énergie ou encore les tensions de choc obtenues par les générateurs d'impulsion, se fait au moyen de l'oscillographe cathodique. Dans la plupart des cas l'appareil employé est du type à haute tension d'accélération et à cathode froide. Cet instrument constituait dans un passé assez récent une rareté et son emploi présentait des difficultés sérieuses; à l'époque actuelle, à la suite des perfectionnements qu'il a reçu, il est devenu assez commun et toujours plus employé dans les laboratoires d'électrotechnique. Nous nous passons donc de donner la description de cet appareil dont cette Revue s'est d'ailleurs occupée à plusieurs reprises.

Le problème sur lequel nous allons fixer notre attention est celui de la détermination des caractéristiques des dispositifs intermédiaires nécessaires pour relier l'oscillographe à l'installation en essais ou, plus exactement, aux points entre lesquels se manifeste une différence de potentiel transitoire de très courte durée dont on veut enregistrer l'allure.

Ce problème peut se présenter de deux façons différentes suivant que le phénomène à enregistrer par l'oscillographe a lieu à une époque imprévue (cas des surtensions d'origine atmosphérique) ou bien qu'il est provoqué par des moyens convenables à une époque contrôlée (c'est le cas de certaines installations pour les essais de choc).

Dans le premier cas — qui est d'ailleurs le plus compliqué — c'est la tension à enregistrer même qui, directement ou non, doit provoquer le déclenchement de l'oscillographe, c'est-à-dire déterminer l'apparition du pinceau cathodique dans la chambre de prise photographique et en même temps son déplacement suivant l'axe des abscisses. On sait que ces opérations demandent un temps très court (dixièmes ou fractions de dixièmes de micro seconde) qui toute fois n'est pas négligeable par rapport à la durée des phénomènes à enregistrer: il s'ensuit que, si l'on ne prend des précautions convenables, l'oscillogramme enregistré manque du relevé de la tension transitoire pendant les premiers instants, ce qui peut masquer certaines particularités ayant parfois un intérêt remarquable.

On tourne cette difficulté en appliquant la tension à enregistrer aux plaques des ordonnées à travers une ligne, dont les caractéristiques sont choisies de façon à donner lieu à un retard qui soit en tous cas supérieur au temps nécessaire pour déclencher l'oscillographe. De cette façon on obtient, pour ainsi dire, la possibilité d'enregistrer le phénomène transitoire dès quelques instants avant qu'il ne se produise.

Mais il y a encore une condition à remplir puisqu'il est bien difficile que la tension à enregistrer puisse être appliquée directement aux plaques des ordonnées de l'oscillographe. La ré-

*) Article reçu de l'auteur le 28 novembre 1939.

duction de la tension transitoire suivant un rapport approprié est obtenue au moyen d'un diviseur de tension qui doit être associé à la ligne de retard. Naturellement les caractéristiques du diviseur de tension et celles de la ligne de retard ne sont pas indépendantes: ils constituent donc un système unique qui doit assurer la condition fondamentale suivant laquelle *la tension appliquée à l'oscillographe doit rester sensiblement proportionnelle à celle appliquée au diviseur de tension, et cela suivant un facteur constant et bien déterminé.*

## 2° Le système diviseur-retardateur et ses causes d'erreur.

Un système diviseur-retardateur pour oscillographe peut toujours être représenté comme il est indiqué dans la fig. 1 où $Z_1$ est un impédance pour haute tension, $z_1$ et $z_2$ deux impédances pour basse tension et $C$ un câble dont la longueur et les caractéristiques électriques sont telles qu'une perturbation électrique passe du point A au point B en quelques fractions de microseconde. Les impédances $Z_1$, $z_1$ et $z_2$ sont formées par des résistances ou bien par des résistances et des capacités couplées en série. Dans certains cas l'impédance $z_1$ n'existe pas et le point A ne présente aucune connexion avec la terre à l'extrémité gauche du câble.

La condition fondamentale à laquelle le système doit satisfaire est que le rapport entre la tension $u_{1t}$ appliquée au diviseur et la tension $u_{2t}$ aux plaques de l'oscillographe soit constant et bien déterminé, quelle que soit l'allure en fonction du temps, et la durée d'application de la tension $u_{1t}$; il faut en d'autres termes que les caractéristiques des impédances indiquées dans la fig. 1 soient telles que:

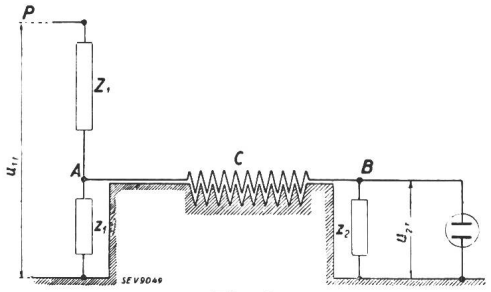


Fig. 1.
Schema général d'un système diviseur-retardateur.

1° L'impédance $z_2$ soit égale ou très proche de l'impédance caractéristique du câble, de façon que ce câble se comporte comme s'il était de longueur infinie par rapport aux perturbations électriques qui se propagent du point A au point B. Il s'ensuit que si les pertes dues à la résistance du conducteur et à la dispersion dans le diélectrique sont négligeables, c'est-à-dire si l'on a un «câble idéal», son impédance d'entrée à son extrémité gauche est une simple résistance $r_0$ dont la valeur est donné par

$$r_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$L$ et $C$ étant l'inductance et la capacité distribuées par unité de longueur.

Si cette condition est vérifiée on a aussi que la tension appliquée à l'extrémité A du câble se reproduit à l'extrémité B sans distorsion ni réduction d'amplitude après un temps $t_0$ donné par le rapport entre la longueur du câble $l$ et la vitesse de propagation $v = 1/\sqrt{LC}$; c'est-à-dire que l'on a

$$t_0 = \sqrt{LC} \cdot l \qquad (1)$$

2° Le rapport entre l'impédance d'entrée du dispositif (donnée par la somme de $Z_1$ et de la résultante des deux impédances $z_1$ et $r_0$ en parallèle) et l'impédance comprise entre le point A et la terre (donnée par $r_0 z_1/(r_0 + z_1)$ ) soit constant et égal au rapport entre $u_1$ et $u_{2t}$ pour n'importe quelle allure de $u_{1t}$. Il faut eu d'autres termes que:

$$\left(Z_1 + \frac{r_0\, z_1}{r_0 + z_1}\right)\left(\frac{r_0 + z_1}{r_0\, z_1}\right) =$$

$$Z_1\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{z_1}\right) + 1 = \frac{u_{1t}}{u_{2\,(t+t_0)}} = K \qquad (2)$$

cette grandeur $K$ porte le nom de «rapport du diviseur»; elle donne en effet le rapport entre la tension appliquée au système diviseur-retardateur et la tension aux plaques des ordonnées de l'oscillographe. Nous avons écrit $u_{2\,(t+t_0)}$ au lieu de $u_{2t}$ pour tenir compte du retard déterminé par le câble.

Cela étant, les causes d'erreur du système retardateur peuvent se résumer comme suit:

a) Résistance du conducteur du câble et dispersion de son diélectrique.

b) Phénomènes secondaires qui, indépendamment de la condition a), altèrent la caractéristique «idéale» du câble.

c) Effets des réflexions aux extrémités du câble $C$ à cause de la différence entre les impédances terminales ($z_2$ et $z_1$) et l'impédance caractéristique.

d) Influences nuisibles dues aux accouplements parasites des éléments du diviseur retardateur avec l'installation.

Nous examinerons en détail les causes d'erreur mentionnées en nous basant sur deux types de diviseurs-retardateurs employés très souvent dont nous allons rappeler les éléments principaux.

## 3° Description de quelques systèmes employés en pratique.

### *a) Diviseur à résistance.*

La façon la plus simple pour satisfaire aux conditions que nous venons d'établir, est certainement celle qui consiste à réaliser les impédances $Z_1$, $z_1$, $z_2$, par des résistances ohmiques. Dans ce cas, le schéma représenté par la fig. 1 se transforme en celui de la fig. 2.

Les éléments caractéristiques du diviseur en question peuvent être déduits d'une façon très simple de ce que nous avons dit plus haut. Si $L$ et $C$ représentent l'inductance et la capacité par mètre de câble, la longueur à attribuer à celui-ci pour obtenir un retard $t_0$ est donnée par:

$$l = \frac{t_0}{\sqrt{L\,C}} \qquad (3)$$

$l$ est exprimé en mètres
$t_0$ en microsecondes
$L$ en microhenry
$C$ en microfarad.

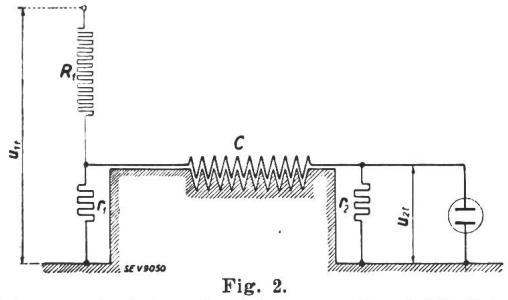


Fig. 2.
Diviseur retardateur à résistance suivant M. Gabor.

La résistance $r_2$ est donnée par:

$$r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}} = r_0 \qquad (4)$$

Cela étant, comme il résulte de la formule (2), les résistances $R_1$ et $r_1$ s'expriment en fonction de l'impédance caractéristique du câble (connue) et du rapport du diviseur $K$ qui est donné; on a en effet:

$$R_1 \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right) + 1 = K \qquad (5)$$

d'où

$$R_1 = \frac{K - 1}{\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}} \qquad (6)$$

Dans le *diviseur-retardateur de Gabor*, la résistance $r_1$ n'existe pas et par conséquent, en posant $r_1 = \infty$ on a tout simplement

$$R_1 = (K - 1)\, r_0 \qquad (7)$$

Il s'ensuit donc que les caractéristiques du diviseur-retardateur sont liées à celles du câble.

Dans beaucoup de cas, la valeur de la résistance $R_1$ qui résulte de la formule (7) n'est pas appropriée: cela apparaît évident si l'on pense que la valeur de $R_1$ ne dépend pas du tout des caractéristiques de l'installation. D'autre part, dans le cas des installations de choc, il est bien souvent commode d'utiliser la résistance en dérivation pour le diviseur ce qui ne permet pas d'attribuer à $R_1$ la valeur donnée par (7). Il se pose alors le problème de régler le rapport du diviseur en choisissant une valeur convenable pour $r_1$.

Ayant fixé la valeur de $R_1$, la formule (5) nous donne pour $r_1$,

$$r_1 = \frac{1}{\frac{K-1}{R_1} - \frac{1}{r_0}} \qquad (8)$$

Cela est possible pour autant que $(K-1) \cdot r_0 \geqq R_1$ [1]) (autrement la valeur donnée par la formule (8) pour $r_1$ serait négative) ce qui est presque toujour vérifié dans le cas des générateurs de choc lorsque $R_1$ est la résistance d'amortissement.

Lorsque l'isolement du câble est prévu pour une tension supérieure à celle appliquée aux plaques de l'oscillographe, une autre possibilité de réglage peut s'obtenir en dérivant la tension $u_{2f}$ sur une prise de la résistance $r_2$ qui fonctionne ainsi en potentiomètre. Si cela est possible, on peut approcher de $r_0$ la valeur de $r_1$ ce qui constitue un avantage pour l'exactitude des relevés oscillographiques.

*b) Diviseur à résistance-capacité.*

Dans certaines applications — par exemple dans l'étude des surtensions provoquées par la foudre dans les installations électriques à haute tension — on ne peut pas admettre une connexion permanente de l'installation avec la terre, par un système comme celui représenté en fig. 2. Pour parer à cet inconvénient on dispose alors un condensateur de capacité $C_1$ en série avec la résistance $R_1$.

L'erreur due à la présence de cette capacité peut être réduite au minimum en appliquant une capacité $c_2$ en série avec la résistance $r_2$. Le diviseur-retardateur se présente alors comme il est indiqué dans la fig. 3.

Le calcul des constantes de ce diviseur-retardateur peut se faire d'une façon simple en se basant sur la considération de deux conditions de fonctionnement typiques.

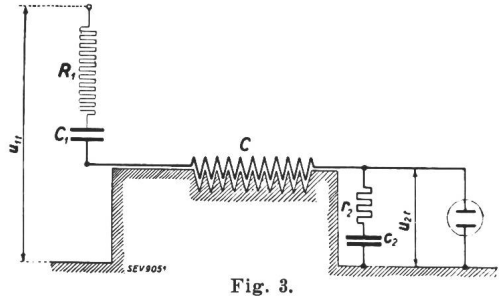


Fig. 3.
Diviseur retardateur à résistance et capacité suivant M. Gabor.

*1° Sous l'action de tensions rapidement variables.* C'est le cas de l'enregistrement de la période initiale des ondes à front raide et des oscillations à haute fréquence. Dans ces conditions, il est évident que si les capacités $C_1$ et $c_2$ ont une valeur convenable par rapport aux résistances $R_1$ et $r_2$ respectivement, leur influence sur le fonctionnement du diviseur-retardateur est limitée, et cela en raison du fait qu'elles présentent au passage du courant un obstacle d'autant plus petit que les variations de tension auxquelles elles sont soumises sont plus rapides (c'est-à-dire, d'autant plus petit que $\frac{d\,u}{d\,t}$ est grand). Pour mieux préciser cette idée, supposons que $R_1$ ait la valeur de 100 000 ohm et $C_1$ de $200 \cdot 10^{-12}$ farad (c'est l'ordre de grandeur des constantes que l'on adopte en pratique): l'impédance que le condensateur présente sous une fréquence de 500 000 hertz est de 1 600 ohm. C'est-à-dire seulement 1,6 % de $R_1$.

[1]) Il est évident que $K$ est toujours supérieur à l'unité.

*On en conclut que, dans les conditions mentionnées, si $C_1$ et $C_2$ ont des valeurs suffisantes, on peut procéder au calcul des résistances comme dans le cas du diviseur-retardateur de Gabor.*

*2° Sous l'action de tensions à variation lente,* telles que celles qui correspondent à la queue des ondes mobiles et en général pendant la phase de rétablissement qui suit les régimes troublés.

Dans ce cas, les variations considérées étant de longue durée, l'influence des capacités $C_1$ et $c_2$ doit être considérée, tandis que les caractéristiques du câble retardateur ont une importance négligeable sur l'allure des phénomènes qui se passent dans le système diviseur-retardateur; il se comporte en effet (de même qu'une ligne de petite longueur à basse fréquence) comme une simple connexion. Le schéma de la fig. 3 se réduit à celui de la fig. 4.

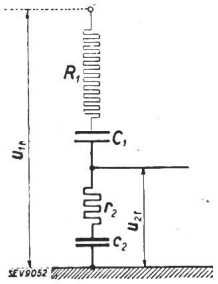


Fig. 4.
Schema simplifié du diviseur de M. Gabor à résistance-capacité pour le cas où les variations de tension à enregistrer sont petites (on peut négliger dans ce cas l'influence du câble).

Il est alors facile de voir que pour obtenir un rapport constant entre les tensions $u_{1t}$ et $u_{2t}$, il faut satisfaire la condition suivante:

$$C_1 R_1 = c_2 r_2 \quad [2]) \qquad (9)$$

Cela étant, le rapport entre les deux tensions $u_{1t}$ et $u_{2t}$ est constant et donné par

$$\frac{u_{1t}}{u_{2t}} = \frac{R_1 + r_2}{r_2} = \frac{C_1 + c_2}{C_1} = K \qquad (10)$$

Le rapport du diviseur à résistance-capacité est donné par la même expression trouvée à propos du diviseur à résistance.

En résumé, le calcul du diviseur à résistance-capacité se base sur la valeur de l'impédance caractéristique $r_0$ du câble retardateur et de la capacité $C_1$ [3]) (la précision est d'autant plus grande que $C_1$ est plus grand); on a alors:

$$r_2 = r_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$
$$R_1 = (K-1)\, r_0 \qquad (11)$$
$$c_2 = \frac{R_1}{r_2} C_1$$
$K =$ rapport du diviseur.

Ce diviseur, de même que celui à résistance, est dû à Gabor.

Les considérations que nous avons développées montrent que, du moins au point de vue théorique, il est possible de réaliser un diviseur-retardateur du type à résistance rigoureusement exact, mais on ne peut obtenir que des résultats approchés (même si les erreurs sont négligeables) par le système a résistance-capacité.

M. Burch a modifié le diviseur-retardateur à résistance-capacité de M. Gabor en ajoutant entre l'extrémité gauche du câble et la terre une résistance et une capacité (fig. 5) dont les valeurs sont égales à $r_2$ et $c_2$ respectivement (voir fig. 3).

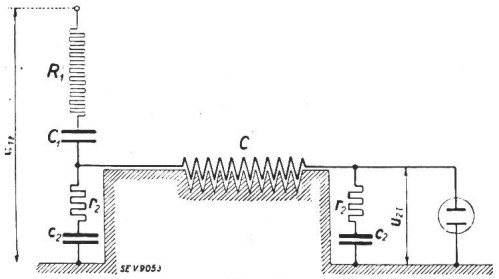


Fig. 5.
Schema du diviseur retardateur suivant M. Burch.

Si l'on se rapporte aux deux conditions limites déjà considérées (variations de tension rapides et lentes) on voit facilement que — autres conditions égales — 1° le rapport $K$ est double, 2° la condition à satisfaire reste encore $R_1 C_1 = r_2 c_2$.

Ce diviseur n'est pas employé souvent à cause de sa complication; il présente l'avantage d'être plus précis que le diviseur de M. Gabor, mais le fait que pour une capacité $C_1$ donnée il a un rapport double, constitue dans beaucoup de cas un inconvénient.

### 4° Influence des caractéristiques du câble retardateur sur l'exactitude.

Le choix du type de câble le plus approprié pour un diviseur retardateur, doit se baser en premier lieu sur l'évaluation de l'influence de ses constantes sur les déformations dont il est cause, et cela pour attribuer à chaque facteur son importance réelle: c'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

Soient:
$r$ la résistance,
$g$ la conductance transversale,
$L$ l'inductance et
$C$ la capacité par mètre de longueur du câble considéré. Nous nous proposons de calculer l'expression de la tension $u_{2t}$ que l'on a à l'extrémité

---

[2]) En effet, en régime alternatif, le courant dans le circuit $R_1$, $C_1$, $r_2$, $c_2$ est donné par $i = \frac{u}{z}$ où $z = z_1 + z_2$ et $z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega c_1}$; $z_2 = r_2 + \frac{1}{j\omega c_2}$
La tension $u_2$ est alors donnée par

$$u_2 = z_2\, i = \frac{z_2}{z} u_1 = \frac{r_2 + \frac{1}{j\omega c_2}}{R_1 + r_2 + \frac{1}{j\omega}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)}$$

On voit immédiatement que le rapport $z_2/z$ est indépendant de $j\omega$ (et par conséquent de la fréquence) si $R_1 C_1 = r_2 C_2$. Si cette condition est verifiée on a:

$$u_2 = \frac{r_2}{R_1 + r_2} u_1 = \frac{C_1}{C_1 + c_2} u_1$$

[3]) On se base sur la valeur de $C_1$ (au lieu de $c_2$) cette capacité étant plus difficile à réaliser.

du câble de longueur $l$ par suite de l'application de la tension $u_{10t}$ à son origine en supposant que l'impédance terminale soit égale (pour toutes les fréquences) à l'impédance caractéristique du câble. Nous reviendrons plus tard sur les effets des réflexions.

La forme de la fonction $u_{10t}$ dépend des caractéristiques du phénomène transitoire qui provoque cette tension variable et ne peut être précisée «a priori»; il nous faut donc déterminer l'expression de la tension $u_{2lt}$ dans le cas le plus général.

Le problème général de la propagation a été traité à fond avec toute rigueur par plusieurs auteurs (Giorgi, Carson, etc.) [4]) mais les résultats sont exprimés par des formules compliquées qui se prêtent mal à notre discussion; d'ailleurs, la généralité absolue ne nous est pas nécessaire, étant donné que, vu le but de notre étude, nous considérons seulement le cas ou les déformations sont relativement petites. Or, si l'on admet cette condition, on peut exprimer la tension $u_{2lt}$ en fonction de $u_{10t}$ sous une forme bien simple [5]), c'est-à-dire:

$$u_{2lt} = e^{-\beta t_0} u_{10}(t - t_l) + \frac{\alpha^2 t_l}{2} e^{-\beta (t_l + t)} \int_{t_l}^{t} e^{-\beta t} u_{10t}\, dt \qquad (12)$$

dans cette formule, qui est valable pour $t \geqq t_e$ on a:
$v$ vitesse de propagation des perturbations électriques dans le câble,

$t_l = l/v$ temps de propagation d'une perturbation électrique d'un bout à l'autre du câble,

$$\alpha = \frac{r}{L} - \frac{g}{C}\,;\quad \beta = \frac{r}{L} + \frac{g}{C}$$

L'expression (12) se compose de deux termes qui ont une signification physique intéressante: le premier représente une tension ayant exactement la même forme que $u_{10t}$: au lieu de la variable $t$ *nous avons* $t—t_0$ ce qui correspond à un retard égal à $t_0$. Ce terme résulte du produit de $u_{10t}$ et d'un coefficient $e^{-\beta t}$ plus petit que l'unité ($\beta$ est toujours positif). Le second terme n'a pas la même forme que $u_{10t}$, il caractérise *la distorsion:* il s'agit d'une fonction du temps multipliée par un coefficient constant donné par $\frac{\alpha^2 t_l}{2}$. Ce coefficient donne une idée approximative de la distorsion; en effet il résulte du produit de deux facteurs: $\alpha$ qui est nul si la condition de non-distorsion d'Heaviside,

$$\frac{r}{L} = \frac{g}{C}$$

est satisfaite, $t_l$ qui est proportionnel à la longueur du câble retardateur. On peut démontrer que l'expression (12) est valable pour autant que $\frac{\alpha^2 t_l}{2\beta}$ est petit par rapport à l'unité ce qui est toujours notre cas. Le facteur

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 t_l}{2\beta} = \frac{l\sqrt{LC}\left(\frac{r}{L} - \frac{g}{C}\right)^2}{2\left(\frac{r}{L} + \frac{g}{C}\right)} \qquad (13)$$

a une importance particulière pour notre étude étant donné que sa valeur représente en quelques sortes l'amplitude maximum de la déformation qui affecte l'onde de tension à l'extrémité du câble retardateur. Pour fixer les idées sur ce point, qui est très important, considérons une application.

Soit un câble de 200 mètres de longueur dont l'impédance caractéristique et la vitesse de propagation ont respectivement les valeurs suivantes:

$$r_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 54 \text{ ohm};\quad v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 240 \cdot 10^6 \text{ m/s};$$

il s'ensuit que la capacité et l'inductance par mètre de longueur de câble ont les valeurs suivantes:

$$C = \frac{1}{v\, z_0} = 77 \cdot 10^{-12} \text{ F/m};\quad L = \frac{z_0}{v} = 2{,}25 \cdot 10^{-7} \text{ H/m}.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$r = 0{,}02 \text{ ohm/m et } g = 10^{-6} \text{ ohm}^{-1}/\text{m}. \qquad [6])$$

Il en résulte:

$$\alpha = \frac{r}{L} - \frac{g}{C} = 0{,}8 \cdot 10^5 - 1{,}3 \cdot 10^4 = 6{,}7 \cdot 10^4$$

$$\beta = \frac{r}{L} + \frac{g}{C} = 0{,}8\ 10^5 + 1{,}3 \cdot 10^4 = 9{,}3\ 10^4$$

$$t_l = \frac{l}{v} = 0{,}83 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$$

et par conséquent

$$\varepsilon = \frac{\alpha^2 t_l}{2\beta} = \frac{6{,}7^2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}83 \cdot 10^6}{2 \cdot 9{,}3 \cdot 10^4} = 0{,}02 \equiv 2\,\%$$

L'amplitude maximum qui résulte, dans les conditions que nous avons posées, est donc du 2 % de l'onde appliquée à l'entrée du câble.

La réduction d'amplitude de la composante non déformée est donnée par:

$$e^{-\beta t_l} = e^{-9{,}3 \cdot 10^4 \cdot 0{,}83 \cdot 10^6} = 1 - 0{,}0077$$

ce qui fait moins d'une unité pour cent.

Ces valeurs donnent une idée des erreurs dues au câble retardateur dans l'enregistrement des phénomènes transitoires par l'oscillographe cathodique; elles nous conduisent à une remarque intéressante en ce qui concerne le choix du type de câble le plus approprié.

Il résulte des considérations développées que la constante qui a l'influence la plus marquée sur les déformations est la résistance du conducteur.

[4]) Voir *G. Giorgi* «Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione». Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo t. LII (1928); pp. 255—312.

*John R. Carson* — «Electric Circuit Theory and the operational calculus» Mc. Graw-Hill, New York 1926; pp. 100-115.

*A. M. Angelini.* «Calcolo operatorio e studio dei circuiti elettrici in regime transitorio», monographie n. 12 de l'Association Italienne des Electriciens; pp. 120-139.

[5]) Cette formule a été déduite par l'auteur par l'application des méthodes de calcul opérationnel. Sa démonstration sera publiée prochainement.

[6]) On peut remarquer que la valeur attribuée à la dispersion est très forte: la résistance d'isolement d'un kilomètre de câble serait de 1000 ohm seulement!

Les pertes dans le diélectrique ont une importance qui est toujours négligeable. *Il s'ensuit qu'il n'est pas nécessaire de prévoir, pour le but dont il est question ici, des câbles spéciaux dont le diélectrique a des pertes très petites; il faut plutôt choisir un câble dont la résistance est petite et peu influencée par l'effet pelliculaire* [7]). Il paraît exagéré, par exemple, de prévoir pour les systèmes diviseurs-retardateurs des câbles du type coaxial qui sont coûteux et encombrants.

Dans l'appendice nous donnons le calcul complet du terme de déformation, exprimé par la formule (13) pour le cas de deux formes d'ondes typiques particulièrement importantes dans les applications.

### 5° Effets secondaires.

Indépendamment des déformations dont nous venons de parler, le câble retardateur est souvent la cause d'autres perturbations qui sont susceptibles de donner lieu à des erreurs importantes dans l'enregistrement des tensions très rapidement variables.

Dans ce qui précède nous avons toujours considéré le câble comme une ligne bifilaire, libre de toute influence extérieure. Il est facile de se rendre compte du fait qu'en pratique il n'en est pas toujours ainsi. Si le câble retardateur est disposé sur le sol, ce dernier constitue un troisième conducteur qui n'est pas sans influence sur la propagation des ondes électriques à allure rapide dans le câble. On suppose généralement que le potentiel de l'armature du câble reste le même dans toute son extension et pendant toute la durée du phénomène à enregistrer. En réalité on se trouve en présence d'une double propagation de l'onde de tension qui se manifeste soit entre les deux armatures du câble, soit entre l'armature extérieure et la terre: il s'ensuit que l'enveloppe du câble n'est pas au même potentiel en tous ses points et par conséquent l'onde transmise résulte de la superposition de deux composantes se propageant à des vitesses différentes.

D'autre part, si le câble est enroulé sur un tambour, on a à considérer les effets perturbateurs dûs à l'induction mutuelle entre les spires de la bobine: ces effets sont parfois caractérisés du fait qu'une tension variable apparaît aux plaques de l'oscillographe pendant l'intervalle de temps comprise entre l'application de la tension transitoire aux bornes d'entrée du câble et son arrivée à l'extrémité opposée.

Dans le but de remédier à ces inconvénients, nous avons essayé avec des bons résultats une disposition nouvelle.

Le câble retardateur est constitué par un conducteur formé d'un certain nombre de fils en cuivre isolés par une gaine en gomme sur laquelle se trouve un écran en tissu de fil de cuivre. C'est au fond, un type de conducteur sous écran que l'on emploie souvent en TSF. Ce conducteur remplace le câble, avec l'avantage que l'effet pelliculaire est beaucoup moins prononcé à cause de sa conformation: il est enroulé sur un support métallique suivant la disposition non inductive donnée par M. Curtis aux bobines de résistance. L'enroulement est réalisé en plusieurs sections, de façon à réduire l'encombrement et à donner au dispositif une forme plus compacte. Le type d'enroulement adopté élimine toute possibilité de couplage inductif entre les spires; la réalisation du système assure en outre qu'il ne peut se manifester des différences de potentiel sensibles le long de l'enveloppe conductrice du câble, étant donné que les spires de l'enroulement sont en contact entre elles et avec le support métallique.

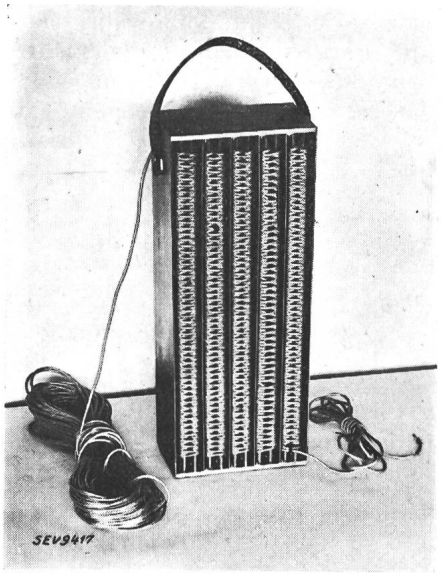


Fig. 6.
Câble retardateur n'occasionnant pas de déformations, selon les indications de l'auteur.
Construit par la maison Trüb, Täuber & Co. S. A., Zurich.

Un dispositif retardateur construit suivant ces principes par la Maison Trüb-Täuber (Zurich) est représenté dans la fig. 6.

### 6° Effet des réflexions aux extrémités du câble retardateur.

Les valeurs des impédances qui constituent un système diviseur-retardateur, doivent satisfaire aux conditions que nous avons établi précédamment pour éliminer, ou bien réduire à quantité négligeable, les effets de réflexion dûs au câble retardateur. Ces conditions ne peuvent être toujours rigoureusement respectées en pratique par suite des raisons suivantes:

a) l'impédance caractéristique du câble ne peut pas être exactement représentée par une résistance pure,

b) les valeurs des résistances ne sont pas constantes pendant le fonctionnement du dispositif puisqu'elles subissent l'influence de l'effet pelliculaire.

[7]) Si l'effet pelliculaire est sensible, les résultats de notre calcul sont moins approchés. Il serait facile de tenir compte de l'effet pelliculaire dans le cas où la fonction $u_{10\,t}$ serait sinusoïdale: le problème devient bien plus compliqué si $u_{10\,t}$ est quelconque.

Une évaluation précise des erreurs auxquelles donnent lieu les faits que nous avons mentionnés, est possible, mais entraîne des calculs assez compliqués. Nous nous bornerons à donner quelques indications de principe et à mettre en évidence les éléments sur lesquels il faut agir pour réduire les erreurs dues aux réflexions.

Etant donné que la tension appliquée aux plaques de l'oscillographe résulte de la superposition d'une onde incidente, que nous appellerons $u_{1et}$ et d'une onde réflechie qui se propage en sens contraire, nous pouvons évaluer l'erreur en calculant l'expression de $u_{1ert}$ en fonction du temps. Pour simplifier le calcul, nous supposons que l'impédance d'extrémité du câble n'est pas quelconque, mais est donnée par

$$r_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

C'est d'ailleurs la valeur qu'on donne à $r_0$ en pratique; ensuite, au lieu de considérer une tension $u_{1et}$ ayant une forme quelconque, nous nous limitons à considérer le cas où $u_{1et}$ est nulle pour $t < 0$, passe brusquement à la valeur *1* à l'instant $t = 0$ et reste constante (et égale à l'unité) pour $t > 0$ (voir appendice fig. 13).

Cela étant, pour $\alpha\ t > 1$, on peut exprimer la tension réflechie par la formule très simple suivante

$$u_{1ert} = \frac{\alpha}{2\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}\right) \qquad (14)$$

Il est aussi intéressant de considérer le cas d'une tension dont la valeur est nulle pour $t < 0$ et égale à

$$u_{1t} = e^{-Kt} \quad \text{pour} \quad t > 0$$

(voir appendice fig. 14).

Dans ce cas, et sous la même condition, on a

$$u_{1ert} = e^{-Kt}\left\{\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\alpha}{2(\beta - 2K)}\left[1 - e^{-(\frac{1}{2}\beta - K)t}\right]\right\} \qquad (15)$$

l'origine des temps coïncide avec l'instant où l'onde de tension $u_{1et}$ se minifeste à l'extrémité du câble.

On voit tout de suite que dans ce cas aussi l'erreur dépend de la valeur de $\alpha$ et, par conséquent (nous nous référons aux considérations déjà développées), est influencée d'une façon très sensible par la résistance du conducteur du câble; la dispersion dans le diélectrique a une importance beaucoup moindre.

La démonstration de ces formules est brièvement résumée dans l'appendice II. Pour donner une idée de l'amplitude que l'onde réfléchie peut atteindre, nous considérons encore les valeurs numériques fixées dans l'application que nous avons traité précédemment, c'est-à-dire:

$$\alpha = 6{,}7 \cdot 10^4 \text{ et } \beta = 9{,}3 \cdot 10^4$$

Nous obtenons facilement dans le premier cas, formule (14):

$$u_{1ert} = 0{,}36\ (1 - e^{-0{,}0465\,t})$$

Si nous supposons maintenant que la tension $u_{1et}$ est amortie suivant une constante de temps de 50 $\mu$s, ce qui fait $K = 1/50 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$, nous avons pour $t < 0$, $u_{1et} = 0$ et pour $t \geqq 0$, $u_{1et} = e$ (nous avons écrit 0,02 $t$ au lieu de $2 \cdot 10^4\ t$ parce que le temps $t$ est exprimé en microsecondes). La formule (15) donne dans ce cas:

$$u_{1ert} = e^{-0{,}02\,t}\left\{0{,}36 + 0{,}34\ (1 - e^{-0{,}0865\,t})\right\}$$

L'erreur initiale est donc nulle; elle augmente suivant une loi exponentielle, et cause des erreurs d'autant plus sensibles que la constante de temps — respectivement égale à $\left(\frac{\beta}{2}\right)^{-1}$ et à $\left(\frac{\beta}{2} - K\right)^{-1}$ dans les formules (14) et (15) — est plus grande.

Il est à remarquer que l'onde réfléchie donne lieu à une erreur (variable) positive.

Ces considérations nous permettent de prévoir assez facilement (au point de vue qualitatif) les conséquences de l'effet pelliculaire, qui est caractérisé par une augmentation transitoire de la valeur de $r$ d'autant plus marquée que la variation de la tension $u_{1et}$ est plus rapide. L'erreur positive sera plus marquée pendant les intervalles de temps où la raideur de $u_{1et}$ est maximum; il s'ensuit que ce fait contribue à déterminer une déformation caractéristique dans le relevé des ondes de choc

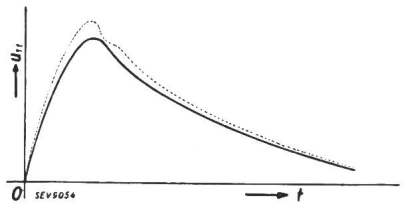


Fig. 7.

Déformation d'une onde de tension de choc provoquée par le système retardateur. La courbe en trait plein représente l'onde de tension non déformée, celle en pointillé l'onde déformée.

(produites par des générateurs d'impulsion) à l'oscillographe. Cette déformation, qui a été souvent attribuée à d'autres causes, est caractérisée par une raideur du front d'onde plus grand qu'en réalité et par une «pseudo-oscillation» sur la crête, voir fig. 7, la courbe en trait pointillé.

Pour finir nous indiquons ici la possibilité de réduire les erreurs dues aux réflexions par un moyen relativement simple, qui consiste à remplacer la résistance ohmique $r_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ à l'extrémité du câble par un circuit qui, pour les hautes fréquences et pour les tensions rapidement variables, reproduit plus fidèlement l'impédance caractéristique du câble.

Ce circuit est représenté dans la fig. 8a et les valeurs des éléments qui le composent sont données par les formules suivantes où: $G = \frac{r}{L}$

$$\begin{cases} r_a = \dfrac{2\,\sigma\, r_0}{\alpha} \\ r_b = \dfrac{r_0}{1 - \dfrac{\alpha}{2\,\sigma}} \\ c_a = \dfrac{\alpha}{2\,\sigma^2\, r_0} \end{cases} \qquad (16)$$

Si nous nous rapportons à l'application numérique que nous avons développée précédemment, nous trouvons les valeurs

$r_a = 129$ ohm, $r_b = 93$ ohm, $c = 0{,}097 \cdot 10^{-6}$ F.

Il est facile de constater que, pour les fréquences très élevées ou encore pour des ondes à variation rapide, le condensateur $c_a$ est comparable à un court circuit et l'impédance entre les bornes du circuit de la fig. 8a se réduit à la résistance combinée $r_a$ et $r_b$: cette résistance est égale à $r_0 = \sqrt{L/C}$.

Une démonstration des formules (16) est donnée dans l'appendice II.

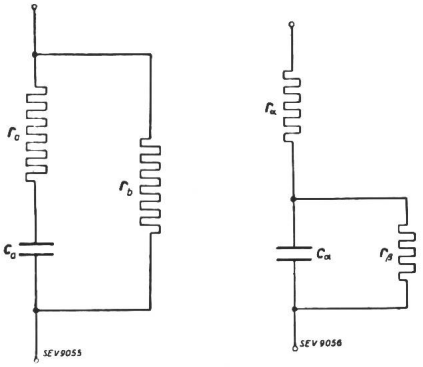


Fig. 8a. Fig. 8b.

Lignes artificielles réproduisant, dans une certaine mesure, l'impédance caractéristique d'un câble retardateur.

On peut démontrer que le circuit de la fig. 8a est équivalent à celui de la fig. 8b. Dans ce cas on a

$$\begin{cases} r_\alpha = r_0 \\ r_\beta = \dfrac{\alpha\, r_0}{2}\left(\dfrac{1}{\sigma - \dfrac{\alpha}{2}}\right) \\ c_\alpha = \dfrac{2}{\alpha\, r_0} \end{cases} \qquad (16\text{ bis})$$

Suivant les données de l'application numérique, nous avons

$r_\alpha = 54$ ohm, $r_\beta = 39$ ohm, $c_\alpha = 0{,}55 \cdot 10^{-6}$ F.

Quant aux réflexions successives à la première, celles-ci ont une importance beaucoup moindre et donnent lieu à des modifications de l'onde de tension enregistrée qui sont toujours négligeables vis-à-vis des autres causes d'erreur. D'ailleurs, si on voulait en tenir compte, le procédé à appliquer pour leur étude serait exactement le même.

## 7° Influences nuisibles dues aux accouplements parasites.

Il nous reste à considérer d'autres influences qui altèrent la précision des relevés oscillographiques et pour lesquelles il est difficile non seulement de calculer la valeur, mais aussi de donner des régles générales parce qu'elles dépendent essentiellement des caractéristiques particulières de chaque installation. On peut toutefois rappeler quelques recommandations pratiques à ce propos.

a) Il faut éviter dans la mesure du possible tout accouplement inductif entre les circuits de choc et ceux du système diviseur-retardateur au moyen d'écrans appropriés ou en les disposant à une distance convenable.

b) Il est particulièrement important de soigner les mises à la terre et leurs connexions dont la longueur et la résistance doivent être les plus petites possible.

c) L'enroulement du câble retardateur doit être placé près de l'oscillographe et son enveloppe reliée directement au tube.

La longueur libre du câble, qui sert de connexion avec le diviseur de tension, doit être la plus courte possible et avoir exactement les mêmes caractéristiques que le reste du câble.

## 8° Résultats expérimentaux.

(Ce paragraphe a été rédigé en collaboration avec M. *M. Merega* qui a effectué les essais dont on expose des résultats.)

Les essais dont il est question ont été effectués sur deux câbles retardateurs du type représenté par la fig. 6 et ayant les caractéristiques données par le tableau suivant:

| Constantes | 1er type | 2e type |
|---|---|---|
| Résistance ohm/m | 0,1 | 0,02 |
| Conductance mho/m | 0 | 0 |
| Inductance henry/m | $0{,}4 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}165 \cdot 10^{-6}$ |
| Capacité farad/m | $40 \cdot 10^{-12}$ | $156 \cdot 10^{-12}$ |
| $\alpha = \beta =$ | $0{,}25 \cdot 10^{6}$ | $0{,}121 \cdot 10^{6}$ |
| $t_l$ en microsecondes | 0,8 | 1 |
| $e^{-\beta t l} =$ | 0,82 | 0,89 |
| $\dfrac{\alpha^2\, t_l}{2\,\beta} =$ | 0,10 | 0,06 |

Le câble du premier type est concentrique et présente un isolement très élevé: le câble du second type est isolé au caoutchouc.

Le premier câble a une résistance distribuée bien plus grande que celle du second.

Le but des essais a été le suivant:

1° Vérifier avec quelle approximation l'impédance caractéristique du câble est assimilable à une résistance ohmique pour les ondes de tension à front raide.

2° Evaluer les déformations introduites par le câble dans l'enregistrement oscillographique des ondes à front raide.

Pour les essais, on a utilisé un petit générateur d'ondes de tension de choc dont le schéma est représenté par la fig. 9a; il est essentiellement constitué par un condensateur de capacité $C$ (chargé

préalablement à une tension de valeur donnée) qui se décharge dans un circuit formé par une inductance $L$ et une résistance $R$. Le courant de décharge, et par conséquent *la tension aux bornes de la résistance R*, est apériodique: la raideur du front et la durée de l'onde de tension dépendent des valeurs $L$ et $R$ que l'on peut régler de façon à réaliser les conditions d'expérience voulues.

Entre les boules du spinteremètre $S$ et à mi-distance, se trouve une lamelle (disposée suivant le plan normal à son axe) qui, par le jeu de résistances représentés par la fig. 9a est maintenue au potentiel $\frac{1}{2} V_c$ où $V_c$ est la différence de potentiel aux bornes de la capacité $C$.

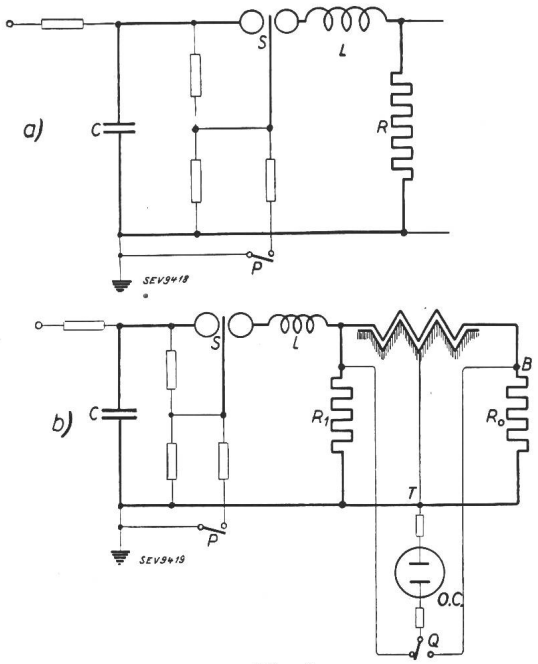


Fig. 9.
Circuit d'essai pour la détermination expérimentale des déformations introduites dans les enregistrements oscillographiques par le câble retardateur.

On voit facilement que, si la distance entre les boules du spinteremètre $S$ est réglée pour une tension de décharge légèrement supérieure à $V_c$, il suffit de fermer momentanément l'interrupteur $P$ pour déterminer l'amorçage et la décharge du condensateur dans le circuit $L$, $R$. Les résistances de charge et celles qui déterminent le potentiel de l'électrode intermédiaire du spinteremètre ont une valeur très élevée et sont sans influence appréciable sur le phénomène de décharge.

Dans le schéma en fig. 9b, la résistance $R$ est remplacée par une résistance $R_1$ sur laquelle est dérivé le câble fermé sur la résistance $R_0 = \sqrt{\frac{L}{c}}$

La résistance $R_1$ est choisie de façon que $\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R}$.

Cela étant, il est clair que si le câble vérifie la condition de Heaviside, l'onde de tension entre les points $A$ et $T$, enregistrée par l'oscillographe lors de la décharge du condensateur, doit rester la même quand on remplace la résistance $R$ (fig. 9a) par le circuit représenté par la fig. 9b.

Les différences entre les deux relevés, si les autres conditions restent les mêmes, sont d'autant plus grandes que le câble s'éloigne de la condition d'Heaviside, c'est-à-dire que $\frac{r}{L} - \frac{g}{c}$ est plus grand.

Pour évaluer les déformations introduites par le câble retardateur on compare le relevé de la tension d'entrée (entre les points $A$ et $T$) avec celui de la tension de sortie (entre les points $B$ et $T$).

Dans cette comparaison les effets des réflexions (toujours petites dans les essais dont il est question ici) se manifestent seulement après un temps supérieur au double du retard du câble.

Dans les fig. 10 à 12 nous avons porté sur la même échelle linéaire des oscillogrammes obtenus suivant le procédé décrit et concernant les deux types de câbles retardateurs considérés.

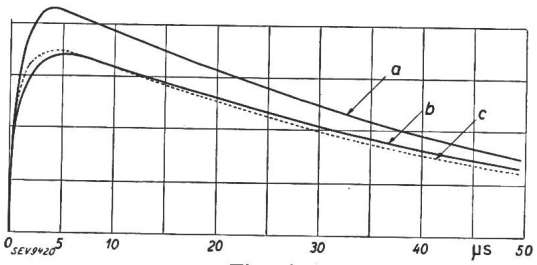


Fig. 10.
Déformation d'une onde de choc du type $T_1/T_2 = 2/35$ microsecondes produites par un câble ayant une résistance de 0,1 ohm par mètre.
Les courbes $a$ et $b$ représentent respectivement les ondes de tension obtenues par les circuits en fig. 9a et 9b (commutateur $Q$ à droite); la courbe $c$ a été obtenue de la courbe $a$ par le calcul.

Les courbes en fig. 10 et 11 se rapportent au câble du premier type (à résistance élevée) et à la propagation de deux ondes caractérisées par les rapports $\frac{T_1}{T_2} = 2/35$ et $\frac{T_1}{T_2} = 3{,}5/26$: $a$ et $b$ représentent respectivement les ondes de tension obtenues par les circuits des fig. 9a et 9b (commutateur $Q$ à droite); la courbe $c$ a été déduite de la

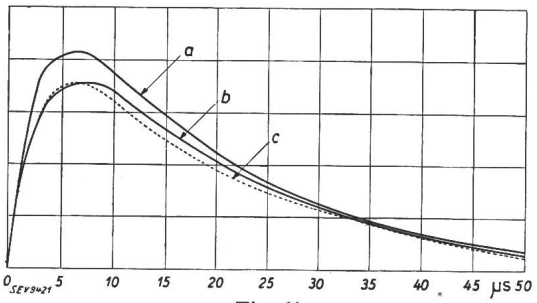


Fig. 11.
Comme fig. 10, mais $T_1/T_2 = 3{,}5/26$ microsecondes.

courbe $a$ par le calcul en appliquant la formule 12 qui donne la déformation de l'onde de tension due à sa propagation (sans réflexion) le long du câble.

Les courbes de la fig. 12 se rapportent au câble du second type (à basse résistance) et à la propagation d'une onde caractérisée par le rapport $\frac{T_1}{T_2} = 1/35$; *a* représente l'onde de tension obtenue par la disposition de la fig. 9a; *b* et *c* les ondes de tension obtenues par la disposition de la fig. 9b respectivement entre les points *A*—*T* (commutateur *Q* à gauche) et *B*—*T* (commutateur *Q* à droite). — La courbe *d* a été déduite de la courbe *b* par le aclcul en appliquant touours la formule 12.

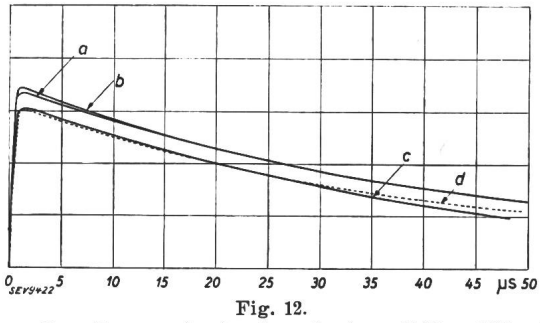


Fig. 12.

Déformation d'une onde de choc du type $T_1/T_2 = 1/35$ microsecondes produites par un câble ayant une résistance de 0,02 ohm par mètre.

La courbe *a* représente l'onde de tension obtenue par la disposition 9a; les courbes *b* et *c* les ondes de tension obtenues par la disposition de la fig. 9b respectivement entre les points *A*—*T* (commutateur *Q* à gauche) et *B*—*T* (commutateur *Q* à droite).

La courbe *d* a été obtenue de la courbe *b* par le calcul.

L'examen de ces résultats expérimentaux permet de conclure que les prévisions théoriques sont confirmées avec une approximation suffisante.

On voit en particulier l'avantage que présente le câble à petite résistance, même si son isolement n'est pas le plus parfait.

## Conclusion.

Nous avons donné la description des systèmes diviseurs-retardateurs employés le plus souvent en pratique eu égard particulièrement aux causes d'erreur et à la façon de réduire leur importance dans les limites du possible.

Dans cette étude, nous n'avons pas considéré une certaine tendance, qui s'est manifestée recemment, d'appliquer directement aux plaques de l'oscillographe cathodique la haute tension en éliminant ainsi tout diviseur.

Les erreurs des diviseurs de tension peuvent être réduites à des limites parfaitement tolérables et en tous cas inférieures à celles dues à beaucoup d'autres causes, au point qu'il ne nous semble absolument pas nécessaire de prévoir l'enregistrement direct des tensions élevées, qui comporte d'ailleurs certains inconvénients qu'il n'est pas facile d'éliminer.

Concernant les câbles retardateurs, il a semblé utile de mettre en relation leurs caractéristiques avec les erreurs dont ils sont cause. Cette étude nous a conduit à la conclusion que le facteur le plus important est la résistance; les pertes dans le diélectrique, par contre, ont, normalement, une influence négligeable. Pour une tension de perforation donnée, il convient de choisir un câble de petite résistance et peu sensible à l'effet pelliculaire.

Nous avons donné la description d'un circuit de retard qui a donné en pratique de bons résultats et dont le coût et l'encombrement sont bien limités.

## Appendice I.

Nous allons calculer les déformations qui se vérifient dans un câble retardateur sous deux conditions particulières qui intéressent les applications.

### *A. Onde de tension de forme rectangulaire.*

C'est l'onde de tension que Heaviside a représenté par la fonction 1 $(t)$, et qui est définie par le diagramme de la fig. 13; elle a une valeur nulle dans l'intervalle $\infty$ à 0 de la variable $t$ (temps) et la valeur 1 entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

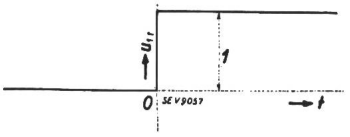


Fig. 13. Représentation de la fonction 1($t$).

Si nous introduisons cette fonction à la place de $u_{10_t}$ dans la formule (12), nous avons:

$$u_{1lt} = e^{-\beta t_1}\, 1\,(t-t_1) + \frac{\alpha^2 t_1}{2}\, e^{-\beta(t_1+t)} \int_{t_1}^{t} e^{\beta t}\, dt \qquad (17)$$

d'où l'on tire facilement

$$u_{1lt} = e^{-\beta t_1} \left\{ 1\,(t-t_1) + \frac{\alpha^2 t_1}{2\beta} \left[ 1 - e^{-\beta(t-t_1)} \right] \right\} \qquad (18)$$

Si l'on introduit dans cette formule, qui est valable pour $t \geq t_1$, les valeurs des constantes relatives à l'application que nous avons développée, on a

$$u_{1lt} = 0{,}9923 \left\{ 1\,(t-0{,}83) + 0{,}02 \left[ 1 - e^{-0{,}993\,(t-0{,}83)} \right] \right\}$$

$$= 0{,}9923 \left\{ 1\,(t-0{,}83) + 0{,}02 \left[ 1 - 0{,}9923\, e^{-0{,}0993\,t} \right] \right\}$$

$t$ est exprimé en microsecondes.

On voit tout de suite que la déformation maxima atteint à peine la valeur de 2 % de l'amplitude de l'onde de tension transmise. Il serait bien facile de construire la courbe qui correspond à la formule ci-dessus.

### *B. Onde de tension exponentielle amortie.*

C'est l'onde de tension représentée dans la fig. 14.

Elle est définie par la fonction:

$$e^{-kt}\, 1\,(t)$$

Le facteur 1 $(t)$ indique que la fonction est nulle dans l'intervalle $t = -\infty$; $t = 0$.

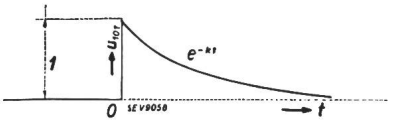


Fig. 14. Représentation de la fonction $e^{-kt}$ 1($t$).

En introduisant la nouvelle fonction dans la formule (12) on obtient:

$$u_{1lt} = e^{-\beta t_1} \left\{ e^{-kt}\, 1\,(t-t_1) + \frac{\alpha^2 t_1}{2}\, e^{-\beta t} \int_{t_1}^{t} e^{\beta t} \cdot e^{-kt} \right\} \qquad (19)$$

d'où

$$u_{1lt} = e^{-\beta t_1} \left\{ e^{-kt}\, 1\,(t-t_1) + \frac{\alpha^2 t_1}{2\,(\beta-k)} \left[ e^{-kt} - e^{-kt-\beta(t-t_1)} \right] \right\} \qquad (20)$$

Dans le cas où l'on aurait $k = \beta$, le terme de distorsion devient indéterminé; sa valeur peut être trouvée facilement et est donnée par

$$\frac{\alpha^2 t_1}{2\beta}\,(t-t_1)\, e^{-\beta t}$$

Pour revenir à l'application que nous avons développée plus haut, supposons que l'onde exponentielle appliquée au câble ait une constante de temps de 50 $\mu$s ce qui fait

$$k = {}^1/_{50} \cdot 10^{-6} = 20\,000\ s^{-1}$$

La formule qui exprime $u_{1it}$ devient alors:

$$u_{1it} = 0{,}9923 \left\{ e^{-0{,}02\,t}\, 1\,(t - 0{,}83) + 0{,}0258 \left[ e^{-0{,}02\,t} - 1{,}0604\, e^{-0{,}093\,t} \right] \right\}$$

Il est facile de constater que la valeur de l'écart maximum entre la fonction $u_{1it}$ et $u_{10t}$ est dans ce cas de l'ordre de 1,3 %.

La forme typique de l'onde de tension que nous avons considérée a une importance spéciale, étant donné que les ondes de choc fournies par les générateurs d'impulsion peuvent se ramener, dans la plupart des cas, à la superposition d'ondes exponentielles. Il est évident que le calcul que nous avons développé s'applique aussi dans ce cas; en effet, le principe de superposition nous permet d'établir séparément le calcul pour chaque composante et de superposer les résultats.

## Appendice II.

La relation entre la tension réfléchie à l'extrémité d'un câble et la tension incidente est donnée par la formule:

$$u_{1irt} = \frac{z_T - z_0}{z_T + z_0}\, u_{1it} \qquad (21)$$

où $z_T$ est l'impédance terminale: nous avons supposé

$$z_T = \sqrt{\frac{L}{C}} = r_0$$

$z_0$ est l'impédance caractéristique du câble que nous pouvons exprimer sous forme opérationnelle comme suit:

$$z_0 = \sqrt{\frac{r + L\,\Delta}{g + C\,\Delta}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma + \Delta}{\varrho + \Delta}} \qquad (22)$$

étant $\sigma = r/L$ et $\varrho = g/C$. $\Delta$ est l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$

En introduisant ces valeurs dans la formule (21), on a

$$u_{1irt} = \frac{\sqrt{\Delta + \varrho} - \sqrt{\Delta + \sigma}}{\sqrt{\Delta + \varrho} + \sqrt{\Delta + \sigma}}\, u_{1it} \qquad (23)$$

C'est l'expression opérationnelle de la tension réfléchie; il n'est pas possible de rendre explicite cette expression symbolique sous forme finie dans le cas général.

Si $u_{it} = 1\,(t)$ on peut démontrer que l'on a:

$$u_{1irt} = \int_0^t \frac{1}{t}\, e^{-\frac{1}{2}(\varrho + \sigma)}\, I_1 \left( \frac{\varrho - \sigma}{2} \right) \cdot dt \qquad (24)$$

où $I_1$ est la fonction de Bessel non oscillante de premier ordre de la variable $x$.

En développant la fonction $I_1\,(x)$ en serie, on a

$$I_1\,(x) = \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{194} + \cdots\cdots \right) \qquad (25)$$

Si $x$ est petit par rapport à l'unité on a approximativement

$$I_1\,(x) \cong \frac{x}{2}$$

En introduisant cette simplification dans la formule (24) on obtient facilement l'expression (14).

L'intégrale de Duhamel permet de calculer le résultat de l'application de l'opérateur (23) à une fonction $u_{1it}$ quelconque lorsqu'on connaît celui relatif à la fonction $1$ que nous indiquons par $H_t$.

Cette intégrale peut s'écrire comme suit

$$u_{1irt} = H_0 \cdot u_{1t} + \int_0^t \frac{\partial\, H_\theta}{\partial\, \Theta} \cdot u_{1\,(t-\theta)} \cdot d\,\Theta \qquad (26)$$

Si l'on pose $u_{1it} = 0$ pour $t < 0$

$u_{1it} = e^{-kt}$ pour $t > 0$

$$H_\theta = \frac{\alpha}{2\,\beta} \left( 1 - e^{-\frac{1}{2}\beta\,\theta} \right); \quad H_0 = \frac{\alpha}{2\,\beta}$$

$$\frac{\partial\, H_\theta}{\partial\, \Theta} = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}\theta\ ; \quad u_{1i\,(t-\theta)} = e^{-k\,(t-\theta)}$$

En substituant ces valeurs dans la formule (26), la résolution de l'intégrale de Duhamel donne l'expression (15).

En revenant au cas ou $u_{1et} = 1_t$, les règles du calcul opérationnel nous permettent de calculer exactement la valeur de $u_{1ert}$ pour $t = \infty$; il suffit en effet de remplacer $\Delta$ par zéro dans la formule (23). On a alors

$$u_{1ir\,\infty} = \frac{\sqrt{\varrho} - \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\varrho} + \sqrt{\sigma}} = \frac{1}{\alpha} \left( \beta - 2\sqrt{\varrho\sigma} \right)$$

La valeur de l'onde réfléchie pour $t = 0$ s'obtient des formules approchées que nous avons données, mais on peut la trouver directement en remplaçant dans (23) le symbole $\Delta$ par $\infty$.

Nous avons

$$u_{1iro} = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{\sqrt{\varrho + \Delta} - \sqrt{\sigma + \Delta}}{\sqrt{\varrho + \Delta} + \sqrt{\sigma + \Delta}} = 0$$

## Appendice III.

En régime alternatif sinusoïdal, l'admittance caractéristique d'un câble ayant les constantes $r$, $L$, $C$, $g$ est donnée par

$$\overline{y_0} = \frac{1}{z_0} = \sqrt{\frac{g + j\omega C}{r + j\omega L}} \qquad (27)$$

Si nous remplaçons l'opérateur $j\omega$ par le symbole $\Delta$, il est facile de voir que la formule (27) peut se mettre sous la forme

$$\overline{y_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sqrt{\frac{\left( \frac{r}{L} + \Delta \right) + \left( \frac{g}{C} - \frac{r}{L} \right)}{\frac{r}{L} + \Delta}} = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \sqrt{\frac{(\sigma + \Delta) - \alpha}{\sigma + \Delta}} \qquad (28)$$

Les valeurs des constantes $\sigma$ et $\alpha$ ont déjà été données.

Nous pouvons développer l'expression (28) en série de MacLeurin en fonction du facteur $\alpha$ qui détermine la distorsion (et que nous supposons suffisamment petit pour que la série résulte convergente). En arrêtant la série au second terme, on trouve facilement

$$\overline{y_0} \cong \sqrt{\frac{C}{L}} \left( 1 + \frac{1}{2}\, \frac{\alpha}{\Delta + \sigma} \right) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{\Delta + \left( \sigma - \frac{\alpha}{2} \right)}{\Delta + \sigma} \qquad (29)$$

D'autre part, l'admittance relative au circuit représenté dans la fig. 7 est donnée par

$$\overline{y_a} = \frac{1}{r_b}\, \frac{(r_a + r_b)\, C_a\, \Delta + 1}{r_a C_a\, \Delta + 1} = \frac{r_a + r_b}{r_a\, r_b} \cdot \frac{\Delta + \frac{1}{(r_a + r_b)\, C_a}}{\Delta + \frac{1}{r_a\, C_a}} \qquad (30)$$

Les expressions (29) et (30) résultent identiques indépendamment de l'opérateur $\Delta$, c'est-à-dire pour toutes les fréquences (dans les limites où le développement en série de Mac Laurin est valable) si l'on a respectivement

$$\begin{cases} \dfrac{r_a + r_b}{r_a\, r_b} = \dfrac{1}{r_0} \\ \dfrac{1}{r_a\, C_a} = \sigma \\ \dfrac{1}{C_a (r_a + r_b)} = \sigma - \dfrac{\alpha}{2} \end{cases} \qquad (31)$$

La résolution de ces trois équations donne pour $r_a$, $r_b$, $C_a$ les valeurs indiquées dans le texte (formules 16).

D'une façon tout à fait analogue on déduit les formules (16bis) relatives au schéma représenté par la fig. 8b.