Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 27 (1936)
Heft: 18

Artikel: Der Verlauf von Strom und Spannung längs einer Übertragungsleitung
Autor: Peter, Ernst
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057522

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

BULLETIN

RÉDACTION:
Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité, Zurich 8

EDITEUR ET ADMINISTRATION:
S. A. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zurich 4
Stauffacherquai 36/40

XXVIIe Année | Nº 18 | Vendredi, 4 Septembre 1936

Der Verlauf von Strom und Spannung längs einer Uebertragungsleitung.

Von *Ernst Peter*, Zürich-Oerlikon.

621.315.051

Die Grundgleichungen für die Berechnung von Strom und Spannung bei Uebertragungsleitungen enthalten bekanntlich hyperbolische Funktionen komplexer Argumente. Während sich diese Funktionen bei reellen Argumenten durch zwei einfache Kurven darstellen lassen, die der junge Ingenieur bei seinem Studium kennen lernt, liegen die Verhältnisse bei komplexen Argumenten scheinbar derart kompliziert, dass die meisten Ingenieure darüber sehr wenig orientiert sind. Für die Berechnung von kürzeren Leitungen kann man diese Funktionen in Reihen entwickeln und sich mit den ersten zwei bis drei Gliedern begnügen. Der Verfasser behandelt eine Darstellung, mit welcher man einen überraschend klaren Ueberblick über diese Funktionen gewinnt, und zwar für Argumente, deren reelle und imaginäre Komponenten in beliebigen positiven und negativen Grenzen variieren können. Dadurch ist man bei Leitungsberechnungen sowohl hinsichtlich der Leitungslänge als auch der Frequenz des Wechselstromes an keine Grenzen gebunden. Es kann daher auch der Schwachstromtechniker die gleiche Methode mühelos zum Studium der Uebertragung von Sprechströmen (Tonfrequenz) anwenden. An Stelle umständlicher Berechnungen tritt das einfache Ablesen aus einem Diagramm.

Les équations fondamentales pour le calcul du courant et de la tension dans les lignes de transmission contiennent des fonctions hyperboliques à arguments complexes. Lorsque les arguments sont réels, ces fonctions peuvent se représenter par deux courbes simples que le jeune ingénieur apprend à connaître au cours de ses études. Par contre, lorsque les arguments sont complexes, la situation paraît si compliquée que la plupart des ingénieurs en savent très peu. Pour calculer des lignes courtes, on peut développer ces fonctions en séries et se limiter aux deux ou trois premiers termes. L'auteur expose une méthode qui apporte une étonnante clarté dans ces fonctions, et cela pour des arguments dont les termes réels et imaginaires peuvent varier entre n'importe quelles limites positives et négatives. De la sorte, le calcul des lignes n'est plus lié à aucune limite, tant au point de vue de la longueur des lignes que de la fréquence du courant alternatif. Le technicien à courant faible peut donc sans autre utiliser cette méthode pour l'étude de la transmission des courants à fréquence musicale. Les calculs compliqués sont remplacés par la simple lecture d'un diagramme.

A. Ableitung der Grundgleichungen.

Sind bei einer Uebertragungsleitung Spannung und Strom an einem bestimmten Punkt in ihrer vektoriellen Grösse (d. h. absoluter Betrag und Phasenverschiebungswinkel) gegeben, so kann man Strom und Spannung für jeden beliebigen Leitungspunkt berechnen, wenn die Leitungskonstanten bekannt sind.

Es bedeute:

s die Leitungslänge in km;

$\omega = 2\,\pi\,f$ die Kreisfrequenz;

$z = r + jx = r + j\,\omega\,l$ den Impedanz-Vektor in Ohm pro Phase und pro km;

$y = g + jb = g + j\,\omega\,c$ den Admittanz-Vektor in Siemens pro Phase und pro km;

U_0 den Vektor der Sternspannung an dem gegebenen Punkt;

I_0 den Vektor des Stromes an dem gegebenen Punkt;

U den Vektor der Sternspannung an dem gesuchten Punkt;

I den Vektor des Stromes an dem gesuchten Punkt.

Der gegebene Punkt, der als Nullpunkt bezeichnet werden soll, liege irgendwo auf der Leitung und diese sei nach beiden Seiten beliebig weit fortgeführt. Wie bei allen Problemen mit vektoriellen Spannungs- und Stromdiagrammen muss man längs der Leitung eine positive Bezugsrichtung wählen und die Entfernung s von dem gegebenen Nullpunkt in der Bezugsrichtung positiv, entgegen der Bezugsrichtung negativ bezeichnen. Auch in der Richtung quer zur Leitung muss man eine positive Bezugsrichtung wählen, und zwar sei sie positiv in der Richtung von der Erde (oder eventuell von einem Nulleiter) nach einem Phasenleiter. In der Zeichnungsebene, in welcher die rotierenden Vektoren dargestellt werden, sei die positive reelle Axe horizontal nach rechts und die positiv imaginäre Axe vertikal nach oben gerichtet. Die Strom- und Spannungs-Vektoren sollen zeitlich im Gegenuhrzeigersinn rotieren und werden derart aufgetragen, dass sie mit der positiv reellen Axe einen spitzen Winkel einschliessen, wenn sie zur Zeit $t = 0$ in der Bezugsrichtung einen positiven Wert haben.

Unter diesen Voraussetzungen gelten dann folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s} = -Iz \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}s} = -Uy \qquad (1)$$

Durch nochmalige Differenziation erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2U}{ds^2} &= -z\frac{dI}{ds} = +zyU \\ \frac{d^2I}{ds^2} &= -y\frac{dU}{ds} = +zyI \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die allgemeine Lösung für U lautet

$$U = K_1 \varepsilon^{s\sqrt{yz}} + K_2 \varepsilon^{-s\sqrt{yz}} \quad (3)$$

Hieraus findet man

$$-\frac{1}{z}\frac{dU}{ds} = I = -K_1\sqrt{\frac{y}{z}}\varepsilon^{s\sqrt{yz}} + K_2\sqrt{\frac{y}{z}}\varepsilon^{-s\sqrt{yz}} \quad (4)$$

Ist für $s = 0$, $U = U_0$ und $I = I_0$, so kann man die Integrationskonstanten berechnen und findet

$$\left.\begin{aligned} U &= \\ &\frac{1}{2}\left(U_0 - I_0\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\varepsilon^{s\sqrt{yz}} + \frac{1}{2}\left(U_0 + I_0\sqrt{\frac{z}{y}}\right)\varepsilon^{-s\sqrt{yz}} \\ I &= \\ &\frac{1}{2}\left(I_0 - U_0\sqrt{\frac{y}{z}}\right)\varepsilon^{s\sqrt{yz}} + \frac{1}{2}\left(I_0 + U_0\sqrt{\frac{y}{z}}\right)\varepsilon^{-s\sqrt{yz}} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Fasst man in den Gleichungen (5) je die Glieder mit U_0 und I_0 zusammen, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 \operatorname{Cos} s\sqrt{yz} - I_0\sqrt{\frac{z}{y}}\operatorname{Sin} s\sqrt{yz} \\ I &= I_0 \operatorname{Cos} s\sqrt{yz} - U_0\sqrt{\frac{y}{z}}\operatorname{Sin} s\sqrt{yz} \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Wenn man die Wahl der Bezugsrichtung konsequent durchführt, so gelten diese Gleichungen unter allen Umständen, ob nun I_0 und U_0 die gegebenen Werte am Anfang der Leitung (Generatorenwerte), I und U die gesuchten Werte am Ende der Leitung (Verbraucherwerte) darstellen oder ob das Umgekehrte der Fall ist. Dies steht im Gegensatz zu den Ausführungen mehrerer anderer Autoren, welche die Leitungslänge einfach als eine positive Grösse annehmen und dann das Gleichungssystem (6) nach I_0 und U_0 auflösen, wodurch sowohl U_0 und U als auch I_0 und I ihre Plätze vertauschen, während die mit dem Sin behafteten Glieder ihr Vorzeichen wechseln. Dieser Vorzeichenwechsel erscheint für die Zwecke dieses Artikels ungeeignet. Durch Einführung der Bezugsrichtungen [1]) gelingt es, ihn zu vermeiden; ebenso wird das Auflösen des Systems (6) nach U_0 und I_0 überflüssig.

Der nötige Richtungswechsel der zweiten Glieder der beiden Gleichungen vollzieht sich automatisch, ohne dass am Vorzeichen etwas zu ändern ist, da die beiden Sin-Vektoren beim Einsetzen einer negativen Leitungslänge sich um 180° drehen, während die beiden Cos-Vektoren ihre Richtungen beibehalten. Da die Wahl der positiven Bezugsrichtung willkürlich erfolgt ist, so kann sie jederzeit wieder geändert werden, wenn man nicht gern mit negativen Leitungslängen rechnet. Dann sind aber beide Stromvektoren um 180° zu verdrehen, während die beiden Spannungsvektoren ihre Richtung beibehalten.

[1]) Siehe A. von Brunn: «Die Bedeutung des Bezugssinnes in Vektordiagrammen», Bull. SEV 1922, S. 385, 449, und A. von Brunn: «Neue Methoden zur graphischen Bestimmung von Wechselstrom-Ortskurven», Bull. SEV 1929, S. 65.

Die Ueberlegungen sind besonders wichtig bei Leitungen mit wechselnder Energiefluss-Richtung, bei welchen die Begriffe «Anfang» und «Ende» ihre Bedeutung verlieren.

Die Wirkleistung soll dann positiv sein, wenn sie in der Bezugsrichtung fliesst, Strom und Spannungsvektor bilden dann einen spitzen Winkel. Bei einem Wechsel der Bezugsrichtung wird dieser Winkel stumpf, da der Stromvektor um 180° verdreht wird, während der Spannungsvektor unverändert bleibt. Die früher positive Leistung wird dadurch negativ.

Die meisten Autoren verwenden die Gleichungen (6) mit hyperbolischen Funktionen. Da jedoch in den technischen Handbüchern für Kreisfunktionen ausführlichere Formelsammlungen zur Verfügung stehen, welche ohne weiteres auch für komplexe Argumente gelten, sollen die Gleichungen (6) auf Kreisfunktionen umgeformt werden. Dies ist um so eher berechtigt, als bei verlustlosen Leitungen oder bei sehr hohen Frequenzen ohnehin Kreisfunktionen mit reellen Argumenten auftreten. Es gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sin jx &= j\operatorname{Sin} x \quad \operatorname{Sin} jx = j\sin x \\ \cos jx &= \operatorname{Cos} x \quad \operatorname{Cos} jx = \cos x \\ \operatorname{tg}\ jx &= j\operatorname{Tg} x \quad \operatorname{Tg}\ jx = j\operatorname{tg} x \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wenn man diese Beziehungen in Gl. (6) einsetzt, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0 \cos js\sqrt{yz} + I_0 j\sqrt{\frac{z}{y}}\sin js\sqrt{yz} \\ I &= I_0 \cos js\sqrt{yz} + U_0 j\sqrt{\frac{y}{z}}\sin js\sqrt{yz} \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Auch diese beiden Gl. (8) gelten in allen Fällen ohne Vorzeichenwechsel.

Die Summe einer cos- und einer sin-Funktion kann man wie bei jeder Wellenbewegung auch hier mit den komplexen Argumenten in eine einzige Kreisfunktion verwandeln nach folgendem Ansatz:

$$U = A\cos(js\sqrt{yz} + \alpha_0) = A\cos\alpha \quad (9)$$

wobei $\alpha = \alpha_0 + js\sqrt{yz}$ ist; A und α_0 sind jetzt die zu bestimmenden Integrationskonstanten.

Aus Gl. (9) erhält man

$$U = A\,(\cos\alpha_0 \cos js\sqrt{yz} - \sin\alpha_0 \sin js\sqrt{yz})$$

Aus Gl. (8) erhält man

$$U = A\left(\frac{U_0}{A}\cos js\sqrt{yz} + \frac{jI_0\sqrt{\frac{z}{y}}}{A}\sin js\sqrt{yz}\right)$$

Da beide Gleichungen identisch sind, wird

$$\cos\alpha_0 = \frac{U_0}{A} \qquad \sin\alpha_0 = \frac{-jI_0\sqrt{\frac{z}{y}}}{A}$$

Quadriert und addiert ergibt sich

$$\cos^2\alpha_0 + \sin^2\alpha_0 = \frac{U_0^2 - I_0^2\frac{z}{y}}{A^2} = 1$$

Hieraus $$A = \sqrt{U_0^2 - I_0^2 \frac{z}{y}} \qquad (10)$$

Damit ergibt sich endgültig

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_0 &= \frac{U_0}{\sqrt{U_0^2 - I_0^2\frac{z}{y}}} \qquad \sin\alpha_0 = \frac{-jI_0\sqrt{\frac{z}{y}}}{\sqrt{U_0^2 - I_0^2\frac{z}{y}}} \\ \operatorname{tg}\alpha_0 &= -j\frac{I_0}{U_0}\sqrt{\frac{z}{y}} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

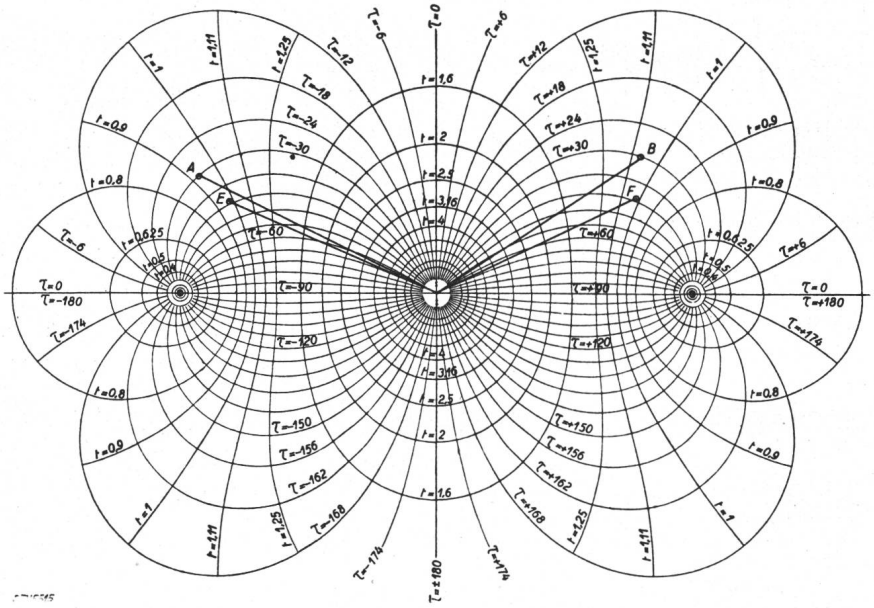
Aehnlich erhält man

$$I = B\cos(js\sqrt{yz} + \beta_0) = B\cos\beta \qquad (12)$$

wobei $\beta = \beta_0 + js\sqrt{yz}$ ist

$$B = \sqrt{I_0^2 - U_0^2\frac{y}{z}} \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\beta_0 &= \frac{I_0}{\sqrt{I_0^2 - U_0^2\frac{y}{z}}} \qquad \sin\beta_0 = \frac{-jU_0\sqrt{\frac{y}{z}}}{\sqrt{I_0^2 - U_0^2\frac{y}{z}}} \\ \operatorname{tg}\beta_0 &= -j\frac{U_0}{I_0}\sqrt{\frac{y}{z}} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$



Zwischen den Grössen A, B, α_0, β_0 bestehen die Beziehungen

$$\left(\frac{A}{B}\right)^2 = -\frac{z}{y} \qquad \operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\beta_0 = -1 \qquad (15)$$

Hieraus $\alpha_0 - \beta_0 = \pm 90°$.

Die Gl. (9) und (12) können jetzt noch etwas vereinfacht werden. Unter Zuhilfenahme der Gl. (9) bis (14) ergibt sich

$$U = A\cos\alpha = \cos\alpha\sqrt{U_0^2 - I_0^2\frac{z}{y}} = U_0\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_0} \qquad (16)$$

$$I = B\cos\beta = \cos\beta\sqrt{I_0^2 - U_0^2\frac{y}{z}} = I_0\frac{\cos\beta}{\cos\beta_0}$$

B. Das Hilfs-Cosinus-Diagramm.

Die Formel (11) kann noch etwas umgeformt werden.

$$\cos\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{I_0^2 z}{U_0^2 y}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_0}} \qquad (17)$$

Die Gl. (11) und (17) sind ziemlich kompliziert und es würde daher für den praktischen Betriebsmann zu umständlich sein, den $\cos\alpha_0$ jedesmal nach diesen Formeln zu berechnen. Es wurde daher in dem Hilfs-Cosinus-Diagramm nach Fig. 1 die Beziehungen zwischen den Vektoren $\cos\alpha_0$ und

$$j\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{I_0}{U_0}\sqrt{\frac{z}{y}}$$

graphisch dargestellt.

Angenommen, der Vektor $j\operatorname{tg}\alpha_0$ habe den absoluten Betrag t und den Richtungswinkel τ. Für konstante Werte von τ und variable Werte von t erhält man Kurven, die in Fig. 1 mit $\tau = 0°$, $\tau = 6°$, $\tau = 12°$ ... usw. angeschrieben sind.

Für konstantes t und variables τ dagegen ergeben sich Kurven, die mit $t = 0{,}8$, $t = 1$, $t = 1{,}25$ ... usw. angeschrieben sind.

Fig. 1.

Das Hilfs-Cosinus-Diagramm.

Es sei entweder $j\operatorname{tg}\alpha = \frac{I}{U}\sqrt{\frac{z}{y}} = t\cdot\varepsilon^{j\tau}$

oder $j\operatorname{tg}\beta = \frac{U}{I}\sqrt{\frac{y}{z}} = t\cdot\varepsilon^{j\tau}$

Dann zeigt dieses Diagramm den Cosinus als Funktion des Tangens, d. h. als Funktion von t und τ. Der Richtungswinkel τ ist in Intervalle von 6 Grad eingeteilt; für den absoluten Betrag t wurden folgende Werte angenommen:

t = 0,1 — 0,125 — 0,16 — 0,2 — 0,25 — 0,316 — 0,4 — 0,5 — 0,625 — 0,8 — 0,9 — 1 — 1,11 — 1,25 — 1,6 — 2 — 2,5 — 3,16 — 4 — 5 — 6,25 — 8 — 10

Die ersten Werte liegen in der Nähe der Punkte +1 und —1 und können in der Verkleinerung nicht mehr genau abgelesen werden.

Mit Hilfe des Diagrammes nach Fig. 1 findet man daher zu einem beliebigen Wertepaar (t, τ) leicht den zugehörigen Vektor $\cos\alpha_0$ (bzw. seine Spitze) als den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Kurven «t = konstant» und «τ = konstant».

Für eine bestimmte gegebene Leitung ist der Ausdruck $\sqrt{\frac{z}{y}}$ eine konstante Grösse. Normalerweise will man die Spannung U_0 an einem Verbraucher-Punkt der Leitung konstant halten. Dann ist von dem Ausdruck $\frac{I_0}{U_0}\sqrt{\frac{z}{y}}$ der Strom I_0 die einzige Variable und das Diagramm Fig. 1 stellt den $\cos\alpha_0$ als Funktion des Stromvektors dar. Wenn

der Wert $I_n = U_0 \sqrt{\frac{y}{z}}$ als Normalstrom bezeichnet wird, dann bedeuten die in Fig. 1 eingetragenen Werte «t = konstant» einfach ein Vielfaches des Normalstromes.

Das Hilfs-Cosinus-Diagramm kann aber auch in gleicher Weise für den cos β_0 benutzt werden. Dieser ist dann eine Funktion von $j \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{U_0}{I_0} \sqrt{\frac{y}{z}}$, also bei konstanter Spannung ebenfalls eine Funktion des Strom-Vektors I_0. Nur muss man jetzt dessen reziproken Wert nehmen. Aus diesem Grunde wurde das System der Kurven «t = konstant» in Fig. 1 derart gewählt, dass zu jeder Kurve «t = konstant» auch die Kurve des reziproken Wertes von t vorhanden ist.

C. Das Cosinusdiagramm.

Das eigentliche Cosinus-Diagramm stellt die Beziehungen dar zwischen dem Argument-Vektor α und dem Funktions-Vektor cos α. Das Argument α der Cosinus-Funktion kann in der Form

$$\alpha = p + jq$$

geschrieben werden, wo p und q reelle Zahlen sind. Man kann jetzt ohne weiteres bekannte Formeln aus der Trigonometrie anwenden und erhält

$$\cos \alpha = \cos (p + jq) = \cos p \cos jq - \sin p \sin jq$$
$$= \cos p \, \mathfrak{Cos}\, q - j \sin p \, \mathfrak{Sin}\, q = m + jn \quad (18)$$

Wird in Gl. (18) q konstant gelassen und p variiert, so stellt sich die Cosinusfunktion $(m + jn)$ als eine Ellipse dar mit den Halbaxen $\mathfrak{Cos}\, q$ und $\mathfrak{Sin}\, q$. Der halbe Brennpunktabstand wird

$$\sqrt{(\mathfrak{Cos}\, q)^2 - (\mathfrak{Sin}\, q)^2} = 1$$

Wird dagegen p konstant gelassen und q variiert, so erhält man eine Hyperbel mit den Halbaxen cos p und sin p. Der halbe Brennpunktabstand wird

$$\sqrt{(\cos p)^2 + (\sin p)^2} = 1$$

Gibt man nun sowohl p als auch q der Reihe nach verschiedene Werte, so erhält man ein System von sich rechtwinklig kreuzenden konfokalen Ellipsen und Hyperbeln.

Fig. 2 stellt ein Cosinusdiagramm dar, in welchem sowohl reelle als auch imaginäre Komponenten des Argumentes $\alpha = p + jq$ in Intervallen von $\frac{\pi}{30} = 6$ Grad sich sprungweise ändern. Da die Intervalle in beiden Richtungen gleich sind, entsteht ein System von krummlinigen Quadraten [2]).

Wie bei reellen Argumenten, so gilt auch hier

$$\cos (p + jq) = \cos (-p - jq)$$

Im Diagramm nach Fig. 2 sind nur die Werte für $0 < p < +180°$ mit den zugehörigen Werten von q aufgetragen. Zu jedem Punkt des Diagrammes gehört also noch ein zweites Wertepaar (p, q), dessen beide Komponenten entgegengesetztes Vorzeichen haben.

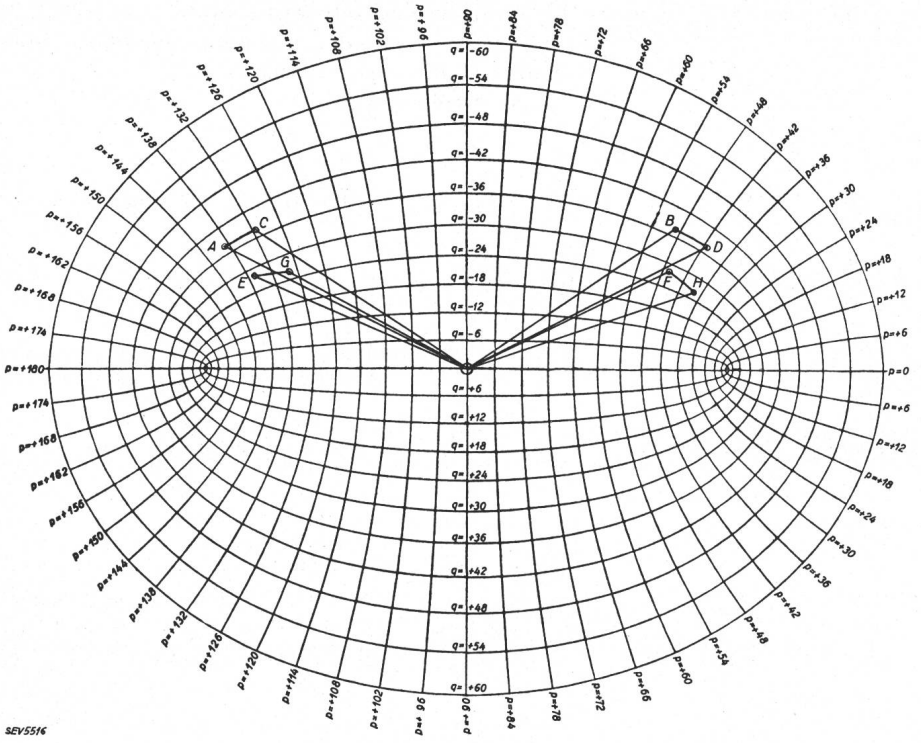


Fig. 2.

Das Haupt-Cosinus-Diagramm

zeigt den Cosinus als Funktion seines Argumentes. Reelle und imaginäre Komponenten des Argumentes sind in Intervalle von 6 Grad = $\frac{\pi}{30}$ eingeteilt. Zu jedem Punkt des Diagrammes gehört noch ein zweiter Argumentwert, dessen beide Komponenten entgegengesetztes Vorzeichen haben.

D. Das Tangensdiagramm.

Das Tangensdiagramm stellt die Beziehungen dar zwischen dem Argument-Vektor α und dem Funktions-Vektor tg α.

Eine wichtige Eigenschaft der Tangensfunktion findet man folgendermassen: Es ist

$$\varepsilon^{j2\alpha} = \varepsilon^{-2q+2jp} = \frac{\cos \alpha + j \sin \alpha}{\cos \alpha - j \sin \alpha} = \frac{1 + j \operatorname{tg} \alpha}{1 - j \operatorname{tg} \alpha}$$

[2]) S. Literaturhinweise Nrn. 8 bis 10 am Schluss.

$$\varepsilon^{-2q+j(2p\pm\pi)} = \frac{j\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1}{j\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - j}{\mathrm{tg}\,\alpha + j} \qquad (19)$$

In Fig. 3 sei $OA = +j$
$OB = -j$
$OP = \mathrm{tg}\,\alpha$

Dann wird

$$\frac{AP}{BP} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - j}{\mathrm{tg}\,\alpha + j} = \varepsilon^{-2q+j(2p\pm\pi)}$$

Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

a) Der absolute Betrag von $\frac{r_1}{r_2}$ ist gleich ε^{-2q}. Bleibt q konstant, so bleibt dieser absolute Betrag konstant und der Punkt P beschreibt einen Kreis, der entweder den Punkt $A = +j$ oder den Punkt $B = -j$ umschlingt. In der Geometrie wird er appolonischer Kreis genannt.

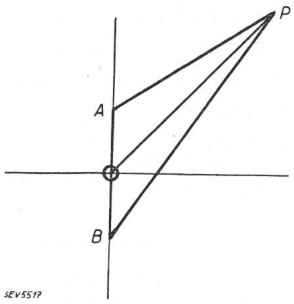


Fig. 3.

b) Der Winkel, den die beiden Abstände r_1 und r_2 einschliessen, ist $2p \pm \pi$. Bleibt p konstant, so bleibt dieser Winkel konstant und der Punkt P beschreibt einen Kreis durch die Punkte A und B.

Gibt man den Grössen p und q verschiedene Werte, so erhält man zwei Systeme von sich rechtwinklig kreuzenden Kreisen. Die Kreise des einen Systems umschliessen alle entweder den Punkt $+j$ oder $-j$, die Kreise des andern Systems gehen alle durch beide Punkte $+j$ und $-j$ hindurch.

Fig. 4 stellt ein Tangensdiagramm dar, in welchem wie beim Cosinusdiagramm nach Fig. 2 beide Komponenten des Argumentes in Intervallen von $\frac{\pi}{30} = 6°$ sich ändern.[3])

Wie bei reellen Argumenten, so gilt auch hier

$$\mathrm{tg}\,(p + jq \pm n\pi) = \mathrm{tg}\,(p + jq)$$

wobei n eine beliebige, ganze, reelle Zahl ist.

Im Diagramm nach Fig. 4 sind nur die Werte für $0° < p° < 180°$ eingetragen mit den zugehörigen Werten von q. Zu jedem p-Wert kann also noch n mal 180° addiert oder subtrahiert werden.

E. Die verlustlose Leitung.

Nach den Vorbereitungen der ersten Abschnitte sollen jetzt die Leitungsprobleme behandelt und zunächst der Idealfall der verlustlosen Leitung betrachtet werden. Es sei also sowohl der ohmsche Widerstand längs der Leitung als auch die ohmsche Ableitung quer zur Leitung gleich Null.

$$r = 0 \text{ und } g = 0$$

Dann wird

$$yz = jxjb = -xb = -\omega^2 lc$$

[3]) S. Literaturhinweise Nrn. 8 bis 10 am Schluss.

Für Freileitungen gilt mit grosser Annäherung

$$lc = \left(\frac{1}{v_L}\right)^2 \qquad (20)$$

wo v_L die Lichtgeschwindigkeit ist. Dann wird

$$yz = -\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 \quad \text{also} \quad \sqrt{yz} = j\frac{\omega}{v_L} \text{ und}$$

$$js\sqrt{yz} = -s\frac{\omega}{v_L} \qquad (21)$$

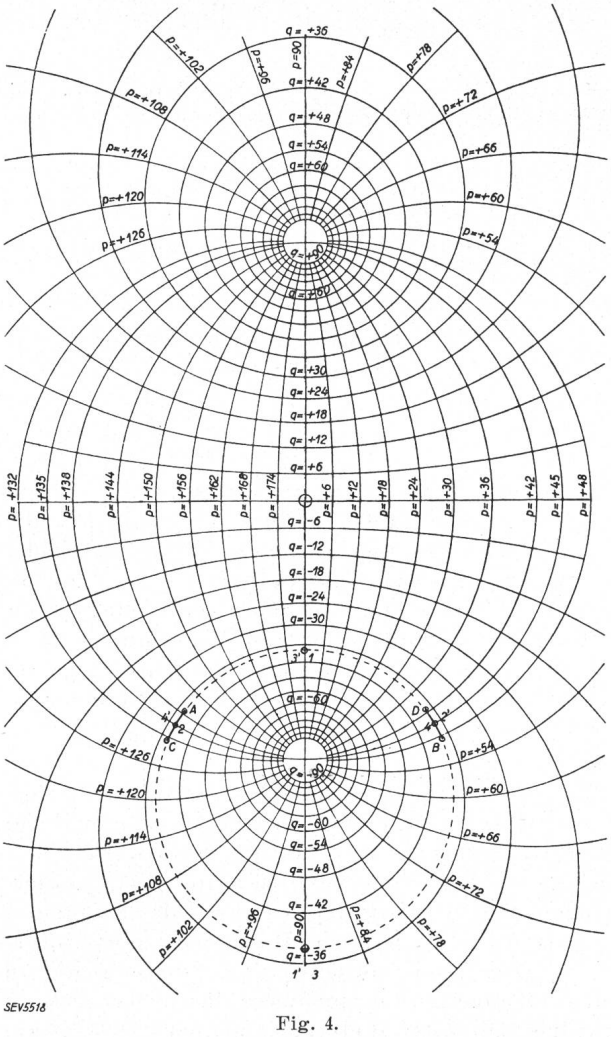


Fig. 4.

Das Tangens-Diagramm

zeigt den Tangens als Funktion seines Argumentes. Reelle und imaginäre Komponente des Argumentes sind in Intervalle von 6 Grad $= \frac{\pi}{30}$ eingeteilt. In jedem Punkt des Diagrammes können zum Argument noch n mal 180 reelle Grade addiert oder subtrahiert werden.

Damit wird

$$\alpha = \alpha_0 - s\frac{\omega}{v_L} = p + jq;\ \alpha_0 = p_0 + jq_0$$

$$p - p_0 = -s\frac{\omega}{v_L};\ q - q_0 = 0;\ q = q_0$$

Das konstante Glied α_0 ist eine komplexe Grösse, das variable Glied $s\frac{\omega}{v_L}$ dagegen rein reell. Bei einer

Veränderung des Weges s ändert sich daher nur die reelle Komponente p des Argumentes α, während seine imaginäre Komponente $q = q_0$ konstant bleibt. Nach den Abschnitten C und D beschreibt daher der Cosinusvektor eine Ellipse, der Tangensvektor einen appolonischen Kreis.

Nach Gl. (11) und (14) ist

$$j \operatorname{tg} \alpha = \frac{I}{U}\sqrt{\frac{z}{y}} \qquad j \operatorname{tg} \beta = \frac{U}{I}\sqrt{\frac{y}{z}}$$

Die Grösse $\sqrt{\frac{z}{y}}$ ist die Wellen-Impedanz, ihr reziproker Wert $\sqrt{\frac{y}{z}}$ die Wellen-Admittanz. Die Grösse $\frac{U}{I}$ soll die Belastungs-Impedanz, die Grösse $\frac{I}{U}$ die Belastungs-Admittanz genannt werden. Es ist also

$$\left.\begin{aligned} j \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{Belastungs-Admittanz}}{\text{Wellen-Admittanz}} \\ j \operatorname{tg} \beta &= \frac{\text{Belastungs-Impedanz}}{\text{Wellen-Impedanz}} \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

In diesen beiden Ausdrücken sind die Nenner der Brüche Konstante für eine gegebene Leitung, nur die Zähler sind variabel. Die Tangensdiagramme zeigen also unmittelbar den Verlauf der Belastungs-Admittanz und Impedanz längs einer Leitung. Man kann daher das Diagramm des Vektors tg α das Admittanz-Diagramm, dasjenige des Vektors tg β das Impedanz-Diagramm nennen.

Zahlenbeispiel 1.

Es soll jetzt ein praktisches Beispiel durchgerechnet werden und es sei dazu die von den Bernischen Kraftwerken A.-G. und der Kraftwerke Oberhasli A.-G. betriebene 150 kV-Leitung von Innertkirchen über den Brünigpass, durch das Emmental-Bickingen-Pieterlen nach Mühleberg gewählt. Es ist eine Drehstrom-Doppelleitung. Die sechs Leitungen sind ungefähr in einem regulären Sechseck angeordnet. Die totale Leitungslänge beträgt 124,1 km.

Aus dem im Bull. SEV 1931, S. 212, Fig. 7, abgebildeten Profil der genannten Leitung und dem Leiterdurchmesser von 18,85 mm kann man die Leitungskonstanten l und c berechnen. Man erhält für die Doppelleitung

$$l = 0{,}64 \quad \text{mH/km}$$
$$c = 0{,}018 \quad \mu\text{F/km}$$

Im genannten Bulletin SEV sind gemessene Werte nur für die Einfachleitung angegeben. Sie decken sich mit den vom Verfasser ebenfalls berechneten Werten $l = 1{,}32$ mH/km und $c = 0{,}00875$ μF/km für die Einfachleitung. Im folgenden wird nur die Doppelleitung behandelt. Man erhält zunächst

$$l\,c = 0{,}64 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}} \cdot 0{,}018 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{km}}$$

$$= 0{,}115 \cdot 10^{-10} \left(\frac{\text{s}}{\text{km}}\right)^2 = \frac{1}{\left(2{,}95 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2} = \frac{1}{v^2}$$

v ist die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit unserer Leitung; sie ist mit $2{,}95 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ nur wenig kleiner als die Lichtgeschwindigkeit v_L, die bekanntlich $3 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ ist. Nimmt man an Stelle der massiven Seile unendlich dünnwandige Hohlseile, so fällt das magnetische Feld im Innern der Leiter weg und damit wird die Induktivität nur noch 0,615 mH/km. Dann wird die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit genau gleich der Lichtgeschwindigkeit, also $v = v_L$.

Wenn $v = v_L$ ist, erhält man für eine 100 km lange Leitung bei einer Frequenz von 50 Per./s

$$-js\sqrt{yz} = \frac{s\,2\pi f}{v_L} = \frac{100 \cdot 2\pi \cdot 50}{300\,000} = \frac{\pi}{30} = 6 \text{ Grad.}$$

Dies ist aber im Cosinus- und im Tangens-Diagramm nach Fig. 2 und 4 gerade die Intervallendifferenz zweier benachbarter Kurven. Sie wurde absichtlich so gewählt, um bei 50 Per./s mit einem Blick gerade 100 km mit ziemlich grosser Genauigkeit ablesen zu können. Es ergibt sich nun:

Für 50 Per./s entspricht einer ganzen Ellipse im Cosinus-Diagramm angenähert eine Leitungsstrecke von 6000 km, einem ganzen appolonischen Kreis des Tangensdiagrammes eine Strecke von 3000 km bei verlustlosen Freileitungen.

Da jedoch in dem vorliegenden Beispiel die Fortpflanzungsgeschwindigkeit etwas kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, so erhält man für 100 km 6,1 Grad und im Cosinus- und im Tangensdiagramm für die vorgedruckte Intervallendifferenz von 6 Grad nur 98,5 km.

Die Leitung von Innertkirchen nach Mühleberg hat eine Länge von 124,1 km, was einem Argument von $6{,}1 \cdot 1{,}24 = 7{,}56$ Grad entspricht. Die Wellen-Impedanz wird

$$\sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 10^{-3}}{0{,}018 \cdot 10^{-6}}} = 188{,}5 \text{ Ohm}$$

Dieser Wert ist bei verlustlosen Leitungen rein reell.

Die verkettete Nennspannung beträgt 150 kV, die Sternspannung U somit 86,6 kV. Bei Vollbetrieb des Kraftwerkes Handeck stehen in Innertkirchen $4 \cdot 28\,000 = 112\,000$ kVA zur Verfügung, die nach Mühleberg transportiert werden können. Der Betriebsstrom wird dann 430 A. Der Normalstrom für die Doppelleitung wird:

$$I_n = U_0\sqrt{\frac{y}{z}} = \frac{\text{Spannung}}{\text{Wellenimpedanz}} = \frac{86\,600 \text{ V}}{188{,}5 \text{ Ohm}}$$
$$= 460 \text{ A.}$$

Man erhält somit:

$$\frac{\text{Betriebsstrom}}{\text{Normalstrom}} = \frac{430}{460} = 0{,}935$$

Diese Leistung werde unter einem Leistungsfaktor cos φ von 0,866 in Innertkirchen mit voreilender Spannung von Innertkirchen nach Mühleberg übertragen, was einem Verschiebungswinkel von + 30 Grad zwischen Spannungs- und Strom-Vektor entspricht. Die Belastungsimpedanz ist dann

$$\frac{U}{I} = \frac{86\,600 \text{ V } \varepsilon^{j30}}{430 \text{ A}} = 201\ \varepsilon^{j\,30} \text{ Ohm}$$

Hieraus ergeben sich nach Gl. (22) für die Tangens-Vektoren

$$j \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{188{,}5}{201\ \varepsilon^{j\,30}} = 0{,}935\ \varepsilon^{-j\,30}$$

$$j \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{201\ \varepsilon^{j\,30}}{188{,}5} = 1{,}07\ \varepsilon^{+j\,30}$$

Um nun den cos α_0 zu bestimmen, wird das Hilfs-Cosinus-Diagramm nach Fig. 1 benützt und dort der Schnittpunkt der beiden Kurven «$t = 0{,}935$» und «$\tau = -30°$» gesucht. Um cos β_0 zu bestimmen, wird der Schnittpunkt der beiden Kurven «$t = 1{,}07$» und «$\tau = +30°$» gesucht. Man erhält auf diese Weise die beiden Punkte A und B in Fig. 1.

Horizontale und vertikale Komponenten der Punkte A und B werden nun mit dem Maßstab oder Zirkel von Fig. 1 auf Fig. 2 übertragen. Es ist jedoch von grossem Vorteil, wenn man sich von dem Haupt-Cosinus-Diagramm nach Fig. 2 einige Exemplare auf durchsichtigem Papier herstellt, und zwar in demselben Maßstab wie Fig. 1[4]). Mit diesen kann man einfach die beiden Fig. 1 und 2 aufeinanderlegen und die beiden gefundenen Punkte A und B von Fig. 1 auf Fig. 2 übertragen. In Fig. 2 liegen jetzt beide Punkte auf derselben Ellipse, nämlich «$q = -37{,}5°$», Punkt A liegt auf der Hyperbel «$p = 138{,}8°$», Punkt B auf der Hyperbel «$p = 48{,}8°$». Man findet Gl. (15) bestätigt, nach welcher $\alpha_0 - \beta_0 = \pm 90°$ ist. Dies gibt eine wertvolle Kontrolle.

Wie weiter oben berechnet, ist für die ganze Leitung von Innertkirchen bis Mühleberg der Wert $js\sqrt{yz} = 7{,}56$ Grad. Wenn der Bezugssinn von Innertkirchen bis Mühleberg positiv gewählt wird (es sei hier nochmals auf die Ausführungen im Abschnitt A betreffend Bezugssinn verwiesen), so erhält man für s in Mühleberg einen positiven Wert, somit wird $s\,\frac{\omega}{v}$ positiv. Damit wird in Mühleberg

$$\alpha = \alpha_0 - s\,\frac{\omega}{v} = 138{,}8^0 - j\,37{,}5^0 - 7{,}56^0$$
$$= 131{,}24^0 - j\,37{,}5^0$$

$$\beta = \beta_0 - s\,\frac{\omega}{v} = 48{,}8^0 - j\,37{,}5^0 - 7{,}56^0$$
$$= 41{,}24^0 - j\,37{,}5^0$$

[4]) Transparente Diagramme können vom Verfasser (Chaletweg 9, Zürich 11) bezogen werden.

Damit ergeben sich die Endpunkte C und D der Spannungs- und Stromkurven (Fig. 2).

Man findet damit den allgemein gültigen Satz: Bei verlustfreien Leitungen verdrehen sich die Vektoren cos α und cos β im Uhrzeigersinn, beim Wandern auf der Leitung im Sinne des Wirkleistungsflusses (wenn man die Strom- und Spannungs-Vektoren *zeitlich* im Gegenuhrzeigersinn rotieren lässt, was heute als das Normale gilt). Der Satz ist unabhängig von der Wahl der Bezugsrichtung.

Nach Gl. (16) ist $U = A \cos \alpha$ und $I = B \cos \beta$.

Nach Gl. (15) ist $\frac{A}{B} = \pm j \sqrt{\frac{z}{y}}$

Da bei verlustfreien Leitungen $\sqrt{\frac{z}{y}}$ rein reell ist, so stehen die Vektoren A und B senkrecht aufeinander. Um daher aus dem Verlauf der Cosinus-Vektoren den Verlauf der Strom- und Spannungs-Vektoren in ihrer richtigen gegenseitigen Lage zu finden, wird das Spannungsdiagramm unverändert gelassen und das Stromdiagramm um 90 Grad in dem Sinne verdreht, dass zwischen den gegebenen Vektoren U_0 und I_0 der gegebene Phasenverschiebungswinkel von 30° erscheint. Man erhält damit zwei senkrecht aufeinanderstehende kongruente Ellipsen

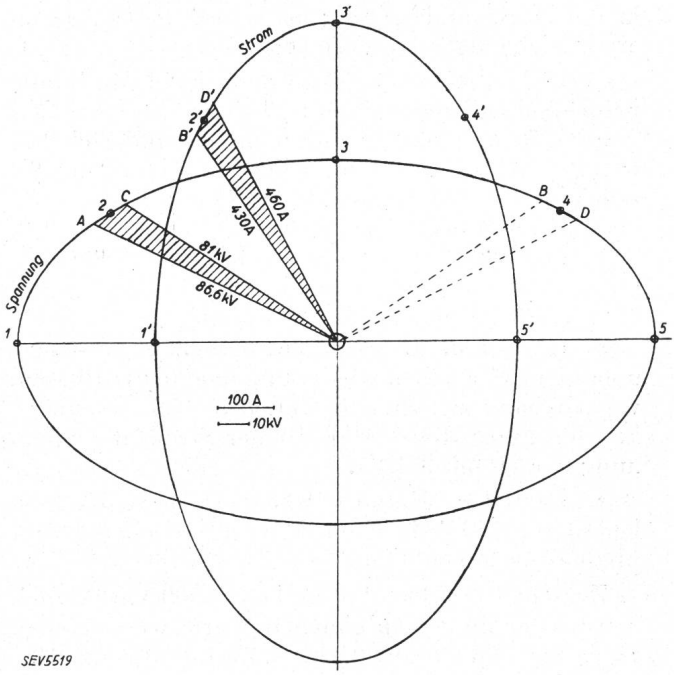


Fig. 5.
Spannung- und Strom-Diagramm der verlustlosen Leitung in richtiger gegenseitiger Lage.

nach Fig. 5. Je ein kleines Teilstück dieser Ellipsen stellt den Vektorenverlauf dar zwischen den gegebenen Punkten A, B am Anfang und C, D am Ende der Leitung. Um den Maßstab der Kurven zu bestimmen, trägt man einfach die gegebenen Strom- und Spannungswerte in die gefundenen Anfangswerte der Cosinusdiagramme ein und findet dadurch leicht mit dem Rechenschieber, wieviel Volts und Ampères einem cm Vektorlänge entsprechen.

Die in Fig. 5 eingetragenen Zahlen sind Effektivwerte. Da die rotierenden Ellipsen den räumlichen und zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung darstellen, sollten eigentlich Scheitelwerte eingetragen werden, was durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$ geschehen kann. An der *Form* der Kurven wird dadurch natürlich nichts geändert. Sämtliche Gleichungen gelten sowohl für Scheitel- als auch Effektivwerte.

Unendlich lange Leitung.

Für Leitungen von weniger als 200 km Länge findet man bei 50periodigem Wechselstrom zwischen Anfangs- und Endvektor meistens nur ein kurzes Stück einer fast geradlinigen Kurve. Interessant werden die Verhältnisse bei dieser Frequenz erst bei grösseren Leitungslängen. Es sei daher angenommen, die behandelte Leitung sei nur ein Teilstück einer grossen europäischen Sammelschiene; sie habe also eine Länge von einigen tausend Kilometern. Der Einfachheit halber wird angenommen, am gegebenen Anfangspunkt seien Strom und Spannung in Phase, und zwar sei $\frac{U_0}{I_0}\sqrt{\frac{y}{z}} > 1$. Dann wird U_0 zur grossen, I_0 zur kleinen Halbaxe einer Ellipse. In Fig. 5 werden beide Anfangsvektoren in die Horizontalrichtung nach links gelegt. Dann ergibt sich folgender Verlauf:

$s = 0$ *km.* U ist ein Maximum, I ein Minimum, beide sind in Phase (Punkte 1,1′).

$s = 750$ *km.* U hat abgenommen und sich um weniger als 45° verdreht, I hat zugenommen und sich um mehr als 45° verdreht, U eilt I um einen maximalen Winkel vor (Punkte 2,2′).

$s = 1500$ *km.* U ist ein Minimum, I ein Maximum, beide sind wieder in Phase. Beide sind gegenüber $s = 0$ um 90° verdreht (Punkte 3,3′).

$s = 2250$ *km.* U hat zugenommen, I hat abgenommen. Wir haben wieder eine maximale Phasenverschiebung zwischen U und I, jedoch im umgekehrten Sinn; dieses Mal eilt der Strom der Spannung vor (Punkte 4,4′).

$s = 3000$ *km.* U und I haben gleiche Grösse, wie bei $s = 0$, sind jedoch um 180° gegen jenen Punkt phasenverschoben (Punkte 5,5′).

Zwischen $s = 3000$ km und $s = 6000$ km erscheinen wieder die genau gleichen Werte wie zwischen $s = 0$ km und $s = 3000$ km; nur sind alle um 180° verdreht.

Bei höheren Frequenzen, die z. B. in der Schwachstromtechnik beim Uebertragen von Sprechströmen vorkommen, werden diese Distanzen natürlich verkürzt. So erhält man z. B. bei einer Frequenz von 2000 Per./s für eine ganze Ellipse des Cosinusdiagrammes nur eine Distanz von 150 km.

Interessant ist nun auch die Betrachtung der Tangensdiagramme. Es werden daher die für Zahlenbeispiel 1 berechneten Werte von tg α_0 und tg β_0 in ein Tangensdiagramm nach Fig. 4 eingetragen und dadurch die zwei Punkte A und B erhalten. Wenn man an diesen Punkten die Werte von p_0 und q_0 abliest, so müssen sie mit den aus den Cosinusdiagrammen herausgefundenen Werten übereinstimmen. Dies ergibt wieder eine wertvolle Kontrolle. Insbesondere findet man, dass beide Punkte A und B auf demselben appolonischen Kreis $q = -37{,}5°$ liegen. Sie liegen ferner auf zwei Kreisbögen $p = 138{,}8°$ und $p = 48{,}8°$, die sich zu einem vollständigen Kreis durch die Punkte $+ j$ und $- j$ ergänzen. Man findet nun leicht auch die Werte für den Endpunkt der Leitung; sie liegen auf demselben appolonischen Kreis (Punkte C und D).

Das Tangensdiagramm zeigt den Verlauf der Belastungsimpedanz und der Belastungsadmittanz. Bei einer sehr langen Leitung findet man:

Für $s = 0$, 3000, 6000 km ist die Impedanz ein Maximum, die Admittanz ein Minimum, für $s = 1500$, 4500 km ist die Impedanz ein Minimum, die Admittanz ein Maximum (Punkte 1,1′, 3,3′).

Im Tangensdiagramm kann man besonders gut den Phasenverschiebungswinkel ablesen; er erscheint als Winkel zwischen dem Tangensvektor und der vertikalen Axe. Man findet für $s = 750$, 3750 km eine maximale Voreilung des Spannungsvektors (Punkte 2,2′), für $s = 2250$, 5250 km eine maximale Voreilung des Stromvektors (Punkte 4,4′), während für $s = 0$, 1500, 3000, 4500, 6000 km Strom und Spannung in Phase sind. Den Phasenverschiebungswinkel kann man berechnen:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2p}{\mathfrak{Sin}\, 2q} = \frac{\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}} \qquad (23)$$

Da $\mathfrak{Sin}\, 2q$ und die Wirkleistung konstant bleiben (es ist ja eine verlustfreie Leitung angenommen), so ist $\sin 2p$ direkt ein Mass für die Blindleistung.

Man bezeichnet gewöhnlich Kondensatoren als Blindleistungserzeuger, Drosselspulen (Asynchronmotoren usw.) als Blindleistungsverbraucher. Diese Annahme ist willkürlich; es ist auch schon die gegenteilige Annahme vorgeschlagen worden. Es soll jedoch hier an der erstgenannten Definition festgehalten werden. Dann fliesst bekanntlich Blindleistung von einer übererregten zu einer untererregten Synchronmaschine. Für lange Leitungen findet man:

Die Blindleistung wird in den Gebieten hoher Spannung ($s = 0$, 3000, 6000 km) erzeugt, fliesst in beiden Richtungen nach den Gebieten hohen Stromes ($s = 1500$, 4500 km) und wird dort verbraucht.

Bei langen Leitungen wird also die Blindleistung nicht immer von Generatoren oder Phasenschiebern geliefert und von den Stromverbrauchern verbraucht, sondern sie entsteht und verschwindet auf der Leitung selbst. Sie kann bei 50periodigem Wechselstrom auf einer verlustfreien Leitung auf keinen Fall weiter als 1500 km transportiert werden (woran man allerdings auch kein Interesse hat).

Die Wirkleistung fliesst natürlich immer in derselben Richtung; es gibt daher Gebiete, in welchen Wirk- und Blindleistung gleichgerichtet sind ($s = 750$, 3750 km) und solche, in welchen sie entgegengerichtet sind ($s = 2250$, 5250 km).

Leerlauf und Kurzschluss.

Ist an einer Stelle der Leitung der Strom gleich Null, so fallen die Cosinusdiagramme in die Brennstrecke hinein, die Tangensdiagramme in die unendlich lange horizontale Axe. In einiger Entfernung vom Leerlaufpunkt ist der Strom nicht mehr Null, Strom- und Spannungsvektor stehen auf der ganzen Leitung senkrecht aufeinander.

Aus den Diagrammen findet man leicht, dass in 1500 km Entfernung von diesem Leerlaufpunkt ein Kurzschlusspunkt liegt, in 3000 km Entfernung wieder ein Leerlaufpunkt. Man kann sich eine beliebig lange Leitung vorstellen, auf welcher Leerlauf- und Kurzschlusspunkte in Intervallen von 1500 km immer abwechseln. Dabei ist es nicht nötig, dass an allen Kurzschlusspunkten eine leitende Verbindung zwischen den Phasenleitern vorhanden sei, es ist einfach die Spannung Null, ebenso ist auch nicht an allen Leerlaufpunkten ein Leitungsunterbruch, es ist einfach der Stromvektor Null.

Es wird nur Blindleistung transportiert, der Zustand bleibt bei einer absolut verlustfreien Leitung ohne äussere Energiezufuhr dauernd bestehen. Wir haben ein System von Schwingungskreisen (Resonanz). Es sind reine stehende Wellen auf der Leitung.

Eine Stromschleife, die an einem Ende offen, am andern kurzgeschlossen ist, kann Schwingungen mit ihrer Eigenfrequenz ausführen. Diese ist z. B. bei einer 100 km langen Leitung 750 Per./s. Es können auch Schwingungen mit einem ungeraden Vielfachen der Grundfrequenz auftreten.

Leitung ohne Blindleistung.

Wenn die Belastungsimpedanz nach Grösse und Richtung genau gleich der positiven oder negativen Wellenimpedanz wird, erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -j \frac{I_0}{U_0} \sqrt{\frac{z}{y}} = \pm j$$

$$\operatorname{tg} \beta_0 = -j \frac{U_0}{I_0} \sqrt{\frac{y}{z}} = \pm j$$

Das ganze Tangensdiagramm schrumpft in den Punkt $+ j$ oder $- j$ zusammen, q wird unendlich gross. Die Cosinusdiagramme werden zu unendlich grossen Kreisen. Die Amplituden A und B nach Gl. (10) und (13) werden jedoch unendlich klein, so dass die Produkte $A \cos \alpha_0 = U_0$ und $B \cos \beta_0 = I_0$ Werte von endlicher Grösse werden (es sind ja die gegebenen Spannungs- und Stromvektoren). Die Vektoren U und I behalten immer denselben absoluten Betrag und verändern nur ihre Richtung. Sie bleiben dauernd miteinander in Phase oder um 180° phasenverschoben, je nach der Wahl des Bezugssinnes; es wird keine Blindleistung transportiert.

Wie man sieht, können sowohl die Tangens- als auch die Cosinusvektoren alle möglichen Werte in der unendlichen Ebene annehmen, auch wenn Strom und Spannung nicht unendlich gross werden. Es empfiehlt sich daher, mehrere Cosinus- und Tangensdiagramme in verschiedenen Maßstäben anzufertigen, für unendlich grosse Werte von q wird das Cosinusdiagramm zu einem System von konzentrischen Kreisen und Radien.

F. Die Leitung mit Verlusten.

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die verlustfreie Leitung, die natürlich einen unerreichbaren Idealzustand darstellt, ausführlich behandelt wurde, soll jetzt der Einfluss der Leitungsverluste untersucht werden. Man erkennt sofort, dass sich der Wert des Ausdruckes $\sqrt{yz}$ ändern muss. Es soll daher gleich das im Abschnitt E behandelte Zahlenbeispiel 1 nochmals aufgegriffen und die dort vernachlässigten Leitungsverluste sollen nachträglich berücksichtigt werden.

Zahlenbeispiel 2.

Die Induktivität der Leitung beträgt wie in Beispiel 1 0,64 mH/km, was bei 50 Per./s einen induktiven Widerstand von $x = \omega l = 2 \pi \cdot 50 \cdot 0{,}61 \cdot 10^{-3} =$ 0,201 Ohm/km ergibt.

Nach den Angaben des bereits zitierten Artikels Seite 210 bis 215 des Bull. SEV 1931 hat die Doppelleitung einen ohmschen Widerstand von 0,084 Ohm/km. Damit erhält man für die Impedanz

$$z = r + jx = 0{,}084 + j\ 0{,}201$$
$$= 0{,}2178\ \varepsilon^{j\,67^\circ 20'}\ \text{Ohm/km}$$

Die ohmsche Ableitung soll auch dieses Mal vernachlässigt werden, so dass sich für die Admittanz ergibt:

$$y = jb = 5{,}65 \cdot 10^{-6}\ \varepsilon^{j\,90^\circ}\ \text{Siemens/km}$$

Dann wird

$$yz = 5{,}65 \cdot 10^{-6}\ \varepsilon^{j\,90^\circ} \cdot 0{,}2178\ \varepsilon^{j\,67^\circ 20'}$$
$$= 1{,}23 \cdot 10^{-6}\ \varepsilon^{j\,157^\circ 20'}\ \text{km}^{-2}$$
$$\sqrt{yz} = 1{,}11 \cdot 10^{-3}\ \varepsilon^{j\,78^\circ 40'}\ \text{km}^{-1}$$

Für eine 100 km lange Leitung erhält man dann

$$js\sqrt{yz} = j\ 0{,}111\ \varepsilon^{j\,78^\circ 40'} = 0{,}111\ \varepsilon^{j\,168^\circ 40'}$$
$$= -\ 0{,}1088 + j\ 0{,}0218$$

In Graden ausgedrückt erhält man für 100 km $js\sqrt{yz} = -\ 6{,}24 + j\ 1{,}25$ Grad.

Die Wellenimpedanz wird

$$\sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0{,}218\ \varepsilon^{j\,67^\circ 20'}}{5{,}65 \cdot 10^{-6}\ \varepsilon^{j\,90^\circ}}} = 196\ \varepsilon^{-11^\circ 20'}\ \text{Ohm}$$

Für den Anfangspunkt der Leitung in Innertkirchen sollen wieder dieselben Werte für U_0 und I_0 angenommen werden wie in Beispiel 1, nämlich $U_0 = 86\,600$ V und $I_0 = 430$ A. Die Spannung soll wieder dem Strom um 30 Grad voreilen. Dann wird die Belastungsimpedanz am Anfang der Leitung wieder wie früher $201\ \varepsilon^{j\,30}$ Ohm. Hieraus erhält man nach Gl. (22) für die Tangensvektoren:

$$j \operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{196\ \varepsilon^{-j\,11^\circ 20'}}{201\ \varepsilon^{j\,30^\circ}} = 0{,}975\ \varepsilon^{-j\,41^\circ 20'}$$

$$j \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{201\ \varepsilon^{j\,30^\circ}}{196\ \varepsilon^{-j\,11^\circ 20'}} = 1{,}025\ \varepsilon^{+j\,41^\circ 20'}$$

Um nun den cos α_0 und den cos β_0 zu bestimmen, wird wieder wie in Beispiel 1 das Hilfs-Cosinusdiagramm nach Fig. 1 benutzt und darin bestimmt man

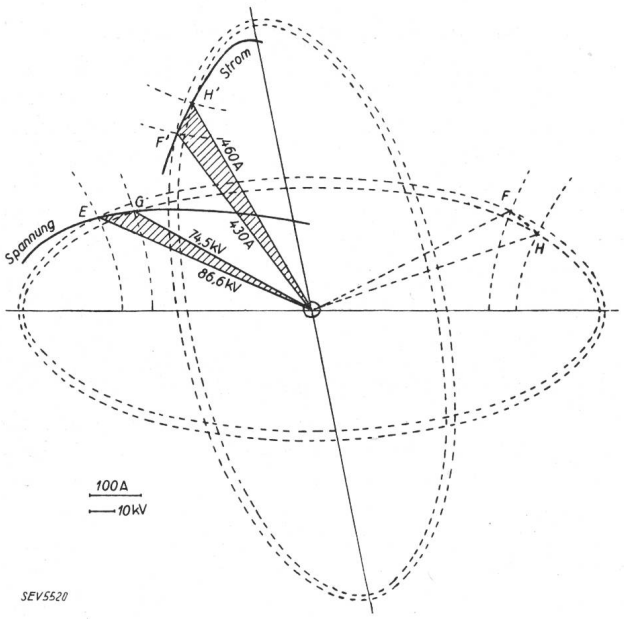


Fig. 6.
Spannungs- und Strom-Diagramm der Leitung mit Verlusten in richtiger gegenseitiger Lage.

die Punkte E und F, die auch in das Diagramm nach Fig. 2 übertragen werden. Beide liegen wieder auf derselben Ellipse «$q = -27{,}9°$», E liegt auf der Hyperbel «$p = 136{,}1°$» und F auf der Hyperbel «$p = 46{,}1°$». Es ist also wieder $\alpha - \beta = \pm 90°$.

Für die gegebene Leitung von 124,1 km Länge erhält man

$$js\sqrt{yz} = (-6{,}24 + j\,1{,}25)\ \frac{124}{100} = -7{,}75 + j\,1{,}55°$$

Damit wird am Ende der Leitung in Mühleberg

$$\alpha = \alpha_0 + js\sqrt{yz} = 136{,}1 - j\,27{,}9 - 7{,}75 + j\,1{,}55 = 128{,}35 - j\,26{,}35 \text{ Grad}$$

$$\beta = \beta_0 + js\sqrt{yz} = 46{,}1 - j\,27{,}9 - 7{,}75 + j\,1{,}55 = 38{,}35 - j\,26{,}35 \text{ Grad}$$

wodurch die Endpunkte G und H der Spannungs- und Stromkurven gefunden werden (Fig. 2).

Während man bei der verlustfreien Leitung einfach auf einer Ellipse wandern konnte, müssen jetzt Ellipsen und Hyperbeln geschnitten werden. Beim Fortschreiten im Sinne des Wirkleistungsflusses tritt also nicht nur eine Verdrehung der Vektoren im Uhrzeigersinn auf, sondern auch ein Uebergang zu immer kleineren Ellipsen, bis die Brennstrecke erreicht wird. Hierbei gilt der wichtige Satz:

Die Aenderungen von p und q stehen in einem konstanten Verhältnis. Dasselbe ist bei dem behandelten Beispiel

$$\frac{\triangle p}{\triangle q} = \frac{-6{,}24}{+1{,}25} = -5{,}0$$

Nach Gl. (15) ist

$$\frac{A}{B} = \pm j\sqrt{\frac{z}{y}} = \pm j\,196\ \varepsilon^{-j\,11°\,20} = 196\ \varepsilon^{-j\,101°\,20'} \text{ Ohm}$$

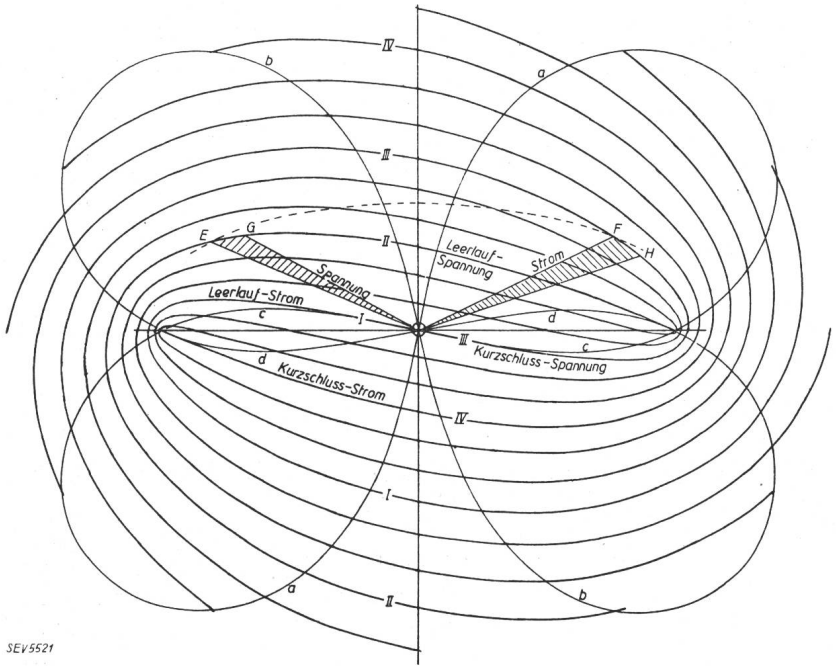


Fig. 7.
Allgemeines Spannungs- und Strom-Diagramm der Leitung mit Verlusten.

Spannungs-Diagramm.	*Strom-Diagramm.*
Kurve *b:* Blindleistung = 0	Kurve *a:* Blindleistung = 0
Kurve *d:* Wirkleistung = 0	Kurve *c:* Wirkleistung = 0

Die Vektoren A und B stehen also nicht mehr senkrecht aufeinander. Es wird wieder das Spannungsdiagramm in seiner horizontalen Lage gelassen und das Stromdiagramm um den soeben berechneten Winkel von 101° 20′ verdreht, wodurch sich Fig. 6 ergibt.

Die unendlich lange Leitung, Leerlauf, Kurzschluss und allgemeine Betriebszustände.

Bei einer Leitung mit Verlusten gibt es keine Schwingungszustände ohne Leistungszufuhr wie bei der verlustfreien Leitung. Es kann höchstens ein einziger Leerlaufpunkt oder ein einziger Kurzschlusspunkt vorkommen.

Die Kurve des Leerlaufstromes geht natürlich durch den Nullpunkt. Der weitere Verlauf ist aus Kurve I der Fig. 7 ersichtlich. Sie kann auch um 180° gedreht werden, wodurch die Kurve III erhalten wird. Die Leerlaufspannung beginnt in einem der beiden Brennpunkte und wird durch eine der beiden Kurven II oder IV dargestellt.

Die Kurve der Kurzschlußspannung ist mit derjenigen des Leerlaufstromes identisch (Kurve I

oder III), die Kurve des Kurzschlußstromes ist mit derjenigen der Leerlaufspannung identisch (Kurve II oder IV).

Selbstverständlich müssen die Stromkurven noch um den oben berechneten Winkel von 101° 20′ gegen die Spannungskurven verdreht werden.

Wenn man diese vier Kurven immer weiter verfolgt, so erhält man in grosser Entfernung vom Nullpunkt vier gleiche logarithmische Spiralen. Zwischen diese Kurven können nun eine beliebige Anzahl weiterer Parallelkurven gelegt werden. Diese

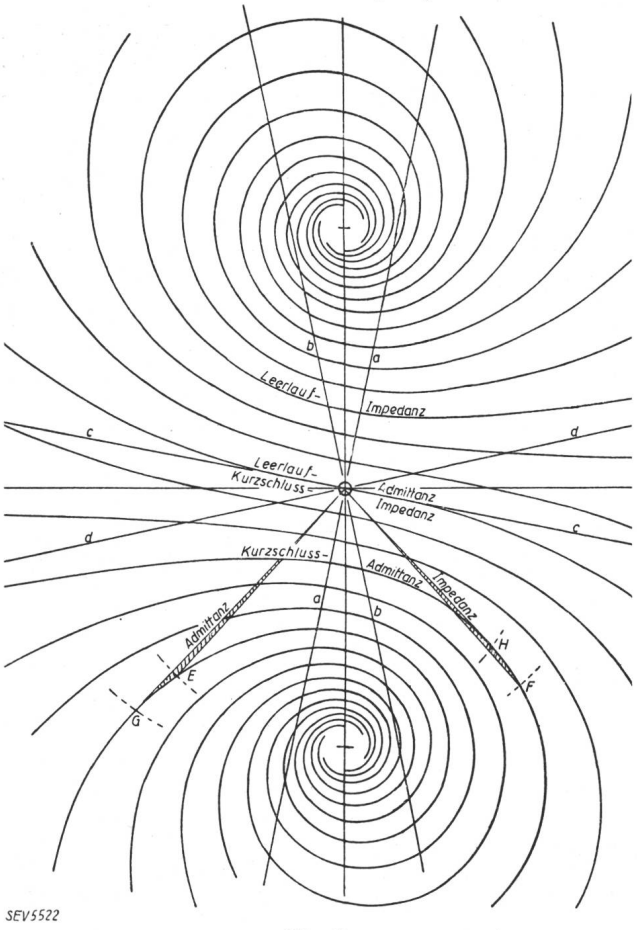


Fig. 8.

Allgemeines Impedanz- und Admittanz-Diagramm der Leitung mit Verlusten.

Impedanz-Diagramm.		*Admittanz-Diagramm.*	
Gerade *b:* Blindleistung	= 0	Gerade *a:* Blindleistung	= 0
Gerade *d:* Wirkleistung	= 0	Gerade *c:* Wirkleistung	= 0

haben alle denselben Charakter. Sie kommen als logarithmische Spiralen im Uhrzeigersinn aus dem Unendlichen, nehmen in der Nähe der Brennpunkte eine abgeplattete Form an, umschlingen ~förmig beide Brennpunkte und wandern als logarithmische Spiralen im Gegenuhrzeigersinn wieder ins Unendliche hinaus.

Dieses Kurvensystem stellt alle möglichen Betriebszustände dar, die überhaupt bei der gegebenen Leitung denkbar sind. Für eine beliebige Belastung und Phasenverschiebung bestimmt man nach Fig. 1 zunächst den Anfangspunkt, überträgt denselben direkt in das Diagramm nach Fig. 7, wandert dort zwischen den benachbarten Kurven parallel dazu hindurch, addiert oder subtrahiert für die gegebene Strecke die entsprechende Anzahl reeller und imaginärer Grade und findet so den Zustand am Ende der Leitung.

Es sollen auch hier wieder die Verhältnisse im Tangensdiagramm studiert werden, wodurch Fig. 8 erhalten wird. Alle Tangenskurven beginnen im Punkt $+j$, von welchem sie sich im Gegenuhrzeigersinn spiralförmig immer weiter entfernen. Sie durchschneiden an irgendeiner Stelle die horizontale Axe, worauf sie sich im Uhrzeigersinn spiralförmig dem Punkt $-j$ nähern, den sie erst nach unendlich vielen Umdrehungen erreichen.

Je nachdem, ob das Tangensdiagramm als Admittanz- oder Impedanz-Diagramm aufgefasst wird, ergibt sich der Phasenverschiebungswinkel φ zwischen dem Spannungs- und dem Stromvektor als Winkel zwischen dem Tangensvektor und einer der beiden geneigten Geraden a oder b, deren Neigung durch die Richtung $\pm j\sqrt{\frac{z}{y}}$ oder $\pm j\sqrt{\frac{y}{z}}$ bestimmt ist.

Man zieht nun noch zwei weitere Gerade c und d, welche auf den Geraden a und b senkrecht stehen. Dann ist im Admittanzdiagramm auf der Geraden a die Blindleistung, auf der Geraden c die Wirkleistung Null, im Impedanzdiagramm ist auf der Geraden b die Blindleistung, auf der Geraden d die Wirkleistung Null. Ein Durchschreiten der Geraden c im Admittanzdiagramm oder der Geraden d im Impedanzdiagramm ist daher nun bei Kupplungsleitungen zwischen zwei Kraftwerken möglich bei schwacher Belastung, wobei dann von den beiden Werken Wirkleistung in die Leitung hinein gespiesen wird, die auf der Leitung selbst in Form von Verlusten vollständig verbraucht wird. Im Diagramm nach Fig. 7 entsprechen den Geraden a, b, c, d acht Kurven «τ = konstant», wobei τ durch die Richtungen $\pm\sqrt{\frac{z}{y}}$, $\pm\sqrt{\frac{y}{z}}$, $\pm j\sqrt{\frac{z}{y}}$ und $\pm j\sqrt{\frac{y}{z}}$ bestimmt ist.

Im Impedanzdiagramm ist für den Leerlaufpunkt die Impedanz Null; man erhält dafür den Nullpunkt. Für den Kurzschlusspunkt ist sie unendlich gross, sie fällt daher in unendliche Ferne. Im Admittanzdiagramm vertauschen die entsprechenden Punkte ihre Lage.

Mit Hilfe des Diagrammes nach Fig. 7 erkennt man leicht, ob bei einer langen Leitung bei irgendeinem Belastungszustand gefährliche Ueberspannungen auftreten können, die zu Ueberschlägen führen können, oder ob ausserordentlich hohe Ströme möglich sind, welche die Leitung übermässig erwärmen oder mechanisch überbeanspruchen. Ohne diese Diagramme könnte man dies nur mit umständlichen Berechnungen herausfinden.

Um dies einzusehen, soll beispielsweise versucht werden, die gesamte Leistung des Kraftwerkes Hand-

eck von 112 000 kVA bei der gleichen Sternspannung von 86,6 kV und dem gleichen Strom von 430 A *über ein oder mehrere parallele Kabel* zu übertragen. Die Kapazität wird viel grösser, z. B. etwa 0,35 μF/km; die Induktivität wird viel kleiner, z. B. etwa 0,14 mH/km. Dann wird bei Annahme eines Impedanzwinkels von 68° und einer Voreilung des Stromes von 11°

$$j \operatorname{tg} \beta = \frac{U_0}{I_0}\sqrt{\frac{y}{z}}$$

$$= \frac{86\,600}{430\,\varepsilon^{i\,11^\circ}}\sqrt{\frac{110 \cdot 10^{-6}\,\varepsilon^{i\,90}}{44 \cdot 10^{-3}\,\varepsilon^{i\,68}}} = 10$$

Hieraus $t = 10$, $\tau = 0$, woraus sich mit Hilfe der Fig. 1 und 2 für β_0 ein Wert von $(90 - 6\,j)$ Grad als Anfangspunkt der *Strom*kurve ergibt. In 250 km Entfernung wird $\beta = 90 - 6\,j - 30 + 6\,j = 60°$. (Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in diesem Kabel ist nur etwa die halbe Lichtgeschwindigkeit.) Der Strom am Leitungsende wird das *Fünffache* des Normalstromes, also 2150 A, und die Leitung mechanisch und thermisch überbeansprucht, während im Kraftwerk nur der Normalstrom vorhanden ist, welcher keine Schalterauslösung bewirkt.

Wird dagegen $\frac{U}{I}\sqrt{\frac{y}{z}} = 0{,}1$, so erhält man für den Anfangspunkt der *Spannungs*kurve den Punkt $(90 - 6\,j)$ Grad. Die Spannung steigt in 500 km Entfernung auf den *fünffachen* Wert und ruft natürlich Ueberschläge hervor.

Man kommt nun ganz von selbst zum Schluss, dass die Wellenimpedanz und die Belastungsimpedanz bei Vollast für eine Kraftübertragung ungefähr gleich gross sein müssen. Dies ist bei der Leitung von Innertkirchen nach Mühleberg tatsächlich der Fall.

Spezialfall.

Im Gegensatz zu den Beispielen 1 und 2 soll die obige Bedingung nicht nur dem absoluten Betrag, sondern auch der Richtung nach ganz genau zutreffen. Es sei also vektoriell genau

$$\frac{U}{I} = +\sqrt{\frac{z}{y}}$$

Aus dem Hilfs-Cosinus-Diagramm nach Fig. 1 ersieht man sofort, dass die Cosinuskurven im Unendlichen beginnen, es sind einfache logarithmische Spiralen und behalten diese Form bei bis in unendliche Distanzen auf der Leitung. Es entspricht dies dem Fall eines Kreises bei verlustfreien Leitungen. Der Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom bleibt konstant, woraus folgt, dass auch

das Verhältnis $\frac{\text{Blindleistung}}{\text{Wirkleistung}}$ = konstant bleibt.

Spannung und Strom nehmen pro km prozentual immer gleich viel ab. Aus Gl. (5) erhält man für diesen speziellen Fall

$$U = U_0\,\varepsilon^{-s\sqrt{yz}} \text{ und } I = I_0\,\varepsilon^{-s\sqrt{yz}}$$

Man kann in diesem Fall leicht den Wirkungsgrad einer s km langen Leitung berechnen

$$\eta = \frac{U_0\,\varepsilon^{-s\sqrt{yz}}\,I_0\,\varepsilon^{-s\sqrt{yz}}\cos\varphi}{U_0\,I_0\cos\varphi} = \varepsilon^{-2\,s\sqrt{yz}}$$

Von diesem Ausdruck ist nur der absolute Betrag (ohne Richtung) zu nehmen. Mit den Zahlenwerten des Beispiels 2 erhält man für eine 100 km lange Leitung

$$\eta = \varepsilon^{-2\cdot 0{,}0218} = \varepsilon^{-0{,}0436} = \sim 1 - 0{,}0436 = 0{,}9564$$

Für andere Belastungszustände werden die allgemeinen Formeln ziemlich kompliziert; der Wirkungsgrad kann stark von dem obigen Wert abweichen.

Aus dem Richtungswinkel des Vektors $\sqrt{\frac{z}{y}}$ ergibt sich, dass in unserm Beispiel für diesen Fall der Strom der Spannung voreilen muss, Wirk- und Blindleistung wandern daher in entgegengesetzten Richtungen.

Im Tangensdiagramm erhält man für diesen Zustand nur den Punkt $+\,j$. Im Gegensatz zur verlustfreien Leitung wird hier eine im Vergleich zur Wirkleistung kleine Blindleistung über Distanzen von mehr als 1500 km transportiert.

Zahlenbeispiel 3.

In diesem Beispiel sollen ausser den ohmschen Längswiderständen auch noch die ohmschen Querleitfähigkeiten (Ableitung, Koronaverluste) berücksichtigt werden. Dann erhält also die Admittanz eine reelle Komponente

$$y = g + j\,b = g + j\,\omega\,c$$

Durch die im Bulletin SEV 1931, S. 210, beschriebenen Versuche wurden für die Koronaverluste bei 150 kV 0,08 kW/km bis 1 kW/km für die Einfachleitung gemessen, je nach der Witterung. Durch Umrechnen des grössten Wertes auf die Doppelleitung findet man für g einen Wert von $8{,}8 \cdot 10^{-8}$ Siemens/km. Damit wird

$$y = 5{,}65\;\varepsilon^{j\,89^\circ\,6'} \cdot 10^{-6} \text{ Siemens/km}$$

$$\sqrt{yz} = 1{,}11 \cdot 10^{-3}\;\varepsilon^{j\,78^\circ\,13'} \text{ km}^{-1}$$

Der Richtungswinkel von $\sqrt{yz}$ hat sich um 27', also weniger als ein halbes Grad verändert. Die allgemeinen Cosinus- und Tangenskurven werden daher um diesen Betrag stärker geneigt als in Beispiel 2. Das bedeutet im Cosinusdiagramm etwas raschere Abnahme der Vektoren gegen die Brennstrecke (zwischen $+1$ und -1) hin; die Verluste werden etwas grösser und die Wirkungsgrade etwas schlechter.

Die Koronaleitfähigkeit ist keine Konstante [5]). Die Grösse g ist stark spannungsabhängig. Man wird

[5]) Siehe ausser dem bereits mehrmals zitierten Artikel im Bull. SEV 1931 besonders auch die dort am Schluss (S. 215) zusammengestellten Literaturangaben.

also bei sehr genauen Arbeiten beim Aufzeichnen der Fig. 7 zunächst nur etwa bis zu einer 10 %igen Spannungsänderung fortschreiten und hierauf mit einem neuen Wert von g weiterfahren. Für nicht übertriebene Genauigkeit kann man jedoch meistens einen konstanten Mittelwert über den ganzen Spannungsbereich annehmen.

Für die Leitung Innertkirchen-Mühleberg findet man, dass bei voller Leistung die Koronaverluste etwa 25mal kleiner sind als die ohmschen Verluste.

Zahlenbeispiel 4.

Es sei noch ein anderes Beispiel erwähnt, bei welchem die Ableitung so gross ist, dass der Richtungswinkel von y und z genau gleich wird. Die Cosinus- und Tangenskurven erhalten die doppelte Neigung, wonach sich doppelte Verluste ergeben; ohmsche und Ableitungs-Verluste werden genau gleich.

Für die unendlich lange Leitung konzentriert sich das ganze Tangensdiagramm bekanntlich auf einen der Punkte $+j$ oder $-j$. Da $\sqrt{\frac{z}{y}}$ reell ist, fallen in Fig. 8 die Geraden a und b in die vertikale Axe, was anzeigt, dass über die ganze Leitung reine Wirkleistung ohne Blindkomponente übertragen wird.

Beim Uebertragen von Sprechströmen erhält man schon mit kürzeren Leitungen mehrere Wellenlängen, so dass man mit guter Annäherung eine unendlich lange Leitung annehmen kann. Es stellt sich dann an der Sendestation immer ziemlich genau $\frac{I}{U} = \pm\sqrt{\frac{y}{z}}$ ein, unabhängig davon, ob sie am Ende unterbrochen, kurz geschlossen oder durch eine Impedanz beliebiger Grösse belastet sei.

G. Literaturhinweise und Schlussbemerkungen.

Ueber die Berechnung langer Leitungen existiert schon eine umfangreiche Literatur. Es seien hier nur ganz wenige Veröffentlichungen herausgegriffen.

1. M. L. Keller: Die Uebertragung grosser Leistungen. Bull. SEV 1929, S. 477, 517.
2. L. F. Woodruff: Complex hyperbolic function charts. Electrical Engineering 1935, S. 550.
3. Fränckel: Theorie der Wechselströme, 3. Auflage 1930, 12. Kapitel.
4. R. Wengler: Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik (nach einem Vortrag von Prof. Dr. Ing. F. Emde). ETZ 1927, S. 766.
5. A. Blondel und Ch. Lavanchy: Resumé pratique du calcul électrique des transmissions d'énergie à haute tension par l'emploi d'abaques. Revue Générale d'Electricité. Nov. 1923, S. 775.
6. Günther Oberdorfer: Zur Kraftübertragung auf langen Höchstspannungsleitungen. ETZ 1927, S. 1691.
7. Edith Clarke: «A transmission line calculator» und «Simplified transmission line calculations». General Electric Review 1923, S. 380, und 1926, S. 321.

In diesen Veröffentlichungen wird zum Teil mit Reihenentwicklungen der hyperbolischen Funktionen operiert, zum Teil werden ganz interessante Diagramme dargestellt.

In Literatur 2 erkennt man Leerlaufspannungs- und Kurzschlußstrom-Kurven für verschiedene Werte von $\sqrt{yz}$, jedoch nur für einen beschränkten Bereich, während in Fig. 7 des vorliegenden Artikels für einen einzigen Wert von $\sqrt{yz}$ alle Belastungsstrom- und Spannungs-Kurven für unbeschränkte Leitungslängen dargestellt sind.

Beim Vergleich der Fig. 2 und 4 von Literatur 4 mit den Fig. 2 und 4 dieses Aufsatzes findet man, dass das Argument $s\sqrt{yz}$ und die Funktion (sin, cos, tg) ihre Rollen in den beiden Artikeln vertauschen. Ausserdem werden bei Wengler und Emde die Funktionen durch absoluten Betrag und Richtung dargestellt. Sehr interessant sind die Reliefs. Von den Fig. 2 und 4 dieses Artikels könnte man natürlich auch Reliefs konstruieren.

Literatur 5 zeigt in Fig. 5 und 6 ähnliche Diagramme wie Literatur 4.

In Fig. 3 der Literatur 6 kann man vereinzelte Bruchstücke der Kurven nach Fig. 7 dieses Aufsatzes erkennen.

Der Verfasser ist der Ansicht, dass mit keiner dieser Darstellungen eine solch klare Uebersicht über die Cosinus-, Sinus- und Tangensfunktionen komplexer Argumente gewonnen wird, wie mit den Fig. 2 und 4 dieses Artikels. Fig. 7 und 8 zeigen alle möglichen Betriebszustände auf einer Leitung beliebiger Länge mit einer sonst nicht erreichbaren Uebersichtlichkeit. Der Verfasser glaubt daher, mit dem vorliegenden Artikel einen Beitrag zum Problem der Fernkraftübertragung zu liefern. Besonders auch für die Telephonie, bei der Sprechströme mit Frequenzen von einigen Tausend Hz vorkommen, können diese Ueberlegungen nützlich sein.

Ausser obigen Literaturangaben 1 bis 7 elektrotechnischen Charakters sei noch auf folgende rein mathematische Werke hingewiesen:

8. A. E. Kennelly, Atlas der komplexen Hyperbelfunktionen.
9. L. Lewent, konforme Abbildungen, S. 24, 64, 74.
10. Mises-Frank, Differential- und Integralgleichungen I, S. 107.

Diese Werke 8 bis 10 enthalten ebenfalls das Cosinus- (resp. Sinus-) sowie das Tangensdiagramm nach Fig. 2 und 4 dieses Aufsatzes. Eine ausführliche Anwendung auf Leitungsprobleme wird jedoch nicht gemacht.

Die Fig. 1, 2, 4 wurden vom Verfasser in grösserem Massstab, nämlich 500 mm für die Zahleneinheit je für einen Quadranten angefertigt. Es können daher Abzüge in dieser Grösse vom Verfasser[6]) bezogen werden, womit natürlich ein genaueres Arbeiten möglich ist.

Der Verfasser gedenkt in einem weiteren Artikel noch den Verlauf der Leistung sowie eventuell noch einige verwandte Probleme zu behandeln.

[6]) Chaletweg 9, Zürich 11.