

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 31 (1940)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Das Verhalten von Raumladungen in hochfrequenten elektrischen Feldern  
**Autor:** Güttinger, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1057983>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

mente, an die man mit geladenen Teilchen noch nicht herankommt, umzuwandeln. Umwandlungen dieser Art führen bei schweren Kernen häufig zum Phänomen der *künstlichen Radioaktivität*: Der Kern fängt ein Neutron ein und geht dadurch in das nächsthöhere Isotop über. Dieses zerfällt nun

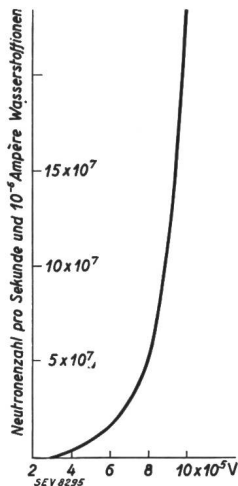


Fig. 9 (oben).  
Potential der Kernkraft für ein Neutron.

Fig. 8 (links).  
Neutronenausbeute in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung der Wasserstoff-Kerne.

nicht unter Emission eines anderen Kernteilchens, sondern wandelt sich durch einen radioaktiven Prozess weiter um. Als Beispiel sei die folgende Reaktion angeführt:



Das in (9) entstehende Silberisotop ist radioaktiv und zerfällt unter Elektronenemission. Da bei diesem radioaktiven Zerfallsprozess mit dem Elektron eine negative Elementarladung weggeht, muss, damit die Summe der in die Reaktion eingehenden Ladungen unverändert bleibt, die Kernladungszahl des zurückbleibenden Kerns um 1 ansteigen, das Silber wandelt sich also durch den Zerfall in Cadmium um.

Neben dem physikalischen Interesse, das die künstliche Radioaktivität wegen einiger mit ihr verbundenen, noch nicht vollständig geklärter Erscheinungen bietet, verspricht sie auch praktisch, vor allem in Medizin und Biologie, von Bedeutung zu werden. Die künstlich erzeugten radioaktiven Elemente sind nämlich dem in diesen Forschungszweigen bis anhin verwendeten Radium sowohl hinsichtlich des Preises, als auch der Anwendungsmöglichkeiten weit überlegen.

Vor kurzer Zeit ist auch die Umwandlung des schwersten Elementes, des Urans, mit Neutronen gelungen. Die genauere Untersuchung der sich hierbei abspielenden Vorgänge hat ergeben, dass ein regelrechtes Zerplatzen des Urankerns stattfindet unter Aussendung von Krypton- und Bariumkernen und von Neutronen. Die bei dieser Kernexplosion entstandenen Neutronen wirken in gleicher Weise wie die primär einfallenden, sie bringen also ihrerseits die von ihnen getroffenen Urankerne zur Explosion und machen dadurch weitere Neutronen frei. Man stösst somit hier zum erstenmal bei einem Kernprozess auf eine *Kettenreaktion*, die sich, wenn einmal eingeleitet, bei Anwesenheit von genügenden Mengen Uran selbständig erhalten könnte. Die bei diesem Prozess freiwerdenden Energiemengen berechnen sich zu etwa 25 000 kWh pro Gramm umgewandeltes Uran. Eine allerdings noch etwas unsichere Abschätzung der Uranmenge, die erforderlich wäre, damit diese Reaktion nach einmaliger Einleitung nicht mehr abreißt, sondern bis zur vollständigen Umwandlung des vorhandenen Urans weiterläuft, ergab eine Masse von ca. 5 Tonnen. Die Beschaffung dieses Quantum dürfte in nächster Zeit erfolgen, und man darf mit Spannung dem Ausgang dieses Experimentes, in dem zum erstenmal die Frage der Energiegewinnung durch Atomumwandlungen im grossen angeschnitten werden soll, entgegesehen. (Fortsetzung folgt.)

## Das Verhalten von Raumladungen in hochfrequenten elektrischen Feldern.

Von P. Güttinger, Basel.

537.525.92

*In dieser Arbeit wird eine Methode beschrieben, wie mathematisch Raumladungsvorgänge in einem hochfrequenten elektrischen Felde behandelt werden können. Die Methode wird hier angewendet auf das einfache Problem: Das Verhalten der Raumladung zwischen zwei ebenen Elektroden, an welche eine Wechselspannung gelegt wird, die einer Gleichspannung überlagert ist. Um die Rechnung nicht zu sehr zu komplizieren, wird nur das eindimensionale Problem mit der Austrittsgeschwindigkeit Null an der Kathode behandelt.*

*L'auteur décrit une méthode permettant d'abord mathématiquement les phénomènes de charge spaciale dans un champ à haute fréquence. Ici, cette méthode est appliquée au problème simple suivant: la charge spaciale entre deux électrodes planes aux bornes desquelles agit une tension alternative, avec une tension continue superposée. Pour ne pas trop compliquer le calcul, l'auteur ne traite que le problème à une dimension, en supposant une vitesse nulle à la sortie de la cathode.*

Schon seit einigen Jahren hat man in Elektronenröhren Erscheinungen beobachtet, welche eine Folge der Massenträgheit der Elektronen sind. Es sei z. B. hingewiesen auf die Erzeugung von Barkhausen-Kurz-Schwingungen, auf das Auftreten von Gitterströmen bei Mischröhren trotz negativer Gitterspannung, auf die Theorie der komplexen Steilheit bei sehr hohen Frequenzen<sup>1)</sup>. Verwandte Probleme sind behandelt in dem unter 1) erwähn-

ten Werk von Strutt. Solche «Laufzeiteffekte» treten allgemein auf, wenn die Laufzeit  $T$  der Elektro-

- 1) M. J. O. Strutt, Moderne Mehrgitterelektronenröhren, 1938, 2. Bd., S. 79.  
Ferner: M. J. O. Strutt, Elektr. Nachr. Techn. Bd. 15 (1938), S. 103.  
Ferner: K. Steimel, Telefunkenröhre Heft 5 (1935), S. 213.  
Ferner: W. Kleinstaub, Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik, Bd. 53 (1939), S. 199; daselbst weitere Literaturangaben.

nen im Verhältnis zur Schwingungszeit  $1/f$  der äusseren Kreise nicht mehr sehr klein ist.

Im Bereiche sehr rasch veränderlicher Potentialfelder (Kurz- und Ultrakurzwellen) treten in bezug auf die Raumladungsbewegungen interessante Erscheinungen auf, die man bei statischen und bei niederfrequenten Feldern gar nicht kennt. Wenn man in einer ebenen Diode zwischen Kathode und Anode eine konstante Spannung  $U$  anlegt, so ist die Grösse des Stromes gegeben durch das Gesetz von *Schottky*:

$$I = \frac{F}{9 \pi \Delta^2} \sqrt{\frac{2 e}{m}} U^{3/2} \quad (1)^2$$

Ueberlagert man der Gleichspannung eine niederfrequente Wechselspannung  $\varepsilon \sin \omega t$ , so erhält man:

$$i_{\sim} = \frac{3}{2} I \left[ \frac{\varepsilon}{U} \sin \omega t + \Sigma a_m \left( \frac{\varepsilon}{U} \right)^m \sin m \omega t \right] \quad (2)$$

Für den Fall, dass  $\varepsilon/U$  klein ist, kann man angenähert setzen:

$$i_{\sim} = \frac{3}{2} I \cdot \frac{\varepsilon}{U} \sin \omega t \quad (3)$$

Diese Approximation gilt bis zu relativ grossen Frequenzen (Lang- und Mittelwellen). Zwischen Strom und Spannung besteht im allgemeinen keine wesentliche Phasenverschiebung. Die Diode stellt demnach für eine kleine Wechselspannung einen reinen Ohmschen (reellen) Widerstand von der Grösse

$$R_i = \frac{2 U}{3 I}$$

dar. In allen diesen Fällen haben wir sog. adiabatische oder quasiadiabatische Aenderungen vor uns,

$$\left. \begin{aligned} e E_x &= m \cdot \frac{v_x(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt; t + dt) - v_x(x, y, z; t)}{dt} \\ e E_y &= m \cdot \frac{v_y(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt; t + dt) - v_y(x, y, z; t)}{dt} \\ e E_z &= m \cdot \frac{v_z(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt; t + dt) - v_z(x, y, z; t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

da die Raumladungen sich infolge der ausserordentlich geringen Massenträgheit der Elektronen sofort auf den neuen Spannungszustand einstellen können.

Ganz anders ist jedoch der Bewegungsmechanismus in einer Raumladung, wenn sie sehr raschen Potentialänderungen ausgesetzt ist.

<sup>2)</sup> *Bezeichnungweise:*

- a) *Innerer Stromkreis:*
- $\Delta$  Abstand Kathode-Anode.
- $I$  Innere Stromdichte, wobei  $I$  eine Funktion von  $x$  ( $0 \leq x \leq \Delta$ ).
- $I_k$  Stromdichte an der *inneren* Kathodenfläche.
- $I_a$  Stromdichte an der *inneren* Anodenfläche.
- $T$  Laufzeit der Elektronen von der Kathode zur Anode.
- b) *Aeusserer Stromkreis:*
- $\varepsilon \sin \omega t$  zwischen Kathode und Anoden angelegte Wechselspannung.
- $I_s$  Strom im äusseren Stromkreis.

In dieser Arbeit soll nun versucht werden, allgemeine Gleichungen abzuleiten, welche auch das Verhalten der Elektronenwolke in einem ultrahochfrequenten Wechselfelde zu beschreiben gestattet. Es muss zwar an dieser Stelle betont werden, dass auch die nachfolgende Theorie wieder insofern auch nur eine Näherung darstellt, als magnetische Effekte zunächst vernachlässigt werden sollen. Dies kann allerdings ohne Bedenken gewagt werden im Hinblick darauf, dass nur das eindimensionale Problem behandelt werden soll.

*Bezeichnungweise:* Unter Benützung der üblichen Bezeichnungweise soll  $\rho$  die Teilchen- (nicht Ladungs-) Dichte der Elektronen sein,  $v_x, v_y, v_z$  die Komponenten der Elektronengeschwindigkeit sowie  $E_x, E_y, E_z$  die Komponenten der elektrischen Feldstärke.

Die Grundlage unserer Theorie sollen die bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4)$$

und

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4 \pi e \rho \quad (5)$$

sein. Wenn wir weiter voraussetzen, dass die Annahme eines Elektronenkontinuums statt einzelner diskreter Teilchen für diese Untersuchung zugelassen werden kann, so haben wir in jedem Raumpunkt  $(x, y, z)$  eine «Strömungsgeschwindigkeit» mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} v_x(x, y, z; t) \\ v_y(x, y, z; t) \\ v_z(x, y, z; t) \end{aligned}$$

Zu den ersten Gleichungen (4) und (5) treten dann noch die Bewegungsgleichungen:

oder:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e}{m} E_x &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{e}{m} E_y &= v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{e}{m} E_z &= v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Diese Gleichungen (4) bis (7) bestimmen das Verhalten der Raumladung bei gegebenen Randbedingungen. Um die Formeln nicht allzu sehr zu komplizieren, soll im folgenden nur der eindimensionale Fall betrachtet werden. Man erhält dann:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad v \equiv v_x \quad (8)$$

$$\frac{e}{m} E = v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad E \equiv E_x \quad (9)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4 \pi e \rho \quad (10)$$

Durch einsetzen von  $\rho$  aus Gl. (10) in Gl. (8) findet man dann:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( v \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \right) = 0 \quad (11)$$

oder, integriert:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial E}{\partial x} = f(t) \quad (12)$$

Ersetzt man nun  $E$  durch den Wert aus Gl. (9), so erhält man schliesslich:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - v \cdot \frac{\partial^2 (v^2/2)}{\partial x^2} = f(t) \quad (13)$$

wobei jetzt nur noch eine einzige, von  $x$  und  $t$  abhängige Funktion  $v$  auftritt.

#### Ebene Diode.

Für diesen Fall seien folgende einfache Randbedingungen gewählt:

$$U = U_0 + \varepsilon \sin \omega t \quad (14)$$

$$v(0) = 0 \quad (15)$$

Ferner soll, damit die Gleichungen praktisch lösbar sind,  $\varepsilon/U_0$  als sehr kleine Grösse vorausgesetzt werden. Dann kann man nämlich näherungsweise den Ansatz

$$v = Ax^{2/3} + \varepsilon[\varphi(x) \sin \omega t + \psi(x) \cos \omega t] \quad (16)$$

machen. Setzt man diesen in Gl. (9) ein, so nimmt diese folgende Form an:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} E = v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = & \frac{2}{3} A^2 x^{1/3} \\ & + \frac{2}{3} Ax^{1/3} \cdot \varepsilon[\varphi \sin \omega t + \psi \cos \omega t] \\ & + Ax^{2/3} \cdot \varepsilon[\varphi' \sin \omega t + \psi' \cos \omega t] \\ & + \omega \cdot \varepsilon[\varphi \cos \omega t - \psi \sin \omega t] \end{aligned} \quad (15)$$

Die beiden partiellen Ableitungen von  $E$  nach  $t$  und  $x$  ergeben demnach:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} = & \frac{2}{9} A^2 x^{-2/3} \\ & - \frac{2}{9} Ax^{1/3} \cdot \varepsilon[\varphi \sin \omega t + \psi \cos \omega t] \\ & + \frac{4}{3} Ax^{1/3} \cdot \varepsilon[\varphi' \sin \omega t + \psi' \cos \omega t] \\ & + Ax^{2/3} \cdot \varepsilon[\varphi'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t] \\ & + \omega \cdot \varepsilon[\varphi' \cos \omega t - \psi' \sin \omega t] \end{aligned} \quad (18)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = & \frac{2}{3} Ax^{1/3} \omega \cdot \varepsilon[\varphi \cos \omega t - \psi \sin \omega t] \\ & + Ax^{2/3} \cdot \omega \cdot \varepsilon[\varphi' \cos \omega t - \psi' \sin \omega t] \\ & - \omega^2 \cdot \varepsilon[\varphi \sin \omega t + \psi \cos \omega t] \end{aligned} \quad (19)$$

Wenn man die so gewonnenen Ausdrücke in Gl. (12) einsetzt, so erhält man aus:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + v \cdot \frac{\partial E}{\partial x} = f(t)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \omega Ax^{1/3} \cdot \varepsilon[\varphi \cos \omega t - \psi \sin \omega t] \\ & + 2 \omega Ax^{2/3} \cdot \varepsilon[\varphi' \cos \omega t - \psi' \sin \omega t] \\ & - \omega^2 \cdot \varepsilon[\varphi \sin \omega t + \psi \cos \omega t] \\ & + \frac{4}{3} A^2 x^{1/3} \cdot \varepsilon[\varphi' \sin \omega t + \psi' \cos \omega t] \\ & + A^2 x^{4/3} \cdot \varepsilon[\varphi'' \sin \omega t + \psi'' \cos \omega t] \\ & = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t \end{aligned} \quad (20)$$

Dabei sind  $K_1$  und  $K_2$  zunächst beliebige Konstanten. Da nun in Gl. (20) rechte und linke Seite identisch sein müssen, ergeben sich für die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  die folgenden zwei Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{3} \omega A x^{-1/3} \varphi + 2 \omega A x^{2/3} \varphi' \right] \\ & - \left[ \omega^2 \psi - \frac{4}{3} A^2 x^{1/3} \psi' - A^2 x^{4/3} \psi'' \right] = K_1 \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{2}{3} \omega A x^{-1/3} \psi + 2 \omega A x^{2/3} \psi' \right] \\ & + \left[ \omega^2 \varphi - \frac{4}{3} A^2 x^{1/3} \varphi' - A^2 x^{4/3} \varphi'' \right] = K_2 \quad (22) \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen lautet:

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha_1 + \frac{\beta_1}{x^{1/3}} + \gamma_1 e^{i\eta x^{1/3}} + \delta_1 \frac{e^{i\eta x^{1/3}}}{x^{1/3}} \\ & + \varrho_1 e^{-i\eta x^{1/3}} + \sigma_1 \cdot \frac{e^{-i\eta x^{1/3}}}{x^{1/3}} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \alpha_2 + \frac{\beta_2}{x^{1/3}} + \gamma_2 e^{i\eta x^{1/3}} + \delta_2 \frac{e^{i\eta x^{1/3}}}{x^{1/3}} \\ & + \varrho_2 e^{-i\eta x^{1/3}} + \sigma_2 \cdot \frac{e^{-i\eta x^{1/3}}}{x^{1/3}} \end{aligned} \quad (24)$$

wo  $\eta = \omega/A$  ist. Durch Einsetzen des Lösungsansatzes (23), (24) in Gl. (21), (22) erhält man dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} K_2 = + \omega^2 \alpha_1 & \quad K_1 = - \omega^2 \alpha_2 \\ \alpha_2 = - \frac{\eta}{2} \beta_1 & \quad \alpha_1 = + \frac{\eta}{2} \beta_2 \\ \gamma_2 = + i \gamma_1 & \quad \varrho_2 = - i \varrho_1 \\ \delta_2 = + i \delta_1 & \quad \sigma_2 = - i \sigma_1 \end{aligned}$$

Wenn man ferner  $v(0) \equiv 0$  annimmt, gilt:

$$\sigma_1 = - \frac{2i}{\eta} \varrho_1 \quad \delta_1 = \frac{2i}{\eta} \gamma_1$$

und

$$\alpha_1 = (\gamma_1 + \varrho_1) \quad \beta_1 = - \frac{2i}{\eta} (\gamma_1 - \varrho_1)$$

Damit bleiben noch zwei Konstanten (z. B.  $\gamma_1$  und

$\varrho_1$ ) frei zu weiterer Verfügung. Die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  lauten jetzt:

$$\varphi(x) = (\gamma_1 + \varrho_1 e^{-i\eta x^{1/3}}) \left(1 + e^{+i\eta x^{1/3}} - \frac{2i}{\eta} x^{-1/3} + \frac{2i}{\eta} x^{-1/3} e^{+i\eta x^{1/3}}\right) \quad (25)$$

$$\psi(x) = i(\gamma_1 - \varrho_1 e^{-i\eta x^{1/3}}) \left(1 + e^{+i\eta x^{1/3}} - \frac{2i}{\eta} x^{-1/3} + \frac{2i}{\eta} x^{-1/3} e^{+i\eta x^{1/3}}\right) \quad (26)$$

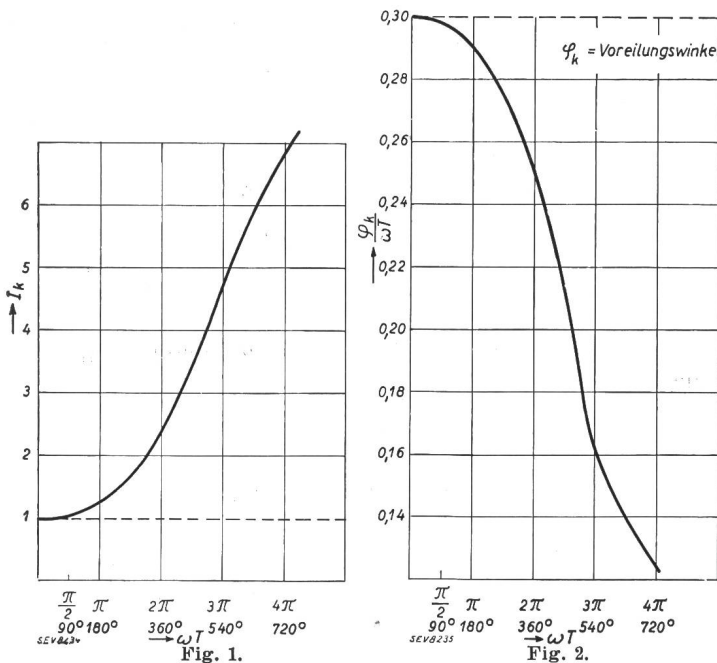
Es bleibt also noch die Festlegung der Grössen  $\gamma_1$  und  $\varrho_1$ . Diese lassen sich aus der Randbedingung:

$$P_A - P_0 = U_0 + \varepsilon \sin \omega t = \int_0^A E dx \quad (27)$$

bestimmen, wobei unter  $\Delta$  der Abstand Kathode-Anode zu verstehen ist. Durch Integration von (17) findet man:

$$\begin{aligned} \frac{e}{m} [E_0 + \varepsilon \sin \omega t] &= \frac{1}{2} A^2 \Delta^{1/3} \\ &+ A \Delta^{2/3} \cdot \varepsilon [\varphi(\Delta) \sin \omega t + \psi(\Delta) \cos \omega t] \\ &+ \omega \cdot \varepsilon \int_0^A [\varphi \cos \omega t - \psi \sin \omega t] dx \quad (28) \end{aligned}$$

Wenn man nun  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  durch die gefundenen Lösungen (25), (26) ersetzt, ergeben sich für  $A$ ,  $\gamma_1$  und  $\varrho_1$  folgende Ausdrücke:



$$A = \left( \frac{e}{m} \cdot \frac{2 U_0}{\Delta^{4/3}} \right)^{1/2} \quad (29)$$

$$\gamma_1 = \frac{\frac{e}{m} \cdot \frac{27 \cdot \omega^2}{2 A^3}}{z^3 + 12(e^z - 1) - 6z(e^z + 1)} \quad (30)$$

$$\varrho_1 = \frac{-\frac{e}{m} \cdot \frac{27 \omega^2}{2 A^3}}{z^3 - 12(e^{-z} - 1) - 6z(e^{-z} + 1)} \quad (31)$$

mit  $z = \frac{3i\omega}{A} \Delta^{1/3}$  oder  $z = i\omega T$ , wo  $T$  die Laufzeit der Elektronen von der Kathode zur Anode ist. Damit sind die Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  absolut bestimmt.

Bei der Diskussion dieser Resultate interessiert vor allem die Grösse des Stromes, seine Phase und seine Abhängigkeit von der Frequenz. Die Elektronenstromdichte  $I$  ist gegeben durch den Ausdruck:

$$I = \frac{1}{4\pi} \cdot v \cdot \frac{\partial E}{\partial x} \quad (32)$$

Wenn man  $v \cdot \frac{\partial E}{\partial x}$  wieder bis zur ersten Potenz von  $\varepsilon$  entwickelt, erhält man:

$$\begin{aligned} 4\pi I \cdot \frac{e}{m} &= \\ \frac{2}{9} A^3 + \varepsilon A \sin \omega t &\left[ \frac{4}{3} A x^{1/3} \varphi' + A x^{1/3} \varphi'' - \omega x^{2/3} \psi' \right] \\ + \varepsilon A \cos \omega t &\left[ \frac{4}{3} A x^{1/3} \psi' + A x^{1/3} \psi'' + \omega x^{2/3} \varphi' \right] \\ &= \frac{2}{9} A^3 + \frac{2i}{9} A^2 x^{-2/3} \cdot \varepsilon [\gamma_1 e^{-i\omega t} (1 - e^{i\eta x^{1/3}} \\ &+ i\eta x^{1/3} e^{i\eta x^{1/3}}) - \varrho_1 e^{i\omega t} (1 - e^{-i\eta x^{1/3}} \\ &- i\eta x^{1/3} e^{-i\eta x^{1/3}})] \quad (33) \end{aligned}$$

Zunächst soll nun der aus der Kathode austretende Strom  $I_k$  ( $x = 0$ ) näher betrachtet werden. Entwickelt man Gl. (33) nach Potenzen von  $x^{1/3}$  und schreitet zum Grenzübergang  $x = 0$ , so ergibt sich für die zeitabhängige Stromdichte  $I_k$ :

$$4\pi I_k \cdot \frac{e}{m} = -i\omega^2 \varepsilon \cdot [\gamma_1 e^{-i\omega t} - \varrho_1 e^{+i\omega t}] \quad (34)$$

Die Abhängigkeit von Amplitude und Phase als Funktion der Frequenz, resp. von der Grösse  $\omega T$  ist in Fig. 1 und Fig. 2 graphisch dargestellt.

Speziell soll noch untersucht werden der Grenzwert für  $\omega T \rightarrow 0$ . In diesem Falle gilt angenähert:

$$I_k = -\frac{\varepsilon A}{6\pi \Delta^{1/3}} \sin \left( \omega t + \frac{3}{10} \omega T \right) \quad (35)$$

Man sieht daraus, dass der aus der Kathode austretende Strom  $I_k$  der angelegten Spannung  $\varepsilon \sin \omega t$  bei kleinem  $\omega T$  um  $\varphi_k = 0,3 \cdot \omega T$  voreilt.

Wenn man bei mittleren und niederen Frequenzen das Glied  $0,3\omega T$  vernachlässigt, kann man für  $I_k$  auch schreiben:

$$I_k \approx \frac{3}{2} I_- \frac{\varepsilon \sin \omega t}{U_0} \quad (36)$$

wenn  $I_-$  die durch  $U_0$  hervorgerufene Gleichstromdichte bedeutet. Wir können in diesem Falle

von einer adiabatischen Zustandsänderung sprechen. Wenn man nämlich Gl. (1) nach Potenzen von  $\varepsilon$  entwickelt, so erhält man:

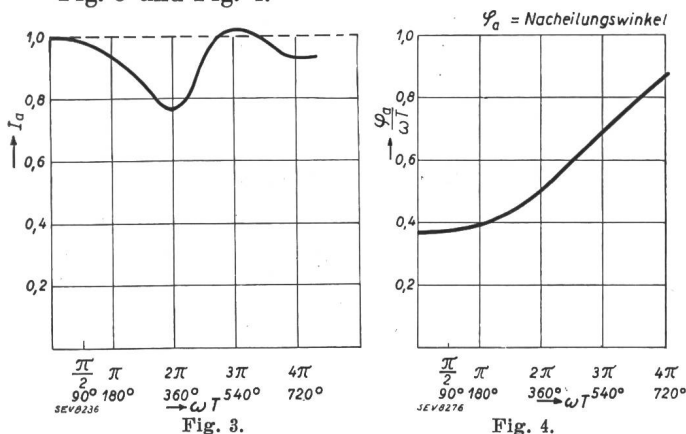
$$I = I_- \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{U_0} \sin \omega t + \dots \right]^{3/2} \quad (37)$$

$$I \approx I_- \left[ 1 + \frac{3\varepsilon}{2U_0} \sin \omega t \right]$$

Wie verhält sich nun der aus der Raumladung in die Anode eintretende Elektronenstrom  $I_a$ ? Hier muss man in Gl. (33)  $x = \Delta$  setzen und erhält dann: ( $z = i\omega T$ )

$$I_a \approx (\omega T)^2 \left[ \frac{e^{i\omega t}(1 - e^{-z} - z e^{-z})}{z^3 - 12(e^{-z} - 1) - 6z(e^{-z} + 1)} + \frac{e^{-i\omega t}(1 - e^z + z e^z)}{z^3 + 12(e^z - 1) - 6z(e^z + 1)} \right] \quad (38)$$

Die numerische Auswertung dieser Formel ergibt einen Verlauf für Phase und Amplitude von  $I_a$  nach Fig. 3 und Fig. 4.



Es soll auch hier noch kurz der Grenzfall für kleine  $\omega T$  diskutiert werden. Die Rechnung ergibt:

$$I_a = - \frac{\varepsilon A}{6\pi \Delta^{3/2}} \sin \left( \omega t - \frac{11}{30} \omega T \right) \quad (39)$$

Der in die Anode eintretende Elektronenstrom weist also gegenüber der angelegten Wechselspannung  $\varepsilon \sin \omega t$  eine Nacheilung von  $\varphi_a = -\frac{11}{30} \omega T$  auf. Zu demselben Resultat gelangten auch Strutt und van der Ziel<sup>3)</sup>, welche statt den hier gefundenen Faktor 0,36667 in unwesentlicher Abweichung den Wert 0,36 angeben.

Von Interesse ist auch noch die Frage, wie gross die Nacheilung von  $I_a$  gegenüber  $I_k$  ist. Diese Phasendifferenz ist gegeben durch  $\varphi_a - \varphi_k$ . Für den Bereich  $\omega T < \pi/2$  lässt sich diese Grösse bestimmen zu:

$$\varphi_a - \varphi_k = -\frac{2}{3} \omega T \quad (40)$$

**Äusserer Stromkreis.** Es soll nun noch untersucht werden, wie sich der Strom im äusseren Kreise in bezug auf Grösse und Phase verhält. Er-

<sup>3)</sup> M. J. O. Strutt und A. van der Ziel, Philips techn. rev. vol. 3, Nr. 4, S. 104 folg. (IV 1938).

stens fällt auf, dass  $I_k$  nicht gleich  $I_a$  ist, sowohl was Amplitude, als auch was Phase anbelangt. Da jedoch der aus der Kathode austretende Strom gleich dem in die Anode eintretenden sein muss, ist anzunehmen, dass der Ausgleich durch periodisch veränderliche Ladungen in den Elektroden stattfindet. Dies bestätigt auch die folgende theoretische Ueberlegung. Wenn man nämlich mit  $Q_a$  die Ladung auf der Anode und mit  $Q_k$  die Ladung auf der Kathode bezeichnet, ferner  $I_e$  der Strom im äusseren Kreis ist, so gelten die Beziehungen:

$$I_e = \frac{dQ_a}{dt} - F \cdot I_a \quad (41)$$

$$I_e = - \frac{dQ_k}{dt} - F \cdot I_k \quad (42)$$

wo  $F$  die Elektrodenfläche ist. Ferner ist nach dem Gaußschen Satz:

$$4\pi Q_a = -F \cdot E_a \quad (43)$$

$$4\pi Q_k = +F \cdot E_k \quad (44)$$

Diese Beziehungen in Gl. (41) und (42) eingesetzt, ergeben:

$$4\pi I_e = -F \cdot \frac{dE_a}{dt} - 4\pi F \cdot I_a \quad (45)$$

$$4\pi I_e = -F \cdot \frac{dE_k}{dt} - 4\pi F \cdot I_k \quad (46)$$

Da aber nach Gl. (12):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + 4\pi I = f(t)$$

ist, erhält man sowohl aus (45) wie auch aus (46) das einfache Resultat:

$$4\pi I_e = -F \cdot f(t) \quad (47)$$

Wenn man in  $f(t) = K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t$  die Grössen  $K_1$  und  $K_2$  durch  $\gamma_1$  und  $\varrho_1$  ersetzt, erhält man:

$$4\pi I_e \cdot \frac{e}{m} = F \cdot i \omega^2 \varepsilon \cdot [\gamma e^{+i\omega t} - \varrho_1 \cdot e^{-i\omega t}] \quad (48)$$

oder wenn man Gl. (34) berücksichtigt:

$$I_e = -F \cdot I_k \quad (49)$$

Hieraus ergibt sich, dass die Ladung in der Kathode zeitlich konstant ist (natürlich unter der Bedingung  $v_0 \equiv 0$ ). Das Pendeln der Ladung zwischen Elektronenwolke und äusserem Stromkreis (inkl. Elektroden) spielt sich also lediglich zwischen Anode und Diodenraum ab. Der Strom  $I_e$  lässt sich übrigens in zwei Komponenten zerlegen. Die eine gibt den Anteil der reinen statischen Kapazität in ungeheiztem Zustande («kalte» Komponente), die zweite den Anteil der Raumladung («warme» Komponente) an. Man kann also  $I_e = F \cdot I_k$  (abgesehen vom Vorzeichen) darstellen als:

$$I_e = K + W = \omega \cdot C_{ka} \cdot \varepsilon \cos \omega t + W \quad (50)$$

wo  $C_{ka} = \frac{F}{4\pi \Delta}$  ist.

Interessant ist ferner die Tatsache, dass im Grenzfall  $\omega T \rightarrow \infty$  der «warme» Anteil  $W$  dem Wert Null zustrebt. Aus Gl. (34) resultiert nämlich, dass dann

$$4 \pi I = F \cdot \frac{\varepsilon \cdot \omega \cdot \cos \omega t}{\Delta} + \frac{1}{\omega} R_1 + \frac{1}{\omega^2} R_2 + \dots \quad (51)$$

$W$  nimmt also mit zunehmendem  $\omega T$  ab.

Die hier abgeleiteten theoretischen Ergebnisse beruhen auf sehr einfachen Annahmen: Ebene Diode, Anfangsgeschwindigkeit der aus der Kathode austretenden Elektronen gleich null. Zweifellos dürfen aber z. B. auch für Trioden und Mehrgitterröhren gewisse qualitative Schlüsse aus unsern Formeln gezogen werden. Es ist zu bedenken, dass der bei Empfangsröhren normaler Dimensionierung praktisch wichtige Arbeitsbereich zwischen  $\omega T = 0$  und  $= \pi/2$  liegt. Unser Resultat bestätigt also die experimentell bei Trioden festgestellte Tatsache, dass erstens *der absolute Betrag der Steilheit bis zu sehr kurzen Wellen praktisch konstant ist*, und zweitens, dass *der Phasenwinkel der Steilheit bis in den Ultrakurzwellenbereich hinein im wesentlichen der Frequenz direkt proportional ist*.

Abweichungen davon dürften im allgemeinen nach unsern theoretischen Ergebnissen erst im Ge-

bierte von Dezimeter- und Zentimeterwellen auftreten.

**Generatorische Wirkungen.** Da wir bewiesen haben, dass  $I_e = -F \cdot I_k$  ist, kann es von besonderem Interesse sein, den Voreilungswinkel  $\varphi_k$  (vgl. auch Fig. 2) etwas näher zu betrachten. Verfolgt man numerisch den Verlauf dieser Grösse auf einer Riemannschen Fläche, so zeigt sich, dass  $\varphi_k$  zunächst mit  $\omega T$  monoton zunehmend den Wert  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ) erreicht, und zwar bei  $\omega T = 2\pi$ , dann den Wert  $\pi/2$  etwas überschreitet und wieder auf den Wert  $\pi/2$  zurückgeht. Im weiteren Verlaufe pendelt  $\varphi_k$  periodisch um den Wert von  $90^\circ$ . Interessant ist nun, dass der Phasenwinkel  $\varphi_k$  auch Werte durchläuft, welche über  $90^\circ$  liegen, in welchem Gebiete der Leistungsfaktor  $\cos \varphi_k$  negative Werte annimmt. In diesem Bereiche sind also generatorische Wirkungen zu erwarten, und zwar erstmals, wenn  $\omega T$  etwas grösser als  $2\pi$  wird, d. h. im Gebiete sehr kurzer Wellen. Diese Tatsache ist um so interessanter, als sie auch praktisch von grosser Bedeutung ist.

Zum Schluss möchte ich Herrn Prof. Tank für die Durchsicht meiner Arbeit und für wertvolle Hinweise auch an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen.

## Ueber die Wirkungsweise des Drehstrom-Drehstrom-Mutators.

Von E. Fässler, Zürich.

621.314.27

*Es wird gezeigt, wie die elastische Kupplung zweier Netze durch einen Drehstrom-Drehstrom-Mutator gedeutet werden kann als die Kupplung dieser Netze durch einen Wechselstrom-Gleichstrom- und einen Gleichstrom-Wechselstrom-Mutator. Damit lässt sich an Hand des Belastungsdiagramms ein guter Einblick in seine Wirkungsweise gewinnen.*

*L'auteur démontre que le couplage élastique de deux réseaux par un mutateur triphasé-triphasé peut être considéré comme un couplage par un mutateur alternatif-continu et par un mutateur continu-alternatif. Ceci permet de se faire une bonne idée du fonctionnement à l'aide du diagramme de charge.*

### 1. Einleitung.

Der Drehstrom-Drehstrom-Mutator dient zur elastischen Kupplung zweier Drehstromnetze ungleicher oder gleicher Frequenz und gestattet, innerhalb seiner Belastungsgrenzen Wirkleistung von einem Netz in das andere zu übertragen. Ueber den Aufbau dieses statischen Umformers und seine erste Anwendung zur Kupplung des Netzes der Jungfrau-bahn mit dem Netz der Bernischen Kraftwerke wurde schon früher berichtet<sup>1)</sup>.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst auf eine Schaltung zur Kupplung zweier Einphasennetze (B-Schaltung) eingegangen, da, wie im darauffolgenden Abschnitt gezeigt wird, mit dieser Schaltung bereits ein Einblick in das Spannungsgleichgewicht des Drehstrom-Drehstrom-Mutators gewonnen wird. Im Anschluss daran wird auf die Beanspruchung der Saugdrosselspule und der Glättungs-drosselspule eingegangen. Im letzten Kapitel wird das Belastungsdiagramm des Drehstrom-Dreh-

strom-Mutators angegeben, welchem entnommen werden kann, in welcher Weise die übertragene Leistung einzustellen und die Spannungsschwankungen der gekuppelten Netze auszuregulieren sind.

### 2. Kupplung zweier Einphasennetze.

Wir gehen aus von der in Fig. 1 dargestellten Schaltung zur Kupplung zweier Einphasennetze verschiedener Frequenz (B-Schaltung) und wollen

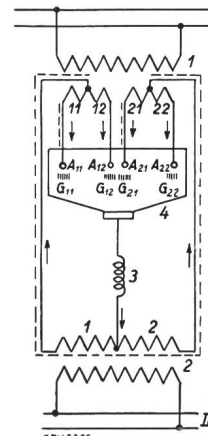


Fig. 1.

Elastische Kupplung zweier Einphasennetze durch einen Mutator (B-Schaltung).

- I, II Einphasennetze.
- 1, 2 Transformatoren.
- 3 Drosselspule
- 4 Mutator.

zunächst einen Einblick in dieselbe gewinnen. Der Transformator mit der Doppelwicklung auf der dem Mutator 4 zugewendeten Seite sei als Trans-

<sup>1)</sup> E. Kern, Die elastische Kupplung unabhängiger Drehstromnetze mit Hilfe eines einzigen Mutators. Brown-Boveri-Mitt. Bd. 21 (1934), S. 214.

E. Kern, Die Drehstrom-Drehstrom-Mutatoranlage Lüt-schental der Jungfrau-bahn. Bull. SEV Bd. 30 (1939), S. 225.

C. Ehrensperger, E. Gerecke, H. Loosli und C. Sturzenegger, Mutatoren, Bull. SEV 1939, Nr. 18, S. 548.

F. Grieb, Netzkupplung, Bull. SEV 1939, Nr. 18, S. 553.