Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 31 (1940)

Heft: 18

Artikel: Flussverdrängung durch Wirbelströme in Blechen und Platten im Wechselfeld

Autor: Meyer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1058015

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

BULLETIN

RÉDACTION:
Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité, Zurich 8

ADMINISTRATION:
Zurich, Stauffacherquai 36 ♦ Téléphone 5 17 42
Chèques postaux VIII 8481

Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

XXXIe Année | N° 18 | Vendredi, 6 Septembre 1940

Flussverdrängung durch Wirbelströme in Blechen und Platten im Wechselfeld.

Von *H. Meyer*, Baden [1]).

621.3.013.1

Ausgehend von der Thomsonschen Rechnung wird die Grösse und Phase des in einer metallenen Platte resultierenden Flusses erläutert, die sich in einem magnetischen, parallel zur Plattenoberfläche gerichteten Wechselfeld befindet. Anschliessend wird gezeigt, wie man auf Grund der Theorie der einfallenden Wellen zu den gleichen Resultaten gelangt.

L'auteur part de la formule de Thomson et calcule, en grandeur et en phase, la valeur du flux résultant qui existe dans une plaque de métal placée dans un champ magnétique, dont les lignes de force sont parallèles à la surface de la plaque. Il démontre ensuite que l'on aboutit aux mêmes résultats en appliquant la théorie des ondes incidentes.

1. Einleitung.

Der Verlauf der magnetischen Induktion in einer metallischen Platte mit rechteckigem Querschnitt, welche sich in einem magnetischen, parallel zur Oberfläche gerichteten Wechselfeld befindet, wurde von Thomson 1892 berechnet, und seine Ergebnisse sind in fast alle Lehrbücher übernommen worden, leider aber meist unvollständig. Die Thomsonsche Rechnung wird hier nun weiter ergänzt durch die Berechnung der zeitlichen Phasenlage des resultierenden Flusses in der Platte; es ergibt sich eine mit zunehmender Flussverdrängung zunehmende Nacheilung des resultierenden Flusses gegenüber der erregenden magnetomotorischen Kraft, welche für grosse Flussverdrängung den Grenzwert von 45° erreicht. Die gleichen Resultate erhält man auch, wenn man den Induktionsverlauf aus dem von beiden Plattenflächen her erfolgenden Eindringen ebener elektromagnetischer Wellen berechnet. Diese Auffassung zeigt besonders deutlich, dass für hohe Frequenzen die ganzen Vorgänge sich an den Plattenoberflächen abspielen und das Innere belanglos ist.

2. Ergänzende Betrachtungen zu den Berechnungen von Thomson.

Wir betrachten eine unendlich ausgedehnte metallische Platte von der Dicke Δ und denken ein Koordinatensystem so gelegt, dass die x-Axe senkrecht zur Plattenebene und die yz-Ebene in die Mittelebene der Platte fällt. Die Platte befinde sich in einem parallel zur Oberfläche gerichteten magnetischen Wechselfeld, dessen Feldstärke H_0 in der umgebenden Luft und somit auch in den äussersten Seitenwänden (Oberflächen) der Platte in der z-Richtung mit der Frequenz f schwinge.

[1]) Auszug aus internen Studien der Firma Brown, Boveri, Baden.

Es sei also

$$H_0 = \overline{H}_0 \cos 2\pi f t = \overline{H}_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

Es ist nun allgemein bekannt, dass eine Flussverdrängung stattfindet und die Induktion B im Innern der Platte viel kleiner ist als an den äussersten Seitenwänden (Oberflächen), wo sie allein den Wert

$$B_0 = \overline{B}_0 \cos \omega t = \mu \overline{H}_0 \cos \omega t \qquad (2)$$

erreicht. Thomson hat wohl als erster [2]) den Flussverlauf (und auch die resultierenden Verluste) in solchen Platten berechnet, und seine Resultate sind in fast allen Lehrbüchern übernommen worden, leider aber zumeist nur sehr unvollständig. Unter dieser Unvollständigkeit leidet aber nicht nur die physikalische Vorstellung des Vorganges, sondern sie beschränkt auch die Anwendungsmöglichkeiten; im folgenden sollen daher die Verhältnisse etwas eingehender dargestellt werden.

Aus den Berechnungen Thomsons ergibt sich für die magnetische Induktion B_x an der Stelle x der Wert

$$B_x = \overline{B}_0 \sqrt{\frac{\mathfrak{Cos}\, 2\,\alpha\, x + \cos 2\,\alpha\, x}{\mathfrak{Cos}\, \xi + \cos \xi}} \cdot \cos\,(\omega t + \psi) \qquad (3)\ ^{3)}$$

wo $\xi = \alpha\Delta$ und

$$\alpha = 2\,\pi \sqrt{\frac{\mu f}{10^5\, \varrho}}\ \mathrm{cm}^{-1} \qquad (3a)$$

bedeuten (ϱ spez. Widerstand des Plattenmaterials in $\Omega\,\mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$, Δ in cm).

Wie man sieht, ist nicht nur die Amplitude der Induktion an jeder Stelle anders, sondern es tritt auch eine Phasenverschiebung ein; es ist nämlich:

[2]) The Electrician, Bd. 28 (1892), S. 599.

[3]) Vgl. z. B. Formel 205 in Richter, Elektr. Maschinen Bd. 1, wo aber nur das Amplitudenverhältnis ohne Phasenlage angegeben ist.

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha\left(\frac{\Delta}{2}+x\right)\sin\alpha\left(x-\frac{\Delta}{2}\right) - \mathfrak{Sin}\,\alpha\left(\frac{\Delta}{2}-x\right)\sin\alpha\left(\frac{\Delta}{2}+x\right)}{\mathfrak{Cos}\,\alpha\left(\frac{\Delta}{2}+x\right)\cos\alpha\left(x-\frac{\Delta}{2}\right) + \mathfrak{Cos}\,\alpha\left(\frac{\Delta}{2}-x\right)\cos\alpha\left(\frac{\Delta}{2}+x\right)} \qquad (4)$$

Die Induktion wird mit zunehmendem Eindringen in die Platte nicht nur verkleinert, sondern sie erfährt auch eine zeitliche Nacheilung.

Technisch wichtig ist nun *die Grösse und Phase des resultierenden Flusses*[4]) in der ganzen Platte; man kann diesen resultierenden Fluss in der Platte so darstellen, dass man eine mittlere Sättigung B_m, mit dem zeitlichen Amplitudenwert $\overline{B}_m$, berechnet, die gleichmässig über den ganzen Plattenquerschnitt verteilt gedacht den resultierenden Fluss ergibt. Für die *Amplituden* des resultierenden Flusses bzw. diejenige der genannten mittleren Sättigung B_m ergibt sich die bekannte Formel:

$$\frac{\overline{B}_m}{\overline{B}_0} = \sqrt{\left(\frac{2}{\xi^2}\right)\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\xi - \cos\xi}{\mathfrak{Cos}\,\xi + \cos\xi}\right)} \qquad (5)$$

(Es ist hier darauf aufmerksam zu machen, dass die obige Formel oft sehr schlecht gedruckt wurde, so dass nicht überall klar ersichtlich ist, dass der Faktor $^2/\xi^2$ vor die ganze Klammer gehört, nicht etwa einzeln vor die nächsten hyperbolischen Glieder zu schreiben ist)[5]).

Ueber die Phase des resultierenden Flusses wird leider auch bei Thomson nichts ausgesagt. Führt man jedoch die in seiner Arbeit als Zwischenrechnungen weggelassenen Integrationen durch, so kann dann auch die Phasenlage des resultierenden Flusses gegenüber derjenigen der erregenden magnetischen Feldstärke am Plattenrand berechnet werden. Es ergibt sich eine *Nacheilung* φ folgender Grösse:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi - \sin\xi}{\mathfrak{Sin}\,\xi + \sin\xi} \qquad (6)$$

In Fig. 1 sind die Gl. (5) und (6) in Kurvenform aufgetragen.

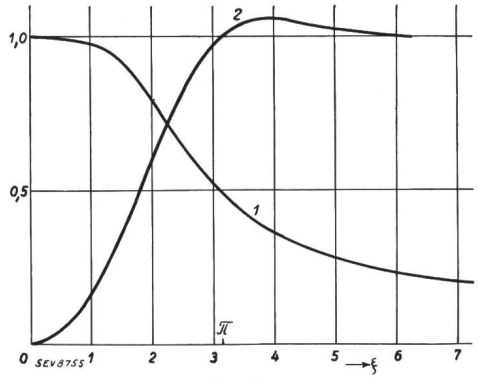

Fig. 1.

Verlauf der mittleren Induktion $\left(\frac{\overline{B}_m}{\overline{B}_0}\right)$ und der Phase (tg φ) des resultierenden Flusses in Funktion der reduzierten Blechstärke ξ.

1 $\frac{\overline{B}_m}{\overline{B}_0} = f(\xi)$, 2 $\operatorname{tg}\varphi = f(\xi)$.

[4]) Zeitlicher Amplitudenwert der über den ganzen Querschnitt integrierten Teilflüsse.

[5]) Vgl. z. B. auch Formel 207 in Richter, Elektr. Maschinen I.

Für grosse Flussverdrängung, d. h. grosses ξ (hohe Frequenz oder dicke Platte) wird die Gl. (5) einfach zu

$$\frac{\overline{B}_m}{\overline{B}_0} = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \qquad (\text{für } \xi \geqq 4) \qquad (5a)$$

Interessant ist auch der Verlauf der Phasenlage. Für kleine Flussverdrängung (kleines ξ) ist der resultierende Fluss noch annähernd in Phase mit der erregenden Feldstärke; für grosse Flussverdrängung ($\xi \geqq 6$) wird $\operatorname{tg}\varphi = 1$; *bei grosser Flussverdrängung eilt der resultierende Fluss der erregenden MMK um 45° nach.* Man kann sich auch den resultierenden Fluss in 2 Komponenten zerlegt denken, wovon die eine in Phase mit der erregenden MMK ist, und die andere senkrecht dazu steht. Bei grosser Flussverdrängung ($\xi \geqq 6$) sind dann wegen $\varphi = 45°$ beide Teilflüsse gleich gross; anders ausgedrückt:

Bei grosser Flussverdrängung ($\xi \geqq 6$) verhält sich die Platte gegenüber der Erregung wie ein Stromwandler, dessen Sekundärseite durch die Wirbelströme in der Platte dargestellt wird und bei dem der «Streufluss» (in Phase mit der MMK) und der «Magnetisierungsfluss» (90° nacheilend) genau gleich gross sind und je das $1/\sqrt{2}$fache der aus Gl. (5) oder (5a) berechneten Werte betragen.

3. Andere Ableitung des Resultates.

Prof. Thomson hat seine Resultate direkt aus den für diese Annahmen aufzustellenden Differentialgleichungen gelöst; man kann jedoch die Resultate auch auf einem andern Wege ableiten, welcher das ganze Problem von einem neuen Gesichtspunkt aus beleuchtet.

Der Verlauf der magnetischen Induktion B und der Wirbelströme in der Platte muss sich nämlich genau gleich ergeben, wenn wir uns von beiden Seiten je eine ebene elektromagnetische Welle auf die Platte einfallend denken, wobei die Wellenfront parallel zur yz-Ebene und die magnetische Feldstärke in die z-Richtung fallend anzunehmen ist.

Betrachten wir eine Seitenfläche einer zunächst als unendlich dick angenommenen Platte, dann ist das Eindringen der Welle hier unabhängig von den Verhältnissen an der andern Seitenfläche, und es gilt für das Eindringen der magnetischen Feldstärke die Beziehung

$$H = \overline{H}_0 \cdot \varepsilon^{-\alpha x'} \cos(\omega t - \alpha x') \qquad (7)\ ^{6)}$$

wo α nach Gl. (3a) einzusetzen ist und x' die Koordinate $\left(\frac{\Delta}{2} - x\right)$ bedeutet [wenn wir die in der $(-x)$-Richtung auf die vordere Seitenfläche der Platte einfallende Welle betrachten].

[6]) Vgl. z. B. Becker-Abraham-Föppl: Theorie der Elektrizität I, § 64.

Die Komponenten Φ_1 und Φ_2 des in der Platte durch das Eindringen dieser Welle resultierenden Flusses, die in Phase mit H_0 und senkrecht dazu liegen, ergeben sich unter diesen Voraussetzungen (∞ dicke Platte) einfach durch die Integrationen:

$$\Phi_1 = \mu \overline{H}_0 \int_0^\infty \varepsilon^{-\alpha x'} \cos \alpha x' \, dx'$$
$$\Phi_2 = \mu \overline{H}_0 \int_0^\infty \varepsilon^{-\alpha x'} \sin \alpha x' \, dx' \tag{8}$$

Für grosse Flussverdrängung (dicke Platte oder hohe Frequenz) ergibt sich somit wegen dem an *beiden* Seitenflächen erfolgenden Eindringen der Wellen der totale resultierende Fluss zu

$$\Phi = 2 \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} \tag{9}$$

und seine Phasenlage gegenüber dem einfallenden H-Vektor zu

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \tag{10}$$

Führt man die Integrationen (8) aus und setzt in die Gl. (9) und (10) ein, so erhält man, wie zu erwarten war, die Beziehungen (5) und (6) im Spezialfall für grosses ξ. [Vgl. Gl. (5a).] Diese Ableitung an Hand der Theorie der eindringenden Wellen zeigt auch einleuchtend den Grund für die Einfachheit der Formel (5a); im Geltungsbereich dieser Formel sind nämlich die von beiden Seitenflächen her eindringenden Wellen praktisch schon ganz abgeklungen, bevor sie an die gegenüberliegende Plattenseite kommen. Der Induktionsfluss bleibt daher nun bei zunehmender Plattendicke konstant, ebenso seine Phase, und die mittlere Induktionsamplitude $\overline{B}_m$ muss umgekehrt proportional der Plattendicke abnehmen.

Wir wollen nun die Voraussetzung der dicken Platte (grosse Flussverdrängung) fallen lassen und die allgemeinen Beziehungen (5) und (6) auf Grund der Theorie der einfallenden Wellen ableiten. In diesem Fall müssen wir berücksichtigen, dass die auf einer Plattenseite einfallenden Wellen noch nicht völlig abgeklungen sind, wenn sie die gegenüberliegende Plattenfläche erreichen.

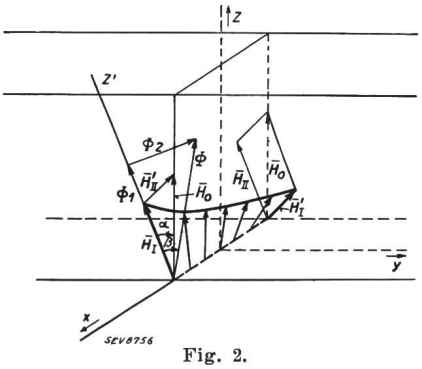

Fig. 2.

Der in der z'-Richtung (zeitlich!) schwingende magnetische Feldvektor $\overline{H}_I$ der an der vorderen Plattenseite (vgl. Fig. 2) einfallenden Welle klingt ab und verdreht sich (zeitlich!) nach dem Durchlaufen der Platte auf den Wert $\overline{H}'_I$, ebenso der Vektor $\overline{H}_{II}$ der auf der hintern Plattenfläche eindringenden Welle auf den Wert $\overline{H}'_{II}$ an der vordern Fläche. Die ursächlich vorhandene Feldstärke $\overline{H}_0$ am Plattenrand ergibt sich durch vektorielle Addition von $\overline{H}_I$ und $\overline{H}'_{II}$. Wir zerlegen alle Feldstärken in die zeitlichen Komponenten mit dem Index *1* in Richtung von $\overline{H}_I$ und mit dem Index *2* senkrecht hiezu. Es ergeben sich dann die Beziehungen (aus Symmetriegründen ist $\overline{H}_I = \overline{H}_{II}$!):

$$\overline{H}_0 = \sqrt{\overline{H}_I^2 (1 + \varepsilon^{-\alpha \Delta} \cos \alpha \Delta)^2 + \overline{H}_I^2 (\varepsilon^{-\alpha \Delta} \sin \alpha \Delta)^2} \tag{11}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon^{-\alpha \Delta} \sin \alpha \Delta}{1 + \varepsilon^{-\alpha \Delta} \cos \alpha \Delta} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= 2 \int_0^\Delta \mu \overline{H}_I \varepsilon^{-\alpha x'} \cos \alpha x' \, dx' \\ \Phi_2 &= 2 \int_0^\Delta \mu \overline{H}_I \varepsilon^{-\alpha x'} \sin \alpha x' \, dx' \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \tag{14}$$

$$\Phi = \sqrt{\Phi_1^2 + \Phi_2^2} \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha} \tag{16}$$

Führt man die Integrationen (13) aus und bildet mit (15) sowie (11) den Quotienten $\Phi / \mu \Delta \overline{H}_0$, so resultiert, wie zu erwarten war, die Gl. (5), und die Gl. (16) ergibt identisch die Beziehung (6).

4. Folgerungen

Die hier abgeleiteten Beziehungen über die Phasenlage des resultierenden Flusses gegenüber der erregenden magnetomotorischen Kraft erlauben nun die richtige Berechnung von magnetischen Kreisen mit Berücksichtigung der Flussverdrängung, besonders für höhere Frequenzen oder auch bei tieferen Frequenzen und dicken massiven Teilen. Wie man sieht, ist der Fluss nicht mehr in Phase mit der MMK, besonders wenn die mit erheblicher Flussverdrängung behafteten Eisenteile einen wesentlichen Anteil an den gesamten AW erfordern.

Die Ableitung aus dem Eindringen von elektromagnetischen Wellen nach dem Abschnitt (3) zeigt ferner eindrücklich, dass besonders bei geringeren Eindringtiefen (grosse Flussverdrängung) die ganzen Vorgänge sich an der Oberfläche abspielen und das Innere der massiven Teile belanglos wird. Die übliche Darstellung der Vorgänge in der Ausdrucksweise der Formel (5) ist daher eigentlich

nicht gerade glücklich zu nennen, da sie zu sehr mit der vorausgesetzten, im Querschnitt rechteckförmigen Platte zusammenhängt. Aus der Vorstellung der eindringenden Wellen folgt eine allgemeinere Verwendbarkeit der Erkenntnis über die an der Oberfläche stattfindende Abdämpfung der Induktion und die Darstellung durch Eindringtiefe ($\Phi/\bar{B}_0$) oder resultierenden Fluss Φ wäre dementsprechend sinnvoller als die Angabe einer mittleren Induktion $B_m = \Phi/\Delta$.

Die Bestimmung des Ladezustandes von Heisswasserspeichern.

Von *Alfred Degen*, Basel.

621.364.5 : 644.62

Es werden zwei Methoden zur Bestimmung des Ladezustandes von Heisswasserspeichern entwickelt. Die eine besteht im Einbau einer Reihe von Temperaturmeßstellen, die andere im Einbau eines Drahtes, dessen elektrischer Widerstand eine lineare Funktion des Wärmeinhaltes des Speichers ist. Die Anwendungsmöglichkeit und die Messgenauigkeit der beiden Methoden wird angegeben.

L'auteur développe deux méthodes pour déterminer l'état de charge des chauffe-eau électriques. L'une consiste à prévoir une série de points de mesure de la température, l'autre à monter un fil dont la résistance électrique est fonction linéaire de la capacité thermique du chauffe-eau. L'auteur décrit ensuite les possibilités d'application et l'exactitude de chacune de ces méthodes.

I. Einleitung.

Mit dem Aufkommen des Hochdruck-Heisswassersystemes bei grösseren Heizungsanlagen ist das Problem der Wärmespeicherung für diejenigen Betriebe besonders wichtig geworden, die dauernd oder zeitweise hydraulische Ueberschussenergie in Elektrokesseln an Stelle fester oder flüssiger Brennstoffe verwenden. Während schon bei den rein mit Kohle oder Oel beheizten Anlagen zur Einhaltung einer möglichst konstanten Kesselbelastung mit optimalem Kesselwirkungsgrad ein Speicher zum Ausgleich des wechselnden Bedarfes der angeschlossenen Verbraucher grosse Vorteile bietet, gilt dies in weit vermehrtem Masse für Anlagen mit Elektrokesseln, bei denen im allgemeinen die hydraulische Ueberschussenergie nicht im Momente des Anfallens, sondern erst in einem späteren Zeitpunkt verwendet werden kann. Diese Ueberschussenergie muss somit in Form von Wärme gespeichert werden, wenn man das zur Verfügung stehende Wasser eines Laufkraftwerkes nicht unausgenützt abfliessen lassen will. Für die Akkumulierung hydraulischer Energieüberschüsse in Form von Wärme benötigt man einen besonderen Heisswasserspeicher, der unter entsprechendem Drucke stehen muss, um keine Verdampfung des über 100° C heissen Wassers zu ermöglichen. Für den Betrieb einer Heizungsanlage ist es nun wichtig, jederzeit über den Ladezustand eines solchen Speichers orientiert zu sein. Im folgenden soll näher untersucht werden, wie dieser Ladezustand auf einfache Weise festgestellt werden kann.

II. Bestimmung des Ladezustandes durch Temperaturmessungen mittels Thermoelementen.

In Fig. 1 ist ein Heisswasserspeicher vom inneren Durchmesser D gezeichnet, dessen heisses, im oberen Teile des Speichers sich befindendes Wasser die Temperatur t_1 °C besitze, während das kalte Wasser im unteren Teile t_2 °C aufweise. Zwischen der heissen und der kalten Wasserzone befinde sich eine Trennschicht, in der die Wassertemperatur von oben nach unten von t_1° C auf t_2° C linear abnehme. Die Höhe der heissen Wasserschicht betrage h_1, diejenige der kalten h_2 und diejenige der Trennschicht h_3. Bis zur maximal erreichbaren Wasserhöhe h in dem zu 100 % aufgeladenen Speicher seien y Temperaturmeßstellen in Form von Thermoelementen vorhanden, die über

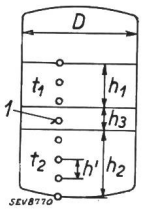

Fig. 1.
Prinzip der ersten Methode.
Bezeichnungen und Anordnung der Temperaturmeßstellen (*1*).

die ganze Speicherhöhe von unten nach oben gleichmässig verteilt sein sollen; ihr gegenseitiger Abstand betrage h'. Wenn im weiteren mit γ das spezifische Gewicht des Wassers bezeichnet wird, so ist der effektive Ladezustand x eines Speichers definiert durch

$$x = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h_1 \cdot \gamma_1 \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{\pi}{4} \cdot D^2 \cdot h \cdot \gamma_1 \cdot (t_1 - t_2)} = \frac{h_1}{h} \qquad (1)$$

Aus Fig. 1 ergibt sich ferner

$$h = (y - 1) \cdot h' \qquad (2)$$

Bei der weiteren Untersuchung ergeben sich nun 2 verschiedene Fälle:

A. Das Wasservolumen und damit auch die Wasserspiegelhöhe seien bei allen Ladezuständen konstant.

Wenn von den y Temperaturmeßstellen n ($n < y$) die Temperatur des heissen Wassers t_1° C anzeigen, so ist nach Gl. (1) der Ladezustand des Speichers gegeben durch

$$\frac{(n-1) \cdot h'}{h} \leqq x \leqq \frac{n \cdot h'}{h} \qquad (3)$$

Setzt man in Gl. (3) an Stelle von $\frac{h'}{h}$ den Wert aus Gl. (2) ein, so erhält man

$$\frac{n-1}{y-1} \leqq x \leqq \frac{n}{y-1} \qquad (4)$$