

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 28 (1937)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Beitrag zur Berechnung der dynamischen Stabilität von Synchronmaschinen  
**Autor:** Wanger, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1058713>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

# BULLETIN

RÉDACTION:  
Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens  
et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité, Zurich 8

EDITEUR ET ADMINISTRATION:  
S. A. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zurich 4  
Stauffacherquai 36/40

Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

XXVIII<sup>e</sup> Année

N<sup>o</sup> 3

Vendredi, 5 Février 1937

## Beitrag zur Berechnung der dynamischen Stabilität von Synchronmaschinen.

Von W. Wanger, Baden.

621.3.016.35 : 621.313.32

Ueber das synchrone, synchronisierende, asynchrone und dämpfende Drehmoment während Pendelungen und andern mechanischen Ausgleichsvorgängen von Synchronmaschinen herrschen noch vielfach sehr unklare Vorstellungen. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, diese Begriffe klarzulegen, indem die verschiedenen Drehmomente (bzw. die zugehörigen Wirkleistungen) berechnet werden. Die mechanischen Ausgleichsvorgänge werden für den Fall untersucht, wo eine Synchronmaschine konstant erregt und belastet und an ein Netz mit konstanter Spannung angeschlossen ist. Dabei wird der Statorwiderstand und die Sättigung vernachlässigt und in der Haupt- und Queraxe des Rotors nur je eine Wicklung angenommen. Die Differentialgleichungen werden für den allgemeinen Fall möglichst weitgehend gelöst und die Berechnungen für harmonische Schwingungen kleiner Amplitude ausführlich durchgeführt. Schliesslich wird noch die Berechnung mit Hilfe der «Pendelungsreaktanzen» unter der Annahme einer konstanten innern Spannung der Synchronmaschine durchgeführt und mit der genauen Berechnung verglichen.

L'idée qu'on se fait du couple synchrone, du couple synchronisant, du couple asynchrone et du couple amortisseur relatifs aux oscillations pendulaires et aux autres phénomènes mécaniques transitoires des machines synchrones est souvent encore très confuse. L'auteur cherche à définir clairement ces notions et, pour ce faire, calcule la valeur de ces différents couples ou, ce qui revient au même, la valeur des puissances actives qui leur correspondent. Il étudie ensuite les phénomènes mécaniques transitoires dans le cas d'un alternateur synchrone à excitation et débit constants branché sur un réseau à tension invariable. Il néglige à cet effet la résistance ohmique de l'enroulement du stator ainsi que la saturation et n'admet qu'un seul enroulement dans chacun des axes direct et transversal du rotor. L'intégration des équations différentielles pour le cas général est poussée aussi à fond que possible et la solution relative aux oscillations harmoniques de faible amplitude est donnée en détail. L'auteur procède ensuite à un second calcul en partant de la notion des «réactances pendulaires» basée sur l'existence dans les machines synchrones d'une certaine tension interne invariable, et compare les résultats obtenus avec ceux du calcul exact.

### 1. Einleitung.

Parallel geschaltete Synchronmaschinen, gleichgültig, ob Motoren oder Generatoren, sind im stationären Betrieb an eine bestimmte gegenseitige Lage der Polräder gebunden. Ebenso stellt sich bei einer Synchronmaschine, die an ein starkes Netz angeschlossen ist, ein ganz bestimmter Winkel zwischen dem Polrad und dem Vektor der Klemmen-

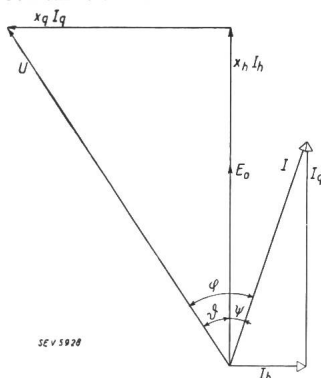


Fig. 1.

Vektordiagramm für einen Synchronmotor im stationären Lauf, unter Vernachlässigung des Statorwiderstandes.

spannung ein. Wird durch irgendeine äussere Ursache der Winkel verändert (jedoch nicht zu viel verändert!), so ändert sich sofort das Drehmoment der Synchronmaschine derart, dass der Rotor wie durch Federkraft wieder gegen die ursprüngliche Lage zurückgezogen wird.

Das Drehmoment oder die Wirkleistung, die bei einem bestimmten Winkel entwickelt werden, können leicht aus dem Vektordiagramm (Fig. 1) abgeleitet werden. Bei Vernachlässigung des Wirkwiderstandes der Statorwicklung gegenüber den Reaktanzen lautet die Gleichung für die Wirkleistung<sup>1)</sup>:

$$P_{st} = \frac{UE_0}{x_h} \cdot \sin \vartheta + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \cdot \sin(2\vartheta) \quad (1)$$

Darin bedeuten:

- $P_{st}$  die stationäre Wirkleistung,
- $U$  die Klemmenspannung,
- $E_0$  die Leerlaufspannung,
- $x_h$  die synchrone Reaktanz für die Hauptaxe,
- $x_q$  die synchrone Reaktanz für die Queraxe,
- $\vartheta$  den Polradwinkel = Winkel zwischen  $U$  und  $E_0$ .

Bei Generatorbetrieb eilt die Leerlaufspannung der Klemmenspannung vor, bei Motorbetrieb eilt sie ihr nach; die Formel für  $P_{st}$  lautet aber für beide Fälle gleich.

Maschinen mit Volltrommelrotoren, sog. Turbomaschinen, haben in Haupt- und Queraxe die gleiche synchrone Reaktanz, so dass das letzte Glied

<sup>1)</sup> S. z. B. Gl. (20a) bei Ollendorff und Peters: Schwingungsstabilität parallel arbeitender Synchronmaschinen. Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern V. Bd., 1. H., S. 11.

in Gl. (1) verschwindet und sich die Formel vereinfacht zu

$$P_{st} = \frac{UE_0}{x_h} \sin \vartheta \quad (1a)$$

In Fig. 2 ist die stationäre Wirkleistung für zwei verschiedene Maschinen in Funktion des Polradwinkels aufgetragen. In beiden Fällen [Gl. (1) und (1a)] ist beim Polradwinkel null auch die Wirkleistung null. Sie wächst mit zunehmendem Polradwinkel (alle andern Größen als konstant vorausgesetzt) bis zu einem Maximum und nimmt dann wieder ab. Dieses Maximum ist die sog. statische Grenzleistung. Die erwähnte Federwirkung reicht nur bis zu diesem Grenzwert. Wird die Maschine stärker belastet, als der Grenzleistung entspricht, so fällt sie aussertritt.

Bei plötzlichen Belastungsänderungen kann sich der Polradwinkel infolge der Massenträgheit des Rotors nicht plötzlich von einem Wert auf einen andern verändern. Wenn in Fig. 3 der stationäre Polradwinkel vor der Belastungsänderung  $\vartheta_0$ , nach dieser  $\vartheta_1$  ist, so ist für die Verdrehung des Polrades von  $\vartheta_0$  bis  $\vartheta_1$  eine gewisse Zeit nötig. Wegen der Massenträgheit schießt dann das Polrad über die neue Gleichgewichtslage hinaus bis zu einem Punkt, der in der Figur mit  $P_u$  bezeichnet ist. Nach der einfachsten Theorie bestimmt man diesen Umkehrpunkt, indem man die für stationäre Zustände gültige Drehmomentkurve der Synchronmaschine in

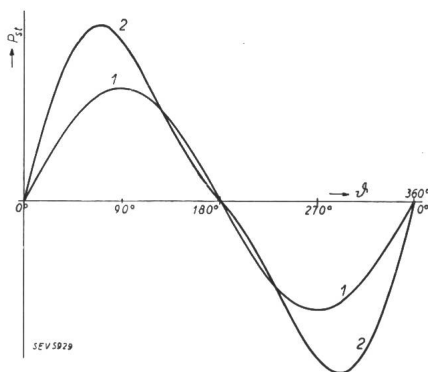


Fig. 2.

Wirkleistung eines Synchronmotors in Funktion des Polradwinkels bei stationärem Lauf, unter Vernachlässigung des Statorwiderstandes.

- 1 Volltrommelrotor.
- 2 Ausgeprägte Pole.

Funktion des Polradwinkels aufzeichnet und die obere horizontal schraffierte Fläche in Fig. 3 gleich der untern, vertikal schraffierten Fläche macht, welche nämlich die Bremsarbeit darstellt, die am Rotor zwischen dem Winkel  $\vartheta_0$  und  $\vartheta_1$  geleistet wird; die obere Fläche stellt die Beschleunigungsarbeit dar, die nach dem Energiesatz gleich der Bremsarbeit sein muss, da ja der Rotor im Umkehrpunkt wieder die synchrone Winkelgeschwindigkeit erreicht<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup> Eine ausführlichere Darstellung dieser Vorgänge findet man in einem Aufsatz, der in den Brown-Boveri-Mitt. voraussichtlich im April d. J. erscheinen wird.

Auf diese Art können auch die Rotorschwingungen beim Abschalten von parallelen Leitungen oder bei Kurzschlüssen untersucht werden. Insbesondere lässt sich so feststellen, ob der Rotor aussertritt fällt oder nicht. Diese Methode setzt aber voraus, dass während den Rotorschwingungen das Drehmoment der Synchronmaschine in Funktion des Polradwinkels gleich sei wie bei stationären Zuständen. Obschon man eigentlich schon lange weiss, dass dies nicht zutrifft, ist die beschriebene Methode auch heute noch sehr verbreitet.

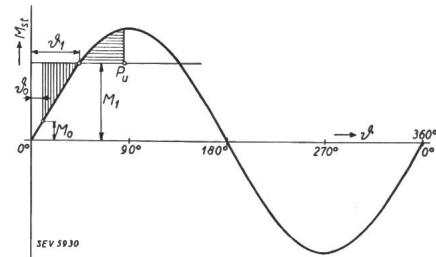


Fig. 3.

Bestimmung der Ueberschwingung des Polrades eines Synchronmotors, dessen Belastungsmoment plötzlich von  $M_0$  auf  $M_1$  gesteigert wird.

Häufig begegnet man dabei der Auffassung, man könne den Unterschied zwischen stationären Zuständen und Ausgleichsvorgängen dadurch berücksichtigen, dass man neben dem stationären Drehmoment noch ein sog. «asynchrones Moment» einführt. Zur Unterscheidung nennt man das stationäre Drehmoment auch «synchrones Moment». Man stellt sich also vor, dass einerseits während des Ausgleichsvorganges zu jedem Wert des Polradwinkels ein bestimmtes Drehmoment wie beim stationären Lauf gehört (synchrones Moment) und dass andererseits infolge vorübergehender Abweichung von der synchronen Winkelgeschwindigkeit auf ähnliche Art wie in einer Asynchronmaschine ein weiteres Drehmoment erzeugt wird (asynchrones Moment). In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, dass diese Auffassung im allgemeinen Fall nicht richtig ist.

Andere Autoren wollen den Unterschied des Drehmomentes bei stationären und Ausgleichsvorgängen dadurch berücksichtigen, dass sie an Stelle der synchronen Reaktanz  $x_h$  in Gl. (1a) die Kurzschlussreaktanz  $x'_h$  einsetzen. Tatsächlich verhält sich ja eine Synchronmaschine bei plötzlichen Stromänderungen (z. B. bei Kurzschlüssen) so, als ob ihre Reaktanz  $x'_h$  wäre und nicht  $x_h$ . Bei Pendelungen benötigt aber die Verdrehung von einer Rotorlage in eine andere immerhin so viel Zeit, dass für die Ausbildung des Stromes und des Drehmomentes nicht die gleichen Gesetze gelten wie bei plötzlichen Stromänderungen. Aber selbst bei ausserordentlich raschen Verdrehungen kann nicht einfach in Gl. (1a)  $x_h$  durch  $x'_h$  ersetzt werden. Die Abhängigkeit vom Polradwinkel lässt sich nämlich auch bei Turbomaschinen nicht mehr durch eine einfache Sinusfunktion darstellen, sondern ist wesentlich komplizierter. Diese Zusammenhänge werden in der vorliegenden Arbeit ebenfalls geklärt.

Dabei wird auch die Frage untersucht, ob bei Einführung einer korrigierten Reaktanz in Gl. (1) und (1a) das asynchrone Moment trotzdem noch zu berücksichtigen ist oder nicht.

**2. Differentialgleichungen des Statorstromes bei mechanischen Ausgleichsvorgängen.**

Die einzig sichere Methode zur Berechnung der während Ausgleichsvorgängen auftretenden Drehmomente besteht darin, dass man die Differentialgleichungen für die Ströme in den Stator- und Rotorwicklungen aufstellt und löst. Mit Hilfe dieser Ströme lässt sich dann das totale Drehmoment (bei Generatoren Belastungsdrehmoment, bei Motoren Antriebsdrehmoment) berechnen. Auf eine Unterteilung des Drehmomentes in ein synchrones und asynchrones Drehmoment wird also bei der Berechnung bewusst verzichtet. Erst am Schluss soll untersucht werden, ob eine solche Aufteilung überhaupt möglich und zweckmässig ist.

Bei der folgenden Rechnung beschränken wir uns auf den Fall einer Synchronmaschine an einem sehr starken Netz, d. h. an einer konstanten Klemmenspannung. Sind zwischen der Maschine und dem Ort mit konstanter Spannung noch Reaktanzen (z. B. Transformatoren oder Leitungen) eingeschaltet, so sind die Statorreaktanzen einfach um diese Vorschaltreaktanzen zu vergrössern. Der Wirkwiderstand der Statorwicklung wird neben den Reaktanzen vernachlässigt; die Sättigung wird ebenfalls vernachlässigt. Die Rechnung wird für eine Maschine mit ausgeprägten Polen durchgeführt; die Endformeln gelten natürlich auch für eine Turbomaschine, die als Spezialfall der Maschine mit ausgeprägten Polen aufzufassen ist ( $x_q = x_h$ ). Es wird vorausgesetzt, dass der Rotor in der Haupt- und Queraxe nur je eine Wicklung habe; in der Hauptaxe ist es die Erregerwicklung, in der Queraxe eine Dämpferwicklung. Die Gleichstromglieder in den Statorwicklungen und die Wechselstromglieder in den Rotorwicklungen, die bei plötzlichen Stromänderungen vorkommen, werden nicht berücksichtigt. Da sie sehr rasch abklingen, kommen sie bei Veränderungen des Polradwinkels, die nicht so ausserordentlich rasch vor sich gehen können, kaum zur Ausbildung.

Ausser den nach Gl. (1) im 1. Abschnitt aufgeführten Bezeichnungen werden noch die folgenden benötigt:

- $I$  Statorstrom,
- $I_h = I \sin \psi$  Komponente in Hauptaxe
- $I_q = I \cos \psi$  Komponente in Queraxe
- $\psi$  Phasenverschiebung zwischen  $E_0$  und  $I$ .
- $i_h$  Rotorstrom in der Hauptaxenwicklung (Erregerwicklung), abzüglich stationärer Erregerstrom  $I_e$
- $i_q$  Rotorstrom in der Queraxenwicklung
- $i_h$  und  $i_q$  sind die infolge der Rotorverdrehung induzierten zusätzlichen Ströme in den Rotorwicklungen.
- $L_h, L_q$  Eigeninduktivitäten der Statorwicklung für die Haupt- resp. Queraxe, pro Phase.
- $l_h, l_q$  Eigeninduktivitäten der Rotorwicklungen.
- $m$  Phasenzahl im Stator.

$M_h, M_q$  Gegeninduktivitäten Rotor — Stator.

$\frac{m}{2} M_h, \frac{m}{2} M_q$  Gegeninduktivitäten Stator — Rotor.

Diese Gegeninduktivitäten sind die Maximalwerte, die bei koaxialer Lage des Statorfeldes mit einer Rotorwicklung vorkommen.

$r_h, r_q$  ohmsche Widerstände der Rotorwicklungen.

Das Vektordiagramm für eine bestimmte Rotorlage (Winkel  $\vartheta$ ) ist in Fig. 4 dargestellt. Die stationäre Leerlaufspannung  $E_0 = \omega M_h \frac{I_e}{\sqrt{2}}$  ist diejenige Grösse, die vom stationären Erregerstrom  $I_e$  in der Statorwicklung induziert wird. Der zusätzliche Ro-

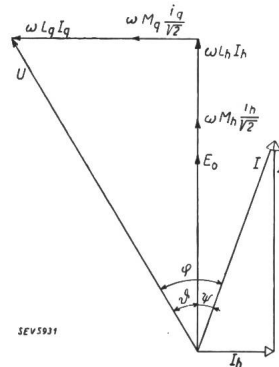


Fig. 4.

Zeitliches Vektordiagramm für einen Synchronmotor während Pendelungen oder andern mechanischen Ausgleichsvorgängen.

torstrom  $i_h$  induziert einen gleichphasigen Spannungsabfall von der Grösse  $\omega M_h \frac{i_h}{\sqrt{2}}$ , die Komponente  $I_h$  einen solchen von der Grösse  $\omega L_h I_h$ . In der Richtung senkrecht auf  $E_0$  werden die Spannungsabfälle  $\omega M_q \frac{i_q}{\sqrt{2}}$  und  $\omega L_q I_q$  induziert; dagegen kommt dort keine Spannung vor, die der Leerlaufspannung entspricht; denn die Queraxenwicklung des Rotors führt ja keinen stationären Dauerstrom. Alle diese innern Spannungsabfälle zusammen sind gleich der Klemmenspannung  $U$ .

Aus dem Vektordiagramm kann man direkt die Gleichungen ablesen:

$$\left. \begin{aligned} U \cos \vartheta &= E_0 + \omega M_h \frac{i_h}{\sqrt{2}} + \omega L_h I_h \\ U \sin \vartheta &= \omega M_q \frac{i_q}{\sqrt{2}} + \omega L_q I_q \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für die beiden Rotorwicklungen gelten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} r_h i_h + l_h \frac{di_h}{dt} + \frac{m}{2} M_h \frac{dI_h}{dt} \sqrt{2} &= 0 \\ r_q i_q + l_q \frac{di_q}{dt} + \frac{m}{2} M_q \frac{dI_q}{dt} \sqrt{2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Leitet man die erste Gl. (2) nach  $t$  ab, so kann man aus ihr und der ersten Gl. (3)  $\frac{di_h}{dt}$  eliminieren. Aus der so erhaltenen Gleichung und der ersten Gl. (2) lässt sich dann noch  $i_h$  eliminieren. Auf analoge Art kann man  $\frac{di_q}{dt}$  und  $i_q$  aus den zweiten Gl. (2)

und (3) eliminieren. Man erhält so, wenn man noch die Streukoeffizienten

$$\sigma_h = 1 - \frac{\frac{m}{2} M_h^2}{L_h l_h}; \quad \sigma_q = 1 - \frac{\frac{m}{2} M_q^2}{L_q l_q} \quad (4)$$

einführt, die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} I_h + \frac{\sigma_h l_h}{r_h} \cdot \frac{dI_h}{dt} &= \frac{U \cos \vartheta - E_0}{\omega L_h} + \frac{\sigma_h l_h}{r_h} \frac{d}{dt} \left( \frac{U \cos \vartheta}{\omega \sigma_h L_h} \right) \\ I_q + \frac{\sigma_q l_q}{r_q} \frac{dI_q}{dt} &= \frac{U \sin \vartheta}{\omega L_q} + \frac{\sigma_q l_q}{r_q} \frac{d}{dt} \left( \frac{U \sin \vartheta}{\omega \sigma_q L_q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Nun ist aber

$\omega L_h = x_h =$  synchrone Reaktanz für die Hauptaxe,  
 $\omega L_q = x_q =$  synchrone Reaktanz für die Queraxe,  
 $\omega \sigma_h L_h = x'_h =$  Kurzschlussreaktanz für die Hauptaxe,  
 $\omega \sigma_q L_q = x'_q =$  Kurzschlussreaktanz für die Queraxe,

$\frac{\sigma_h l_h}{r_h} = T'_h =$  Kurzschlusszeitkonstante der Rotor-Hauptaxenwicklung,

$\frac{\sigma_q l_q}{r_q} = T'_q =$  Kurzschlusszeitkonstante der Rotor-Queraxenwicklung.

Mit diesen Abkürzungen lassen sich die Gl. (5) schreiben:

$$\left. \begin{aligned} I_h + T'_h \frac{dI_h}{dt} &= \frac{U \cos \vartheta - E_0}{x_h} + T'_h \frac{d}{dt} \left( \frac{U \cos \vartheta}{x'_h} \right) \\ I_q + T'_q \frac{dI_q}{dt} &= \frac{U \sin \vartheta}{x_q} + T'_q \frac{d}{dt} \left( \frac{U \sin \vartheta}{x'_q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Sind  $U$  und  $E_0$  konstant, so sind die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen nur Funktionen von  $\vartheta$  und  $\frac{d\vartheta}{dt}$ . Wir haben also für jede Komponente

des Statorstromes eine eigene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, wobei das Störungsglied eine Funktion des Polradwinkels und seiner zeitlichen Ableitung ist.

Will man nun die Bewegung des Polrades bei einem Ausgleichsvorgang, z. B. bei einer plötzlichen Belastungsänderung, berechnen, so muss man von der bekannten Differentialgleichung für die Polradbewegung ausgehen:

$$\frac{\Theta}{p} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = M_m - M \quad (7)$$

$\Theta$  das Trägheitsmoment.  
 $p$  die Polpaarzahl.

$M_m$  das Lastmoment an der Antriebswelle, vermehrt um das den Verlusten entsprechende Drehmoment.  $M_m$  wird als konstant vorausgesetzt.

$M$  das Antriebsmoment entsprechend der zugeführten elektrischen Wirkleistung.

Das Antriebsmoment  $M$  lässt sich aus Klemmenspannung, Polradwinkel und den beiden Komponenten des Statorstromes berechnen. Diese beiden Komponenten kann man dann mit Hilfe der Gl. (6) eliminieren, so dass man schliesslich eine Differentialgleichung erhält, die ausser  $\vartheta$  nur konstante Grössen enthält. Diese Gleichung ist aber so kompliziert, dass eine Lösung in geschlossener Form für den allgemeinen Fall unmöglich erscheint. Wir verzichten daher hier auf die Aufstellung dieser Gleichung<sup>3)</sup> und begnügen uns zunächst damit, die Statorströme und das Drehmoment  $M$  zu berechnen, wenn der zeitliche Verlauf von  $\vartheta$  bekannt ist.

Vorher sollen noch zwei Spezialfälle untersucht werden. Bei sehr grossem Widerstand  $r_h$  der Rotorwicklung wird  $T'_h \approx 0$  und die erste Gl. (6) vereinfacht sich zu

$$I_h = \frac{U \cos \vartheta - E_0}{x_h} \quad (6a)$$

Das ist die Gleichung, wie man sie direkt aus dem Vektordiagramm Fig. 1 für stationäre Zustände ablesen kann. Bei sehr grossem Rotorwiderstand ist also der Statorstrom auch während Ausgleichsvorgängen bei jedem Wert des Polradwinkels gleich gross wie im stationären Zustand.

Im andern Extremfall, wo  $r_h$  ausserordentlich klein ist, wird  $T'_h \approx \infty$ , und die erste Gl. (6) vereinfacht sich zu

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{U \cos \vartheta}{x'_h} \right)$$

$$\text{oder} \quad \Delta I_h = \frac{\Delta(U \cos \vartheta)}{x'_h} \quad (6b)$$

Die *Aenderung* des Statorstromes bei einer Aenderung des Polradwinkels berechnet sich also, wie wenn als innere Reaktanz der Maschine nur die Kurzschlussreaktanz  $x'_h$  vorhanden wäre.

Analoge Formeln gelten natürlich für die Queraxe.

### 3. Berechnung der Ströme und Drehmomente bei bekanntem zeitlichen Verlauf des Polradwinkels.

Wir kehren wieder zum allgemeinen Fall zurück. Wenn der zeitliche Verlauf von  $\vartheta$  als bekannt vorausgesetzt wird, lässt sich jede der Gl. (6) auf die Form bringen

$$\frac{dI}{dt} + \frac{I}{T'} = \varphi(t),$$

wo  $\varphi(t)$  die durch  $T'_h$ , bzw.  $T'_q$  dividierte rechte

<sup>3)</sup> Diese Gleichung wurde u. a. von Th. Bödefeld aufgestellt und für Schwingungen kleiner Amplitude unter gewissen Näherungsannahmen gelöst. Siehe E. u. M. 1930, S. 689.

Seite der ursprünglichen Gl. (6) bedeutet. Die obige Differentialgleichung wird durch folgende Lösung befriedigt:

$$I = \varepsilon^{-\frac{t}{T'}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{T'}} \varphi(t) dt + I_0 \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{T'}}$$

Dabei ist  $I_0$  der stationäre Wert von  $I$  zur Zeit  $t=0$ , d. h. vor Beginn des Ausgleichsvorganges. Führt man die Werte von  $\varphi(t)$  in diese Gleichung ein, so findet man nach einigen Umformungen

$$I_h = \frac{U \cos \vartheta - E_0}{x_h} + \varepsilon^{-\frac{t}{T_h'}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{T_h'}} \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \cdot d(U \cos \vartheta)$$

$$I_q = \frac{U \sin \vartheta}{x_q} + \varepsilon^{-\frac{t}{T_q'}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{T_q'}} \left( \frac{1}{x_q'} - \frac{1}{x_q} \right) \cdot d(U \sin \vartheta) \tag{8}$$

Diese Gleichungen für die Komponenten der Statorströme wurden auf eine solche Form gebracht, dass das erste Glied den stationären Wert beim Winkel  $\vartheta$  darstellt [vgl. Gl. (6a)]. Dazu kommt noch der Integralausdruck.

Die Gl. (8) haben eine sehr einfache physikalische Bedeutung. Bei einer Veränderung des Polradwinkels um  $d\vartheta$  ändern sich die Stromkomponenten  $I_h$  und  $I_q$  so, wie wenn die innern Reaktanzen der Maschine  $x_h'$  und  $x_q'$  wären. Infolgedessen ergeben sich Abweichungen zwischen den wirklichen Werten der Stromkomponenten und den stationären Werten beim gleichen Winkel. Diese Abweichungen klingen gemäss einer Exponentialfunktion mit der Zeitkonstanten  $T_h'$ , bzw.  $T_q'$  wieder ab.

Dieses Gesetz soll nur für die erste Gl. (8) gezeigt werden. Die Aenderung des stationären Wertes von  $I_h$  bei einer Winkeländerung  $d\vartheta$  beträgt [vgl. Gl. (6a)]:

$$d I_{hst} = \frac{d(U \cos \vartheta)}{x_h} \tag{9}$$

Bei einem Ausgleichsvorgang muss also, wenn  $x_h'$  statt  $x_h$  massgebend ist, die Aenderung von  $I_h$  betragen:

$$d I_h = \frac{d(U \cos \vartheta)}{x_h'} \tag{9a}$$

Davon bleibt nun aber bloss  $d I_{hst}$  [Gl. (9)] dauernd bestehen, während die Differenz

$$d I_h - d I_{hst} = \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \cdot d(U \cos \vartheta) \tag{9b}$$

mit der Zeitkonstanten  $T_h'$  abklingt. Wenn die betrachtete Winkeländerung  $d\vartheta$  zur Zeit  $u$  ausgeführt wurde, so ist der Ausdruck von Gl. (9b) bis zur Zeit  $t$  auf den Wert

$$\varepsilon^{-\frac{t-u}{T_h'}} \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \cdot d(U \cos \vartheta_u) \tag{9c}$$

abgeklungen. Es wird hier  $\vartheta_u$  geschrieben, um anzudeuten, dass der Wert zur Zeit  $u$  einzusetzen ist.

Auf diese Art kann man jede Aenderung von  $I_h$  zu irgendeiner Zeit  $u$  zerlegen in einen Anteil, der dauernd bestehen bleibt und dem stationären Wert von  $I_h$  entspricht, und in einen Anteil, der bis zur Zeit  $t$  auf den Wert von Gl. (9c) abgeklungen ist. Um  $I_h$  zur Zeit  $t$  zu bestimmen, muss man diese Aenderungen von  $u=0$  bis  $t$  summieren. Die Summation des ersten Anteils liefert einfach den stationären Wert, während die Summation des zweiten Anteils durch das Integral des Ausdrucks (9c) dargestellt wird. Somit ist zur Zeit  $t$

$$I_h = \frac{U \cos \vartheta - E_0}{x_h} + \int_{u=0}^t \varepsilon^{-\frac{t-u}{T_h'}} \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \cdot d(U \cos \vartheta_u) \tag{9d}$$

Da der Faktor  $\varepsilon^{-\frac{t-u}{T_h'}}$  unter dem Integralzeichen für die Integration über  $u$  eine Konstante bedeutet, kann er vor das Integralzeichen herausgenommen werden, und dann stimmt Gl. (9d) mit der ersten Gl. (8) überein. Damit ist also gezeigt, dass die Gl. (8) tatsächlich nichts anderes darstellen als das erwähnte, einfache physikalische Gesetz.

Die Wirkleistung der Synchronmaschine ist nach dem Vektordiagramm Fig. 4.

$$P = IU \cos(\varphi + \vartheta) = I_q U \cos \vartheta - I_h U \sin \vartheta \tag{10}$$

Setzt man Gl. (8) hier ein, so erhält man nach einigen Umformungen

$$P = \left. \begin{aligned} & \frac{U E_0}{x_h} \sin \vartheta + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \sin(2\vartheta) \\ & + U^2 \left\{ \left( \frac{1}{x_q'} - \frac{1}{x_q} \right) \cos \vartheta \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{T_q'}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{T_q'}} \cos \vartheta d\vartheta \right\} \\ & + U^2 \left\{ \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \sin \vartheta \cdot \varepsilon^{-\frac{t}{T_h'}} \int_0^t \varepsilon^{\frac{t}{T_h'}} \sin \vartheta d\vartheta \right\} \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Diese Gleichung stellt die Leistung pro Phase dar, wenn man für  $E_0$  und  $U$  die Phasenspannungen einsetzt. Setzt man hierfür die verketteten Spannungen ein, so gilt Gl. (11), wie übrigens auch Gl. (1) und (1a), bei der Dreiphasenmaschine für die totale Leistung. Die Gleichungen für die Komponenten des Statorstromes sind dagegen in der angegebenen Form nur richtig, wenn  $E_0$  und  $U$  die Phasenspannungen bedeuten.

Das Drehmoment  $M$  der Synchronmaschine bestimmt sich, indem man Gl. (11) durch die mechanische Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  dividiert. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass während den untersuchten Ausgleichsvorgängen die tatsächliche Winkelgeschwindigkeit nur wenig von der synchronen abweicht, so dass man ohne wesentlichen Fehler durch einen konstanten Wert der Winkelgeschwindigkeit dividieren kann. Die gleiche Voraussetzung

hat man übrigens stillschweigend schon bei der Aufstellung der Gl. (2) gemacht. Die Gleichung für das Drehmoment soll hier nicht eigens angeschrieben werden. Auch im folgenden werden nur Gleichungen für die Leistung angegeben, woraus sich das Drehmoment jederzeit durch Division mit  $\omega_m$  ergibt.

Die erste Zeile von Gl. (11) stimmt mit Gl. (1) überein und stellt somit die stationäre, synchrone Leistung beim Polradwinkel  $\vartheta$  dar. Dazu kommt nun aber bei Ausgleichsvorgängen noch eine zusätzliche Leistung. Interessant ist, dass diese nur vom Quadrat der Klemmenspannung und nicht von der Leerlaufspannung  $E_0$  abhängt.

Gl. (8) für die Ströme und Gl. (11) für die Wirkleistung enthalten Zeitintegrale, in denen der Polradwinkel  $\vartheta$  vorkommt. Diese Integrale können natürlich nur ausgerechnet werden, wenn  $\vartheta$  als Funktion der Zeit gegeben ist. Aber auch dann lassen sich die Integrale in geschlossener Form nur für wenige, einfache Funktionen lösen.

Der einfachste Fall ist der stationäre Zustand. Hierbei sind alle Integrale null, so dass die Gl. (8) und (11) in die bekannten stationären Gleichungen [vgl. Gl. (6a) und (1)] übergehen.

Ein weiterer einfacher Fall ist der, wo, ausgehend von einem stationären Zustand, beim Polradwinkel  $\vartheta_0$  der Rotor plötzlich in den Winkel  $\vartheta$  verdreht wird. Praktisch ist das natürlich nicht genau möglich; jedoch gibt diese Rechnung Aufschluss darüber, was bei rascher Verdrehung im Extremfall passiert. Da

$$\varepsilon^{\frac{t}{T}} = \varepsilon^{-\frac{t}{T}} = 1$$

ist, werden die Integrale von  $t=0$  bis  $t$  zu Integralen von  $\vartheta = \vartheta_0$  bis  $\vartheta$ , und man findet leicht

$$\left. \begin{aligned} I_h &= \frac{U \cos \vartheta - E_0}{x_h} + U \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) (\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) \\ I_q &= \frac{U \sin \vartheta}{x_q} + U \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) \end{aligned} \right\} (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{U E_0}{x_h} \sin \vartheta + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \sin (2 \vartheta) \\ &+ U^2 \left\{ \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \cos \vartheta (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) \right. \\ &\left. + \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \sin \vartheta (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \right\} \end{aligned} \right\} (13)$$

Die Gleichungen enthalten einzelne Summanden, die gegeneinander gestrichen werden könnten. Sie wurden aber absichtlich in dieser Form angegeben, um die Aufteilung in stationäre Werte und Zusatzglieder zu zeigen. Die Gleichungen für die Ströme sind physikalisch noch etwas klarer, wenn man sie so anschreibt, dass der stationäre Wert für den Ausgangswinkel  $\vartheta_0$  statt für den Endwinkel  $\vartheta$  darin vorkommt. Es ist dann

$$\left. \begin{aligned} I_h &= \frac{U \cos \vartheta_0 - E_0}{x_h} + \frac{U \cos \vartheta - U \cos \vartheta_0}{x'_h} \\ I_q &= \frac{U \sin \vartheta_0}{x_q} + \frac{U \sin \vartheta - U \sin \vartheta_0}{x'_q} \end{aligned} \right\} (12a)$$

Die beiden Stromkomponenten *verändern* sich also bei der Verdrehung so, als ob die Maschine nur die Kurzschlussreaktanzen  $x'_h$  und  $x'_q$  enthielte. — Eine ähnlich einfache Gleichung für die Leistung existiert nicht.

Ein dritter Fall, bei dem die Integrale von Gl. (8) und (11) in geschlossener Form berechnet werden können, sind Rotorschwingungen kleiner Amplitude um eine Gleichgewichtslage. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Wenn jedoch der Polradwinkel eine kompliziertere Funktion der Zeit ist, oder wenn er gar nicht von vornherein als Funktion der Zeit bekannt ist, so lassen sich die Integrale der Gl. (8) und (11) nicht mehr in geschlossener Form lösen. In diesem Fall kann die Rechnung mit Hilfe einer Schritt-für-Schritt-Methode durchgeführt werden, wenn man das physikalische Gesetz beachtet, das als Erklärung der Gl. (8) angegeben wurde. Für kleine Zeitintervalle (etwa 0,05 s) werden die Veränderungen von  $I_h$  und  $I_q$  berechnet und aneinandergereiht. Nachdem  $I_h$  und  $I_q$  bekannt sind, kann man mittels Gl. (10) die Wirkleistung und weiter das Drehmoment  $M$  berechnen. Daraus findet man mit Hilfe der Bewegungsgleichung (7) die Änderung des Polradwinkels  $\vartheta$  für die einzelnen Zeitintervalle.

Die Schritt-für-Schritt-Methode wurde hauptsächlich von den Amerikanern ausgebaut<sup>4)</sup>. Diese Methode erfordert leider sehr viel Rechenarbeit und dürfte sich daher kaum in die Praxis einführen. Man wird sich wohl eher mit gewissen Annäherungen und Vernachlässigungen abfinden, wenn man dafür innert nützlicher Frist zum Ziel kommt. Eine solche Näherungsmethode ist z. B. die Rechnung mit den Pendelungsreaktanzen, die im 5. Abschnitt entwickelt wird<sup>5)</sup>.

#### 4. Berechnung der Drehmomente für Rotor-Schwingungen kleiner Amplitude.

Es wurde schon eingangs erwähnt, dass der Rotor einer Synchronmaschine, der aus der Gleichgewichtslage herausgedreht wurde, wie durch Federkraft wieder gegen die Gleichgewichtslage zurückgezogen wird. Wir haben auch gesehen, dass diese Federkraft ausgeübt wird durch das sog. synchrone Moment  $M$ , d. i. das Drehmoment der Synchronmaschine, das der elektrischen Wirkleistung entspricht. Wenn in Fig. 5 das mechanische Belastungsmoment  $M_m$  beträgt, so befindet sich die Gleichgewichtslage beim Winkel  $\vartheta_0$ . Bei grösseren Winkeln

<sup>4)</sup> S. z. B. F. R. Longley: The Calculation of Alternator Swing Curves. The Step-by-Step Method. Trans. AIEE, July 1930, p. 1129.

<sup>5)</sup> Vgl. den in Fussnote 2 erwähnten Aufsatz. Ein Bericht, in dem die Brauchbarkeit dieser Methode an Hand vieler Messungen untersucht wird, wird demnächst an anderer Stelle erscheinen.

überwiegt das Antriebsmoment  $M$  des untersuchten Synchronmotors; der Rotor wird daher beschleunigt, der Nacheilwinkel wird verkleinert; das resultierende Drehmoment ist also tatsächlich gegen die Gleichgewichtslage hin gerichtet.

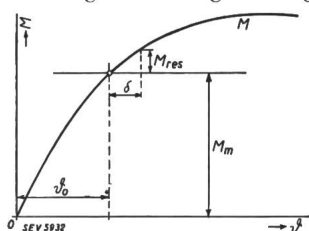


Fig. 5.

Synchrones Moment  $M$  eines Synchronmotors in Funktion des Polradwinkels  $\vartheta$ .

Bei kleinen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage kann man die Kurve für  $M$  mit genügender Genauigkeit durch ihre Tangente beim Winkel  $\vartheta_0$  ersetzen. Unter dieser Voraussetzung wird das resultierende Drehmoment bei einer Auslenkung  $\delta$  aus der Gleichgewichtslage

$$M_{res} = \left( \frac{dM}{d\vartheta} \right)_{\vartheta_0} \cdot \delta \tag{14}$$

Genau dieselbe Gleichung gilt auch für eine Feder mit der Federkonstanten (Drehmoment für Auslenkung 1)

$$M_s = \left( \frac{dM}{d\vartheta} \right)_{\vartheta_0} \tag{15}$$

Das synchrone Moment wirkt also wie eine Feder mit der Federkonstanten  $M_s$ . Diese Grösse  $M_s$  bezeichnet man in der Literatur als synchronisierendes Moment. Es soll wie in den vorigen Abschnitten mit den Wirkleistungen statt mit den Drehmomenten gerechnet und die synchronisierende Leistung  $P_s$  eingeführt werden durch die Definitionsgleichung:

$$P_s = \left( \frac{dP}{d\vartheta} \right)_{\vartheta_0} \tag{15a}$$

Dann ist natürlich analog zu Gl. (14)

$$P_{res} = \left( \frac{dP}{d\vartheta} \right)_{\vartheta_0} \cdot \delta = P_s \cdot \delta \tag{14a}$$

Wäre bei Schwingungen um eine Gleichgewichtslage die Wirkleistung bei jedem Wert von  $\vartheta$  gleich wie im stationären Lauf bei jenem Winkel, so wäre die stationäre Leistungskurve für die Federkraft massgebend und man hätte in Gl. (15a) für  $P$  die stationäre Leistung einzusetzen. Für diese «stationäre» synchronisierende Leistung findet man durch Ableitung von Gl. (1)

$$P_{st} = \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \cos (2\vartheta_0) \tag{16}$$

Für Turbomaschinen gilt im speziellen

$$P_{st} = \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 \tag{16a}$$

Nach dem, was man in den vorigen Abschnitten über die Wirkleistung bei Ausgleichsvorgängen ge-

sehen hat, ist zu erwarten, dass auch bei kleinen Schwingungen nicht die stationäre Leistung massgebend ist. Um den wirklichen Wert der Leistung zu berechnen, muss man in der allgemeinen Leistungsgleichung (11) für  $\vartheta$  die der Schwingung entsprechende Zeitfunktion einsetzen. Wir beschränken uns dabei auf rein harmonische Schwingungen, die durch die Gleichung

$$\delta = \delta_m \cdot \sin(\nu t) \tag{17}$$

dargestellt werden können. Wenn man in Gl. (11) für

$$\vartheta = \vartheta_0 + \delta$$

einsetzt und dann alle trigonometrischen Funktionen von  $\delta$  in Potenzreihen entwickelt, wovon man nur je das erste Glied berücksichtigt (*kleine* Schwingungen!), so lassen sich die Integrale von Gl. (11) in geschlossener Form lösen, und man findet für die totale Wirkleistung den Ausdruck:

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{UE_0}{x_h} \sin \vartheta_0 + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \sin (2\vartheta_0) \\ &+ \left\{ \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \cos (2\vartheta_0) \right\} \delta_m \sin (\nu t) \\ &+ \left\{ U^2 \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \frac{\cos^2 \vartheta_0}{1 + \frac{1}{\nu^2 T_q'^2}} \right. \\ &+ \left. U^2 \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \frac{\sin^2 \vartheta_0}{1 + \frac{1}{\nu^2 T_h'^2}} \right\} \delta_m \sin (\nu t) \\ &+ \left\{ U^2 \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\nu T_q' + \frac{1}{\nu T_q'}} \right. \\ &+ \left. U^2 \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \frac{\sin^2 \vartheta_0}{\nu T_h' + \frac{1}{\nu T_h'}} \right\} \delta_m \cos (\nu t) \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Die beiden ersten Zeilen von Gl. (18) stellen die stationäre Leistung dar, die folgenden die bei der Schwingung auftretende zusätzliche Leistung. Die erste Zeile allein gibt die stationäre Leistung für die Gleichgewichtslage  $\vartheta_0$  an und liefert keinen Beitrag zur synchronisierenden Leistung. Die zweite, dritte und vierte Zeile sind proportional der Auslenkung [Gl. (17)], die beiden letzten Zeilen sind proportional der relativen Winkelgeschwindigkeit <sup>6)</sup>

$$\frac{d\delta}{dt} = \nu \delta_m \cos (\nu t) \tag{19}$$

Diese Feststellung lässt vermuten, dass die zweite, dritte und vierte Zeile die Federkraft darstellen, die beiden letzten Zeilen die Dämpfung. Tatsäch-

<sup>6)</sup>  $\frac{d\delta}{dt}$  ist die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von der synchronen und soll kurz als relative Winkelgeschwindigkeit bezeichnet werden.



lich, wenn man für das Drehmoment den allgemeinen Ansatz macht

$$M = M_m + M_s \delta + D \frac{d\delta}{dt}, \quad (20)$$

wo  $M_s$  die Federkonstante und  $D$  die Dämpfungskonstante bedeuten, so findet man mit Gl. (17) und (19)

$$M = M_m + M_s \delta_m \sin(\nu t) + D \nu \delta_m \cos(\nu t) \quad (20a)$$

Der Faktor von  $\sin(\nu t)$  ist also wirklich der Federkonstanten und der Faktor von  $\cos(\nu t)$  der Dämpfungskonstanten proportional.

Während  $M_s$  (das Moment pro Einheit der Winkelabweichung) die Dimension eines Drehmomentes hat, trifft dies für  $D$  (das Moment pro Einheit der relativen Winkelgeschwindigkeit) nicht zu. Es ist daher zweckmässiger, die Grösse

$$M_d = \nu D \quad (20b)$$

zu verwenden, die die Dimension eines Drehmomentes hat.  $M_d$  ist das maximale dämpfende Moment bei einer Schwingung von der Amplitude 1, in Analogie zu  $M_s$ , welches das maximale Federmoment bei einer Schwingung von der Amplitude 1 ist.

Rechnet man mit den Leistungen statt mit den Drehmomenten, so gilt

$$P = P_0 + P_s \delta_m \sin(\nu t) + P_d \delta_m \cos(\nu t) \quad (20c)$$

$P_0$  ist die stationäre Leistung bei der Gleichgewichtslage  $\vartheta_0$ ,  $P_s$  die dem Federmoment entsprechende maximale Leistung,  $P_d$  die maximale dämpfende Leistung, beide bei einer Schwingung von der Amplitude 1.  $P_s$  wird «synchronisierende Leistung» genannt,  $P_d$  soll kurz «Dämpfungsleistung» genannt werden. Man sieht sofort, dass  $P_s$  gleich den Klammersummen der 2., 3. und 4. Zeile,  $P_d$  gleich dem Klammersummen der beiden letzten Zeilen von Gl. (18) ist:

$$P_s = \left. \begin{aligned} & \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \cos(2\vartheta_0) \\ & + U^2 \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \frac{\cos^2 \vartheta_0}{1 + \frac{1}{\nu^2 T_q'^2}} \\ & + U^2 \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \frac{\sin^2 \vartheta_0}{1 + \frac{1}{\nu^2 T_h'^2}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$P_d = \left. \begin{aligned} & U^2 \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \frac{\cos^2 \vartheta_0}{\nu T_q' + \frac{1}{\nu T_q'}} \\ & + U^2 \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \frac{\sin^2 \vartheta_0}{\nu T_h' + \frac{1}{\nu T_h'}} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die erste Zeile von Gl. (21) stimmt mit Gl. (16) überein und stellt daher die stationäre synchronisierende Leistung dar. Die wirkliche synchronisierende Leistung bei der Schwingung ist aber grösser um den Betrag der 2. und 3. Zeile von Gl. (21). Die Federkonstante ist grösser, die Eigenschwingungszahl also ebenfalls grösser als wenn die stationäre Leistungskurve gelten würde. Ausserdem wird eine Dämpfungsleistung nach Gl. (22) entwickelt.

Hier, beim Problem der kleinen Schwingungen, ist eine Aufteilung in synchronisierende Leistung und Dämpfungsleistung zwanglos möglich, und zwar mit Rücksicht der Phasenlage der einzelnen Leistungsanteile in bezug auf die Winkelschwingung. Bei komplizierteren Bewegungen, die z. B. nach grösseren Belastungsänderungen vorkommen, ist dagegen eine Aufteilung in synchronisierende Leistung und Dämpfungsleistung oder in synchrone und asynchrone Leistung schlechterdings unmöglich, oder sie wäre vollständig willkürlich. Nur wenn die Bewegung eine ganz einfache Gesetzmässigkeit aufweist (wie z. B. bei harmonischen Schwingungen) ist eine eindeutige Zerlegung der resultierenden Leistung in eine der Winkelabweichung und eine der Winkelgeschwindigkeit proportionale Komponente möglich.

Auch die Art, wie die Leistung erzeugt wird, gibt bei komplizierteren Bewegungen keine Anhaltspunkte für eine Zerlegung in synchrone und asynchrone Leistung. Wir haben gesehen, dass bei Winkeländerungen Ströme in den Rotorwicklungen induziert werden und dass infolge der Rückwirkung dieser Ströme auch die Ströme in den Statorwicklungen und weiter die Wirkleistung anders werden als beim gleichen Winkel im stationären Betrieb. Man kann aber diese Erscheinung nicht zergliedern in eine synchrone und eine asynchrone Erscheinung. Während eines Ausgleichsvorgangs ist i. a. weder die synchrone Leistung gleich der Leistung im synchronstationären Lauf beim gleichen (konstanten) Winkel, noch ist die asynchrone Leistung gleich der Leistung im asynchronstationären Lauf beim gleichen (konstanten) Schlupf. Beim Ausgleichsvorgang fliessen die synchronen und asynchronen Vorgänge ineinander und können nur als einheitliches Ganzes betrachtet werden.

Um nochmals auf die kleinen Schwingungen zurückzukommen, sei erwähnt, dass Doherty und Nickle<sup>7)</sup> ebenfalls die synchronisierende Leistung und die Dämpfungsleistung bei kleinen Schwingungen berechnet haben, allerdings auf eine wesentlich andere Art als es in der vorliegenden Arbeit geschehen ist. Die Endformeln von Doherty und Nickle lassen sich so umformen, dass sie mit Gl. (21) und (22) übereinstimmen. Es ist aber interessant, dass jene Endformeln eine äusserst komplizierte und unübersichtliche Form aufweisen. Beispielsweise lautet das Glied, das der zweiten

<sup>7)</sup>Synchronous Machines. III. Torque-Angle Characteristics Under Transient Conditions. Trans. AIEE, Febr. 1927, p. 1.

Zeile von Gl. (21) entspricht, bei Doherty und Nickle<sup>8)</sup>

$$\frac{U^2 \cos^2 \vartheta_0}{x_q} \cdot \frac{\{(x_h - a)(c \cdot \cos \alpha - d \cdot \sin \alpha) - b(c \cdot \sin \alpha + d \cos \alpha)\}}{\sqrt{\{b^2 + (x_h - a)^2\} \{d^2 + (x_q - c)^2\}}}$$

Dabei bedeuten  $a, b, c, d$  Ausdrücke von der Form

$$a = \frac{\nu^2 x_{md}^2 (x_{md} - X_{ida})}{R_{da}^2 + \nu^2 (x_{md} + X_{ida})^2}$$

und die Grösse  $a$  ist zu berechnen aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{bd + (x_h - a)(x_q - c)}{d(x_h - a) - b(x_q - c)}$$

Aehnlich komplizierte Glieder, die aber sonderbarerweise keine Analogie im Aufbau zeigen, entsprechen der letzten Zeile von Gl. (21) und den beiden Zeilen von Gl. (22). Man beachte demgegenüber den einfachen Aufbau der 2. und 3. Zeile von Gl. (21) und der Gl. (22) mit den ganz analog aufgebauten Ausdrücken für Haupt- und Queraxe!

**5. Die «Pendelungsreaktanzen» für Rotor-Schwingungen kleiner Amplitude.**

In der Einleitung wurde erwähnt, dass gewisse Autoren empfehlen, bei Ausgleichsvorgängen mit den Kurzschlussreaktanzen statt mit den synchronen Reaktanzen zu rechnen. Es wurde aber darauf aufmerksam gemacht, dass die blosser Ersetzung der Reaktanzen in den stationären Leistungsformeln nicht richtig ist. Man müsste die induzierte EMK, d. h. die hinter der Kurzschlussreaktanz liegende Spannung, als konstant annehmen und dann die Leistungsformeln neu ableiten. Wie man gesehen hat, bleibt aber auch die induzierte EMK nicht genau konstant. Dagegen kann man näherungsweise annehmen, dass ein Spannungsvektor, der irgend-

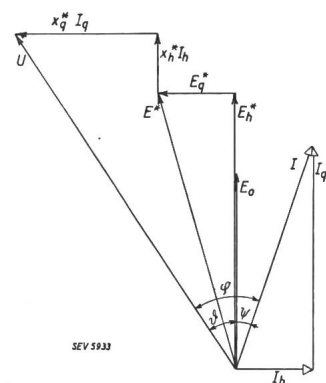


Fig. 6.

Zeitliches Vektordiagramm für einen Synchronmotor während Pendelungen oder andern mechanischen Ausgleichsvorgängen, unter Annahme einer konstanten inneren Spannung  $E^*$ .

wo zwischen der induzierten EMK und der Leerlaufspannung liegt, während des Ausgleichsvorganges konstant bleibt.

Im folgenden wird unter dieser Annahme die Wirkleistung der Synchronmaschine berechnet. Die

<sup>8)</sup> Einzelne Buchstaben der Formel sind geändert, um den Vergleich mit unsern Formeln zu erleichtern.

Ableitung gilt nicht nur für kleine Schwingungen, sondern auch für beliebige Ausgleichsvorgänge. Erst das Schlussresultat soll dann auf kleine Schwingungen angewendet werden.

Der innere Spannungsvektor, der während den Ausgleichsvorgängen konstant bleiben soll, ist in Fig. 6 mit  $E^*$  bezeichnet und hat die Komponenten  $E_h^*$  und  $E_q^*$ . Zwischen  $E^*$  und der Klemmenspannung  $U$  liegen die Reaktanzen  $x_h^*$  und  $x_q^*$ , die Pendelungsreaktanzen genannt seien und die dadurch definiert sind, dass die Spannungsabfälle zwischen  $U$  und  $E^*$  für die beiden Axenrichtungen  $x_h^* \cdot I_h$  bzw.  $x_q^* \cdot I_q$  betragen. Für die Stromkomponenten gelten daher die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} I_h &= \frac{U \cos \vartheta - E_h^*}{x_h^*} \\ I_q &= \frac{U \sin \vartheta - E_q^*}{x_q^*} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Setzt man diese Werte in Gl. (10) ein, so findet man für die Wirkleistung

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{UE_h^*}{x_h^*} \sin \vartheta - \frac{UE_q^*}{x_q^*} \cos \vartheta \\ &+ \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q^*} - \frac{1}{x_h^*} \right) \sin (2 \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Diese Formel ist aufgebaut wie Gl. (1) für die stationäre Leistung, nur treten an Stelle der synchronen Reaktanzen die Pendelungsreaktanzen und an Stelle von  $E_o, E_h^*$ . Ausserdem kommt noch ein Glied mit  $\cos \vartheta$  vor, das in der stationären Leistungsgleichung fehlt, weil dort in der Queraxe keine Erregung vorhanden ist.  $E_h^*$  und  $E_q^*$  spielen in Gl. (24) die Rolle der Leerlaufspannung, die aber in diesem Fall auch eine Komponente in der Queraxe hat. Wenn man  $E_h^*$  und  $E_q^*$  als konstant annimmt, so macht man damit die Annahme, dass in der Rotorwicklung der Haupt- und Queraxe Ströme fließen, die während des Ausgleichsvorganges konstant bleiben und die in der Statorwicklung die «Leerlauf»-Spannungen  $E_h^*$  und  $E_q^*$  induzieren.

Meistens ist es praktischer, für die Leistung eine Formel zu haben, in der  $E_h^*$  und  $E_q^*$  nicht vorkommen. Man kann diese beiden Grössen tatsächlich eliminieren, wenn  $x_h^*$  und  $x_q^*$  bekannt sind. Wenn beim Winkel  $\vartheta_0$  ein stationärer Zustand vorhanden ist, so liest man aus dem Vektordiagramm<sup>9)</sup> die Beziehungen ab:

$$\left. \begin{aligned} E_h^* &= U \cos \vartheta_0 - x_h^* \frac{(U \cos \vartheta_0 - E_0)}{x_h} \\ &= \left(1 - \frac{x_h^*}{x_h}\right) U \cos \vartheta_0 + \frac{x_h^*}{x_h} E_0 \\ E_q^* &= U \sin \vartheta_0 - x_q^* \frac{U \sin \vartheta_0}{x_q} = \left(1 - \frac{x_q^*}{x_q}\right) U \sin \vartheta_0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

<sup>9)</sup> Man denke sich in Fig. 6  $\vartheta_0$  statt  $\vartheta$  geschrieben, nehme an, dass dieses Diagramm einen stationären Zustand darstelle, und berücksichtige noch das Diagramm Fig. 1, das für den gleichen Winkel  $\vartheta_0$  gelten soll.

Setzt man dies in Gl. (24) ein, so wird

$$P = \frac{UE_0}{x_h} \sin \vartheta + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \sin (2\vartheta) \left. \begin{array}{l} + U^2 \left( \frac{1}{x_h^*} - \frac{1}{x_h} \right) (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) \sin \vartheta \\ + U^2 \left( \frac{1}{x_q^*} - \frac{1}{x_q} \right) (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) \cos \vartheta \end{array} \right\} \quad (26)$$

Die erste Zeile dieser Formel stimmt mit Gl. (1) überein und stellt somit die stationäre Wirkleistung dar. Die 2. und 3. Zeile zeigt die Vergrößerung der Wirkleistung beim Ausgleichsvorgang. Gl. (26) gilt für irgendeinen Ausgleichsvorgang, unter der Voraussetzung, dass er von einem stationären Zustand beim Winkel  $\vartheta_0$  ausgegangen ist und dass die hinter den Reaktanzen  $x_h^*$  und  $x_q^*$  liegende innere Spannung während des Ausgleichsvorganges konstant bleibt. Unter der zweiten Voraussetzung gilt die Gleichung insbesondere auch für kleine Schwingungen, deren Gleichgewichtslage bei  $\vartheta_0$  liegt.

Für kleine Schwingungen interessiert auch die synchronisierende Leistung, die man gemäss Gl. (15a) durch Ableitung von Gl. (26) erhält:

$$P_s = \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h} \right) \cos (2\vartheta_0) \quad (27) \\ + U^2 \left( \frac{1}{x_q^*} - \frac{1}{x_q} \right) \cos^2 \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_h^*} - \frac{1}{x_h} \right) \sin^2 \vartheta_0$$

Die erste Zeile, die mit Gl. (16) übereinstimmt, stellt die stationäre synchronisierende Leistung dar; die zweite Zeile zeigt die Vergrößerung der synchronisierenden Leistung bei konstanter innerer Spannung  $E^*$ .

Die Annahme, dass für den Verlauf der Leistung während Polradschwingungen eine Reaktanz massgebend sei, die zwischen der synchronen und der Kurzschlussreaktanz liegt, wurde wohl zum ersten Male von Putman<sup>10)</sup> gemacht. Später wurde die Theorie von Rüdénberg<sup>11)</sup> weiter ausgebaut. Die Formeln von Rüdénberg sind auf eine ganz andere Form gebracht als unsere Formeln und eignen sich daher nicht für den Vergleich. Die Formel von Putman für die synchronisierende Leistung lautet (mit unsern Bezeichnungen):

$$P_s = \frac{UE_0}{x_h} \cos \vartheta_0 + U^2 \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_h^*} \right) \cos (2\vartheta_0) \\ + U^2 \left( \frac{1}{x_h^*} - \frac{1}{x_h} \right) \cos^2 \vartheta_0$$

Diese Gleichung lässt sich leicht so umformen, dass sie mit unserer Gl. (27) übereinstimmt; nur fehlt das dritte Glied dieser Gleichung, weil Putman vorausgesetzt hat, dass in der Rotorqueraxe die synchrone Reaktanz massgebend sei, d. h.  $x_q^* = x_q$ .

<sup>10)</sup> Trans. AIEE, Sept. 1926, p. 1116.

<sup>11)</sup> Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern, X. Bd., 3. H. (1931), S. 41, und Conf. intern. des grands réseaux 1933/I, rapp. 117.

Im übrigen wird die Formel von Putman durch unsere Rechnung vollständig bestätigt.

Sonderbarerweise behauptet Liwitschitz<sup>12)</sup>, dass die Formel von Putman falsch sei. Er stellt fest, dass ein Glied in jener Formel bei raschen Schwingungen negativ und relativ gross werde und dass kein Glied mit  $\sin^2 \vartheta_0$  vorkomme. Das stimmt allerdings; deswegen ist aber die Formel nicht falsch. Man kann sie ja durch einfache trigonometrische Umformung in die physikalisch durchsichtigeren Gl. (27) überführen. In dieser Gleichung wird kein Glied, das die Pendelungsreaktanz enthält, negativ, und das Glied mit  $\sin^2 \vartheta_0$  fehlt nicht mehr.

Bei der Ableitung der Gl. (26) und (27) wurde die Frage noch offen gelassen, wie gross die Pendelungsreaktanzen  $x_h^*$  und  $x_q^*$  sind. Es wurde nur vorausgesetzt, dass solche Pendelungsreaktanzen existieren, hinter denen eine während des Ausgleichsvorganges konstante innere Spannung  $E^*$  liegt (vgl. Fig. 6). Wenn diese Voraussetzung richtig ist, so kann man durch passende Wahl von  $x_h^*$  und  $x_q^*$  erreichen, dass die Gl. (26) und (27) mit den Gl. (18) resp. (21) übereinstimmen, die durch Lösung der Differentialgleichungen berechnet wurde.

Man sieht nun leicht, dass man Gl. (27) für die synchronisierende Leistung mit Gl. (21) zur vollständigen Uebereinstimmung bringen kann, wenn man  $x_h^*$  und  $x_q^*$  so wählt, dass

$$\left. \begin{array}{l} \left( \frac{1}{x_h^*} - \frac{1}{x_h} \right) = \frac{\nu^2 T_h'^2}{1 + \nu^2 T_h'^2} \left( \frac{1}{x_h'} - \frac{1}{x_h} \right) \\ \left( \frac{1}{x_q^*} - \frac{1}{x_q} \right) = \frac{\nu^2 T_q'^2}{1 + \nu^2 T_q'^2} \left( \frac{1}{x_q'} - \frac{1}{x_q} \right) \end{array} \right\} \quad (28)$$

ist. Dagegen enthält Gl. (18) für die Wirkleistung noch ein Glied, das der Winkelgeschwindigkeit proportional ist, während in Gl. (26) kein solches vorkommt. Bei der Rechnung mit den Pendelungsreaktanzen findet man also keine Dämpfungsleistung, obschon bei kleinen Schwingungen tatsächlich eine solche vorkommt [Gl. (22)].

Das zeigt, dass die Rechnung mit den Pendelungsreaktanzen nur eine Näherung ist. Tatsächlich gibt es auch bei kleinen Schwingungen (wie bei andern Ausgleichsvorgängen) keine innere Spannung, die genau konstant bleibt. Rechnet man trotzdem mit einer solchen, so ergibt sich die Leistung als eindeutige Funktion des Polradwinkels  $\vartheta$  oder der Auslenkung  $\delta$  [Gl. (26)], was nichts anderes bedeutet, als dass keine Dämpfung vorhanden sei. Während man mit der Annahme einer konstanten inneren Spannung  $E^*$  die synchronisierende Leistung richtig berechnen kann, indem man für  $x_h^*$  und  $x_q^*$  die Werte nach Gl. (28) einsetzt, so lässt sich die Dämpfungsleistung auf Grund dieser Annahme überhaupt nicht berechnen.

In Analogie zur «zusätzlichen» synchronisierenden Leistung in der zweiten Zeile von Gl. (27) soll

<sup>12)</sup> Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Konzern, XII. Bd., 2. H., S. 20.

die Dämpfungsleistung bei kleinen Schwingungen noch in der Form

$$P_d = U^2 K_q \cos^2 \vartheta_0 + U^2 K_h \sin^2 \vartheta_0 \quad (29)$$

angeschrieben werden. Damit diese Formel mit der früher abgeleiteten Gl. (22) übereinstimmt, muss

$$\left. \begin{aligned} K_h &= \frac{\nu T'_h}{1 + \nu^2 T'^2_h} \left( \frac{1}{x'_h} - \frac{1}{x_h} \right) \\ K_q &= \frac{\nu T'_q}{1 + \nu^2 T'^2_q} \left( \frac{1}{x'_q} - \frac{1}{x_q} \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

sein. Die Gl. (30) für die Dämpfungskoeffizienten  $K_h$  und  $K_q$  sind ganz ähnlich aufgebaut wie die Gl. (28) für die Pendelungsadmittanzen. Mit den Gl. (27) bis (30) kann man nun die synchronisierende Leistung und die Dämpfungsleistung für kleine Schwingungen vollständig richtig berechnen, obschon die Annahme, unter der Gl. (27) abgeleitet wurde, nicht genau zutrifft.

Um über die Grösse der Pendelungsadmittanzen und Dämpfungskoeffizienten eine Vorstellung zu geben, sind die Brüche in den Gl. (28) und (30) in Fig. 7 als Funktion von  $\nu T'$  aufgezeichnet. Tatsächlich sind sie nur abhängig von diesem Produkt, nicht von  $\nu$  und  $T'$  einzeln. Wie Kurve 1 zeigt, sind die Brüche von Gl. (28) gleich null für sehr kleine Werte dieses Produktes, d. h. für sehr langsame Rotorschwingungen oder sehr kleine Zeitkonstanten der Rotorwicklungen und nähern sich dem Wert 1 für sehr grosse Werte des Produktes, d. h. für sehr rasche Schwingungen oder sehr grosse Zeitkonstanten der Rotorwicklungen. Im ersten Fall sind gemäss Gl. (28) die Pendelungsreaktanzen gleich den synchronen Reaktanzen, im zweiten Fall gleich den Kurzschlussreaktanzen. Für alle praktisch

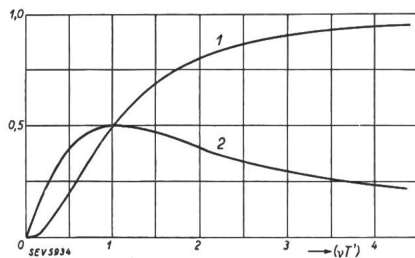


Fig. 7.

$$\left. \begin{aligned} 1 & \frac{(\nu T')^2}{1 + (\nu T')^2} \\ 2 & \frac{\nu T'}{1 + (\nu T')^2} \end{aligned} \right\} \text{ in Funktion von } \nu T'.$$

möglichen Werte von  $\nu T'$  liegen also die Pendelungsreaktanzen zwischen diesen Extremwerten drin.

Kurve 2 von Fig. 7 stellt die Brüche von Gl. (30) dar. Auch diese Werte sind null für  $\nu T' = 0$ . Sie steigen aber mit wachsendem  $\nu T'$  nicht dauernd an, sondern erreichen ihr Maximum von 0,5 bei  $\nu T' = 1$  und fallen nachher wieder gegen null ab. Setzt man für  $T'$  den vor Gl. (6) angegebenen Wert

$$T' = \frac{\sigma l}{r}$$

ein, so findet man für die Stelle, wo der Maximalwert der Dämpfungsleistung liegt, die Gleichung

$$\nu \cdot \sigma \cdot l = r.$$

Nun stimmt die Frequenz der im Rotor induzierten Ströme mit der Schwingungsfrequenz überein. Folglich stellt  $\nu \cdot \sigma \cdot l$  die für die induzierten Ströme massgebende Kurzschlussreaktanz der Rotorwicklung dar. Die Dämpfungsleistung ist also bei derjenigen Schwingungszahl am grössten, wo die Kurzschlussreaktanz der Rotorwicklung gleich ihrem Wirkwiderstand ist. Für alle andern Werte der Schwingungszahl oder des Rotorwiderstandes ist sie kleiner. Das ist eine aus der Theorie der Asynchronmaschine sehr gut bekannte Beziehung.

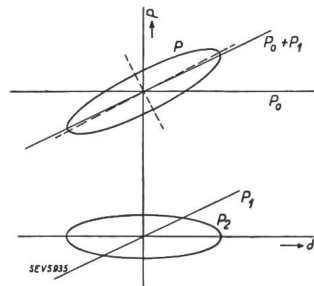


Fig. 8.

Verlauf der Wirkleistung eines Synchronmotors bei kleinen Schwingungen um die Gleichgewichtslage, in Funktion der Winkel- auslenkung.

Interessant ist noch, bei kleinen Schwingungen den Verlauf der totalen Wirkleistung in Funktion der Winkelauslenkung  $\delta$  zu verfolgen. Nach Gl. (20c), die eine gekürzte Darstellung von Gl. (18) ist, setzt sich die Wirkleistung bei der Schwingung zusammen aus einem konstanten Wert  $P_0$ , aus einem der Winkelauslenkung

$$\delta = \delta_m \sin(\nu t)$$

proportionalen Wert (in Fig. 8 mit  $P_1$  bezeichnet) und aus einem der Winkelgeschwindigkeit proportionalen Wert (in Fig. 8 mit  $P_2$  bezeichnet). Die Darstellung von  $P_0$  und  $P_1$  in Fig. 8 ist ohne weiteres einleuchtend. Weiter lässt sich zeigen, dass  $P_2$  durch eine Ellipse dargestellt wird, wenn man diese Grösse in Funktion von  $\delta$  aufträgt. Die Summation der 3 Leistungen ergibt wieder eine Ellipse, deren Axen in Fig. 8 gestrichelt angegeben sind. Bei der Rotorschwingung läuft der Punkt, der die totale Wirkleistung darstellt, auf dieser Ellipse herum. Interessant ist, dass die Hauptaxe der Ellipse nicht genau mit der Geraden zusammenfällt, die die Leistung  $P_0 + P_1$  darstellt.

Zum Schluss soll noch untersucht werden, wie sich die synchronisierende und die Dämpfungsleistung ändern, wenn der Rotor einer gegebenen Maschine ( $T' = \text{konst.}$ ) bei verschiedenen Werten von  $\vartheta_0$ , d. h. bei verschieden grosser Wirkbelastung, Schwingungen ausführt. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass Erregung und Klemmenspannung konstant sind und auch die Frequenz der Rotorschwingung an allen Stellen gleich gross sei ( $\nu = \text{konst.}$ ). Unter dieser Voraussetzung sind in Gl. (27) und (29) alle Grössen ausser  $\vartheta_0$  konstant.

Als Beispiel wurde in Fig. 9 die synchronisierende Leistung für eine Maschine mit ausgeprägten

Polen und Dämpferwicklung aufgetragen. Die Pendelungsreaktanzen wurden gemessen und dann die Kurven nach Gl. (27) berechnet. Die stationäre synchronisierende Leistung (erste Zeile von Gl. 27) hat ihr Maximum bei  $\vartheta_0 = 0$  und fällt bei Turbomaschinen bei  $\vartheta_0 = 90^\circ$ , bei ausgeprägten Polen bereits bei kleinerem  $\vartheta_0$  auf null ab. Die zusätzliche synchronisierende Leistung setzt sich aus einem Glied mit  $\cos^2 \vartheta_0$  und einem mit  $\sin^2 \vartheta_0$  zusammen. Bei  $\vartheta_0 = 0$  kommt nur das erste dieser Glieder, das lediglich von den Verhältnissen in der Rotorquer-

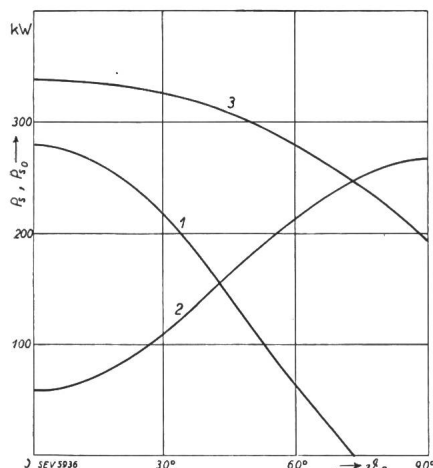


Fig. 9.

Synchronisierende Leistung einer Synchronmaschine mit ausgeprägten Polen und Dämpferwicklung, bei verschiedenen Werten des stationären Polradwinkels  $\delta_0$ .

- |   |                                        |
|---|----------------------------------------|
| 1 | Stationäre synchronisierende Leistung. |
| 2 | Zusätzliche »                          |
| 3 | Totale »                               |

axe abhängt, zur Geltung, während das zweite Glied, das lediglich von den Verhältnissen in der Rotorhauptaxe abhängt, erst bei grössern Werten von  $\vartheta_0$  wirksam wird und sein Maximum bei  $\vartheta_0 = 90^\circ$  hat. Da die Zeitkonstante der Rotorwicklung in der Hauptaxe (Erregerwicklung!) immer viel grösser ist als die Zeitkonstante für die Queraxe, ist das Maximum des zweiten Gliedes praktisch immer grösser als das des ersten Gliedes. Nur wenn bei einer Turbomaschine in der Rotorqueraxe eine ebenso starke Wicklung wie die Erregerwicklung angebracht würde, wäre die zusätzliche synchronisierende Leistung bei allen Werten von  $\vartheta_0$  gleich gross. Bei allen normalen Maschinen ist aber die totale synchronisierende Leistung (Kurve 3) bei  $\vartheta_0 = 0$ , d. h. bei Leerlauf, verhältnismässig wenig grösser als der stationäre Wert (Kurve 1). Erst bei ziemlich grossen Werten von  $\vartheta_0$  wird der Unterschied beträchtlich.

Die Gl. (29) für die Dämpfungsleistung ist ganz analog aufgebaut wie die zweite Zeile von Gl. (27). Die Dämpfungsleistung wird also durch eine ähnliche Kurve wie Kurve 2 von Fig. 9 dargestellt. Hier wäre es eher als bei der zusätzlichen synchronisierenden Leistung möglich, dass das Maximum nicht bei  $\vartheta_0 = 90^\circ$  liegt. Denn, wie die Kurve 2 von Fig. 7 zeigt, kann zu einer grössern Zeitkonstanten u. U. eine kleinere Dämpfungsleistung gehören. In der Regel ist aber doch die Dämpfungsleistung bei

$\vartheta_0 = 0$  am geringsten. Gl. (29) erklärt auch die bekannte Tatsache, dass lamellierte Rotoren ohne Dämpferwicklung im Leerlauf praktisch gar keine Schwingungsdämpfung besitzen; denn der Dämpfungskoeffizient  $K_q$  der Queraxe ist in diesem Fall natürlich sehr klein. Bei grösseren Werten von  $\vartheta_0$  kann dagegen eine solche Maschine trotzdem genügende Dämpfung haben, weil dann das zweite Glied von Gl. (29), das die Dämpfung durch die Hauptaxenwicklung darstellt, zur Wirkung kommt.

## 6. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen.

Im stationären Betrieb einer Synchronmaschine mit konstanter Erregung und Klemmenspannung stellt sich bei jeder Belastung ein ganz bestimmter Polradwinkel (Winkel zwischen den Vektoren der Klemmenspannung und Leerlaufspannung) ein. Umgekehrt ist das der elektrischen Wirkleistung entsprechende Drehmoment, das sog. synchrone Moment, eine eindeutige Funktion des Polradwinkels.

Während Pendelungen und andern mechanischen Ausgleichsvorgängen werden in den Rotorwicklungen (Erregerwicklung, Dämpferwicklung, massives Eisen) zusätzliche Ströme induziert. Daher ist das der elektrischen Wirkleistung entsprechende Drehmoment nicht gleich wie im stationären Betrieb beim gleichen Polradwinkel.

Da bei solchen mechanischen Ausgleichsvorgängen vorübergehend Abweichungen von der synchronen Winkelgeschwindigkeit vorkommen, liegt die Vermutung nahe, dass die ganze Abweichung des Drehmomentes vom stationären Wert nur durch den asynchronen Lauf verursacht werde. In diesem Fall müsste sich das totale Drehmoment in jedem Augenblick zusammensetzen aus dem stationären synchronen Moment beim jeweiligen Polradwinkel und dem sog. asynchronen Moment, d. h. demjenigen Drehmoment, das die Maschine im stationär-asynchronen Lauf beim gleichen Schlupf entwickeln würde. Diese Vermutung ist aber unrichtig. Insbesondere kann das Drehmoment während Ausgleichsvorgängen auch in einem Augenblick, wo die Winkelgeschwindigkeit genau synchron ist, vom stationären Wert des synchronen Momentes abweichen.

Bei Ausgleichsvorgängen kann man also im allgemeinen das totale Drehmoment nicht aus dem synchronen und asynchronen zusammensetzen. Das Drehmoment lässt sich nur als Ganzes berechnen, und eine Aufteilung in synchrones und asynchrones Moment wäre vollständig willkürlich. Lediglich in ganz speziellen, einfachen Fällen ist eine eindeutige Aufteilung möglich. Z. B. lässt sich bei Rotor-schwingungen kleiner Amplitude das totale Drehmoment aufteilen in eine Komponente, die der Winkelauslenkung proportional ist, und eine, die der relativen Winkelgeschwindigkeit proportional ist. In diesem Falle ist es berechtigt, die eine Komponente als synchrones, die andere als asynchrones Moment zu bezeichnen. Die Ableitung der ersten Komponente nach dem Polradwinkel ist das Drehmoment pro Winkelaus-

lenkung 1 und stellt somit das Richtmoment des schwingenden Polrades dar. Sie kann auch interpretiert werden als maximales «Feder»-Moment bei einer Schwingung von der Amplitude 1. Sie wird synchronisierendes Moment genannt. Der Koeffizient der zweiten Komponente, d. h. das maximale dämpfende Drehmoment bei einer Schwingung von der Amplitude 1, soll kurz Dämpfungsmoment genannt werden.

Das synchronisierende Moment ist grösser als bei stationärem Betrieb, d. h. grösser als die Ableitung des stationären synchronen Momentes nach dem Polradwinkel. Die zusätzlichen Ströme in den Rotorwicklungen erzeugen also nicht nur ein Dämpfungsmoment, sondern sie vergrössern ausserdem das synchronisierende Moment. Aus diesem Grunde wird die Eigenschwingungszahl des Rotors grösser als man aus der stationären Drehmomentkurve berechnet. Die Vergrösserung kann aber unter Umständen nur sehr gering sein, je nach der Art der Rotorkonstruktion. — Das synchronisierende und das Dämpfungsmoment sind Begriffe, die nur im Zusammenhang mit kleinen Rotorschwingungen einen Sinn haben, aber bei andern mechanischen Ausgleichsvorgängen nicht verwendet werden können.

Weit verbreitet ist die Meinung, dass man bei Ausgleichsvorgängen einfach statt der synchronen Reaktanz die Kurzschlussreaktanz in die Gleichung für das stationäre synchrone Moment einsetzen könne. Man setzt dabei voraus, dass während mechanischen Ausgleichsvorgängen die Luftspaltspannung (induzierte EMK) konstant bleibe. Nun ist aber die Luftspaltspannung bei weitem nicht konstant, und selbst wenn sie konstant wäre, würde die blosser Ersetzung der synchronen Reaktanz durch die Kurzschlussreaktanz nicht den richtigen Wert für das Drehmoment ergeben.

Im Gegensatz zu dieser sehr rohen und ungenauen Näherung scheint es dagegen in vielen Fällen zweckmässig, einen innern Spannungsvektor, der zwischen der Luftspaltspannung und der Leerlaufspannung liegt, als konstant anzunehmen und auf dieser Grundlage das Drehmoment zu berechnen. Selbstverständlich ist auch diese Annahme nur eine Näherung, aber sie wird den wirklichen Verhältnissen schon viel besser gerecht. Man findet auf diese Art eine Formel, die die sog. Pendelungsreaktanzen enthält, das sind Reaktanzen, die zwischen den synchronen und den Kurzschlussreaktanzen liegen.

Bei Annahme einer konstanten innern Spannung ergibt sich das Drehmoment als eindeutige Funktion des Polradwinkels. Alle Rotorschwingungen wären daher nach dieser Theorie vollkommen unge-

dämpft; denn eine Dämpfung kann ja nur dadurch zustande kommen, dass das Drehmoment beim gleichen Winkel für entgegengesetzte Bewegungsrichtungen verschiedene Werte hat. Man kann also mit der Annahme einer konstanten innern Spannung das Dämpfungsmoment, das bei Rotorschwingungen tatsächlich vorhanden ist, nicht berechnen. Das zeigt, dass diese Annahme, wie bereits erwähnt, nur eine Näherung ist. Dagegen kann man mit dieser Annahme, sofern man passende Werte für die Pendelungsreaktanzen einsetzt, das synchronisierende Moment vollständig genau berechnen. Die Methode der konstanten innern Spannung kann also in all den Fällen verwendet werden, wo die Dämpfung eine untergeordnete Rolle spielt.

Unter der Bedingung lässt sich diese Methode nicht nur bei kleinen harmonischen Schwingungen des Rotors verwenden, sondern auch bei andern mechanischen Ausgleichsvorgängen. Wenn man z. B. untersuchen will, ob Synchronmaschinen bei einer plötzlichen Laständerung, beim Abschalten von Leitungen oder bei Kurzschlüssen aussertritt fallen, so genügt es meistens, den maximalen Ausschlag der ersten Rotorschwingung, die durch diese Vorgänge angestossen wird, zu bestimmen. Für die Grösse des ersten Ausschlages ist nun die Dämpfung von ganz untergeordneter Bedeutung. Also kann man die erwähnte Methode mit Vorteil anwenden. Man berechnet damit natürlich nicht genau den richtigen Verlauf des Drehmomentes, kann aber trotzdem die erste Ueberschwingung richtig abschätzen und damit beurteilen, ob die Maschine aussertritt fällt oder nicht. Das Drehmoment, das man nach der obigen Methode berechnet, ist das totale Drehmoment (wenn auch nur angenähert richtig); ein asynchrones Moment ist also nicht mehr zu berücksichtigen. Man kann somit das totale Drehmoment in Funktion des Polradwinkels berechnen und dann die einfache Methode des Flächenvergleiches wie in Fig. 3 verwenden.

Man wird sich fragen, warum hier diese Näherungsmethode empfohlen wird. Der Grund liegt darin, dass die Differentialgleichungen für die Polradbewegung nach Belastungsänderungen, Kurzschlüssen usw. nicht in geschlossener Form gelöst werden können. Man müsste also eine Schritt-für-Schritt-Methode verwenden. Diese ist aber ausserordentlich zeitraubend und trotzdem nicht sehr genau.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit jener Näherungsrechnung ist allerdings, dass man die massgebenden Pendelungsreaktanzen für die verschiedenen Maschinentypen kennt. Am zweckmässigsten ist eine experimentelle Bestimmung.