

Zeitschrift:	Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber:	Association suisse des électriciens
Band:	31 (1940)
Heft:	22
Artikel:	Ein Beitrag zur Berechnung des Gleich-Wechselstrom-Mutators mittels der Laplaceschen Transformation
Autor:	Müller-Strobel, Josef
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-1058025

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

dustrie électrique ne doit pas prendre l'habitude de compter sur des subventions, car c'est toujours un signe de faiblesse pour les entreprises industrielles. Par contre, il est vrai que la collectivité a présentement un grand intérêt à de tels travaux et doit participer sous une forme ou une autre à la construction prématuée de grandes usines, par exemple que la Confédération suggère aux Cantons de réduire pendant quelques années leurs droits d'eau et leurs impôts, d'accorder des allégements d'impôts aux bailleurs de fonds, etc. On ne peut que recommander à quiconque possède quelques économies de les placer dans l'industrie électrique suisse, même si les rendements sont très faibles au début, car cette industrie crée des valeurs réellement productives, qui porteront tous leurs fruits dans un avenir rapproché. Ces valeurs productives, aussi stables que le sont les usines hydroélectriques, ont certainement plus de valeur que l'or dissimulé sous une pile de linge. Messieurs! Dans un très prochain avenir, on verra si nous avons appris quelque chose et si nous sommes capables de produire du travail pratique et utile.

Il est indubitable que nos autorités, de nombreux industriels et la population en général ont beaucoup plus de sympathie pour les industries travaillant le charbon, que pour les centrales d'électricité. Je me suis souvent demandé d'où cela pouvait venir, mais les faits sont là et nous ne pouvons qu'envier sur ce point nos collègues du gaz. Je trouve toutefois qu'il n'est pas juste d'adorer, en temps normaux, la reine noire et de négliger la houille blanche, puis de se plaindre tout à coup de l'improductibilité de la houille blanche lorsque les temps critiques sont arrivés! A cet égard, les autorités et le peuple suisse doivent également modifier leur manière de voir, afin que nous puissions développer chez nous la vente d'énergie des futures usines hydroélectriques, à tel point qu'une surproduction d'usines soit supportable. A l'avenir, il ne devra plus exister de rivalité entre le charbon, le

gaz et l'électricité, mais bien des relations économiques raisonnables et une entente réciproque dans l'intérêt de la collectivité. Une certaine surproduction, convenablement dosée, d'usines hydroélectriques nous permettra en tout temps de poursuivre avec d'autres pays une politique continentale d'économie électrique. Aux époques où l'Etranger est moins capable d'absorber notre excédent de production, il sera alors tout indiqué de mettre à la disposition de notre population les excédents d'énergie en vue d'applications thermiques, que nous ne saurions pas recommander en d'autres temps. De la sorte, le capital investi est certain de jouir d'un intérêt convenable et en tout cas de ne pas subir de pertes. D'après une statistique que M. Härry met au point, notre pays aura probablement besoin pendant ces prochaines années des nouvelles quantités d'énergie annuelles suivantes:

Ménage	env.	70 millions de kWh
Agriculture	»	300 » » »
Commerce et artisanat	»	28 » » »
Industrie en général	»	50 » » »
Chimie	»	53 » » »
Trafic routier et chemins de fer non encore électrifiés	»	15 » » »
Chauffage des locaux	»	10 » » »
Synthèse de l'essence, etc.	»	20 » » »
Soit en chiffres ronds	env.	550 millions de kWh

En 10 ans, on arrive déjà à 5,5 milliards de kWh.

Dans tous les pays qui nous entourent, les peuples doivent supporter des privations et des soucis de tous genres et produisent pourtant physiquement et économiquement un travail inouï. En Suisse, nous n'avons pas encore connu jusqu'ici de telles conditions, mais cela doit précisément nous inciter à faire tout notre possible pour mettre en valeur les richesses naturelles que nous possédons. Nous pourrons alors surmonter bien des difficultés et envisager l'avenir avec moins d'appréhension.

Voilà la vraie économie dirigée, basée sur le plus beau plan que nous connaissons, le plan de la création.

Ein Beitrag zur Berechnung des Gleich-Wechselstrom-Mutators mittels der Laplaceschen Transformation.

Von Josef Müller-Strobel, Zürich.

Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Eidgenössischen Technischen Hochschule.

621.314.57

Handelt es sich um die Erfassung der elektromagnetischen Vorgänge von Wechselstrom-Wechselstrom- oder Gleichstrom-Wechselstrom-Mutatoren bei einer beliebigen Art und Grösse der Belastung, so kann man eine zweckentsprechende Umformung der für den gewöhnlichen Wechselstrom-Gleichstrom-Mutator abgeleiteten Gesetze nicht vornehmen. Deshalb sind wir gezwungen, ganz anders lautende mathematische Ansätze zu suchen und anzuwenden. Für die folgerichtige Ableitung neuer Ansätze über das physikalische Verhalten des Mutators dient die Anschauung, dass der Wechselstrom-Wechselstrom-Mutator oder der Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator als Schalter, nicht als Ventil wirkt. Die Differentialgleichungen der Ströme sind deshalb so behandelt, als würde eine Gleichstromquelle der Spannung U_0 auf ein System von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten im Takte der Steuerfrequenz geschaltet. Die Lösung der unter diesem Gesichtspunkte abgeleiteten Differentialgleichung erfolgt mittels der

Lorsqu'il s'agit de déterminer mathématiquement les processus électromagnétiques de mutateurs alternatif-alternatif ou continu-alternatif pour une grandeur quelconque de la charge, il n'est plus possible de procéder à une conversion appropriée des lois qui régissent les mutateurs ordinaires alternatif-continu. Il est donc nécessaire d'avoir recours à d'autres déductions mathématiques. On peut considérer dans ce but que le mutateur alternatif-alternatif ou continu-alternatif agit comme un interrupteur et non comme une soupape, au point de vue de son comportement physique. Les équations différentielles des courants doivent donc être traitées comme s'il s'agissait d'une source de courant de tension U_0 branchée, à l'allure de la fréquence de commande, sur un système de résistances, de capacités et d'inductances. L'équation différentielle, établie en tenant compte de ces considérations, se résoud à l'aide des lapaciens. Cette méthode permet de calculer la commutation, les processus d'inversion

Laplaceschen Transformation. Kommutierung, Kippvorgänge und Instabilitätserscheinungen lassen sich mit der Berechnungsmethode erfassen. In der Untersuchung handelt es sich jedoch in der Hauptsache um die prinzipielle Darstellung der neuen Theorie und Betrachtungsweise, weshalb Spezialprobleme nicht eingehend behandelt sind. Die im System auftretenden Ausgleichsvorgänge können, ohne für die Lösung der Gleichung erleichternde Randbedingungen annehmen zu müssen, berechnet werden.

1. Einleitung.

Der netzgeführte Wechselstrom-Wechselstrom-Mutator kann in bezug auf seine Gleichspannungscharakteristik als Entartung eines übersteuerten und mit einer treibenden Gleichrichterspannung zusammenwirkenden Gleichrichters betrachtet werden. Ein Teil der für den gewöhnlichen Wechselstrom-Gleichstrom-Mutator (Gleichrichter) abgeleiteten Gesetze lassen sich für den Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator anwenden, sofern man in den Formeln die Gleichspannung, bzw. die Gegenspannung mit umgekehrtem Vorzeichen setzt und die Zündverzögerung α durch den neuen Winkel π minus die Zündvoreilung γ ($\alpha = \pi - \gamma$) ersetzt. Der Geltungsbereich der so entstandenen neuen Formel ist an die Wechselstrom-Trittgrenze gebunden, wie das die Charakteristiken $\frac{U_g}{\sqrt{2}} U_w = f\left(\frac{I_g}{I_{gh}}\right)$ von gesteuerten Wechselstrom-Gleichstrom-Mutatoren mit Anodendrosselpulsen für verschiedene Zündverzögerungen bei ohmscher Belastung und unendlich grosser Kathodendrosselpulse für verschiedene Zündverzögerungen von Leerlauf bis zur Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator-Trittgrenze, bestimmen.

Handelt es sich um die Erfassung der elektromagnetischen Vorgänge von Mutatoren mit Kondensatorkommutierung und induktiven, bzw. kapazitiven Lasten, so kann man eine zweckentsprechende Umformung der bekannten Gleichungen *nicht* vornehmen. Deshalb zwingt uns die Entwicklung einer neuen Berechnungsart, ganz anderslaurende mathematische Ansätze zu finden und anzuwenden. Ergänzt man den Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator dahin, dass man seine Gitter vom Verbraucher her über eine magnetische feste Kupplung steuert, so genügen die bisher allgemein angewandten Ansätze für eine exakte Beschreibung der Vorgänge *nicht*. Wie schwierig die Berechnung nur eines einfachen Systems wird, zeigen die aus der Literatur entnommenen Beispiele (Abschn. 2).

Für die folgerichtige Ableitung neuer Ansätze aus dem physikalischen Verhalten des Mutators heraus diente die Anschauung, dass der Wechselstrom-Wechselstrom- oder der Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator als *Schalter, nicht aber als Ventil* wirkt. Deshalb sind die Differentialgleichungen der Stromkreise so behandelt, als würde eine *Gleichstromquelle der Spannung U_g* auf ein System von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten im Takte der Steuervolllage *geschaltet*. Die Lösung der unter diesem Gesichtspunkte abgeleiteten Differentialgleichungen erfolgt mittels der Laplace-Transformation. Kommutierung, Kippvorgänge und Instabilitätserscheinungen lassen sich mit dieser

et les phénomènes d'instabilité. Cet article a principalement pour but d'établir les principes de cette nouvelle théorie et la manière d'envisager ce problème. Les problèmes particuliers n'ont donc pas été traités en détail. Les processus de compensation qui interviennent dans le système peuvent se calculer sans qu'il soit nécessaire d'admettre des conditions limites pour faciliter la solution de l'équation.

Rechnungsmethode erfassen. Gleichfalls sind die im System auftretenden Ausgleichsvorgänge, ohne für die Lösung der Gleichungen erleichternde Randbedingungen annehmen zu müssen, erreichbar.

Zwei hauptsächliche Typen dieses Mutators sind bekannt geworden. Der netzgeführte Mutator, der meistens ohne Kondensatoren, bzw. Kommutatorkondensatoren arbeitet, dient der Umwandlung von Gleichstrom in Wechselstrom bei der Gleichstrom-Hochspannungsübertragung.

Beim selbstgeführten Mutator ist ein Element mehr im Stromkreis eingeschaltet als beim netzgeführten, nämlich der Kommutierungskondensator. Obschon für grössere Leistungen die Kondensatorkommutierung unwirtschaftlich ist, so dass das Wechselstromnetz die Kommutierungsströme durch statische Phasenschieber oder rotierende Phasenkompensatoren im Sinne von Taktgebermaschinen *) liefern muss, lässt sich gerade dieser Typ ganz unabhängig von der Wirtschaftlichkeit für die theoretische Betrachtung vorteilhaft verwenden. Zudem ist er ein Analogon zum Hochspannungs-gleichrichter, der mit parasitären Kapazitäten behaftet ähnliche Resonanzerscheinungen aufweist, wie die hier behandelten *Ausgleichsvorgänge* ^Δ (Ueberspannungen, Ueberströme) darstellen.

Besonders aber die Untersuchungen von M. Stöhr ^Δ) über die Möglichkeit der Gleichstrom-Hochspannungsspeisung von Vollbahnen, die auf den praktischen Erfahrungen basieren, welche man auf der Höllentalbahn-Versuchsstrecke (Schwarzwald) sammelte, weisen mit allem Nachdruck darauf hin, wie sehr der kondensatorerregte und selbstgeführte Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator in den Mittelpunkt wissenschaftlichen Interesses gerückt ist. Man hofft zuversichtlich, die Mutatoren als das flexible Kopplungsglied zwischen der 20 000-V-Gleichstrom-Fahrdrähtspeisung und den Lokomotivmotoren verwenden zu können. Das elektrische Antriebssystem würde aus mehrphasigen kondensatorerregten oder maschinenerregten Wechselrichtern mit Dreiphasen-Asynchronmotoren bestehen. Reguliert würde die Frequenz, was mit dem Wechselrichter stufenlos erfolgen könnte.

2. Bisherige Berechnungsmethoden.

Für die Berechnung der Gleichstrom-Einphasen-Wechselstrom-Mutatoren wurde von verschiedenen

*) M. Stöhr, Arch. Elektrotechn. Bd. 34 (1940), S. 339.

Δ) A. Hochrainer-Micza, VDE-Fachber. Bd. 11 (1939), S. 187. — A. Micza: Elektro-Markt 1939, Nr. 5, S. 21.

Δ) M. Stöhr: E. u. M., Bd. 58 (1940), S. 381.

Autoren^{1,2)} allgemein das Ersatzschema nach Fig. 1 zugrunde gelegt. Stets wurde die Annahme getroffen, dass eine sehr grosse Kathodendrosselspule vorhanden sei, um so die Berechnung zu vereinfachen und doch eine gute Näherung zu finden. Der mit der Belastung wenig veränderliche Spannungsabfall an der Entladungsstrecke wird durch das Einsetzen einer die Spannung der Gleichstromquelle verminderten Gleichspannung u_b (Bogenspannung) erfasst. Die Belastung ist nach Fig. 1 durch eine Reihenschaltung von Induktivität und

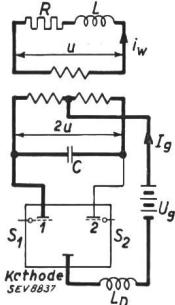


Fig. 1.

Schema eines Einphasen-Parallel-Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators.

R, L Ohmscher u. induktiver Belastungswiderstand,
C Kommutierungskondensator,
LD Drosselspule.
u Spannung am Transformator.
Ug Gleichspannung.
Ig Gleichstrom.
i_w Wechselstrom.

Widerstand dargestellt und der Transformator als verlustlos und streufrei vorausgesetzt. Denkt man sich die Anode 1 (Schalter S_1 kurzgeschlossen) arbeitend, so wird die Differentialgleichung (1) für den entstandenen Stromkreis (fett gezeichnet) lauten:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{4LC} i = \frac{1}{4LC} \cdot Ig \quad (1)$$

Gl. (1) besitzt die Lösung für i identisch i_w (Wechselstrom) bei den Randbedingungen

$$\left. \begin{array}{l} u_{t=0} = -u_{t=t_0} \\ i_{t=0} = -i_{t=t_0} \end{array} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{i_w}{I_g} = \frac{1 + \frac{2w_1 \cdot e^{-w_1 t}}{(w_2 - w_1)(1 + e^{-w_1 t})} - \frac{2w_2 \cdot e^{-w_2 t}}{(w_2 - w_1)(1 + e^{-w_1 t})}}{1 + \frac{2w_1 \cdot e^{-w_1 t}}{(w_2 - w_1)(1 + e^{-w_1 t})} - \frac{2w_2 \cdot e^{-w_2 t}}{(w_2 - w_1)(1 + e^{-w_1 t})}} \quad (3)$$

Die Wurzeln $w_{1,2}$ ergeben sich aus einer quadratischen Gleichung und besitzen die Grösse

$$w_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{4LC}} \quad (4)$$

Sind die Wurzeln *reell*, wird der Vorgang in der einen Halbperiode *aperiodisch* verlaufen. Sind sie *konjugiert komplex*, wird eine Periodizität vorliegen (siehe spätere Diskussion). Wählt man L und C der Frequenzbedingung, Gl. (6) so, dass in Verbindung mit dem Dämpfungsfaktor $\delta = R/2L$ die Ungleichung gilt

$$\frac{1}{4LC} \gg \frac{R}{2L} \quad (5)$$

¹⁾ Ostendorf: Arch. f. Elektrotechn. Bd. 32 (1938), S. 355
— Der fremdgeführte Wechselrichter in Gegentaktschaltung.

²⁾ H. Neidhardt, Arch. f. Elektrotechn. Bd. 29 (1935), S. 241. — W. Schilling, Arch. f. Elektrotechn. Bd. 29 (1935), S. 119.

ist die ideale Eigenfrequenz ω_e durch die Gleichung

$$\omega_e = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot C \cdot L}} \quad (6)$$

bestimmt. Das Verhältnis vom Dämpfungsfaktor δ zur Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f$ der Steuerspannung, dessen Änderung proportional dem Leistungsfaktor $\cos \varphi$ ist, kann wie folgt umgeschrieben werden. Ist φ der Phasenwinkel, so gelten die Beziehungen

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{\frac{2L}{2\pi f}}{\frac{R}{2\omega_0 L}} = \frac{R}{4\pi f L} = \frac{R}{2\omega_0 L} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \quad (8)$$

Die Eigenfrequenz f dieses Systems wird

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (9)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{4LC}\right) - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (10)$$

und ist stets kleiner als die ideale Eigenfrequenz ω_e . Das Verhältnis von Wechsel- zur Gleichspannung lässt sich berechnen. Man erhält jedoch für die *einfachsten* Grenzbedingungen eine ganz unübersichtliche und schwierige Gleichung, die eine halbe bis ganze Druckseite⁴⁾ überdecken würde. Auf eine Wiedergabe derselben ist verzichtet, da man sie in der einschlägigen Fachliteratur nachsehen kann. Wollte man in den genannten Ergebnissen den Einfluss der Kathodendrosselspule Z_D oder der Gittersteuerung berücksichtigen, ergäben sich schlangenähnliche, überhaupt unbrauchbare Gleichungen. Zudem ist eine *Erweiterung derselben* auf ein *Mehrphasensystem* ausgeschlossen.

Eine Lösung der Gleichungen des Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators unter Einschluss der Kathodendrosselspule, jedoch nur *ohmscher* Belastung, gab Neidhardt²⁾, die einen ähnlichen Charakter besitzt wie die oben angegebene.

Die bisher bekannt gewordene *generellste* Lösung für den Gleichstrom-Einphasen-Mutator, an die wegen ihrer Allgemeingültigkeit die unsrige Untersuchung gedanklich anknüpft, stammt von Teh-shin-Kuo³⁾. Er nahm an, dass außer den ohmschen Belastungswiderständen noch m -parallel geschaltete induktive Belastungswiderstände vorhanden sind. Um das klassische Lösungsverfahren anwenden zu können, musste aus Symmetriegründen die Untersuchung, wie die eingangs erwähnte Gl. (1) auf eine einzige Halbperiode beschränkt werden. Für die m -parallel geschalteten induktiven Belastungswiderstände kann man, sofern ein verlustloser und streufreier Transformator vorhanden ist (Fig. 1), ein lineares System von $m+2$ Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ableiten. Die Anodenströme i_1 und i_2 (eine Phase) lassen sich mittels den Reihen

³⁾ Teh-shin Kuo: Z. Phys. Bd. 93 (1935), S. 769.

⁴⁾ Brückner P.: Arch. f. Elektrotechn. Bd. 34 (1940), S. 1. Es sind die gleichen Annahmen getroffen wie in den Arbeiten von Schilling, Neidhardt, Ostendorf¹⁾.

$$i_1 = \sum_{i=1}^n A_i \cdot e^{\lambda_i t} + A_0 \cdot t + A_{n+1} \quad (11)$$

$$i_2 = \sum_{i=1}^n B_i \cdot e^{\lambda_i t} + B_0 \cdot t + B_{n+1} \quad (12)$$

berechnen, da sie die Lösungen der entwickelten linearen Differentialgleichungen darstellen. Gleichartig sind die Wechselströme i_w im Widerstand R und den parallel geschalteten Induktivitäten L

$$i_w(R) = \sum_i^n D_i e^{\lambda_i t} + D_0 \cdot t + D_{n+1} \quad (13)$$

$$i_w(L_k) = \sum_{i=1}^n C_{k,i} e^{\lambda_i t} + C_{k,0} + C_{k,n+1} \quad (14)$$

berechenbar. Die Konstanten der Gl. (11) bis (14) bestimmt man durch die Umwandlung der Gleichungen in algebraische und die Ermittlung der Nullstellen dieser $m + 1$ -gradigen Gleichungen. Im Falle des Vorhandenseins von induktiver Last wird λ_i komplex, wodurch die Rechenarbeit bei der Auswertung erheblich vermehrt wird und Lösungen nur bei den *allereinfachsten Randbedingungen* gefunden werden können. Die Annahme der praktisch vernachlässigbaren Kommutierungsdauer musste deshalb eine der wichtigsten Voraussetzungen sein.

Angesichts der Tatsache, dass für die Beschreibung der elektrischen Vorgänge in einem einfachen System bisher relativ schwierige Rechenverfahren angewendet wurden, kann man sich die Frage mit Berechtigung vorlegen, ob nicht andere, *entwicklungsähnliche* Verfahren zum Ziele führen. Es ist der Hauptzweck dieser Untersuchung, durch die Anwendung moderner mathematischer Operatoren-Rechenmethoden und neue Lösungsansätze eine zweckdienliche Erweiterung der Theorie vorzunehmen, um mit ihrer Hilfe die Berechnung mehrphasiger Systeme und der Ausgleichsvorgänge (Ueberspannungen, Ueberströme) zu ermöglichen.

3. Berechnung des Gleich-Wechselstrom-Mutators.

a) Allgemeines.

Die grundsätzlich neue Betrachtungsweise besteht darin, dass man sich die Wirkungsweise des Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators so vorstellt, als werde durch das Zünden des Lichtbogens eine Gleichstromquelle der konstanten Spannung U_g auf ein elektrisch gekoppeltes System geschaltet. Beispielsweise dient bei einer Gleichstromübertragung als Energie- oder Spannungsquelle der auf die Leitung arbeitende Wechselstrom-Gleichstrom-Mutator oder im Gleichstromnetz der Nebenschlussgenerator.

In der vorliegenden Betrachtung werden einfache Rand- oder Anfangsbedingungen angenommen, da es sich prinzipiell nur darum handelt, den für die neue Betrachtungsweise gedanklich festgelegten Weg mathematisch klar und eindeutig zu veranschaulichen. Es zeigt sich, dass in bezug auf die Wahl der Randbedingungen nur wenig Ein-

schränkungen zu berücksichtigen sind. Selbst bei nicht rechteckförmigem zeitlichem Verlauf der Quellenspannung lassen sich bei Verwendung der gleichen Methode Lösungen herleiten und auswerten.

Wie eingangs erwähnt, bedient man sich zum Lösen der schwierigen Differentialgleichung des Mutators der *Laplaceschen Transformation*. Dieses Verfahren ermöglicht nicht nur, eine Erweiterung der Lösung für fast beliebige Anfangsbedingungen vorzunehmen, sondern es sind sogar solche auffindbar, wenn das System in sich Energie aufgespeichert hat.

Zur Grundlegung der Theorie wurde als allgemeinster Fall ein selbstgeführter Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator gewählt, bei der Kommutierungskondensatoren die Kommutierung erzwingen und nicht fermdegührte Steuermaschinen die Steuerung der Gitter übernehmen. Diese Verallgemeinerung ist deshalb von Interesse, weil man die Wirkungen der Kommutierungskondensatoren ähnlich derjenigen von Phasenschieberkondensatoren im Wechselstromnetz (Belastungsseite) deuten kann. Eine Umzeichnung des Schemas, in dem die Kondensatoren in den Wechselstromkreis «übersetzt» werden, versinnbildlicht sehr deutlich ihren Einfluss.

Auf der gleichen Grundlage lassen sich auch die Ausgleichsvorgänge bei dem in der Praxis sehr wichtigen, rechnerisch aber *einfacher* zu behandelnden *netzgeführten Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator* erfassen, eine Tatsache, auf die besonders hingewiesen sei.

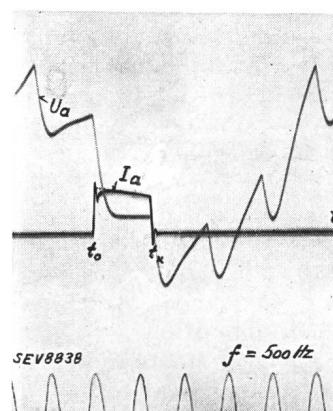


Fig. 2.

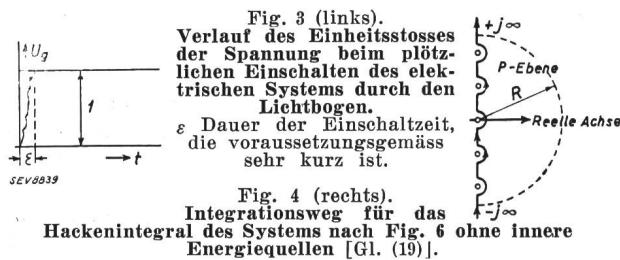
Oszillogramm des Anodenstromes $I_a(t) = I_1(t)$ der x -ten Anode bei einem Gleichstrom-Drehstrom-Mutator mit Löschkondensatoren C_L und stabilem Betrieb⁵⁾. Der Stromverlauf besitzt den Charakter einer aperiodischen Entladung.
 Gleichspannung $U_g = 80$ V.
 Betriebsfrequenz $f = 55$ Hz.
 Gleichstrom $I_g(t) = 30$ A.
 Steuercapazität $C_s = 4 \mu F$.
 Drosselspulenimpedanz $= 0,1136 + j\omega 0,04$ Ohm.
 Eichfrequenz $f_0 = 500$ Hz.

Wie sehr die erwähnte Annahme eines Einheitsstosses bei der Berechnung des Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators berechtigt ist, beweist das Oszillogramm Fig. 2, in dem der Verlauf des Anodenstromes der x -ten Anode während der Brenndauer $t_x - t_0 = \Delta t$ bei stabilem Betrieb photographisch festgehalten wurde. Der Stromverlauf hat aperiodischen Charakter und nur eine sehr kleine, stark gedämpfte und einflusslose Oberschwingung ist feststellbar⁵⁾. Eine eingehende Diskussion findet sich im Abschnitt 3 e.

⁵⁾ J. Müller-Strobel, Bull. SEV, Bd. 31 (1940), S. 134: Instabilitätserscheinungen bei selbstgesteuerten Gleichstrom-Drehstrom-Mutatoren, Fig. 4, 10.

b) *Grundlagen der Laplace-Transformation und ihre Umkehrung.*

Nach Fourier kann man jeden nicht periodischen Vorgang durch ein kontinuierliches Spektrum von Dauerschwingungen darstellen. Nehmen wir als erste Näherung an, der Einschaltmoment, bzw. der Stromanstieg beim Zünden des Lichtbogens sei physikalisch gesehen nicht mit absoluter Schärfe festgelegt. Das heisst, die Trägheit des physikalischen Systems (Aufbau der Schaltung)



sei hinreichend gross, so dass die Art des Ueberganges des Energiestosses vom Wert 0 auf 1 nach Fig. 3 und dem Oszillogramm Fig. 2 (Anodenstrom $I_a = f(t)$) in der Einschaltzeit ϵ wegen der zeitlichen Aenderung der Vorgänge im System sehr kurz und deshalb ohne Bedeutung auf die eigentliche Gestaltung der Ausgleichsvorgänge ist. Deshalb denkt man sich die auf das aus ohmschem Widerstand, Kapazität und Induktivität bestehende System des Mutators wirkende Kraft der Grösse 1 (Energiestoss) in ihre sinusförmigen Schwingungskomponenten zerlegt. Die Zerlegung des Einschwingvorganges mittels des Fourierschen Integrals⁷⁾ in das Spektrum seiner sinusförmigen Komponenten führt zwangsläufig zur Laplaceschen Transformation⁶⁾ und diese wiederum wird in Verbindung mit der Umkehrtransformation ermöglichen, die symbolische Differentialgleichung mit den Symbolen $d/dt = j\omega$, $d^2/dt^2 = (j\omega)^2 \dots$ zu lösen.

Im folgenden ist kurz die Herleitung der Laplaceschen Transformation aus dem Fourierintegral geboten, ohne aber auf Beweise einzugehen.

Sind in einem Vorgang alle Frequenzen zwischen 0 und ∞ vorhanden, kann man mittels des Fourierschen Integrals eine Zeitfunktion $A(t)$ durch das kontinuierliche Spektrum ihrer harmonischen Komponenten darstellen⁶⁾

$$A(t) = \int_0^\infty [C(\omega) \cdot \cos \omega t + S(\omega) \cdot \sin \omega t] d\omega \quad (15a)$$

Für die Kreisfrequenz ω stellt der Faktor $C(\omega)$ der Gl. (15a) die Amplitude der Cosinusschwingung, $S(\omega)$ die der Sinusschwingungen dar. Sie lassen sich aus den folgenden Integralen berechnen.

$$C(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \cos(\omega \alpha) d\alpha \quad (15b)$$

⁶⁾ G. Doetsch: Laplace-Transformation, Springer, Berlin, 1937, S. 87.

⁷⁾ S. Bochner: Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Leipzig 1932, S. 30.

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \sin(\omega \alpha) d\alpha \quad (15c)$$

Durch das Einsetzen der C - und S -Werte in die Gl. (15a) erhält man für die Zeitfunktion $A(t)$

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \cdot \cos \omega(t - \alpha) d\alpha \quad (15d)$$

Nimmt man im ersten Integral von (15d) den Grenzübergang nach $-\infty$ nicht unabhängig vom Grenzübergang nach $+\infty$ vor, sondern bildet den Grenzwert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} \int_{-K}^K = \text{Cauchyscher Hauptwert des Integrals} \quad (15e)$$

so darf für das Integral 15d geschrieben werden (siehe Grenzen des Integrals)

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \cos \omega(t - \alpha) d\alpha \quad (15f)$$

Da uns besonders die komplexe Schreibweise interessiert, setzt man für

$$\begin{aligned} \cos \omega(t - \alpha) &= \frac{1}{2} \left[e^{j\omega(t - \alpha)} + e^{-j\omega(t - \alpha)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{p(t - \alpha)} + e^{-p(t - \alpha)} \right] \end{aligned} \quad (15g)$$

Berücksichtigt man die Tatsache, dass das Integral mit dem neuen Symbol $p = j\omega$ in der komplexen Bildebene den Wert

$$\int_{-j\infty}^{+j\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \cdot e^{p(t - \alpha)} d\alpha = \int_{-j\infty}^{+j\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) \cdot e^{-p(t - \alpha)} d\alpha \quad (15h)$$

annimmt, so ergibt die Zeitfunktion $A(t)$ in komplexer Darstellung

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} dp \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{p(t - \alpha)} d\alpha \quad (15i)$$

Diese Gl. (15i) kann man auch in der Form

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \Phi(p) e^{pt} dp \quad (15k)$$

mit dem inneren Integral

$$\Phi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-p\alpha} d\alpha \quad (15l)$$

schreiben. Setzt man die in der technischen Literatur öfters gebrauchte Grösse $f(p)/p$ an Stelle von $\Phi(p)$, also

$$\Phi(p) = \frac{f(p)}{p} \quad (16a)$$

ein, so gehen die Gl. (15k) und (15i) über bei einem rein imaginären Parameter $p = j\omega$ in

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{f(p)}{p} \cdot e^{pt} dp \quad (16b)$$

$$f(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} A(\alpha) e^{-p\alpha} d\alpha \quad (16c)$$

Die Gleichungspaare (15k), (15i) und (16b), (16c) stellen mathematisch betrachtet sogenannte *Funktionaltransformationen* dar. Die eine Gleichung führt die Funktion A einer Veränderlichen α in eine Funktion $\Phi(p)$ oder $f(p)$ einer anderen Veränderlichen p über. Die erste Gleichung, auch die reziproke Transformation genannt, macht die Transformation wieder rückgängig.

Ist die Funktion $A(t)$ stückweise glatt (weist somit keine Unstetigkeitsstellen auf) und das mit dem komplexen Parameter $p = a + jb$ gebildete Integral 16 ($\alpha = t$)

$$f(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot e^{-pt} dt \quad (17)$$

für $\alpha_1 < a < \alpha_2$ absolut konvergent, so ist nach dem Satz von Cauchy betreffend der zulässigen Aenderung eines eingeschlossenen Integrationsweges folgende *Umgestaltung* erlaubt. Man darf den über die imaginäre Achse und um die singulären Punkte herum führenden Teil des Integrationsweges von $-j\infty$ bis $+j\infty$ so deformieren, dass er in eine zur imaginären Achse parallele Vertikalgerade übergeht, die die reelle Achse in einem Punkte a schneidet. Das ist möglich, sofern die Abszisse a grösser als die Abszisse des am weitesten rechts liegenden singulären Punktes ist. Diese Ueberlegung erlaubt

uns, den *Ersatz* des Integrals in Gl. (17),

durch das neue $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty}$ auf den Wert von a kommt

es gar nicht an, sofern nur alle singulären Stellen von der Uebergangsfunktion $f(p)$ links von der Integrationsgeraden bleiben. Es gilt deshalb die zur Gl. (17) zugehörende Umkehrformel⁸⁾

$$A(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt} dp = \mathcal{E}^{-1} f(p)^{10}) \quad (18)$$

Beim vorliegenden Einschaltproblem, das Schalten der Gleichspannung über den Quecksilberdampf-

⁸⁾ Wagner: Arch. f. Elektrotechn. Bd. 4 (1916), S. 159; I. A. Bromwich: Proc. Lond. Math. Soc. (2), Bd. 15 (1916), S. 401. Z. techn. Physik, Bd. 20 (1939), S. 301/313.

¹⁰⁾ Die allgemein verwendeten Zeichen \mathcal{E} und \mathcal{E}^{-1} stellen eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Funktionszeichen f , φ usw. dar und versinnbildlichen die Tatsache, dass die von ihnen eingeschlossenen Funktionen Veränderliche der Parameter p , t , x , y usw. sein können. Es ist \mathcal{E} die Funktion einer Funktion, $\mathcal{E}[A(t)] = F[A(t)]$.

Lichtbogen auf den Stromkreis, in die Stromfunktion $A(t)$ vor dem Einschaltmoment zur Zeit $t=0$ ebenfalls Null. Das Integral 17 hat deshalb die untere Grenze gleich Null, und wir dürfen an seiner Stelle schreiben

$$f(p) = p \int_0^{+\infty} A(t) \cdot e^{-pt} dt = \mathcal{E} A(t)^9) \quad (19)$$

Diese Gl. (19), welche die Transformation von $A(t)$ in $f(p)$ vornimmt, wird als die *Laplacesche Transformation* bezeichnet und Gl. (18) stellt die hiezu reziproke Transformation $f(p)$ dar.

Die Gl. (18) muss beim Bestehen von singulären Stellen auf der imaginären Achse nach dem in Fig. 4 gezeichneten Weg integriert werden. Bei gewöhnlichen, linearen Systemen kann es nicht vorkommen, dass singuläre Punkte von $f(p)$ in der rechten Halbebene liegen. Diese *mathematische Einschränkung* schliesst das Vorhandensein von Energiequellen und Energiesenken aus. Da starke Eisenübersättigungen bei Transformatoren, Drosselspulen oder Saugtransformatoren gleich wie Senken und Quellen wirken, bzw. das Bestehen einer Linearität zwischen Spannung und Strom verunmöglichen, können diese nicht berücksichtigt werden. Die Antwort auf die Frage, ob man einen begrenzten Zustandsbereich eventuell doch noch als lineares System betrachten darf, fällt aus dem Rahmen dieser Untersuchung.

c) *Ersatzschema*.

Die erste Vorarbeit für die Entwicklung der neuen Theorie des Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators besteht in der *Berechnung der Impedanz* des elektrischen Systems, auf die die Gleichstromquelle geschaltet wird. Hierfür bedient man sich des Ersatzschemas Fig. 5. Die Gleichstromquelle mit der Spannung U_g und ihrem inneren Widerstand, den man angenähert als Null annimmt ($r_i \sim 0$), ist über eine Kathodendrosselspule L_0 , R_0 an den Sternpunkt des Sechsphasentransformators angeschlossen. Die Transformatorphasen werden generell als eine Serieschaltung von den Induktivitäten L_1 und Widerständen R_1 bzw. L_n und R_n betrachtet. Die *Eisenverluste* bleiben *unberücksichtigt*, um das Ersatzschema des Sechsphasen-Transformators mit dem Sekundär-Dreiphasentransformator möglichst einfach zu gestalten. Parallel zur Phase 1, deren

⁹⁾ In der mathematischen Literatur über das *L-Integral*, vgl. hiezu

J. R. Carson, Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung, Berlin 1929, Bell. Syst. Techn. Journ. Bd. 1 (1922), S. 43; Bd. 4 (1925), S. 685; Bd. 5 (1926), S. 336. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin 1937, mit Literaturangabe.

ist das einseitig, unendliche Laplace-Integral der Gl. (19) durch die Gleichung

$$f_b(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(t) e^{-pt} dt = \frac{f(p)}{p}$$

definiert. In der übrigen technischen Literatur dagegen findet man ausschliesslich die Definition der Bild- oder Unterfunktion nach Gl. (19) vor.

Lichtbogen brennen soll, sind die beiden *fett* gezeichneten Stromkreise L_2, R_2 und L_6, R_6 geschaltet. Die Gegenphase zur Phase 1, nämlich die Phase 4 ist in dem Zeitmoment nahezu stromlos, da sie nur über die Seriekondensatoren $C_1-C_2-C_3$ mit der Phase 1 verbunden ist. Die Lösung des Bo-

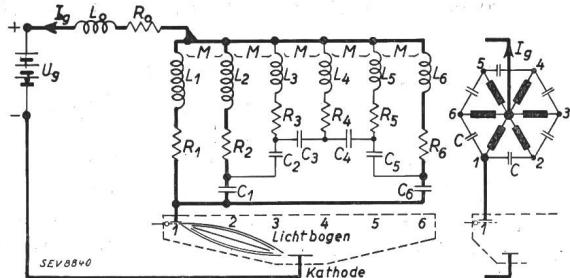


Fig. 5.

Schaltungsschema des Sechphasen-Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators mit fettgezeichnetem Hauptstromkreis und brennender Anode 1.

$L_1 \dots L_6$ Transformatorinduktivität der Phasen 1 bis 6.
 $R_1 \dots R_6$ Ohmsche Transformatorwiderstände.
 $C_1 \dots C_6$ Löschkondensatoren.
 $M_{12}, M_{13} \dots M_{1,6}$ gegenseitige Induktivitäten.
 $M_{21}, M_{23} \dots M_{2,6}$
 L_0, R_0 ohmscher und induktiver Widerstand der Drosselpulpa.
 U_g Gleichstromquelle.

gens der Anode 1 fördert hauptsächlich der eine der parallel zur Phase 1 liegende Kondensator C_6 durch seinen Gegenstrom bei der Umpolarisation. Alle übrigen Glieder der Schaltung mit den Größen $L_3, R_3, C_3, L_4, R_4, C_4, L_5, R_5, C_5$ der Phasen 3, 4 und 5 sind parallel zu den Phasen 1, 2 und 6. Da bezüglich dem Aufbau der Glieder der Phasen 2 bis 4 und 4 bis 6 vollkommene Symmetrie herrscht und der Stromzweig L_4, R_4 wegen der Serieschaltung der sehr grossen kapazitiven Widerstände $1/j\omega C_4$ und $1/j\omega C_5$ nur sehr kleine Ströme führt, können die parallel zur Phase 1 gelegenen Stromzweige unter Vernachlässigung des Einflusses der Phase 4 in erster und guter Näherung¹¹⁾ durch die Ersatzgrössen, wie die Kapazität C , Induktivität L und ohmscher Widerstand R ersetzt werden. Die gegenseitige Kopplung der Transformatorphasen ist durch den resultierenden Geogeninduktionskoeffizient $M_{1,c}$ und $M_{c,1}$ berücksichtigt und besitzt den gleichen Charakter wie die Ersatzgrössen R, L, C . Das für die Berechnung abgeleitete Ersatzbild veranschaulicht Fig. 6. In ihm ist der intermittierend brennende Lichtbogen als Schalter S markiert. Der vom Belastungsstrom nahezu unabhängige Lichtbogenspannungsabfall ist durch eine der Quellenspannung U_g entgegengewirkende Spannung (Gegenspannung) berücksichtigt. Die für den Vorgang wirksame Gleichspannung ist die Differenz der Quellen- und Bogenspannung, $U_g = U_{g0} - u_b$.

Um den Sinn der folgenden mathematischen Ueberlegungen deutlich zum Ausdruck zu bringen, ist nochmals wiederholt, dass $f(p)$ für ein komple-

¹¹⁾ Die Ableitung oder Berechnung der Ersatzgrössen R, L und C für die einen Kettenleiter bildenden Parallelkreise 3, 4, 5 der Fig. 5 erfolgt später. Es ist dies eine spezielle Aufgabe.

xes p der Uebertragungsfunktion eines physikalischen Systems, der komplexe Leitwert des Stromkreises in Fig. 6 für die Kreisfrequenz ω bedeutet. Setzt man sie allgemeine $f(p) = f(j\omega) = Re(\omega t) + jIm(\omega t)$, so bedeutet in dieser Gleichung Re die Wirk- und Im die Blindstrom-Komponente des Leitwertes. Wir werden deshalb die Uebertragungsfunktion $A(t)$, die gleichbedeutend mit dem Einschaltstrom $I(t) \equiv I_g(t)$ ist und den Verlauf desselben beim Einschalten einer elektromotorischen Einheitskraft EMK · 1 darstellt, durch die Komponenten Re und Im des Leitwertes für den eingeschwungenen Wechselstrom ausdrücken.

d) Berechnung des Gleichstromes $I_g(t)$.

Die Addition der Teilspannungen nach dem Ersatzbild Fig. 6 des Stromkreises ist

$$U_{g0} - u_b = U_g = U_0 + U_1 \quad (20)$$

$$U_1 = U_c \quad (21)$$

$$\mathfrak{J}_g = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_c \quad (22)$$

Die Teilspannungen am Transformator und der

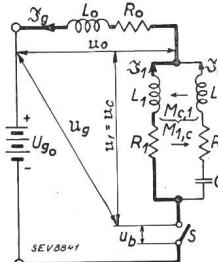


Fig. 6.

Ersatzschema für die näherungsweise Berechnung der Ausgleichsvorgänge beim Sechphasen-Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator.

U_0 Spannung an der Drosselpulpa.
 L_0, R_0 Widerstände der Drosselpulpa.
 U_1 Anodenspannung.
 U_b Bogenspannung.
 U_{g0} Gleichspannung an der Stromquelle.
 $U_g = U_{g0} - U_b$ wirksame Gleichspannung am Mutator.
 C Löschkondensator, Ersatzkapazität für die Stromzweige der Anodenkreise 2 bis 6 der Fig. 5.
 $M_{c,1}$ Gegenseitige Induktivität der Transformatorenphasen 2 bis 6 auf die Phase 1.
 $M_{1,c}$ Gegenseitige Induktivität der Phase 1 auf die Parallelkreise des Schaltbildes 5.
 R, L Ersatzwiderstände. Resultierende des Stromzweiges, bestehend aus den Phasen 2 bis 6 der Fig. 5.
 $i_g = \mathfrak{J}_g(t)$ Gleichstrom.
 \mathfrak{J}_c Kondensatorstrom.
 \mathfrak{J}_1 Primärstrom, in der Transformatorphase des Sechphasentransformators.
 S Lichtbogen, ersetzt durch einen Schalter S.

Drosselpulpa der Grössen L_0 und R_0 setzen sich wie folgt zusammen:

$$U_1 = \mathfrak{J}_1 (R_1 + j\omega L_1) + \mathfrak{J}_c \cdot j\omega M_{c,1} \quad (23)$$

$$U_c = \mathfrak{J}_c (R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}) + \mathfrak{J}_1 \cdot j\omega M_{1,c} \quad (24)$$

$$U_0 = (\mathfrak{J}_c + \mathfrak{J}_1) (R_0 + j\omega L_0) \quad (25)$$

$$U_0 = \mathfrak{J}_1 (R_1 + j\omega L_1) + \mathfrak{J}_c j\omega M_{c,1} + \mathfrak{J}_g (R_0 + j\omega L_0) \quad (26)$$

Aus den Gl. (22) und (23) lässt sich der Transformatstrom \mathfrak{J}_1 und der den parallel zu ihm gelegenen Transformatorenbenekreis durchfliessenden Kondensatorstrom \mathfrak{J}_c berechnen.

$$\mathfrak{J}_c = \mathfrak{J}_1 \frac{(R_1 + j\omega L_1 - j\omega M_{1,1})}{(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} - j\omega M_{c,1})} = \mathfrak{J}_1 \frac{a}{b} \quad (27)$$

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_g - \mathfrak{J}_c$$

$$\mathfrak{J}_c = \mathfrak{J}_g \frac{1}{1 + \frac{b}{a}}; \quad \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_g \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{b}} \quad (29a, b)$$

Die Gesamtempedanz des Kreises erhält man durch Einsetzen der Ströme \mathfrak{J}_1 und \mathfrak{J}_c der Gl. (27), (28), (29) in die Gl. (26) und deren Elimination. Sie wird

$$\frac{\mathfrak{U}_0}{\mathfrak{J}_g} = \mathfrak{Z} = R_0 + j\omega L_0 + \frac{R_1 + j\omega L_1}{a + b} \cdot b + \frac{j\omega M_{c,1}}{a + b} \cdot a \quad (30)$$

Nach dem Einsetzen der in Gl. (27) definierten Größen a, b in die Gl. (30) und unter Berücksichtigung der gegenseitigen Induktivität $M_{1,1}$ und $M_{c,1}$, die voneinander im Verhältnis k verschieden sind, also $M_{c,1} = kM_{1,1}$; $M_{1,1} = M$, wird der Zähler und Nenner der Gl. (30) die Form annehmen:

Glieder des Zählers:

$$a_0 = R_1 + R_0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} j\omega \cdot a_1 &= (CR_1R_0 + (R_1 + R_0)RC + L + L_0) \cdot j\omega \\ (j\omega)^2 a_2 &= [CL_0R_1 + CkMR_1 + L_1R_0C + (L + L_0)RC + (R_1 + R_0)LC - (R_1 + R_0)MC](j\omega)^2 \\ (j\omega)^3 a_3 &= [L_1L_0C - MC(kL_1 + L_0 + kM) + (L + L_0) \cdot LC - (L + L_0)MC](j\omega)^3 \end{aligned}$$

Glieder des Nenners:

$$b_0 = 1$$

$$(j\omega) \cdot b_1 = (R_1 + R) C \cdot (j\omega) \quad (32)$$

$$(j\omega)^2 b_2 = [L + L_1 - M(1 + k)] C \cdot (j\omega)^2$$

Führt man an Stelle des Parameters $j\omega$ den bereits bekannten Parameter p der Operatorfunktion $f(p)$ ein, erhält man nach dem Zusammenziehen der einzelnen Glieder der Gl. (31) und (32) die für die Operatorrechnung wichtige Impedanzgleichung

$$\mathfrak{Z}(p) = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2} = \frac{1}{f(p)} \quad (33)$$

Ist $Z(p)$ der Widerstands- und $Y(p)$ der ihm zugehörige Leitwertoperator, so wird unter der eingangs vermerkten Annahme, dass man eine Gleichspannung U_g von der Grösse 1 (Fig. 1) auf das System der Stromkreise schaltet, der Gleichstrom $I_g(t)$, dessen zeitlicher Verlauf die Oberfunktion $A(t)$ darstellt,

$$\begin{aligned} I_g(t) &= U_g \cdot A(t) = \frac{1}{\mathfrak{Z}(p)} \cdot U_g \cdot 1 = \mathfrak{Y}(p) \cdot U_g \cdot 1 = \\ &= \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3} U_g \cdot 1 \end{aligned} \quad (34)$$

Es besitzt die Unterfunktion physikalisch den Charakter eines Leitwertes.

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{1}{\mathfrak{Z}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3} = \\ &= \frac{R(p)}{G(p)} = \mathcal{L} A(t) \end{aligned} \quad (35)$$

Mathematisch gesehen sind die in Gl. (35) aufgetretenen Funktionen $R(p)$ und $G(p)$ ganze rationale oder transzendente Polynome von p mit beständig konvergenten Potenzreihen und reellen Koeffizienten.

Die gebrochene Funktion $\frac{R(p)}{G(p)}$ kann man, um die Lösung des Integrals einfacher zu gestalten, in Teilbrüche zerlegen. In der Zerlegung sollen keine quadratischen Formen auftreten. Die zum Leitwert $f(p)$ zugehörige Oberfunktion $I_g(t) = A(t)$ lässt sich mittels der erweiterten Gl. (18) berechnen. Sie lautet

$$I_g(t) = \frac{U_g}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{R(p)}{p \cdot G(p)} \cdot e^{pt} dp \sim A(t) \quad (36a)$$

Als einschränkende Bedingung ist die Ungleichung

$$\left| \frac{R(p)}{G(p)} \right| \leq m \quad (36b)$$

in der m eine feste, endliche Zahl sein muss. Ist die Ungleichung 36a erfüllt, ist die Integration der Gl. (36) möglich, da ein beliebig grosser Kreis als Integrationsweg um den Nullpunkt (Unstetigkeitsstelle) gelegt werden kann.

Die Berechnung des Integrals könnte unter gewissen Umständen umgangen werden. Aus der Operatorrechnung ist bekannt, wie die Ermittlung von $A(t)$ mittels dem Entwicklungssatz von Heaviside¹²⁾ erfolgt. Er besitzt die Form

$$A(t) = \frac{R(0)}{G(0)} + \sum_v \frac{R(p_v)}{p_v \left(\frac{dG(p)}{dp} \right)_{p=p_v}} \cdot e^{pt} \quad (37)$$

und ist gültig für $t > 0$ mit den Wurzeln p_v von $G(p)$. Für den hier vorliegenden Fall vermag die obige Entwicklungsformel 37 die richtige Lösung zu ergeben, sofern die Ausgangsgleichung $f(p) =$

$\frac{R(p)}{G(p)}$ durch eine \mathcal{L} -Transformation aus dem Ober-

bereich gewonnen wird. Grundsätzlich ist die Umgehung der Berechnung des \mathcal{L} -Integrals nicht mög-

¹²⁾ E. J. Berg: Rechnung mit Operatoren, München 1932, S. 14. — A. M. Angelini: Calcolo Operatorio e studio dei circuiti elettrici, Mailand 1935, S. 21. — K. W. Wagner: Operatorenrechnung, Barth, 1940, S. 72. — E. Stephens: The elementary Theory of Operational Mathematics, London 1937, S. 62.

lich, um die zur eindeutigen Bestimmung der Lösung erforderlichen Anfangswerte im Unterbereich als Parameter zu erhalten. Wir schlagen hier den mathematisch einwandfreisten und erfolgversprechendsten Weg ein und zerlegen unter Vermeidung der Heavisideschen Entwicklungsformel das Polynom

$$\frac{R(p)}{G(p)} = f(p) \text{ nach dem Produktenverfahren}$$

in Teilbrüche, um für diese die ihnen zugehörigen \mathcal{L} -Integrale berechnen oder aus der Tabelle entnehmen zu können.

Die Gl. 35 besagt, dass $G(p)$ von höherer Ordnung in bezug auf $R(p)$ ist. Die Ordnung der gebrochenen Funktion $R(p)/G(p)$ ist kleiner als 1. Für die Partialbruchzerlegung sind algebraische Umformungen und Berechnungen nötig.

Der erste Schritt dieser Berechnung besteht in der Bestimmung der Wurzeln p_1, p_2, p_3 des Polynoms $G(p)$, welche für die hier gebotene allgemeine mathematische Entwicklung als voneinander verschiedene angenommen werden. Das Polynom $G(p)$ lässt sich als Produkt der i -Wurzeln für $i = 3$ schreiben,

$$G(p) = a_3(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3) \dots = a_3 \prod_{i=1}^3 (p-p_i) = a_3 \prod_{i=1}^3 (p-p_i) \quad (38)$$

Der einzige verwendete Koeffizient a_3 ist der Gl. (31) zu entnehmen. In der weiteren Berechnung wird der Differentialquotient $G(p)$ benötigt, der sich nach der allgemeinen Formel Gl. (38) für n Wurzeln für $i = 1$ bis $i = \nu$ berechnen lässt.

$$G'(p) = a_3 \prod_{i=1}^3 (p-p_i) + a_3 \prod_{i=2}^3 (p-p_i) + a_3 \prod_{i=3}^3 (p-p_i) = a_3(p-p_2)(p-p_3) + a_3(p-p_1)(p-p_3) + a_3(p-p_1)(p-p_2) \quad (39)$$

Der Wert des Differentialquotienten von $G(p)$ an der Nullstelle p_ν ergibt sich aus Gl. (39) nach dem Einsetzen von p_ν mit der Ausnahme, dass die gleichen Wurzelglieder $i = \nu$ wegfallen. Deshalb das Zeichen oder der Hinweis über dem Produktzeichen der Gl. (39) $i \neq 1, 2, 3$. Die Ableitungen $\frac{dG(p)}{dp}$ an den verschiedenen Nullstellen für $\nu = 1, 2, 3$ wird

$$G'(p_\nu) = a_3 \prod_{i \neq \nu}^3 (p_\nu - p_i) = \begin{cases} (p_1 - p_2)(p_1 - p_3) & \text{für } \nu = 1; \quad p \equiv p_1 \\ (p_2 - p_3)(p_2 - p_1) & \text{für } \nu = 2; \quad p \equiv p_2 \\ (p_3 - p_1)(p_3 - p_2) & \text{für } \nu = 3; \quad p \equiv p_3 \end{cases} \quad (40)$$

Die Teilbruchzerlegung erfolgt nach der bekannten algebraischen Formel

$$\frac{R(p)}{G(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \frac{A_3}{p-p_3} \quad (41)$$

Multiplizieren wir die Gl. (41) mit $G(p)$ der Gl. (38), so erhält man die Beziehung

$$\begin{aligned} R(p) &= A_1 a_3 \prod_{i \neq 1} (p-p_i) + A_2 a_3 \prod_{i \neq 2} (p-p_i) + \\ &+ A_3 a_3 \prod_{i \neq 3} (p-p_i) = A_1 \cdot a_3 (p-p_2)(p-p_3) + \\ &+ A_2 \cdot a_3 (p-p_1)(p-p_3) + \\ &+ A_3 \cdot a_3 (p-p_1)(p-p_2) \end{aligned} \quad (42)$$

Diese erhaltene Gl. (42) ermöglicht, nach dem Einsetzen der einzelnen Wurzeln p_1, p_2, p_3 , die Konstanten A_1, A_2, A_3 zu berechnen. Da die Gl. (42), dank dem Umstand, dass $R(p)$ von höchstens $(n-1)$ -ten Grade gegenüber von $G(p)$ ist, für alle Werte von p gilt, setzt man in ihr nacheinander die Wurzeln $\nu = 1, 2, 3$ bzw. $p = p_1, p = p_2, p = p_3$ in $G(p)$ und $R(p)$ der Gl. (35) ein. Löst man die Gl. (42) nach der Konstanten A_ν auf, erhält man hierfür die generelle Formel 43

$$A_\nu = \frac{R(p_\nu)}{a_3 \prod_{i \neq \nu} (p_\nu - p_i)} = \frac{R(p_\nu)}{G'(p_\nu)} \quad (43)$$

Die einzelnen Konstanten A_1, A_2, A_3 berechnen sich aus den Gl. (44) bis (46)

$$A_1 (\nu=1) = \frac{b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_1^2}{a_3 (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} \quad (44)$$

$$A_2 (\nu=2) = \frac{b_0 + b_1 p_2 + b_2 p_2^2}{a_3 (p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} \quad (45)$$

$$A_3 (\nu=3) = \frac{b_0 + b_1 p_3 + b_2 p_3^2}{a_3 (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} \quad (46)$$

Nach dem Bekanntsein der Konstanten A setzt man sie in die Gl. (41) und in die Ableitung der Funktion $G(p)$, also in $G'(p)$ der Gl. (40) ein. Die gebrochene Funktion $\frac{R(p)}{G(p)}$ wird nach der Gl. (41) und der Summation der einzelnen Glieder

$$\begin{aligned} \frac{R(p)}{G(p)} &= \sum_{\nu=1,2,3} \frac{R(p_\nu)}{(p-p_\nu)(G'(p_\nu))} = \\ &= \frac{1}{p-p_1} \left(\frac{b_0 + b_1 p_1 + b_2 p_1^2}{a_3 (p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} \right) + \\ &+ \frac{1}{p-p_2} \left(\frac{b_0 + b_1 p_2 + b_2 p_2^2}{a_3 (p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} \right) + \\ &+ \frac{1}{p-p_3} \left(\frac{b_0 + b_1 p_3 + b_2 p_3^2}{a_3 (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} \right) = \\ &= \sum_{\nu=1,2,3} \left(\frac{1}{p-p_\nu} \right) \cdot K_\nu (\text{const}) = f(p) = \sum_{\nu=1}^3 f_\nu(p) \end{aligned} \quad (47)$$

Die Summe der Gl. (47) wird vom Faktor $\frac{1}{(p-p_\nu)}$ mit dem Parameter p und der zu einer jeden Wurzel zugehörigen Konstanten K_ν gebildet. Die Unterfunktion $f(p)$ in die Gl. (19) eingesetzt, ergibt den Gesamtstrom $I_g(t)$ mit $c = 0$

$$I_g(t) = U_g \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \left(\frac{e^{pt}}{p} \cdot \sum_{\nu} \left(\frac{1}{p-p_{\nu}} \right) \cdot K_{\nu} \right) dp = \\ = U_g \cdot \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} \sum_{\nu} f_{\nu}(p) dp = \mathcal{E}^{-1} \left(\sum_{\nu} f_{\nu}(p) \right) \quad (48)$$

Wir wissen aus der Theorie der Laplaceschen Integrale, dass für die vorausgesetzte Linearität unseres Systems die Zeitfunktion einer Summe von Operatoren gleich der Summe der Zeitfunktion der einzelnen Operatoren ist. Deshalb kann man schreiben

$$f(p) = f_1(p) + f_2(p) + \dots f_n(p) \quad (49)$$

$$A(t) = A_1(t) + A_2(t) + \dots A_n(t) \quad (50)$$

und die linearen Operationen nach dem Additionsatz in die Gl. (51) zusammenfügen.

$$\mathcal{E} A(t) = \sum_{\nu} \mathcal{E} A_{\nu}(t) = \sum_{\nu} f_{\nu}(p) = f(p) \quad (51)$$

Setzt man die durch Addition zusammengesetzten Funktionen in die Gl. (48) ein, geht sie über in

$$A(t) = \sum_{\nu} [\mathcal{E}^{-1} f_{\nu}(p)] = \frac{1}{2\pi j} \sum_{\nu=1,2,3}^{+j\infty} K_{\nu} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{f_{\nu}(p)}{p} e^{pt} dp \\ I_g(t) = \frac{U_g}{2\pi j} \left[K_1 \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\left(\frac{1}{p-p_1} \right)}{p} e^{pt} dp + \right. \\ \left. + K_2 \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\left(\frac{1}{p-p_2} \right)}{p} e^{pt} dp + K_3 \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\left(\frac{1}{p-p_3} \right)}{p} e^{pt} dp \right] \quad (52)$$

Für die aus der Berechnung hervorgegangene Unterfunktion $\frac{1}{p-p_{\nu}}$ ist die ihr zugehörige Oberfunktion bereits berechnet und in Tabellen zusammengestellt. Sie hat den Wert

$$A_{\nu}(t) = \mathcal{E}^{-1} f_{\nu}(p) = \mathcal{E}^{-1} \left(\frac{1}{p-p_{\nu}} \right) = \frac{1}{p_{\nu}} (e^{p_{\nu} t} - 1) \quad (53)$$

Schreibt man die Konstanten K_1, K_2, K_3 vor die Integrale der Gl. (52) und führt die Werte $A_{\nu}(t)$ bzw. $f_{\nu}(p)$ der Gl. (53) in die Gl. (52) ein, so erhält man die Gleichung, welche den Verlauf des Stromes $I_g(t)$ beim Einschalten der Spannung U_g von der Form des Einheitsstosses 1 beschreibt.

$$I_g(t) = U_g \cdot \left[\frac{K_1}{p_1} (e^{p_1 t} - 1) + \frac{K_2}{p_2} (e^{p_2 t} - 1) + \right. \\ \left. + \frac{K_3}{p_3} (e^{p_3 t} - 1) \right] = K(0) + \sum_{\nu} K_{\nu} \cdot e^{p_{\nu} t} \quad (54)$$

Durch das Auffinden dieser einfach aussehenden Gleichung ist das den zeitlichen Ablauf der einzelnen Teilvorgänge bestimmende Gesetz bei einem Gleich-Wechselstrom-Mutator oder Wechselrichter

mit dem Schaltungsschema Fig. 4 und dem Ersatzschema Fig. 5 gefunden.

Einen Ueberblick über die möglichen Betriebszustände und eine Eröffnung des tieferen Sinnes der vorgenommenen mathematischen Umformung vermag uns nur eine eingehende Diskussion der Gl. (54) zu geben. Die Diskussion besteht in der Hauptsache darin, die Betriebszustände generell zu charakterisieren, die sich je nach der Grösse der Wurzeln der Gleichung oder der Funktion $f(p)$ ergeben, deren Grösse wiederum direkt von den Systemsgrössen wie ohmscher Widerstand, Induktivität und Kapazität der Schaltbilder Fig. 4 und 5, bzw. von den Konstanten $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1, b_2$, der Gl. (31) und (32) abhängen.

e) Diskussion der Gleichungen.

Je nach der Art der aus der Gleichung $G(p)$ ermittelten Wurzeln p_{ν} , wird der Verlauf der Funktion $A(t)$, bzw. die zeitliche Abhängigkeit verschieden sein. Bei den einfachen Exponentialfunktionen, wie sie in der Lösung unserer Operatorgleichung, der Gl. (54), enthalten sind, können drei typische Fälle voneinander unterschieden werden, sofern man Systeme mit Selbstanfachung ausser acht lässt.

Ist der Pol auf dem negativen Teil der reellen Achse bzw. die ν -te Wurzel p negativ reell ($p_{\nu} = \pm a$), so stellt jedes Glied der Gl. (54) einen monoton abklingenden Stromverlauf dar. Reiht man die Anodenströme der Phasen 1 bis 6, entsprechend ihrer zeitlichen Folge aneinander, wird der eigentliche pulsierende Gleichstrom $I_g(t)$ der Fig. 7 entstehen. Es ist dies der wünschbare Betriebsfall, denn die Oberharmonischen sind auf ein Mindestmass heruntergedrückt. Interne Ausgleichsvorgänge im System zufolge Resonanzen sind nicht vorhanden. Der Mutator arbeitet im stabilen Bereich. Die Kommutierung erfolgt einwandfrei, selbst bei grossen Strömen, weil die Ueberlappung ein Minimum ist.

Liegt der Pol auf der imaginären Achse j , wodurch die Wurzelgrösse den Wert $p_{\nu} = j\omega$ erreicht, muss nach den Gesetzen der Algebra gleichfalls eine konjugierte Wurzel ($p_{\nu+1} = -j\omega$) existieren. Sind die Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 des Polynoms $G(p)$ der Gl. (35) reell, so besitzen die Exponentialfunktionen der Stromgleichung $I_g(t)$ den Charakter $(a + j\beta)e^{j\omega t}$ bzw. $(a - j\beta)e^{-j\beta t}$ an. Diese Funktionen deuten auf einfache periodische Schwingungen der Kreisfrequenz ω hin (Fig. 8). Eine Gleichung, deren Wurzeln diese Grössen besitzen, kommt bei Wechselrichtern nicht vor, weshalb auf eine nähere Diskussion verzichtet ist.

Komplexe Wurzeln von der Grösse $p_{\nu} = -a + j\beta$ deuten auf das Vorhandensein von periodischen Ausgleichsvorgängen hin. Ist eine solche vorhanden, so muss nach einem algebraischen Lehrsatz noch die ihr zugehörige konjugiert-komplexe existieren. Bei Gleichungen dritten Grades, die aus der Theorie des Mutators in Abschnitt 3 a bis d folgte, wird die eine der drei Wurzeln

reell sein und wie oben vermerkt, die aperiodische Entladung bestimmen. Setzt man nun die errechneten drei Wurzeln in die erhaltene Lösung ein und fasst die einzelnen Glieder zweckentsprechend zusammen, entsteht eine Superposition von Teilvorgängen. Der eine ist eine aperiodische Entladung,

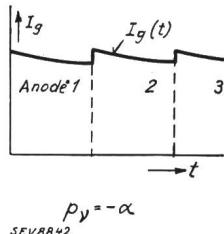


Fig. 7.

Verlauf des Gleichstromes I_g und Anodenstromes $I_a(t) = I_1(t)$, wenn die Wurzeln p der Operatorgleichung reell sind.

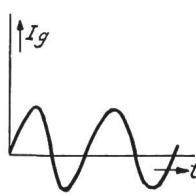
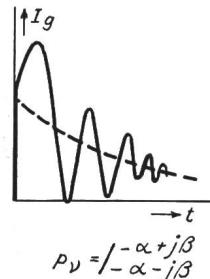


Fig. 8.
Verlauf des Gleichstromes bei rein imaginären Wurzeln.

Oszillogramme einwandfrei beweisen, bestätigen. Der Verlauf des Anodenstromes $I_g(t)$ im Falle von nahezu aperiodischen Vorgängen vom Typus der Fig. 7 und 10 stellt Oszillogramm Fig. 2 dar. Beim Zünden des Lichtbogens springt der Strom auf das Maximum I_{max} . Nur eine sehr gedämpfte Schwin-



$$p_y = /^{+j\omega} \quad /^{-j\omega}$$

Fig. 9.

Verlauf des Gleichstromes bei komplexen und konjugiert komplexen Wurzeln p_y .

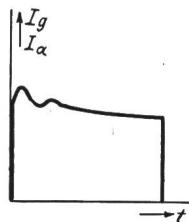


Fig. 10.

Verlauf des Gleich- oder Anodenstromes $I_a(t) = I_1(t)$ bei stärkerer Dämpfung der Schwingungen des Ausgleichsvorganges. Vgl. hiezu das Oszillogramm Fig. 2.

der andere eine gedämpfte periodische Schwingung der Frequenz ω . Hierzu vergleiche man Fig. 9. Ist eine sehr starke Dämpfung vorhanden und sind die Voraussetzungen für die Ausbildung einer Oberschwingung nicht erfüllt, wird der in Fig. 10 festgehaltene Verlauf zu verzeichnen sein. Wie genau er mit demjenigen der Fig. 2 korrespondiert, ist leicht ersichtlich.

Sollten jedoch n -fache Wurzeln oder Pole vorhanden sein, bestehen Ausgleichsvorgänge im elektrischen System mit sehr verwickeltem zeitlichem Verlauf. Bei der richtigen Wahl der Elemente können derartige Betriebszustände, wie das Experiment bewies, nur in den allerseltesten Fällen auftreten. Da diese Fälle weniger von Bedeutung sind, ist von einer Betrachtung, die eher mathematische Schwierigkeiten bietet, abgesehen.

Zwei der hier behandelten Betriebsfälle, der erste und dritte, bzw. die nach Fig. 7, 9 und 10, die allein als beachtenswert erscheinen, liessen sich experimentell eindeutig nachweisen. Hierüber wird im nächsten Abschnitt berichtet.

f) Experimentelle Vergleichsergebnisse zur Theorie.

Ein besonderes Interesse verdient die Bestätigung der theoretischen Ergebnisse durch das Experiment. Das Fundament, auf dem das gesamte theoretische Gebäude steht, wird durch diese weitgehend befestigt.

Auf die Angabe von numerischen Werten im Sinne einer Darbietung eines Beispiels ist verzichtet, um eine unnötige Aufblähung der Darstellung zu vermeiden. Das am Schluss angeführte Beispiel dient mehr der weiteren Aufklärung bezüglich der Berechnungsart. Die algebraischen Bedingungen, welche die Existenz des einen oder anderen Typus von Ausgleichsvorgängen bestimmen, sind im Abschnitt 3g behandelt.

Alle mathematisch berechneten Betriebszustände lassen sich experimentell, wie die aufgenommenen

gung bildet sich aus. Der Hauptvorgang verläuft nach einer Exponentialkurve mit kleinem Dämpfungsfaktor. Hat die folgende Anode gezündet, bricht der Strom in der Form, in der er beim Einschalten angestiegen ist, zusammen. Unter den angenommenen Betriebsbedingungen arbeitet der Wechselrichter vollkommen stabil, so dass sich der Verlauf des Gesamtstromes, der als eine Aneinanderreihung von einzelnen Anodenströmen zu denken ist, gleich einer Zähnekurve herausbildet. Eine formgetreue Nachbildung hievon ist Fig. 10. Die Entionisierungszeit ist sehr klein, weshalb ein zusätzlicher und störender Kommutierungsstrom über die löschen und die neu zündenden Phasen bei einer richtigen Anpassung der Kommutierungskondensatoren nicht zustande kommt. Ein plötzliches Absinken des Stromes nach der Brenndauer Δt ohne merkliche Ueberlappung tritt ein. Die Umladung der Kommutierungs- oder Löschkondensatoren erfolgt im Rhythmus der Eigenfrequenz des Systems [vgl. hiezu Gl. (8)].

Erhöht man die Belastung, was einer Verkleinerung des Belastungswiderstandes R_1 im Ersatzschema entspricht, beginnen sich störende Eigenfrequenzen bemerkbar zu machen. Die Änderung des Widerstandes ist so gross, dass die Gleichung, welche bisher reelle Wurzeln p_1, p_2, p_3 lieferte [Gl. (54) und (35)], nun eine reelle und zwei komplexe Wurzeln besitzt. Ein neuer Betriebszustand hat sich eingestellt und entspricht ungefähr demjenigen der Fig. 9. Das experimentelle Gegenstück hievon, der oszillographisch aufgezeichnete Stromverlauf, ist Fig. 11. Die überlagerte Schwingung ist sehr deutlich. Sie verschwindet jedoch mit dem Nullwerden des Anodenstromes, trotzdem die periodisch verlaufenden Ausgleichsvorgänge in den parallel geschalteten, nächstliegenden Phasen kräftige Gegenspannungen bewirken. Die eigentliche Kippgrenze ist fast erreicht, denn nur mehr zögernd reisst der Anodenstrom zur Zeit Δt ab. Bei

einer unbedeutenden Leistungssteigerung löscht die Anode nicht mehr, und die periodische Schwingung besteht weiter, wodurch eine vollständige Ueberlappung der beiden Anodenströme entsteht und der Mutator in einem Zustand höherer Ord-

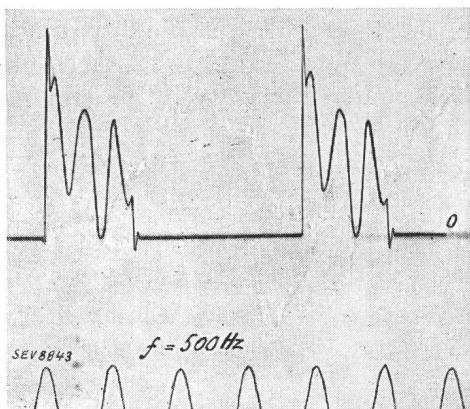


Fig. 11.

Anodenstrom $I_a(t)$ nahe der Kippgrenze beim Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator.

Die Frequenz der Oberschwingung beträgt $f = 1160$ Hz. I_a ist identisch I_g der Fig. 6.

nung arbeitet. Den Stromverlauf veranschaulicht Fig. 12. Die Kippgrenze des Wechselrichters ist erreicht. Der Kurzschluss ist eingeleitet und der Wechselrichter fällt ausser Betrieb.

Mit dem Auftreten der Schwingungen nach Fig. 11 und 12 konnte gleichzeitig ein *Flackern* des Lichtbogens beobachtet werden. Es sind dies Erscheinungen, die man ebenfalls bei Hochspannungsgleichrichtern^{13a)} im Zustand von Ueberspannungen und Ueberströmen bereits kennt.

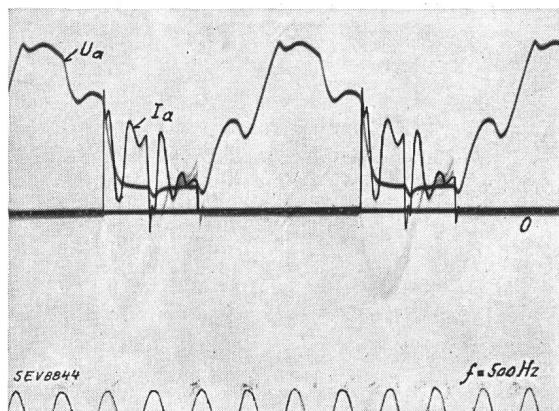


Fig. 12.

Anodenstrom $I_a(t)$ unmittelbar vor dem Erreichen der Kippgrenze beim Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator.

Die Anode löscht nicht mehr. Der Umrichter arbeitet in einem Zustand höherer Ordnung (3phasig).

In der experimentellen Beweisführung dieses Kapitels war der Stromverlauf des Hauptstromes $I_g(t)$, wie er aus der Diskussion im vorangestellten Kapitel hervorging, gleich dem Anodenstrom $I_a(t)$ vorausgesetzt. Es wird im Abschnitt 4 bewiesen, in

^{13a)} A. Hochrainer-Micza: VDE-Fachber. Bd. 11 (1939), S. 187.

was für einer Beziehung diese beiden Ströme zueinander stehen. Sie unterscheiden sich nämlich nur durch ihren absoluten Betrag, währenddem die Form bzw. der zeitliche Verlauf genau der gleiche ist. Die zwischen ihnen bestehende konstante Phasenverschiebung ist bedeutungslos.

Im Abschnitt 4 wird diese Behauptung an einem Beispiel versinnbildlicht und gerechtfertigt, indem für ein gegenüber dem Schema Fig. 5 und 6 etwas vereinfachtes Ersatzschema, aus dem gleichfalls eine Operatorgleichung dritten Grades folgt, der Anodenstrom $I_a(t)$ berechnet wird. Er besitzt grundsätzlich gleichen Charakter wie $I_g(t)$.

g) *Algebraische Bedingungsgleichungen für die Wurzeln p_v der Gl. (35).*

Aus der bisherigen Entwicklung ist hervorgegangen, dass bestimmte Betriebszustände mit entsprechenden Wurzeltypen korrespondieren. Dem rein aperiodischen Stromverlauf entsprechen reelle, dem periodischen eine reelle und zwei komplexe Wurzeln. Die das Auftreten des einen oder andern Wurzeltypus bestimmende Grenzbedingung kann in zwei Formen dargestellt werden.

1. Wendet man das Sturmsche Theorem¹³⁾ auf die Ermittlung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass eine algebraische Gleichung lauter reelle Wurzeln hat, ist als Erstes eine einfache Umformung der allgemeinen Gleichung dritten Grades [Gl. (35), $G(p)$] nötig.

Ist der Nenner von $f(p)$ der Gl. (35) die Gl. $G(p)$, von der man die algebraische Wurzel ermitteln muss, so setzt man das Polynom $G(p) = 0$ und löst die Gleichung auf. Die Koeffizienten a_2 und a_1 sind mit 3 zu multiplizieren und wiederum durch 3 zu dividieren. Hierdurch bleibt der Wert der Gleichung derselbe. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von drei reellen Wurzeln lautet

$$\left(\frac{a_2}{3}\right)^2 - \left(a_3 \cdot \frac{a_1}{3}\right) > 0 \quad \text{und} \quad \Delta = 0 \quad (55)$$

wobei Δ die Diskriminante der Gl. (55)

$$\Delta = 4 \left[\left(\frac{a_2}{3}\right)^2 - \left(a_3 \cdot \frac{a_1}{3}\right) \right] \cdot \left[\left(\frac{a_1}{3}\right)^2 - \frac{a_2 \cdot a_0}{3} \right] - \left[\frac{a_2 \cdot a_1}{3 \cdot 3} - a_3 \cdot a_0 \right]^2 \quad (56)$$

bedeutet. Setzt man an Stelle der Koeffizienten a_n die elektrischen Grössen C , L und R der Gl. (31), so erhält man die massgebende und gesuchte Bedingung für das einwandfreie Funktionieren des Wechselrichters. Die Stabilität ist, sofern die Gl. (55), (56) erfüllt sind, vollkommen gewährleistet.

2. Eine weitere Ueberprüfung der algebraischen Gl. (35) mit $G(p)$ im Sinne, ob eine reelle und zwei

¹³⁾ E. Cesàro: Einleitung in die Infinitesimalrechnung, deutsch v. Kowalewski, Berlin 1922, S. 444. — O. Bürklen: Allgemeine Sätze über höhere Gleichungen, Sammlung Göschens, Bd. 51, S. 50/52.

komplexe Wurzeln existieren, kann mittels der Wurzelzerkleinerung¹⁴⁾ vorgenommen werden. Zu dem Zweck transformiert man die Gl. $G(p) = 0$ mittels dem Faktor

$$k = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} = \frac{a_2}{3 \cdot a_3} \quad (57)$$

Diese Transformation ist gleichbedeutend der Substitution

$$p = y - \frac{a_2}{3 a_3} \quad (58)$$

wodurch die Gleichung in die Form

$$y^3 + 3ry + 2q = 0 \quad (59)$$

übergeht. Diese Formel führt zur Lösung solange die Summe der Konstanten die Ungleichung

$$q^2 + r^3 > 0 \quad (60)$$

befriedigen. Es existieren für den Fall *eine* reelle und *zwei* imaginäre Wurzeln. Die Voraussetzungen für das Auftreten von periodischen Ausgleichsvorgängen vom Typus der Fig. 9, 10, 11, 12 sind vorhanden.

Soll die Gleichung

$$G(p) = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_0 = 0 \quad (61)$$

in die Gleichung

$$\varphi(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} \dots + p_0 = 0 \quad (62)$$

umgewandelt werden, so dass die Wurzeln der Gl. (62) um k kleiner sind als die der gegebenen Gl. (61), so muss

$$f(x) = \varphi(x - k) \quad (63)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x^1 + \dots a_0 = \\ = p_n (x - k)^n + p_{n-1} (x - k)^{n-1} \dots + p_0 \end{aligned} \quad (64)$$

im Sinne einer Gleichheit bestehen. Die Zahlen p_0, p_n, p_{n-1} sind daher die Reste, welche sich ergeben, wenn $f(x)$ fortlaufend durch $(x - k)$ dividiert wird. Der in Gl. (57) verwendete Koeffizient k wird allgemein

$$k = -\frac{a_{n-1}}{n \cdot a_n} \quad (65)$$

Die Wurzeln der Gleichung selbst errechnen sich nach den allgemeinen kanonischen Formeln für $y = u + v$ und $u^3 + v^3 + 2q = 0$

$$u = (-q + \sqrt{q^2 + r^3})^{1/3} \quad (66)$$

$$v = (-q - \sqrt{q^2 + r^3})^{1/3} \quad (67)$$

Die drei Wurzeln y_1, y_2, y_3 der durch eine Substitution herausgebildeten Gleichung lauten nun

$$y_1 = u + v = (-q + \sqrt{q^2 + r^3})^{1/3} + (-q - \sqrt{q^2 + r^3})^{1/3} \quad (68)$$

¹⁴⁾ O. Bürklen; Sammlung Göschen Bd. 51, S. 54/55, 50.

$$y_2 = -\frac{u + v}{2} + i \frac{1}{2} \sqrt{3} (u - v) \quad (69)$$

$$y_3 = -\frac{u + v}{2} - i \frac{1}{2} \sqrt{3} (u - v) \quad (70)$$

4. Berechnung des Transformatorstromes $i_1(t)$.

Der Gesamtstrom $i_g(t)$ setzt sich nach Fig. 6 aus dem Kondensatorstrom i_c und dem Transformatorstrom i_1 zusammen.

$$i_g(t) = i_1(t) + i_c(t) \quad (71a)$$

Für den allgemeinen Fall lässt sich $i_g(t)$ in einen stationären und freien Anteil spalten

$$i_g(t) = i_g(t)_s + i_g(t)_f \quad (71b)$$

Sind die Bedingungsgleichungen (55), (56) erfüllt, so sind keine Ausgleichsströme vorhanden, also $i_g(t)_f = 0$. Ist der Kommutierungskondensator in der sehr kurzen Zeit nach Fig. 3 geladen, so wird nachher der Gesamtstrom i_g gleich dem Transformatorstrom sein.

$$i_g(t)_s \sim i_1(t)_s \text{ für } t > \varepsilon \quad (71c)$$

Entstehen Ausgleichsvorgänge zwischen dem Kommutierungskondensator C und den zu ihm in Serie oder parallel geschalteten Induktivitäten, so teilt sich der freie Stromanteil *angenähert* im Verhältnis der ohmschen Widerstände ihrer Stromkreise auf. Bezeichnet man in Fig. 6 den gesamten Widerstand der Stromquelle U_g und den des Lichtbogens mit R_t , so wird das Verhältnis der zeitlich veränderlichen Ströme

$$\frac{i_g(t)_f}{i_c(t)_f} = \frac{R_1}{R_1 + R_0 + R_t} \cdot f(R, L, t) \quad (72)$$

Sind die Verhältnisse der Widerstände und Induktivitäten $\frac{R_1}{L_1 - M_{c_1}} \approx \frac{R_1 + R_0 + R_t}{L_1 + L_0}$ einander fast

gleich, was bei Gleichstrom-Wechselstrom-Mutatoren zutrifft, so wird die Funktion $f(R, L, t) \sim 1$, und die Gl. (72) geht über in

$$i_g(t)_f = \frac{R_1}{R_1 + R_0 + R_t} \cdot i_c(t)_f$$

Die Herleitung der *exakten* Lösung für die Aufteilung beliebiger Ausgleichsströme in den beiden Stromzweigen verursacht einige mathematische Schwierigkeiten, weshalb sie a. O.¹⁵⁾ abgeleitet werden.

5. Berechnungsbeispiel.

Berechnung des Anodenstromes $\mathfrak{J}_a = \mathfrak{J}_1$ bei einem vereinfachten Schaltbild.

Um ein einfaches Rechenbeispiel zeigen zu können, ist eine Vereinfachung der Fig. 5 nötig. Der ohmsche Widerstand des Anodenkreises und die Widerstände R und $\omega \cdot L$ des Ersatzkreises werden gleich Null gesetzt ($R = 0, L = 0$). Die Drossel-

¹⁵⁾ J. Müller-Strobel; Arch. Elektrotechn. Bd. 34 (1940), erscheint demnächst.

spule bleibt durch die Grössen R_0 und L_0 berücksichtigt. Hierzu das Ersatzschema Fig. 13.

Im Abschnitt 3 d wurden die Bedingungen bekanntgegeben, unter denen der Entwicklungssatz von Heaviside, Gl. (37), der unmittelbar aus der Laplaceschen Transformation ableitbar ist, angewendet werden darf. Beim hier vorliegenden Beispiel kann die Ausgangsgleichung

$$f(p) = \frac{1}{G(p)} = \frac{1}{a_3(p-p_1)(p-p_2)(p-p_3)} \quad (74)$$

durch eine Laplacesche Transformation aus dem Oberbereich gewonnen werden, weshalb der Ent-



Fig. 13.

Vereinfachtes Ersatzschema eines Gleichstrom-Wechselstrom-Mutators für ein Berechnungsbeispiel.

wicklungssatz die richtige, bzw. ganze Lösung liefert. Die Impedanz des Stromkreises nach Fig. 13 ist

$$\begin{aligned} Z &= R_0 + j\omega L_0 + \frac{j\omega L_1}{(j\omega)^2 CL_1 + 1} = \\ &= \frac{(R_0 + j\omega L_0)[(j\omega)^2 CL_1 + 1] + j\omega L_1}{(j\omega)^2 CL_1 + 1} \end{aligned} \quad (75)$$

Der Gleichstrom $\mathfrak{J}_g(t)$ beim Einschalten der Spannung U_g von der Form des Einheitsstosses 1 wird

$$\mathfrak{J}_g(t) = \frac{U}{Z} \cdot 1 = U_g \frac{(j\omega) CL_1 + 1}{(R_0 + j\omega L_0)[(j\omega)^2 CL_1 + 1] + j\omega L_1} \quad (76)$$

Das Verhältnis von Gleich- zu Anodenstrom folgt aus dem Verhältnis der von ihnen durchflossenen Widerstände.

$$\frac{\mathfrak{J}_a}{\mathfrak{J}_g} = \frac{\frac{1}{j\omega L_1}}{\frac{1}{i\omega L_1 + j\omega C}} \quad (77)$$

Löst man die Gl. (77) nach dem Anodenstrom \mathfrak{J}_a auf und setzt $\mathfrak{J}_g(t)$ [Gl. (76)] in Gl. (77) ein, so geht die Gleichung des Anodenstromes in die Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_a(t) &= \mathfrak{J}_g(t) \cdot \frac{1}{1 + (j\omega)^2 CL_1} = \\ &= \frac{1}{CL_1 L_0 (j\omega)^3 + R_0 CL_1 (j\omega)^2 + (L_1 + L_0) j\omega + R_0} \end{aligned} \quad (78)$$

über. Ersetzt man wie in den Gl. (31) und (32) die parametrische Grösse $j\omega$ durch p , so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_a(t) &= \frac{U_g}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \cdot 1 \quad (79) \\ \begin{cases} a_3 = CL_1 L_0 \\ a_2 = R_0 CL_1 \\ a_1 = L_1 + L_0 \\ a_0 = R_0 \end{cases} & \left. \right\} 80a, b, c, d \end{aligned}$$

Wir nehmen an, die algebraischen Bedingungen 55 und 56 seien nicht erfüllt. Es liegt ein Betriebsfall vor, ähnlich demjenigen, wie ihn die Fig. 9, 11, 12 voraussetzen. Dann existieren zwei komplexe Wurzelpaare und eine reelle Wurzel p_v von $\mathfrak{J}(p)$. Wir schreiben für die Wurzeln allgemein

$$\begin{aligned} p_1 &= -a_1 & a_2 &= a_3 \\ p_2 &= -a_2 + j\beta_2 & p_3 &= -a_3 - j\beta_3 & \beta_2 &= \beta_3 \end{aligned} \quad (81a, b, c, d, e)$$

Nach dem Entwicklungssatz Gr. (37) wird der stationäre Anteil $\frac{R(\mathbf{o})}{G(\mathbf{o})} \mid p = \mathbf{o}$ des Stromes $\mathfrak{J}_a(t)$

$$\frac{R(\mathbf{o})}{G(\mathbf{o})} \mid p = \mathbf{o} = \frac{1}{R(\mathbf{o})} \cdot U_g = I_0 \quad (82)$$

Aus der Gl. (78) folgt, dass der Zähler $R(p)$ gleich Eins ist, $R(p) = 1$, und $R(\mathbf{o}) = 1$. Dieser konstante Stromanteil entspricht der Konstanten K in Gl. (54). Berechnet man die Summe der Exponentialfunktionen der Gl. (37), bildet die Ableitungen von $G(p)$ nach dem Parameter p , setzt in jedes Glied die entsprechenden Wurzeln p_1, p_2, p_3 der Gl. $G(p)$ ein und multipliziert die Ableitung nach p mit der zugehörigen Wurzel p_v , dann können die beiden Exponentialfunktionen mit den komplexen Wurzelpaaren in eine harmonische Funktion umgewandelt werden. Der Anodenstrom in der Spule L_1 wird schlussendlich

$$\mathfrak{J}_a(t) = I_0 - \sum_{v=1}^V k_v \cdot e^{p_v t} = I_0 - [k_1 \cdot e^{\alpha_1 t} + k_2 \cdot e^{\alpha_2 t} \cdot \cos(\beta_2 t - \Theta)] \quad (83)$$

Bei Wechselrichtern sind die ermittelten Konstanten a der Gl. $G(p)$ meistens in einem solchen Verhältnis zueinander, dass die Wurzel $-a_1$ eine sehr grosse Zahl ist und deshalb die Exponentialfunktion $e^{\alpha_1 t} = 0$ gesetzt werden darf. Die Gl. (82) vereinfacht sich. Sie lautet nun

$$\mathfrak{J}_a(t) = I_0 - k_2 \cdot e^{\alpha_2 t} \cdot \cos(\beta_2 t - \Theta) \quad (84)$$

deren Verlauf Fig. 14 darstellt. Interessant ist der Vergleich dieses Bildes mit Fig. 10 und dem Os-

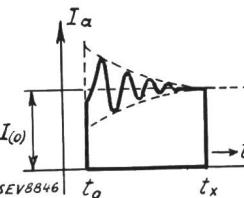


Fig. 14.

Verlauf des Anodenstromes $\mathfrak{J}_a(t)$, wenn komplexe und reelle Wurzeln der Ausgangsgleichung $G(p)$ existieren.

zillogramm 11. Die angeführten Konstanten k_1, k_2 folgen unmittelbar aus der numerischen Rechnung.

6. Allgemeine Bemerkungen.

Einige Fragen, die bei diesem Mutatortyp von Interesse sein könnten, Frequenzbereich, Kommutierung usw., werden später beantwortet. Der Grund dieses Mangels ist in dem Umstand zu suchen, dass in erster Linie die physikalischen Grundlagen dieser neuen Theorie und die für eine mathematische Durchdringung des Problems erforderlichen Rechenmethoden bekanntgegeben werden mussten.

In der allgemeinen Theorie wurde der Einfluss der Entionisierungszeit auf das Kippen des Mutators nicht berücksichtigt. Die ohne diese Berücksichtigung durchgeföhrten Rechnungen lassen sich als richtig beweisen, wenn man sich der Tatsache erinnert, dass bei Betriebsfrequenzen bis ca $f = 500$ Hz und Normallast eine einwandfreie Kommutierung gewährleistet ist. Auch der Aufbau und das Verschwinden magnetischer Felder ($\cos \varphi$) im Sinne einer Verzögerung des Stromüberganges und einer Veränderung der Kommutierungszeit bedarf einer noch eingehenderen Betrachtung.

Für den Fall, dass die Spannung der Gleichstromquelle nicht einen rechteckförmigen Verlauf aufweist, wie er bisher vorausgesetzt wurde, ist eine Erweiterung der Theorie erforderlich. Sie wird sich mehrheitlich in einer vermehrten Anwendung der mathematischen Hilfsmittel bemerkbar machen.

Da uns der Stromverlauf bei den Ausgleichsvorgängen bekannt geworden ist, kann nun auch doch den Ueberspannungen, die gleichzeitig auftreten, gefragt werden. Die hier ermittelten Gleichungen liefern uns unmittelbar die Teilspannungen, deren Grösse erheblich über demjenigen bei Normalbetrieb liegen kann.

7. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Untersuchung handelt es sich um die Erfassung der elektromagnetischen Vorgänge von Gleichstrom-Wechselstrom- und Wechselstrom-Wechselstrom-Mutatoren (Um- und Wech-

selrichtern) mit Kondensatorkommutierung bei beliebiger Belastung. Die Kondensatorkommutierung wurde gewählt, um den möglichst generellsten Fall des Mutators zu behandeln.

Dass die bisherigen Rechenverfahren die zum Teil recht komplizierten Ausgleichsvorgänge im System nicht befriedigend zu erfassen vermochten, ist bekannt, weshalb man neue Ansätze suchen musste. Für das Auffinden und die Ableitung dieser Ansätze diente die folgende Anschauung. Man denkt sich den Mutator so, als wirke er als Schalter, nicht aber als Ventil. Die Differentialgleichungen des Systems werden abgeleitet, als würde eine Gleichstromquelle der Spannung U_g auf ein System von Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten im Takte der Steuerfrequenz geschaltet. Die Lösung der unter diesem Gesichtspunkt abgeleiteten Differentialgleichungen erfolgt mittels der Laplaceschen Transformation. Kommutierung und Instabilitätserscheinungen lassen sich eindeutig erfassen, sofern die gegenseitige Beeinflussung der zwei im Spiele stehenden Anodenkreise einbezogen wird. Die zum Teil recht komplizierten Ausgleichsvorgänge, die durch eine starke Verstimmung des Systems zu stande kommen, lassen sich mittels der Berechnungsmethode, ohne für die Differentialgleichungen erleichternde Randbedingungen annehmen zu müssen, bestimmen.

Um den Unterschied zwischen der neuen und der älteren Rechenmethode zu zeigen, sind einige Ergebnisse angeführt und diese mit den neuen verglichen. Der Ersatzstromkreis, welcher als Grundlage für die Berechnung dient, ist in einem speziellen Kapitel behandelt.

Die Diskussion der Gleichungen, bzw. Lösungen ermöglicht uns, diese in drei Gruppen einzuteilen, wobei jede einem Betriebszustand entspricht. Die Ergebnisse sind durch oszillographische Messungen der Anodenströme verifiziert. Algebraische Bedingungsgleichungen grenzen den Gültigkeitsbereich einzelner mathematischer Gleichungen ab.

Chaudage hivernal à l'aide d'énergie estivale.

Par P. Seehaus, Mitlödi.

(Bull. ASE 1940, No. 15.)

Pour répondre à de nombreuses demandes, nous avons fait faire un résumé en français de la remarquable étude de M. Paul Seehaus «Winterheizung mit Sommerenergie». Ce résumé est joint à ce numéro du Bull. ASE sous forme d'un supplément de 4 pages. Il peut également s'obtenir séparément auprès du Secrétariat général de l'ASE et de l'UCS, au prix de fr. 1.50.

Errata.

Nous profitons de l'occasion pour rectifier quelques erreurs d'impression qui se sont glissées dans le texte allemand (Bull. ASE 1940, No. 15). Le résumé en français en tient compte.

Page 323, colonne de droite, la dernière équation doit s'écrire:

$$\vartheta_s = A \vartheta_{s \max} \cdot e^{-s \sqrt{\frac{\pi}{aT}}} \cdot \sin \left(2 \frac{\pi}{T} t - s \sqrt{\frac{\pi}{aT}} \right)$$

Page 329, colonne de gauche, à la 7^e ligne au-dessus de la figure 5, l'indication 0,04° C doit être remplacée par 1,4° C.

Page 329, colonne de droite, tableau VII. Les trois dernières lignes de ce tableau doivent se lire:

Maximal-Amplitude in 7,5 m Tiefe	= 1,4° C
Wellenlänge = Weg in 8760 h	= 14,84 m
Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen	= 0,00169 m/h

Page 330: Les oscillations représentées sur la figure 6 s'étendent sur toute la zone des oscillations. La figure correcte est reproduite ci-contre.