Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 27 (1936)
Heft: 2

Artikel: Le calcul mécanique des lignes aériennes
Autor: Maurer, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057480

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

BULLETIN

RÉDACTION:
Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens
et de l'Union des Centrales Suisses d'électricité, Zurich 8

EDITEUR ET ADMINISTRATION:
S. A. Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei, Zurich 4
Stauffacherquai 36/40

Reproduction interdite sans l'assentiment de la rédaction et sans indication des sources

XXVIIe Année | N° 2 | Vendredi, 24 Janvier 1936

Le calcul mécanique des lignes aériennes.

Par *E. Maurer*, Innertkirchen.

651.315.056

Le secrétariat général et l'inspectorat des installations à fort courant de l'ASE ont publié dans le Bulletin 1919, nos 6 et 7, des directives détaillées pour le calcul des lignes aériennes, établies par Abel Jobin. Du fait des progrès réalisés depuis lors dans la construction des lignes, surtout celles à grandes portées avec isolateurs de suspension, ainsi que des modifications apportées aux prescriptions fédérales sur les lignes aériennes, ces directives ne concordent plus avec les conditions nouvelles, de sorte qu'il est devenu nécessaire de les reviser et de les compléter. Le secrétariat général a donc chargé l'auteur de procéder à cette revision, afin que les intéressés disposent à nouveau de directives pratiques, adaptées à la technique moderne. Nous espérons que ces directives leur rendront les mêmes services que celles d'Abel Jobin. Les directives de 1919 sont d'ailleurs épuisées de sorte qu'une réimpression s'imposait.

Cette étude indique la marche générale à suivre dans le calcul mécanique des lignes aériennes. Pour en faciliter l'usage, la première partie mentionne les diverses formules au fur et à mesure qu'elles apparaissent au cours des calculs, tandis que les considérations théoriques et le développement des formules sont reportés, à quelques exceptions près, dans les annexes.

Les théories fondamentales des anciennes directives ont pu être conservées; il a suffi de les adapter aux nouvelles prescriptions fédérales et de les compléter en tenant compte du développement de la technique des lignes aériennes.

L'auteur expose tout d'abord le calcul des modifications des lignes ensuite des sollicitations maximum, des charges additionnelles et des variations de température prévues par l'ordonnance fédérale sur les installations à fort courant du 7 juillet 1933; suit le calcul de la flèche et la détermination des distances au sol ou aux objets en travers de la ligne. Un chapitre est consacré aux grandes portées, un autre à différents cas spéciaux: lignes ordinaires, lignes à grandes portées à isolateurs fixes ou mobiles, efforts engendrés par les lignes sur les supports, conducteurs constitués par deux métaux différents. Pour terminer, l'auteur expose l'effet de charges exceptionnelles (p. ex. plus de 2 kg de givre par mètre) sur les lignes. Des exemples pratiques montrent l'application des formules.

Pour des raisons techniques, l'article doit être réparti sur deux numéros. Plus tard on pourra en obtenir des tirages à part. (Réd.)

Unter diesem Titel veröffentlichten das Generalsekretariat und das Starkstrominspektorat des SEV im Bulletin 1919, Nr. 6 und 7, eine ausführliche Wegleitung zur Berechnung von Freileitungen, bearbeitet von Abel Jobin. Die inzwischen erzielten Fortschritte der Technik des Leitungsbaus, besonders des Baus von Weitspannleitungen mit Hängeisolatoren, sowie die Aenderung der Bundesvorschriften für Freileitungen hatten zur Folge, dass diese Wegleitung mit den neuen Verhältnissen nicht mehr übereinstimmt, so dass deren Revision, bzw. Ergänzung dringend nötig wurde. Das Generalsekretariat beauftragte daher den Verfasser mit dieser Revision, um den Interessenten wieder eine brauchbare, dem heutigen Stand der Technik entsprechende Wegleitung zur Verfügung zu stellen, die ihnen, wenn möglich, gleich grosse Dienste leisten soll, wie seinerzeit die Jobinsche Wegleitung. Da die Wegleitung vom Jahre 1919 vergriffen ist, war eine umfassende Neubearbeitung des ganzen Gebietes nicht zu umgehen.

Die vorliegende Abhandlung hat den Zweck, allgemein über den Gang der Berechnung der Freileitungen mit Rücksicht auf die mechanische Festigkeit der Leiter zu orientieren. Zum handlichen Gebrauch sind im ersten Teil die Formeln mit erläuterndem Text dem Gang der Berechnung folgend zusammengestellt, während theoretische Abhandlungen sowie die Ableitung der Formeln, abgesehen von kleinern Ausnahmen, in die Anhänge verlegt wurden.

Die grundlegenden Theorien konnten von der frühern Abhandlung übernommen werden; sie waren lediglich den neuen Bundesvorschriften anzupassen und entsprechend den Fortschritten der Technik im Leitungsbau zu ergänzen.

Zunächst wird im folgenden die Berechnung der Zustandsänderungen der Leitungen auf Grund der Höchstbeanspruchungen, Zusatzlasten und Temperaturen, welche die bundesrätliche Verordnung über Starkstromanlagen vom 7. Juli 1933 vorschreibt, auseinandergesetzt, dann folgt die Berechnung des Durchhanges und die Bestimmung von Abständen gegen den Erdboden oder die Leitung querende Objekte; ein weiteres Kapitel ist den grossen Spannweiten gewidmet, worauf spezielle Fälle zur Behandlung kommen: Regelleitungen, Weitspannleitungen mit festen und solche mit beweglichen Isolatoren, ferner die von den Leitern auf die Tragwerke ausgeübten Kräfte und die Leiter, welche aus zwei verschiedenen Metallen bestehen. Zum Schluss wird das Verhalten einer Leitung bei ausserordentlichen Belastungen (z. B. über 2 kg/m Rauhreifansatz) erläutert. Beispiele zeigen die Anwendung.

Aus technischen Gründen muss der Artikel auf zwei Nummern verteilt werden. Von der ganzen Arbeit sind später Sonderdrucke erhältlich. (Red.)

1° Calcul des modifications des conditions des lignes dont les tensions maxima, les charges supplémentaires et les températures sont prescrites.

Selon les prescriptions fédérales [1]), les calculs de la tension des conducteurs et de la flèche correspondant à la contrainte supplémentaire maximum des conducteurs sont à baser sur les hypothèses suivantes:

a) La température locale la plus basse, sans charge supplémentaire, ni vent.

b) Une charge supplémentaire uniformément répartie de neige et de glace (givre), de 2 kg par mètre courant, à la température de 0° C, sans vent.

Dans ces conditions, la tension ne doit pas dépasser les ⅔ de la résistance à la rupture du conducteur. Les propriétés mécaniques des conducteurs les plus usuels servant de base aux calculs sont indiquées dans le tableau I [2]).

Pour les lignes à grandes portées, l'hypothèse *b)* entre pratiquement seule en ligne de compte; lorsqu'il s'agit de portées inférieures à 100 m, il faut par contre examiner si les prescriptions sont également remplies aux températures les plus basses, selon le cas *a)*.

Après détermination de la tension maximum à 0° C et sous une charge de neige, les contraintes sur une portée peuvent être calculées pour d'autres températures et d'autres charges supplémentaires à l'aide des formules (16*) de l'annexe I:

$$p^3 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right) + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2\, a^2\, E}{24\, p_0^2} \cos\psi + (t - t_0)\, \alpha\, E - p_0 \cdot \left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right)\right] = \frac{\gamma^2\, a^2\, E}{24} \cos\psi \qquad (1)$$

$$p^3 + p^2 \left[\frac{\gamma_0^2\, a^2\, E}{24\, p_0^2} + (t - t_0)\, \alpha\, E - p_0\right] = \frac{\gamma^2\, a^2\, E}{24} \qquad (1a)$$

L'équation (1a) est l'équation (1) simplifiée pour portées dont les points d'appui sont au même niveau. Les désignations sont les suivantes:

a la portée, c'est-à-dire la distance horizontale entre les points d'appui, en cm,
h la dénivellation des points d'appui, en cm,
α le coefficient de dilatation linéaire du conducteur, rapporté à 1° C,
E le module d'élasticité du conducteur en kg/cm²,
p_0 la composante horizontale *connue* de la tension du conducteur aux conditions de pose, à la température de pose t_0 en ° C connue également,
γ_0 le poids correspondant connu du conducteur et de la charge supplémentaire, rapporté à une longueur du conducteur de 1 cm et une section de 1 cm² (γ_0 s'exprime donc en kg/cm³),
p la composante horizontale *cherchée* de l'effort de tension du conducteur en kg/cm², à la température supposée t,
γ le poids correspondant du conducteur et de la charge supplémentaire en kg/cm³, rapporté à une longueur de 1 cm et une section de 1 cm²,
ψ l'angle d'inclinaison de la droite reliant les points d'appui, par rapport à l'horizontale.

Données relatives à la résistance et à l'allongement, et contraintes maxima admissibles des conducteurs les plus usuels.
Selon l'art. 89, chiffre 3, de l'Ordonnance sur les installations à fort courant, les calculs des flèches de toutes les lignes aériennes dont les conducteurs sont constitués par des matériaux usuels, doivent être basés sur les chiffres indiqués dans ce tableau, à moins que d'autres chiffres caractéristiques n'aient été prouvés pour le matériau utilisé, en vertu d'une attestation d'un laboratoire d'essais des matériaux d'une école polytechnique suisse.

Tableau I.

Nature du conducteur	1 Section en mm²	2 Poids spécifique	3 Résistance à la rupture du conducteur ou des brins du câble en kg/mm²	4 Dimin. de la résistance par câblage, en % de la résistance à la rupture	5 Limite d'élasticité: Contrainte en kg/mm²	5 Module d'élasticité en kg/mm² pour une contrainte atteignant la limite d'élasticité: Fils	5 Module d'élasticité en kg/mm²: Câbles	6 Contrainte maximum admissible en kg/mm²	7 Allongement à la rupture en % de la longueur mesurée	8 Coefficient de dilatation linéaire par 1° C
						env.	env.			
Fil de cuivre, dur	jusqu'à 20	8,9	40	—	16	13 000	—	27	2	17×10^{-6}
Fil de cuivre, dur	> 20		38	—	15	12 500	—	25		
Fil de cuivre, demi-dur	jusqu'à 28	8,9	30	—	12	12 000	—	20	3	17×10^{-6}
Fil de cuivre, demi-dur	> 28		28	—	11	11 500	—	18		
Câble de cuivre, 7—19 brins	—	9	42	6	16	13 200	11 000	28	2,5	17×10^{-6}
Câble de cuivre, plus de 19 brins	—		42	8	15	13 200	10 000	28		
Câble de bronze	—	8,7	65	10	28	13 000	11 000	43	2,5	$16{,}7 \times 10^{-6}$
Fil de fer	jusqu'à 20	7,8	45	—	25	19 000	—	30	5	$12{,}3 \times 10^{-6}$
Câble d'acier (galvanisé), 7 brins	jusqu'à 60	7,9	120	2	50	20 000	18 500	80	5	$11{,}5 \times 10^{-6}$
Câble d'aluminium pur, 7—19 brins	—	2,75	19	6	8	6 300	5 500	12 [1])	2,5	23×10^{-6}
Câble d'aluminium pur, plus de 19 brins	—		18	8			5 200			
Câble d'aldrey, 19 brins	—	2,75	30	4	19	6 300	6 000	18	5	23×10^{-6}
Câble d'aldrey, 37 brins	—	2,75	30	5			5 700			

[1]) Pour les câbles aluminium-acier, la contrainte maximum admissible de l'aluminium peut atteindre jusqu'à 13 kg/mm².

Quand le conducteur n'est affecté d'aucun poids supplémentaire, γ est égal au poids spécifique du conducteur en kg/cm³.

Pour une charge supplémentaire de 2 kg, le poids total par unité de longueur et de section devient:

$$\gamma_{neige} = \gamma + \frac{0{,}02}{q}\ \text{kgc/m}^3, \qquad (2)$$

[1]) Ordonnance fédérale sur l'établissement, l'exploitation et l'entretien des installations électriques à fort courant, du 7 juillet 1933 (art. 88), appelée dans la suite «Ordonnance».

[2]) Ordonnance, art. 89.

où q est la section du conducteur en cm². On désigne souvant γ_{neige} par poids spécifique virtuel.

Pour les portées avec appuis au même niveau, jusqu'à 500 m environ, la composante horizontale peut être remplacée avec une approximation suffisante par la tension elle-même. On introduit donc dans l'équation (1a):

pour p_0 la tension maximum choisie du conducteur en kg/cm², qui ne doit pas dépasser la valeur maximum fixée par l'Ordonnance,

pour t_0 0,

pour γ_0 le poids spécifique du conducteur +

$$\frac{\text{surcharge par cm}}{\text{section}} = \gamma + \frac{0{,}02}{q} \text{ en kg/cm}^3,$$

pour α et E les valeurs correspondantes du métal du conducteur.

Pour une température choisie t, on peut alors calculer l'effort horizontal correspondant du conducteur p, déterminant la flèche à cette température.

L'équation étant au troisième degré en p, il est plus simple d'admettre pour p différentes valeurs, de les introduire dans l'équation et de calculer la température qui correspond à la valeur admise pour p. La fonction $p = F(t)$ est alors relevée dans un graphique permettant de lire les valeurs de p correspondant à des températures déterminées.

Pour les portées dont les appuis sont à des hauteurs différentes, l'effort de tension à l'appui le plus élevé p_z est sensiblement plus grand que la composante horizontale. On donne à p_z la valeur maximum choisie, qui ne doit pas dépasser la valeur maximum prescrite par l'Ordonnance, et on calcule la composante horizontale à l'aide de l'équation:

$$p^2 \cdot \left(\frac{h^2}{a^2} + 2\right) - p \cdot (2\,p_z - h \cdot \gamma_{schnee}) + \frac{\gamma^2_{schnee} \cdot a^2}{4} = 0 \qquad (3)$$

où p est la composante horizontale cherchée. Cette formule, développée à l'annexe I (équation 14*) en supposant que la ligne forme une parabole, est également valable avec une grande approximation pour la chaînette, si la portée ne dépasse pas 500 m et si l'inclinaison de la droite reliant les appuis ne dépasse pas 30° sur l'horizontale. Elle donne pour p des valeurs un peu plus faibles que celles qui seraient obtenues par un calcul exact de la chaînette. Lorsque la tension de pose des conducteurs est conforme à la valeur de l'effort horizontal calculé de la sorte, la tension à l'appui supérieur est un peu inférieure à la valeur admise par l'Ordonnance, ce qui est avantageux au point de vue de la sécurité contre la rupture. L'effort p ainsi calculé est introduit à la place de p_0 dans l'équation (1) pour les calculs subséquents.

2° Calcul de la flèche d'après les tensions déterminées au chapitre 1.

Dans cette étude, la flèche est toujours la distance entre le point de contact de la tangente à la courbe du conducteur, tirée parallèlement à la droite reliant les deux appuis, et le point de cette droite situé perpendiculairement au-dessus du point de contact de la tangente. Lorsque les appuis sont au même niveau, ce point de contact coïncide avec le point le plus bas de la chaînette; la droite verticale dans laquelle se trouve la flèche divise donc

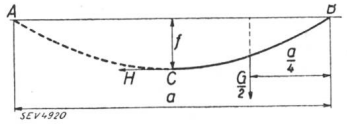


Fig. 1.

en deux parties égales la portée et la courbe du conducteur entre les appuis. Lorsque les niveaux des appuis sont différents, cette droite est déplacée quelque peu vers l'appui le plus élevé, mais cet écart n'est pas considérable. On peut donc admettre également dans ce cas avec une approximation suf-

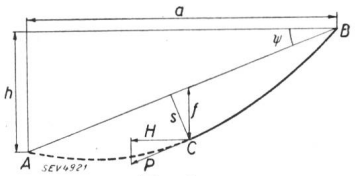


Fig. 2.

fisante que la flèche est la distance entre le milieu de la droite reliant les deux appuis et le point de la courbe situé perpendiculairement au-dessous, ce qui simplifie sensiblement les calculs.

Pour déterminer la grandeur de la flèche, on procède comme suit:

On suppose que le câble soit coupé au point de contact de la tangente parallèle à la droite AB (figures 1 et 2). Les deux tronçons du câble conserveront leur position si l'on exerce à l'endroit de la coupure la tension correspondante. En désignant par G le poids du câble entre A et B, et par H la composante horizontale de la tension au point C, l'équation des couples au point B devient:

a) $f \cdot H = \frac{G}{2} \cdot \frac{a}{4}$ pour une portée horizontale (fig. 1),

b) $s \cdot P = \frac{G}{2} \cdot \frac{a}{4}$ pour une portée inclinée (fig. 2).

En posant $s = f \cdot \cos\psi$ et $P = \frac{H}{\cos\psi}$, de sorte que les deux équations *a)* et *b)* deviennent identiques.

Lorsque la portée n'est pas très grande, on peut admettre que la longueur du conducteur est égale à la droite AB. En désignant par g le poids par unité de longueur, on a $G = g \cdot a$ (fig. 1) et $G = \frac{g \cdot a}{\cos\psi}$ (fig. 2), de sorte que

$$f = \frac{g \cdot a^2}{8 \cdot H} \text{ (Fig. 1)} \quad \text{et} \quad f = \frac{g \cdot a^2}{8 \cdot H \cos \psi} \text{ (Fig. 2)}$$

En divisant g et H par la section q on a $\frac{g}{q} = \gamma$ et $\frac{H}{q} = p$ et il vient finalement

pour une portée horizontale

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8 \cdot p} \tag{4}$$

et pour une portée inclinée

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8 \cdot p \cos \psi} \tag{4a}$$

Si l'on désigne par f_0 la flèche de la portée horizontale et par f la flèche d'une portée de même grandeur, mais inclinée de l'angle ψ, on a:

$$f = \frac{f_0}{\cos \psi} \tag{5}$$

Les deux équations (4) et (5) permettent de calculer avec une approximation suffisante les flèches des portées horizontales jusqu'à 300 mètres et celles des portées inclinées au maximum de 30° jusqu'à 500 mètres.

Pour les portées plus grandes, il n'est plus admissible de remplacer la longueur de l'arc de la chaînette par la corde. On doit utiliser les équations beaucoup plus compliquées mais plus exactes, dérivées des propriétés de la chaînette. Le paramètre de la chaînette c est p/γ. Lorsque les appuis sont au même niveau, l'ordonnée du point le plus bas de la chaînette (point C dans la figure 1) est égal à c; les ordonnées aux points A et B se calculent à l'aide de l'équation [3]):

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = c \cdot \mathfrak{Cos}\,\frac{x}{c} \tag{6}$$

où $x = \frac{a}{2}$. La flèche devient donc:

$$f = y - c = c\left[\mathfrak{Cos}\left(\frac{a}{2 \cdot c}\right) - 1\right] \tag{7}$$

ou, en développant les termes en série:

$$f = \frac{a^2}{8 \cdot c} + \frac{a^4}{384 \cdot c^3} + \dots \tag{8}$$

On peut négliger les termes de puissance supérieure. Si l'on supprime le terme de quatrième puissance et que l'on introduise $c = \frac{p}{\gamma}$, l'équation (8) devient identique à l'équation (4).

La relation formulée par l'équation (5) entre les flèches d'une portée horizontale et d'une portée inclinée de même grandeur $f = f_0/\cos \psi$ est alors valable avec une grande précision pour la chaînette [4]), ce qui simplifie extrêmement les calculs des flèches.

Si l'on dispose de tables des fonctions hyperboliques, les calculs peuvent être rendus plus faciles en transformant l'équation (7) comme suit:

$$f = 2\,c \cdot \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{a}{4\,c}\right) \tag{7a}$$

3° Courbe du conducteur. Détermination des distances au sol ou aux objets croisant la ligne.

L'Ordonnance sur les installations à fort courant prescrit certains écartements minima entre les conducteurs et le sol, ainsi que d'autres croisements avec des lignes à fort ou à faible courant. La détermination de ces écartements est basée sur la flèche maximum qui peut se présenter (avec ou sans charge supplémentaire). Lors du calcul de la flèche, on doit examiner tout d'abord si c'est la flèche à 0° C et charge de 2 kg de neige par mètre, ou la flèche à la température maximum qui est la plus grande. Selon l'Ordonnance, la température maximum à considérer est celle de + 40° C. Pour pouvoir déterminer les écartements, il faut naturellement connaître la courbe du conducteur.

Comme on l'a indiqué précédemment, l'équation de la chaînette est

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) = c \cdot \mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{c}\right) \tag{6}$$

ou, en développant les termes par puissances:

$$y = c + \frac{x^2}{2\,c} + \frac{x^4}{24\,c^3} + \frac{x^6}{720\,c^5} + \dots \tag{6a}$$

le paramètre étant $c = \frac{p}{\gamma}$. Les termes supérieurs à la quatrième puissance peuvent être négligés. Pour faciliter les calculs, on peut transformer légèrement l'équation (6a). On déplace l'axe des abscisses en introduisant la nouvelle ordonnée $y' = y - c$ au point le plus bas, en augmentant de c tous les termes. Il vient:

$$y' = c\left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^4 + \frac{1}{720} \cdot \left(\frac{x}{c}\right)^6 + \dots\right] \tag{9}$$

Le paramètre c étant de l'ordre de 500 à 1500 m pour les cas pratiques, le quotient $\frac{x}{c}$ est généralement < 1 et les puissances sont d'un calcul facile. A l'aide de l'équation (9), on peut donc tracer la courbe du conducteur.

On dispose généralement d'un profil en long de la ligne. Lorsque son échelle des niveaux est suffisamment grande, la courbe du conducteur peut être dessinée sur ce plan et l'on peut mesurer directe-

[3]) Développement, voir annexe I, équations (1*) à (5*).

[4]) Développement, voir ETZ 1925, p. 989, et 1932, p. 28 et 29.

ment les distances au sol ou aux croisements et autres. Ce simple procédé n'est toutefois pas approprié en général aux lignes dont les points d'appui sont fixes. En effet, du fait de la déclivité du terrain, la composante horizontale et par suite le paramètre diffèrent à chaque portée, de sorte qu'il faudrait calculer et dessiner une courbe spéciale pour chaque portée inclinée. Dans le cas des lignes à chaînes d'isolateurs, les courbes de toutes les portées ont le même paramètre et appartiennent donc à la même chaînette. Il suffit dans ce cas de calculer cette courbe, de la dessiner et de confectionner un chablon, à l'aide duquel on reporte la courbe dans le profil en long.

Au cas où des accidents de terrain ou des croisements se rapprochent fortement de la courbe du conducteur, il est utile de calculer l'écartement minimum. La détermination exacte selon les propriétés de la chaînette conduit à des calculs compliqués; d'autre part, si l'on remplace la chaînette par une parabole de même paramètre, les résultats sont généralement trop inexacts. On peut toutefois

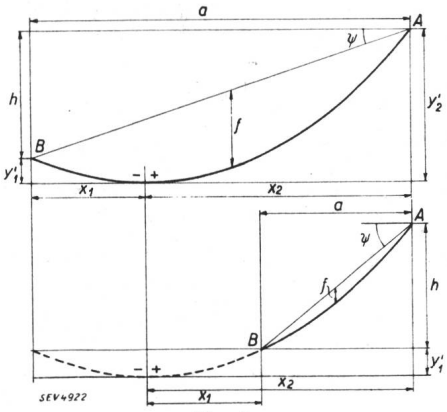


Fig. 3.

résoudre ce problème avec une assez bonne exactitude pour les portées jusqu'à 400 m et des inclinaisons jusqu'à 30°, de la façon suivante:

On part de nouveau des équations (4) et (4a):

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8\,p} = \frac{a^2}{8\,c} \tag{4}$$

$$f = \frac{\gamma \cdot a^2}{8\,p \cdot \cos\psi} = \frac{a^2}{8\,c \cdot \cos\psi} = \frac{a^2}{8\,c'} \tag{4a}$$

Ces équations montrent que, pour une portée inclinée, le paramètre c doit être remplacé par $c' = c \cdot \cos\psi$, si l'on veut représenter la courbe par une parabole. Avec le nouveau paramètre, le calcul des coordonnées de la courbe se fait à l'aide des équations [5]):

$$x_1 = \frac{c' \cdot h}{a} - \frac{a}{2} = c \cdot \frac{h}{a} \cos\psi - \frac{a}{2} = \frac{p \cdot h \cdot \cos\psi}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2} \tag{10}$$

[5]) Développement, voir annexe I, équations (12*) et (13*).

$$x_2 = \frac{p \cdot h \cdot \cos\psi}{\gamma \cdot a} + \frac{a}{2} \tag{11}$$

$$x_2 - x_1 = a$$

$$y'_1 = \frac{\gamma \cdot x_1^2}{2p \cdot \cos\psi}$$

$$y'_2 = y'_1 + h \text{ ou, ordinaire } y' = \frac{\gamma \cdot x^2}{2p \cdot \cos\psi} \tag{12}$$

Lorsque x_1 présente une valeur négative, le point le plus bas de la courbe se trouve à l'intérieur de la portée, dans l'autre cas à l'extérieur de celle-ci.

Les deux exemples suivants montrent l'application de ces équations. Les valeurs exactes déterminées à l'aide de la chaînette sont indiquées entre parenthèses.

Premier exemple.

Un câble de cuivre demi-dur d'une section de 1,5 cm² doit franchir une portée de $a = 451$ m avec dénivellation $h = 92{,}8$ m, selon la figure 4, de façon que dans le cas le plus défavorable (0° C et 2 kg/m de neige) la tension

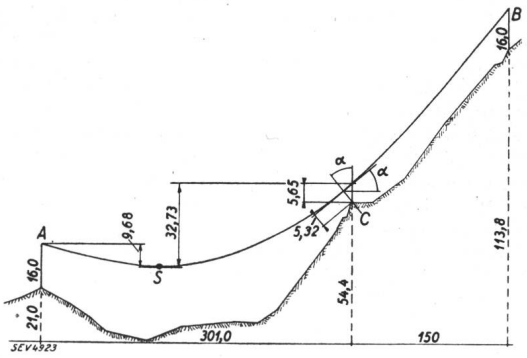


Fig. 4.

maximum ne dépasse pas le 85 % de la valeur maximum admissible de 1800 kg/cm² prescrite par l'Ordonnance. Il s'agit de déterminer quelle est la distance entre le conducteur et le point C du terrain (bord extérieur de la route) à 0° C et 2 kg/m de neige.

On calcule tout d'abord γ_{neige} selon l'équation (2). Le poids spécifique du cuivre est de $8{,}9 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³; d'où

$$\gamma_{neige} = 0{,}0089 + \frac{0{,}02}{1{,}5} = 0{,}0221 = 22{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^2.$$

On calcule ensuite la composante horizontale p de la tension maximum p_z selon l'équation (3), en introduisant:

$$p_z = 85\,\% \text{ de } 1800 = 1530 \text{ kg/cm}^2$$
$$\gamma_{neige} = 22{,}1 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$
$$a = 451 \cdot 10^2 \text{ cm}, \quad h = 92{,}8 \cdot 10^2 \text{ cm}$$

et l'on obtient:

$$p^2 \left(\frac{92{,}8^2}{451^2} + 2\right) - p\,(2 \cdot 1530 - 92{,}8 \cdot 10^2 \cdot 22{,}1 \cdot 10^{-3}) + \frac{22{,}1^2 \cdot 10^{-6} \cdot 451^2 \cdot 10^4}{4} = 0$$

$$2{,}042\ p^2 - 2864\ p + 250 \cdot 10^3 = 0$$

$$p = \frac{2864 \pm \sqrt{820{,}2^2 \cdot 10^4 - 204 \cdot 10^4}}{4{,}08}$$

On obtient 2 valeurs pour p: 1310 kg/cm² et 364 kg/cm². La seconde valeur n'a pas de portée pratique. On pose donc:

$$p = 1310 \text{ kg/cm}^2$$

$$c = \frac{p}{\gamma} = \frac{1310}{22{,}1 \cdot 10^3} = 59\,275 \text{ cm} = 592{,}75 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{h}{a} = \frac{92{,}8}{451} = 0{,}205; \quad \psi = 11^0\,37; \quad \cos \psi = 0{,}9795$$

Selon l'équation (10), on obtient pour le point d'appui inférieur A:

$$x_1 = \frac{592{,}75 \cdot 92{,}8 \cdot 0{,}9795}{451} - 225{,}5 = -106 \text{ m } (-107{,}1 \text{ m})$$

$$y'_1 = \frac{106^2}{2 \cdot 592{,}75 \cdot 0{,}9795} = 9{,}68 \text{ m } (9{,}71 \text{ m})$$

Le point le plus bas de la courbe se trouve donc à $y'^1 = 9{,}68$ m au-dessous du point d'appui inférieur A. L'abscisse du point de la ligne au-dessus de C est $x = 301 - 106 = 195$ m. L'ordonnée correspondante (hauteur au-dessus du point le plus bas de la courbe) est

$$y' = \frac{195^2}{2 \cdot 592{,}75 \cdot 0{,}9795} = 32{,}73 \text{ m } (32{,}01 \text{ m}).$$

La différence de niveau entre le point de la courbe au-dessus de C et le point A (figure 4) atteint donc: 32,73 — 9,68 = 23,05 m (22,27 m). Le point C est à 54,4 — (21 + 16) = 17,4 m au-dessus du point A, la hauteur de la ligne au-dessus du point C du terrain (bord extérieur de la route) est de 23,05 — 17,4 = 5,65 m selon le calcul avec la parabole, tandis que le calcul exact d'après la chaînette donne une distance de 4,9 m seulement. Elle ne satisfait donc pas aux prescriptions de l'Ordonnance (art. 86). La différence est de 75 cm (erreur de 15 %). Toutefois, pour des distances ordinaires de 200 à 300 m, ces deux valeurs sont presque identiques; pour une aussi faible différence, il ne vaut presque pas la peine d'effectuer des calculs compliqués à l'aide de la chaînette. Pour plus de sûreté, il est préférable d'augmenter de 1 m la distance minimum admissible entre conducteur et sol exigée par l'Ordonnance.

La flèche de cette portée est

$$f = \frac{451^2}{8 \cdot 592{,}75 \cdot 0{,}9795} = 43{,}8 \text{ m}$$

Le calcul exact d'après la chaînette donne 44,1 m. L'erreur est de 30 cm, donc inférieure à 1 %.

Deuxième exemple.

Un câble aluminium-acier d'une section de 2,103 cm² a été tendu entre les points A et B (figure 5), de façon que l'effort horizontal est de 1177 kg/cm² sous une charge supplémentaire de 2 kg/m de neige. Le poids du câble est de 815 grammes par mètre courant.

On a donc

$$\gamma_{\text{neige}} = \frac{0{,}00815 + 0{,}02}{2{,}103} = 13{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3.$$

Déterminer la distance entre la ligne et le point C du terrain. On a donc

$$a = 406 \text{ m} \qquad \gamma = 13{,}45 \cdot 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$
$$h = 250 \text{ m} \qquad p = 1177 \text{ kg/cm}^2$$
$$\cos \psi = 0{,}8515 \qquad c = \frac{p}{\gamma} = 875 \text{ m}$$
$$\psi = 31^0\ 37\tfrac{1}{2}'$$

Selon l'équation (10), on obtient pour le point d'appui inférieur A

$$x_1 = 875 \cdot \frac{250}{406} \cdot 0{,}8515 - 203 = 256 \text{ m } (302{,}57)$$

$$y'_2 = \frac{256^2}{2 \cdot 875 \cdot 0{,}8515} = 44 \text{ m } (52{,}83)$$

Hauteur du point de la courbe au-dessus de C au-dessus du point le plus bas de la courbe:

$$y' = \frac{(256 + 176)^2}{2 \cdot 875 \cdot 0{,}8515} = 125{,}3 \text{ m } (134{,}04)$$

La différence de niveau entre le point de la courbe au-dessus de C et le point A est donc de

$$125{,}3 - 44 = 81{,}3 \text{ m } (81{,}21)$$

et par suite l'écartement de la courbe du point C = 81,3 — 75 = 6,3 m (6,21 m).

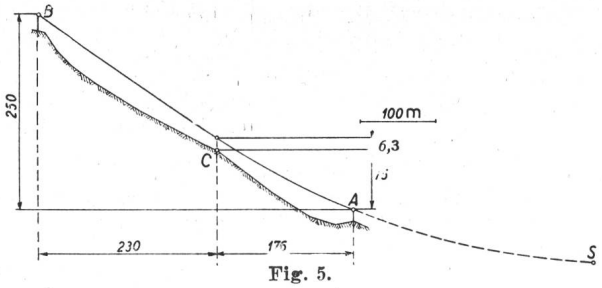


Fig. 5.

La différence entre le calcul approximatif et le calcul exact d'après la chaînette est donc dans cet exemple de 9 cm seulement. La concordance est d'autant meilleure que la portée est plus faible et que le paramètre de la courbe est plus grand.

Pour la flèche, on a:

$$f = \frac{406^2}{8 \cdot 875 \cdot 0{,}8515} = 27{,}65 \text{ m } (27{,}62)$$

Ces chiffres (x_1, x_2, y'_1, y'_2) montrent que le point le plus bas de la parabole fictive s'écarte sensiblement de celui de la chaînette. Toutefois, le point le plus bas se trouvant à l'extérieur de la portée et de la courbe du conducteur, cela est sans importance. Ces calculs montrent d'ailleurs que la courbe calculée et la courbe réelle coïncident bien dans la portée AB.

Pour le calcul de l'écartement minimum d'un point de la courbe, il faut connaître l'angle d'inclinaison de la courbe sur l'horizontale. En désignant cet angle par τ, on a pour un point quelconque de la courbe la relation:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{x}{c'} = \frac{x}{c \cdot \cos \psi} \qquad (13)$$

où x est l'abscisse du point de la courbe représentée comme une parabole fictive. L'écartement minimum entre un point du terrain et la courbe du conducteur est alors égal à la distance perpendiculaire, multiplée par cos τ.

(A suivre.)

Annexe I.

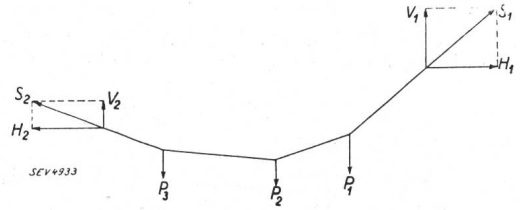
Développement des principales formules pour le calcul des lignes.

1° La théorie fondamentale (chaînette).

En supposant un câble souple de poids nul chargé à différents points de forces verticales, le polygone funiculaire est en équilibre lorsque la somme des projections de toutes les forces sur deux axes perpendiculaires entre eux est égale à zéro. On doit donc avoir dans la figure 1* les relations:

$$H_1 = H_2$$
$$V_1 + V_2 = P_1 + P_2 + P_3$$

c'est-à-dire que les composantes horizontales des tensions dans les divers tronçons sont toutes de même grandeur et que la somme des composantes verticales des tensions de



Fib. 1*.

tronçons quelconques est égale à la somme de toutes les charges qui se trouvent entre eux.

Ainsi, pour un côté horizontal du polygone, sa tension est égale à H, c'est-à-dire la tension la plus faible du système.

La composante verticale de la tension à un point quelconque du polygone est égale à la somme des charges entre ce point et le point le plus bas.

Dans les lignes aériennes, la charge est constituée avant tout par le poids propre des conducteurs; lorsque la section des conducteurs est constante, le poids est réparti régulièrement sur toute la longueur de l'arc. A vrai dire, en cas de charge supplémentaire due à la neige ou au givre, cela n'est généralement pas le cas. Mais, pour simplifier les calculs, on admet que ces charges supplémentaires sont également réparties d'une façon régulière le long des conducteurs. Soit g la charge totale (poids propre + poids supplémentaire) par unité de longueur (cm). Le polygone des con-

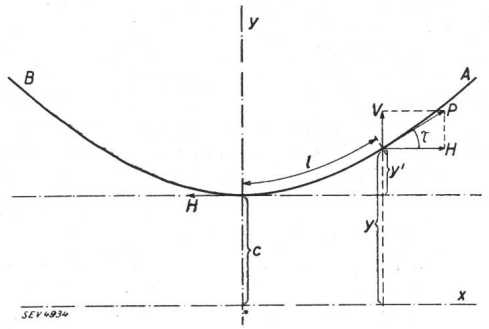


Fig. 2*.

ducteurs devient alors une chaînette. En effet, selon la figure 2*, où H est la composante horizontale et V la composante verticale de la tension P dans le conducteur, on a:

$$V = g \cdot l \qquad (1^*)$$

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{V}{H} = \frac{g \cdot l}{H} \qquad (2^*)$$

D'après l'équation (2*), on constate que la forme de la courbe ne se modifie pas lorsque l'on fait varier ensemble proportionnellement V et H, resp. g et H. On peut donc poser:

$$H = c \cdot g \qquad (3^*)$$

Le facteur de proportionnalité c est le paramètre de la courbe. De l'équation (2*) on tire:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{l}{c} \qquad (4^*)$$

La tangente de l'angle de la courbe par rapport à l'axe des x est donc proportionnelle à l'arc. Par dérivation de cette dernière formule, il vient:

$$\frac{d \operatorname{tg} \tau}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dl}{dx}$$

où $$\operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d(\operatorname{tg} \tau)}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2};$$

et $$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

donc

$$dl = dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

d'où l'on tire l'équation de la chaînette:

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) \qquad (5^*)$$

l'axe des x (figure 2*) se trouvant à une distance égale au paramètre c de la tangente au point le plus bas et parallèle à celle-ci. On peut aussi exprimer $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)$ par la fonction hyperbolique $\mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{c}\right)$; l'équation (5*) prend alors la forme

$$y = c \cdot \mathfrak{Cos}\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (5a^*)$$

Pour faciliter les calculs, on développe l'équation (5*) suivant la série de Mac-Laurin et on a:

$$y = c + \frac{x^2}{2c} + \frac{x^4}{24c^3} + \frac{x^6}{720c^5} + \ldots \qquad (6^*)$$

A l'aide de cette équation (6*), on peut déterminer pour une abscisse quelconque x l'ordonnée correspondante y. Les termes d'une puissance supérieure à la quatrième peuvent être négligés dans tous les cas pratiques, car ils sont relativement petits.

Lorsque les portées ne sont pas trop grandes et peu inclinées, il suffit de ne considérer que les deux premiers termes. L'équation (6*) devient dans ce cas:

$$y = c + \frac{x^2}{2c}$$

En déplaçant l'axe des abscisses dans la tangente au point le plus bas, en introduisant la nouvelle ordonnée $y' = y - c$, on a:

$$y' = \frac{x^2}{2c} \qquad (6a^*)$$

c'est-à-dire que la chaînette est dans ce cas une parabole.

La parabole représente la courbe des conducteurs dans le cas où la charge est répartie régulièrement sur la projection horizontale de la courbe. On a alors:

$$V = g \cdot x; \; H = g \cdot c$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \tau = \frac{V}{H} = \frac{x}{c}$$

et, par intégration $y' = \frac{x^2}{2c}$, formule identique à l'équation (6a*).

Il est intéressant de pouvoir déterminer la longueur de l'arc l en tenant compte des modifications des conditions. Selon l'équation (4*), on a

$$l = c \cdot \operatorname{tg} \tau = c \cdot \frac{dy}{dx}$$

D'autre part, selon l'équation (5*):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$$

et par conséquent:

$$l = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) \qquad (7^*)$$

On peut aussi exprimer $\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)$ par la fonction hyper-

bolique $\mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{c}\right)$; l'équation (7*) prend alors la forme:

$$l = c \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{x}{c}\right) \qquad (7a^*)$$

Pour les fonctions hyperboliques $\mathfrak{Sin}$ et $\mathfrak{Cos}$, il existe des tables, comme pour les fonctions circulaires.

L'équation (7*) peut être développée en série de puissances, comme l'équation (6*) et l'on obtient:

$$l = x + \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{c^2} + \frac{1}{120} \cdot \frac{x^5}{c^4} + \ldots \qquad (8^*)$$

En pratique, il suffit de considérer les deux premiers termes. Des équations (5a*) et (7a*) on déduit en outre, en considérant que

$$\mathfrak{Cos}^2\left(\frac{x}{c}\right) - \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{x}{c}\right) = 1: \qquad (9^*)$$

$$l^2 = y^2 - c^2$$

La valeur de l calculée d'après cette formule est la longueur de la chaînette entre le point le plus bas et le point d'ordonnée y.

Selon l'équation (3*), le paramètre est

$$c = \frac{H}{g} \qquad (3a^*)$$

En divisant par la section du conducteur, on obtient:

$$c = \frac{p}{\gamma}$$

où p est la traction horizontale spécifique du conducteur en kg/cm², γ le poids du conducteur + la charge supplémentaire, par 1 cm de longueur et 1 cm² de section. Si la charge supplémentaire est nulle, γ est alors égal au poids spécifique du conducteur en kg/cm³.

L'effort de tension du conducteur en un point quelconque se compose de la composante horizontale et de la composante verticale donc:

$$P = \sqrt{V^2 + H^2}$$

L'effort minimum est au point le plus bas de la courbe, où sa valeur est H; l'effort maximum est aux points d'appui, ou au point d'appui supérieur quand la portée est inclinée. Il résulte des équations (1*), (3*) et (9*) et de l'introduction de la charge spécifique g que

$$P = \sqrt{g^2 \cdot l^2 + g^2 \cdot c^2} = g \cdot \sqrt{l^2 + c^2} = g \cdot y \qquad (10a^*)$$

ou, en divisant de part et d'autre par la section du conducteur:

$$p_n = \gamma \cdot y \qquad (10^*)$$

Dans cette équation, y est l'ordonnée de la chaînette, rapportée à l'axe des abscisses se trouvant à la distance c au-dessous du point le plus bas de la courbe. Si ce dernier est considéré comme point zéro, on a $y' = y - c$ ou

$$p_n = p + \gamma \cdot y' \qquad (11^*)$$

où p est l'effort au point le plus bas, p_n l'effort en un point quelconque d'ordonnée y, resp. y'.

Quand il s'agit de portées pas trop grandes avec points d'appui au même niveau, p_n peut être considéré comme égal à p sans commettre de grande erreur.

2° Calcul des courbes des conducteurs de lignes avec points d'appui à des niveaux différents.

Pour déterminer les courbes des conducteurs, on doit connaître le paramètre, ainsi que la position des axes des coordonnées. Lorsque les appuis des portées sont au même niveau, ces données sont immédiatement connues, car l'axe des ordonnées divise en deux parties égales la droite reliant les deux appuis et est perpendiculaire à celle-ci.

Lorsque les appuis sont à des niveaux différents, on ne connaît que le paramètre c, la différence des abscisses des points d'appui égale à la portée a et la différence des ordonnées égale à la dénivellation h. Il s'agit donc de déterminer à l'aide de ces données les coordonnées des deux points d'appui A et B (figure 3 de la partie principale, chapitre 3) et ainsi la position des axes des coordonnées.

On résout ce problème en admettant tout d'abord que la courbe des conducteurs soit une parabole. Selon la figure 3, on a:

$$x_2 - x_1 = a \text{ et } y'_2 - y'_1 = h$$

Selon l'équation (6a*):

$$y'_2 = \frac{x^2_2}{2c} \text{ und } y'_1 = \frac{x^2_1}{2c}$$

On a donc

$$h = \frac{1}{2c}(x^2_2 - x^2_1) = \frac{a}{2c}(x_2 + x_1)$$

ou

$$x_2 + x_1 = \frac{2 \cdot c \cdot h}{a}$$

et

$$x_2 - x_1 = a$$

Par addition et soustraction des deux dernières équations, il vient:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= c\,\frac{h}{a} + \frac{a}{2} \text{ und} \\ x_1 &= c\,\frac{h}{a} - \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (12^*)$$

ou, car $c = \frac{p}{\gamma}$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} + \frac{a}{2} \text{ und} \\ x_1 &= \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (12a^*)$$

Pour la chaînette, le problème se résout d'une façon analogue. On part de préférence de la forme explicite de l'équation de la chaînette, en négligeant les puissances des abscisses supérieures à la quatrième.

Comme pour la parabole, on a:

$$x_2 - x_1 = a; \; y'_2 - y'_1 = h$$

Toutefois, les ordonnées sont:

$$y'_2 = \frac{x^2_2}{2c} + \frac{x^4_2}{24c^3}; \qquad y'_1 = \frac{x^2_1}{2c} + \frac{x^4_1}{24c^3}$$

d'où

$$a) \quad x_2 - x_1 = a$$

$$b) \quad h = \frac{a}{2c}(x_1 + x_2) \cdot \left[1 + \frac{x^2_1 + x^2_2}{12c^2}\right] \qquad (13^*)$$

En résolvant l'équation (13*) selon x_1 et x_2, on se heurte à des équations du troisième degré, dont la solution est très compliquée. Il est toutefois permis de remplacer l'expression $x_2^2 + x_1^2$ par les valeurs approchées $x_1'^2 + x_2'^2$ calculées selon l'équation (12*), resp. (12a*), et de réduire ainsi l'équation (13b*) en une équation du premier degré, dont on peut calculer la somme $x_1 + x_2$ et par suite les valeurs de x_1 et x_2 à l'aide de l'équation (13a*).

Si x_1 présente une valeur négative, le point le plus bas de la courbe se trouve à l'intérieur de la portée; dans la cas contraire, il est en dehors de celle-ci.

L'équation (11*) montre que, pour les portées avec points d'appui à des niveaux différents, l'effort horizontal p déterminant le paramètre c ne doit plus être considéré comme égal à l'effort maximum p_n au point d'appui supérieur. En aucun cas, p_n ne doit être choisi à une valeur plus élevée que l'effort maximum p_z fixé par l'Ordonnance. En posant $p_n = p_z$, l'effort au point le plus bas selon la figure 3 et l'équation (11*) ne doit pas dépasser:

$$p = p_z - \gamma_{neige} \cdot y'_1 = p_z - \gamma_{neige}(h + y'_1)$$

Pour une courbe parabolique, on peut poser

$$y'_1 = \frac{\gamma_{neige} \cdot x^2_1}{2 \cdot p}$$

et

$$x_1 = \frac{p \cdot h}{\gamma \cdot a} - \frac{a}{2}$$

ce qui permet d'établir l'équation:

$$p^2 \left(\frac{h^2}{a^2} + 2\right) - p\,(2p_z - h \cdot \gamma_{neige}) + \frac{\gamma^2_{neige} \cdot a^2}{4} = 0 \quad (14^*)$$

En résolvant cette dernière équation, on obtient deux valeurs: l'une pour le cas où le point le plus bas de la courbe est situé à l'intérieur de la portée, et l'autre pour le cas où il est en dehors. Une valeur imaginaire de p signifie que, pour les conditions données, aucune solution n'est possible, c'est-à-dire qu'on ne peut pas tendre les conducteurs donnés sur la portée donnée et avec le dénivellement donné, sans que la tension maximum p_n ne dépasse la limite fixée p_z. Dans un pareil cas, on devra alors choisir un conducteur de section plus grande ou en métal présentant une plus grande résistance à la rupture, ainsi que le montre l'exemple suivant:

Une portée de 400 m avec dénivellation de 200 m doit être installée avec un fil de fer de 5 mm présentant une résistance à la rupture de 4500 kg/cm².

L'effort maximum admissible est les ⅔ de 4500, soit 3000 kg/cm², le poids spécifique virtuel pour 2 kg/m de neige: $\gamma_{neige} = 109{,}8 \cdot 10^{-3}$ kg/cm³.
En introduisant ces valeurs dans l'équation (14*), on a:

$$p^2 \cdot \left(\frac{200^2}{400^2} + 2\right) - p\,(2 \cdot 3000 - 2 \cdot 10^4 \cdot 109{,}8 \cdot 10^{-3}) + \frac{109{,}8^2 \cdot 10^{-6} \cdot 4^2 \cdot 10^8}{4} = 0.$$

$$2{,}25\, p^2 - 3800\, p + 48 \cdot 10^5 = 0,$$

d'où

$$p = \frac{3800 \pm \sqrt{144 \cdot 10^5 - 432 \cdot 10^5}}{4{,}5}$$

Le membre sous la racine carrée étant négatif, p donne une valeur imaginaire. Il n'est donc pas possible, dans ces conditions, de tendre le fil.

[Au sujet de la validité et de l'application de l'équation (14*), voir au chapitre 1er de la partie principale, équation (3).]

3° L'équation des conditions d'une ligne aérienne pour portées avec points d'appui au même niveau.

On sait que lorsque la température varie d'une différence $t - t_0$, la longueur l_0 d'un fil de coefficient de dilatation linéaire α varie de: $(t - t_0)\,\alpha l_0$.

De même, lors d'une variation de l'effort de tension spécifique de $p - p_0$, ce même fil de module d'élasticité E varie de

$$(p - p_0) \cdot \frac{l_0}{E}.$$

où p et p_0 sont les efforts de tension spécifiques réels. Comme on l'a vu, ceux-ci sont à vrai dire différents d'un point à l'autre pour chaque condition, et vont en augmentant à partir du point le plus bas de la chaînette. Dans un calcul absolument exact, il faudrait donc introduire pour «p» et «p_0» les valeurs *moyennes* correspondantes (rapportées à l'ensemble de l'arc). Toutefois, selon *Hoock* (voir plus loin, au chapitre 4) on ne commet qu'une erreur négligeable dans les cas ordinaires où les points d'appui sont au même niveau, en introduisant l'effort de tension spécifique (le plus faible) du point le plus bas. Dans ces formules «p» et «p_0» restent dont les efforts au point le plus bas de la chaînette.

Pour une modification des conditions l_0, p_0, t_0 aux conditions l, p, t, on a donc d'une façon générale:

$$l - l_0 = (t - t_0)\,\alpha\, l_0 + (p - p_0)\,\frac{l_0}{E} \quad (15^*)$$

Or, pour la demi-portée $\frac{a}{2}$, lorsque les deux appuis sont au même niveau, on a selon l'équation (8*) et du fait que $c = \frac{p}{\gamma}$ pour les conditions de pose:

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a^3\,\gamma_0^2}{48\,p_0^2} + \frac{a^5\,\gamma_0^4}{3840\,p_0^4} + \cdots$$

où, dans la plupart des cas (sauf s'il s'agit de très grandes portées), les termes de troisième puissance peuvent être négligés à cause de leur petitesse, de sorte que l'on a la formule approchée:

$$\frac{l_0}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2\,\gamma_0^2}{24\,p_0^2}\right)$$

En supposant que le poids spécifique virtuel varie du fait de la charge supplémentaire de γ_0 à γ, en même temps que p_0 à p, on a pour les nouvelles conditions:

$$\frac{l}{2} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a^2\,\gamma^2}{24\,p^2}\right)$$

De ces deux dernières équations et de l'équation (15*) on tire:

$$l - l_0 = a\,\frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha \cdot l_0 + (p - p_0)\,\frac{l_0}{E}$$

ou

$$\frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha \cdot \frac{l_0}{a} + (p - p_0) \cdot \frac{l_0}{a} \cdot \frac{1}{E}$$

Dans ces formules, on peut poser avec une approximation encore suffisante:

$$\frac{l_0}{a} = 1.$$

Ce rapport étant en réalité légèrement > 1, cette simplification a le même effet qu'un α trop faible ou un E trop grand, ce qui donne une variation linéaire un peu trop faible selon l'équation (15*). On verra au chapitre 4 que cette erreur est toutefois sans importance dans les cas ordinaires.

Cette simplification permet de poser

$$\frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha + (p - p_0) \cdot \frac{1}{E} \quad (16a^*)$$

et l'on obtient, par transformation, *l'équation des conditions d'une ligne aérienne* (à points d'appui au même niveau, forme parabolique):

$$p^3 + p^2\left[\frac{\gamma_0^2 \cdot a^2 \cdot E}{24 \cdot p_0^2} + (t - t_0)\,\alpha \cdot E - p_0\right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24} \quad (16^*)$$

4° L'équation des conditions pour portées avec points d'appui à des niveaux différents.

En résumé, on sait donc qu'une ligne flexible tendue entre deux points fixes quelconques prend toujours la forme d'une chaînette, qui diffère si peu d'une parabole dans la majorité des cas pratiques, que l'écart est négligeable. Les efforts de tension à chaque point peuvent donc être calculés d'après la relation bien connue $p' = p + \gamma \cdot y'$, où la valeur y' est pour chaque point égale à son ordonnée au-dessus de la tangente au point le plus bas, choisie comme axe des x (figure 3*). L'effort de tension sera donc maximum au point d'appui le plus élevé; sa valeur maximum admissible p_z dépend de la résistance du métal à la rupture et du coefficient

de sécurité prescrit. La formule (14*) indiquée au chapitre 2 permet de déterminer l'effort p au point le plus bas de la courbe en partant de l'effort maximum admissible p_z.

Il reste à poser l'effort de tension p correspondant à de nouvelles conditions γ et t, en fonction des conditions de

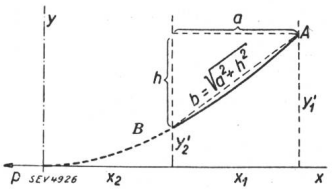


Fig. 3*.

pose connues p_0, γ_0 et t_0, comme on l'a déjà fait au chapitre précédent pour les portées horizontales.

En considérant exactement le problème on remarque immédiatement que la formule (16*) pour points d'appui au même niveau n'est pas utilisable pour les portées inclinées. En effet, on ne peut pas introduire sans autre dans cette formule la portée comme distance horizontale a, car la variation de l'effort doit être fonction de la variation de la longueur $(l - l_0)$ de l'arc avec la corde $b = f\ (a, h)$. En outre, la formule (16*) est basée sur une approximation qui n'est pas acceptable dans ce nouveau cas. Dans l'ancien cas, on avait posé pour la variation de la longueur $(l - l_0) = (p - p_0)\dfrac{1}{E}$ en tenant compte de l'élasticité, les grandeurs p et p_0 désignant les efforts au point le plus bas, alors qu'il ne peut s'agir en réalité que des variations des efforts moyens $(\overline{p} - \overline{p_0})$ par rapport à l'ensemble de la chaînette. Par contre, pour le calcul des longueurs l et l_0, ce sont les efforts p et p_0 au point le plus bas que l'on doit considérer. En établissant la formule (16*), on a donc rendu égaux et identiques deux efforts qui sont en réalité distincts. Dans l'ancien cas, on pouvait agir de la sorte, car l'erreur ainsi commise ne dépasse généralement pas quelques pour-cents. Comme on le verra à la fin de ce chapitre, la formule (16*)

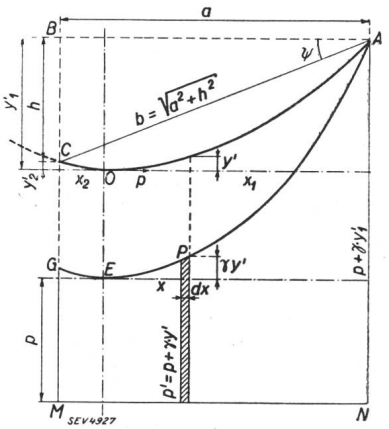


Fig. 4*.

pour portées horizontales est un cas spécial de la formule générale valable pour les portées inclinées. Quand il s'agit de portées dont les points d'appui sont à des niveaux différents, l'effort moyen peut atteindre des valeurs complètement différentes.

L'effort moyen $\overline{p}$ peut se définir comme l'effort $p' = p + \gamma \cdot y'$ de la parabole, intégré sur la distance horizontale a entre les points d'appui et ramené à cette grandeur prise comme base (voir figure 4*). Si l'on dessine donc pour une portée AC la courbe AEG des efforts $p' = p + \gamma \cdot y'$, l'effort moyen $\overline{p}$ est égal, selon la définition ci-dessus, à la hauteur du rectangle de base $MN = a = x_1 - x_2$, ayant la même surface que l'aire AEGMN.

Si, pour un point quelconque P, l'effort $p' = p + \gamma \cdot y'$, où

$$y' = \frac{\gamma \cdot x^2}{2\,p} + \frac{\gamma^3 \cdot x_4}{24\,p^3} + \cdots$$

on peut écrire

$$p' \cdot dx = p \cdot dx + \frac{\gamma^2 \cdot x^2}{2\,p} \cdot dx + \frac{\gamma^4 \cdot x^4}{24\,p^3} \cdot dx$$

$$\sum_{x_1}^{x_2} p' \cdot dx = p \int_{x_1}^{x_2} dx + \frac{\gamma^2}{2p} \int_{x_1}^{x_2} x^2 \cdot dx + \frac{\gamma^4}{24\,p^3} \int_{x_1}^{x_2} x^4 \cdot dx =$$

$$p\,(x_1 - x_2) + \frac{\gamma^2}{2p}\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{3}\right) + \frac{\gamma^4}{24\,p^3}\left(\frac{x_1^5 - x_2^5}{5}\right)$$

$$\text{c. a. d. } \overline{p} = p_{\text{moyen}} = p + \frac{\gamma^2}{2p}\left(\frac{x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2}{3}\right) + \frac{\gamma^4}{24\,p^3}\,\frac{(x_1^4 + x_1^3\,x_2 + x_1^2\,x_2^2 + x_1\,x_2^3 + x_2^4)}{5}$$

dont le troisième terme peut être négligé par rapport aux deux premiers, de sorte que l'on peut écrire d'une façon générale pour l'effort moyen d'un élément quelconque AOC de la chaînette:

$$\overline{p} = p + \frac{\gamma^2}{6\,p}\,(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2)$$

Sous cette forme, cette équation est toutefois mal commode pour les calculs, car elle exige le calcul préalable des abscisses x_1 et x_2. Il est cependant facile de la transformer en une fonction des grandeurs connues h et a.

On pose:

$$h = y'_1 - y'_2 = \frac{\gamma\,x_1^2}{2\,p} - \frac{\gamma\,x_2^2}{2\,p}$$

et

$$a = x_1 - x_2$$

puis, en éliminant les grandeurs x_1 et x_2, il vient:

$$\overline{p} = p + \frac{p\,h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2\,a^2}{24\,p} \qquad (17^*)$$

On constate donc que la grandeur $\overline{p}$ pour les portées inclinées peut être beaucoup plus grande que p, suivant les valeurs de h et a. Pour les portées horizontales, le terme renfermant h disparaît et l'on a:

$$\overline{p} = p + \frac{\gamma^2\,a^2}{24\,p} = p + \frac{1}{3}\,y \cdot f$$

Toutefois, même pour les portées très grandes, γ n'atteint jamais 10^{-1} kg/cm³ et la flèche dépasse rarement 100 m, en outre on doit choisir dans ces cas un métal présentant la plus forte résistance à la rupture ($p_z = 40$ à 80 kg/cm²). Il résulte donc de l'équation ci-dessus que $\overline{p}$ ne peut être que de quelques pour-cents supérieur à p, même dans les cas extrêmes.

Pour les portées horizontales, il est donc admissible de poser $\overline{p} \sim p$.

On peut alors établir l'équation générale des conditions et poser, comme pour la formule (16*):

$$l - l_0 = (t - t_0)\,\alpha\,l_0 + (\overline{p} - \overline{p_0})\,\frac{1}{E} \cdot l_0$$

Selon la figure 4* et l'équation (8*), la longueur l est

$$l = (x_1 - x_2) + \frac{1}{6}\,\gamma^2 \left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{p^2}\right)$$

$$l = a + \frac{a\,\gamma^2}{6\,p^2}\,(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2)$$

Selon la formule (12a*), on peut poser pour x_1 et x_2:

$$x_1 = \frac{p\,h}{\gamma\,a} + \frac{a}{2}$$

$$x_2 = \frac{p\,h}{\gamma\,a} - \frac{a}{2}$$

d'où l'on déduit:

$$x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3\,p^2\,h^2}{\gamma^2\,a^2}$$

En introduisant cette valeur, il vient:

$$l = a + \frac{h^2}{2\,a} + \frac{\gamma^2\,a^3}{24\,p^2}$$

De même:

$$l_0 = a + \frac{h^2}{2\,a} + \frac{\gamma^2}{24}\,\frac{a^3}{p_0^2}$$

$$l - l_0 = a \cdot \frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha \cdot l_0 + (\overline{p} - \overline{p_0})\,\frac{1}{E} \cdot l_0$$

$$= b \cdot \cos\psi \cdot \frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha \cdot l_0 + (\overline{p} - \overline{p_0})\,\frac{1}{E} \cdot l_0$$

En posant, comme précédemment, $\frac{l_0}{b} \sim 1$, on a

$$\cos\psi \cdot \frac{a^2}{24}\left(\frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{\gamma_0^2}{p_0^2}\right) = (t - t_0)\,\alpha + \frac{1}{E}\,(\overline{p} - \overline{p_0})$$

Selon la formule (17*), on pose en outre:

$$\overline{p} = p + \frac{p\,h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2\,a^2}{24\,p}$$

$$\overline{p_0} = p_0 + \frac{p_0\,h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0}$$

$$\overline{p} - \overline{p_0} = p + \frac{p\,h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2\,a^2}{24\,p} - p_0 - \frac{p_0\,h^2}{2\,a^2} - \frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0}$$

En introduisant cette valeur, il vient:

$$\frac{\gamma^2\,a^2}{24\,p^2}\,E \cdot \cos\psi - \frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0^2}\,E \cdot \cos\psi = (t - t_0)\,\alpha\,E + p + \frac{p\,h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2}{24}\,\frac{a^2}{p} - p_0 - \frac{p_0\,h^2}{2\,a^2} - \frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0}$$

et, par transformation:

$$p^3\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right) + p^2\left[\frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0^2}\,E \cdot \cos\psi + (t - t_0)\,\alpha \cdot E - p_0\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right) - \frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0}\right] + \frac{\gamma^2\,a^2}{24}\,p = \frac{\gamma^2\,a^2}{24}\,E \cdot \cos\psi$$

Par rapport au premier terme de la grande parenthèse, le terme $\frac{\gamma_0^2\,a^2}{24\,p_0}$ est négligeable, de même que dans la plupart des cas $\frac{\gamma^2\,a^2}{24}\,p$, de sorte que l'on obtient finalement

l'équation générale des conditions d'une ligne aérienne en forme de parabole:

$$p^3\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right) + p^2\left[\frac{\gamma_0^2 \cdot a^2 \cdot E}{24 \cdot p_0^2}\,\cos\psi + (t - t_0)\,\alpha \cdot E - p_0\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right)\right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^2 \cdot E}{24} \cdot \cos\psi \qquad (18^*)$$

Contrairement à l'équation (16*), cette équation peut être considérée comme équation générale des conditions, car elle est valable dans tous les cas. Pour $\psi = 0$, $h = 0$, elle est identique à l'équation (16*) pour portées horizontales.

5° Les équations des conditions pour lignes aériennes à isolateurs de suspension (chaînes d'isolateurs).

Comme on l'a vu au chapitre 5 *c)*, dans les lignes à isolateurs de suspension les tensions qui diffèrent dans certaines portées du fait de variations des conditions sont compensées par la déviation des chaînes d'isolateurs, de sorte que les tensions horizontales de toutes les portées peuvent être finalement toutes considérées comme identiques.

Dans ce qui suit, on établira les équations des conditions pour lignes à isolateurs de suspension avec points d'appui au même niveau et de niveaux différents.

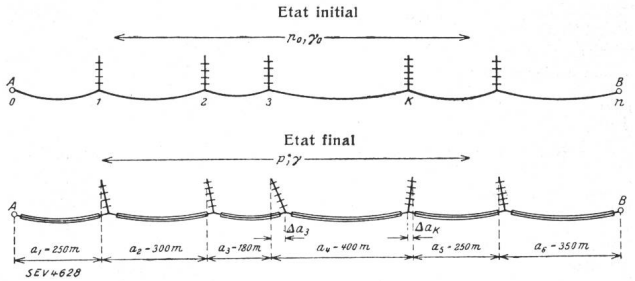


Fig. 5* und 6*.

Soit un conducteur monté entre deux points d'arrêt A et B en n portées aux conditions p_0, γ_0, t_0 avec chaînes d'isolateurs verticales (figure 5*). Si les conditions deviennent γ, t, la tension horizontale équilibrée du conducteur est p^*. Pour une telle modification des conditions, les chaînes des isolateurs dévieront de certaines valeurs Δa.

En désignant par

p_0 l'effort horizontal du conducteur en kg/cm² aux conditions de pose avec chaînes d'isolateurs verticales,

$p_1 \ldots p_k \ldots p_n$ les tensions du conducteur, différentes pour chaque portée, lors du passage des conditions du début à celles de la fin, mais les points d'appui étant considérés comme maintenus rigidement,

p^* la tension équilibrée du conducteur aux conditions finales γ, t (figure 6*),

on a pour la variation de la longueur de chaque portée (formule simplifiée de Bourquin):

$$\delta_k = \frac{a_k^3 \cdot \gamma^2}{24}\left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}}\right) + \frac{a_k}{E} \cdot (p^* - p_k) \qquad (19^*)$$

où δ_k signifie un allongement, lorsque $p^* > p_k$
et une réduction, lorsque $p^* < p_k$.

En ordonnant l'équation (19*) selon p_k et p^*, il vient:

$$\delta_k = \left[\frac{a_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_k^2} - \frac{a_k}{E} \cdot p_k\right] - \left[\frac{a_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p^{*2}} - \frac{a_k}{E} \cdot p^*\right] \qquad (19a^*)$$

et en la comparant à l'équation (16a*) pour la k^{me} portée, en multipliant celle-ci par a_k et en l'ordonnant comme pour l'équation (19a*),

$$\frac{a_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_k^2} - \frac{a_k}{E} \cdot p_k = (t - t_0)\,\alpha \cdot a_k + \left[\frac{a_k^3 \cdot \gamma^2}{24 \cdot p_0^2} - \frac{a_k \cdot p_0}{E}\right] \qquad (16a^*)$$

on voit que l'expression dans la parenthèse de gauche de l'équation (19a*) est identique à la partie de gauche de l'équation (16a*). En substituant l'équation (16a*) dans l'équation (19a*), on a:

$$\delta_k = \frac{a_k^3}{24} \cdot \left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}}\right) + (t - t_0)\,\alpha \cdot a_k + (p^* - p_0)\,\frac{a_k}{E}$$

La déviation totale Δa des isolateurs au k^{me} support est égale à la somme des modifications des longueurs δ dans toutes les portées de 1 à k, donc

$$\Delta a_k = \sum_1^k \delta =$$

$$\sum_1^k \frac{a^3}{24}\left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}}\right) + \left[(t-t_0)\,\alpha + (p^* - p_0)\frac{1}{E}\right]\sum_1^k a \quad (20^*)$$

A l'arrêt terminus (n^{me} portée) $\Delta a_n = 0$, car le point B est rigide. On introduit dans l'équation (20*) $\Delta a = 0$, divise par Σa et obtient l'équation des conditions pour sections de ligne avec isolateurs de suspension entre deux points d'arrêt:

$$\frac{\sum_1^n a^3}{\sum_1^n a}\left(\frac{\gamma_0^2}{24\,p_0^2} - \frac{\gamma^2}{24\,p^{*2}}\right) + (t-t_0)\,\alpha + (p^* - p_0)\frac{1}{E} = 0 \quad (20a^*)$$

On pose en outre:

$$\frac{\sum_1^n a^3}{\sum_1^n a} = a^{*2} \quad (21^*)$$

ordonne l'équation (20*) selon les puissances de p^* et l'on obtient finalement:

$$p^{*3} + p^{*2}\left[\frac{\gamma_0^2 \cdot a^{*2} \cdot E}{24 \cdot p_0^2} + (t-t_0)\,\alpha\,E - p_0\right] = \frac{\gamma^2 \cdot a^{*2} \cdot E}{24} \quad (22^*)$$

Cette équation est identique à l'équation (16*), les portées a étant remplacées par la portée a^*. Pour les lignes à isolateurs de suspension, les tensions du conducteur pour des sections comprises entre deux points d'arrêt ne doivent plus se calculer portée après portée, mais en considérant une *portée moyenne* a^*, dont la grandeur se détermine à l'aide de la formule (21*).

Pour les lignes dont les appuis sont à des niveaux différents, l'équation des conditions se déduit d'une façon analogue. La formule de Bourquin modifiée pour ce cas est

$$\delta_k = \frac{a_k^3\,\gamma^2 \cos\psi}{24}\left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}}\right) + \frac{a_k}{E}\,(\overline{p^*} - \overline{p_k}) \quad (23^*)$$

où p^* et p_k sont les efforts au point le plus bas, $\overline{p^*}$ et $\overline{p_k}$ les efforts moyens selon le chapitre 4. Selon la formule (17*), on a:

$$\overline{p^*} = p^* + p^*\frac{h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24\,p^*}$$

$$\overline{p_k} = p_k + p_k\frac{h^2}{2\,a^2} + \frac{\gamma^2 a^2}{24\,p_k} \quad (17^*)$$

Le dernier terme de l'équation (17*) a peu d'importance et peut être négligé. En introduisant les valeurs de $\overline{p^*}$ et $\overline{p_k}$ des équations (17*) dans l'équation (23*), on a:

$$\delta_k = \frac{a_k^3\,\gamma^2 \cos\psi}{24}\left(\frac{1}{p_k^2} - \frac{1}{p^{*2}}\right) + \frac{a_k}{E}\,(p^* - p_k)\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a_k^2}\right) \quad (23a^*)$$

où

$$\delta_k = \left[\frac{a_k^3\,\gamma^2 \cos\psi}{24\,p_k^2} - \frac{a_k\,p_k}{E}\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a_k^2}\right)\right] - \left[\frac{a_k^3\,\gamma^2 \cos\psi}{24\,p^{*2}} - \frac{a_k\,p^*}{E}\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a_k^2}\right)\right] \quad (23b^*)$$

L'équation transformée (18*) pour une seule portée est

$$\frac{a_k^3\,\gamma^2 \cos\psi}{24\,p_k^2} - \frac{a_k\,p_k}{E}\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a_k^2}\right) = (t-t_0)\,\alpha\,a_k + \frac{a_k^3\,\gamma_0^2 \cos\psi}{24\,p_0^2} - \frac{a_k\,p_0}{E}\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a_k^2}\right) \quad (18a^*)$$

En substituant l'équation (18a*) dans l'équation (23b*), il vient:

$$\delta_k = \frac{a_k^3 \cos\psi}{24}\left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}}\right) + (t-t_0)\,\alpha\,a_k + (p^* - p_0)\frac{a_k}{E}\left(1 + \frac{h_k^2}{2\,a^2}\right)$$

et, pour la déviation totale des isolateurs au k^{me} support:

$$\Delta a_k = \sum_1^k \frac{a^3 \cos\psi}{24}\left(\frac{\gamma_0^2}{p_0^2} - \frac{\gamma^2}{p^{*2}}\right) + (t-t_0)\,\alpha\sum_1^k a + (p^* - p)\frac{1}{E}\sum_1^k a\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right) \quad (24^*)$$

En posant dans l'équation (24*) $\Delta a_k = 0$, en divisant par Σa, on obtient l'équation des conditions pour des sections de lignes avec isolateurs de suspension et portées inclinées entre deux support d'arrêt:

$$\frac{\sum_1^n a^3 \cos\psi}{\sum_1^n a}\left[\frac{\gamma_0^2}{24\,p_0^2} - \frac{\gamma^2}{24\,p^{*2}}\right] + (t-t_0)\,\alpha + (p^* - p)\frac{1}{E}\,\frac{\sum_1^n a\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right)}{\sum_1^n a} = 0 \quad (24a^*)$$

On pose

$$\frac{\sum_1^n a^3 \cos\psi}{\sum_1^n a} = a^{*2}$$

et

$$\frac{\sum_1^n a\left(1 + \frac{h^2}{2\,a^2}\right)}{\sum_1^n a} = u \quad (25^*)$$

et l'on désigne par a^* *la portée moyenne* et par u le *facteur d'inclinaison moyen.*

En ordonnant l'équation (24a*) selon les puissances de p^*, on obtient finalement:

$$u \cdot p^{*3} + p^{*2}\left[\frac{\gamma_0^2\,a^{*2}\,E}{24\,p_0^2} + (t-t_0)\,\alpha\,E - u \cdot p_0\right] = \frac{\gamma^2\,a^{*2}\,E}{24} \quad (26^*)$$

L'équation (26*) peut être considérée comme l'équation générale des conditions des lignes à isolateurs de suspension. Quand h est égal à zéro dans toutes les portées, l'équation est identique à l'équation (1a), resp. (22*). Quand toutes les portées présentent la même inclinaison ψ, l'équation est identique à l'équation (1).

6° Constantes physiques d'un conducteur en deux métaux.

Les constantes physiques d'un câble composé de deux métaux différents (module d'élasticité, coefficient de dilatation linéaire et poids spécifique) peuvent se calculer en partant des constantes correspondantes des composants, comme

indiqué au chapitre 7 de la partie principale. En désignant par

q_1 la section totale des fils d'un métal,
q_2 la section totale des fils de l'autre métal,
q la section totale du câble complet,
P_1 la part de l'effort afférant aux fils q_1,
P_2 la part de l'effort afférant aux fils q_2,
P la tension totale du câble,
E_1 le module d'élasticité des fils q_1,
E_2 le module d'élasticité des fils q_2,
E_s le module d'élasticité du câble complet,
α_1 le coefficient de dilatation linéaire des fils q_1,
α_2 le coefficient de dilatation linéaire des fils q_2,
α_s le coefficient de dilatation linéaire du câble complet,
on détermine tout d'abord le

module d'élasticité d'un câble en deux métaux.

Quand un tel câble, tendu entre des supports d'arrêt de façon à exclure tout déplacement des fils des différents composants, est soumis à un effort de tension de P kg, les deux métaux subissent le même allongement Δl. Pour les deux métaux, l'équation est:

$$\Delta l = l - l_0 = (t - t_0)\,\alpha l_0 + (p - p_0)\,\frac{l_0}{E} \qquad (15^*)$$

Dans ce cas, $t = t_0$, $p_0 = 0$ et $p = P/q$. On a donc:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour le premier métal:} && \Delta l = \frac{P_1 \cdot l_0}{q_1 \cdot E_1} \\ &\text{pour le second métal:} && \Delta l = \frac{P_2 \cdot l_0}{q_2 \cdot E_2} \\ &\text{pour le câble complet:} && \Delta l = \frac{P \cdot l_0}{q \cdot E_s} \end{aligned}\right\} \qquad (27^*)$$

ou, en sortant les efforts de tension:

$$\left.\begin{aligned} &\text{pour le premier métal:} && P_1 = \frac{\Delta l}{l_0}\, q_1 \cdot E_1 \\ &\text{pour le second métal:} && P_2 = \frac{\Delta l}{l_0}\, q_2 \cdot E_2 \\ &\text{pour le câble complet:} && P = \frac{\Delta l}{l_0}\, q \cdot E_s \\ &\text{ou, car } P = P_1 + P_2: && P = \frac{\Delta l}{l_0}\,(q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2) \end{aligned}\right\} \qquad (27a^*)$$

De l'équation (27a*) on tire les équations suivantes pour l'effort partiel P_1 et P_2 afférant à chaque métal et pour le module d'élasticité E_s du câble complet:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \left(\frac{q_1 \cdot E_1}{q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2}\right) \cdot P \\ P_2 &= \left(\frac{q_2 \cdot E_2}{q_2 \cdot E_2 + q_1 \cdot E_1}\right) \cdot P \\ E_s &= \frac{q_1}{q} \cdot E_1 + \frac{q_2}{q} \cdot E_2 \end{aligned}\right\} \qquad (28^*)$$

Coefficient de dilatation linéaire d'un câble en deux métaux.

On part à nouveau de l'équation (15*), en considérant la variation de température de t_0 à t degrés du câble tendu avec la tension de pose p_0, la distance entre les points d'appui restant invariable. La variation de la température provoque une variation des efforts qui diffère pour chacun des deux métaux. Dans ce cas également, l'augmentation ou la réduction doit être la même aussi bien pour les deux composants que pour le câble complet.

De l'équation (15*) on tire: (29*)

pour le premier métal: $\dfrac{\Delta l}{l_0} = (t - t_0)\,\alpha_1 + (P_1 - P_{1_0})\,\dfrac{1}{q_1 \cdot E_1}$

pour le second métal: $\dfrac{\Delta l}{l_0} = (t - t_0)\,\alpha_2 + (P_2 - P_{2_0})\,\dfrac{1}{q_2 \cdot E_2}$

pour le câble complet: $\dfrac{\Delta l}{l_0} = (t - t_0)\,\alpha_s + (P - P_0)\,\dfrac{1}{q \cdot E_s}$

ou, en sortant les efforts de tension: (29a*)

pour le premier métal: $P_1 - P_{1_0} = \left[\dfrac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0)\,\alpha_1\right] q_1 \cdot E_1$

pour le second métal: $P_2 - P_{2_0} = \left[\dfrac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0)\,\alpha_2\right] q_2 \cdot E_2$

pour le câble complet: $P - P_0 = \left[\dfrac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0)\,\alpha_s\right] q \cdot E$

ou encore, en introduisant pour $q \cdot E_s$ la valeur correspondante de l'équation (28*):

$$P - P_0 = \left[\frac{\Delta l}{l_0} - (t - t_0)\,\alpha_s\right](q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2) \qquad (30^*)$$

En outre, $P_1 + P_2 = P$ et $P_{10} + P_{20} = P_0$. En additionnant les deux premières équations (29a*), il vient:

$$P - P_0 = \frac{\Delta l}{l_0}(q_1 \cdot E_1 + q_2 \cdot E_2) - (t - t_0) \cdot (q_1 E_1\,\alpha_1 + q_2 E_2\,\alpha_2) \qquad (31^*)$$

Des équations (30*) et (31*) on tire finalement:

$$\alpha_s = \frac{q_1 E_1\,\alpha_1 + q_2 E_2\,\alpha_2}{q_1 E_1 + q_2 E_2} \qquad (32^*)$$

(Annexe II suit.)

Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

Eine grosse Warmwasseranlage.

621.364.6 : 725.21

Das grosse, neue Warenhaus Decré in Nantes verlangte für das Restaurant, die Bar, den Coiffeursalon und die Toiletten täglich 5000 Liter warmes Wasser, das stets die Temperatur von 90° C haben muss. Die Warmwasserverbrauchsstellen sind in den verschiedenen Stockwerken vertikal untereinander gruppiert. Dies führte zur Wahl eines einzigen Warmwasserkessels, der natürlich wirtschaftlicher ist als einige kleine. Er arbeitet nach dem Heisswasserspeicherprinzip, indem er die billige Nachtenergie ausnützt und das warme Wasser aufspeichert.

Wegen seines Volumens war es unmöglich, ihn im Warenhaus selber unterzubringen; er wurde deswegen auf dem Dach aufgestellt, wodurch sich auch eine äusserst einfache Verteilung des warmen Wassers ergab.

Das von der Stadt gelieferte Wasser war seiner Qualität nach für galvanisiertes Eisen gefährlich, und sein Druck zu gross, als dass ein kupferner Druck-Behälter in Frage gekommen wäre; so entschloss man sich, einen Auslaufspeicher aus 6 mm Kupfer, innen verzinnt, mit 5100 l Nutzinhalt und mit einem Leergewicht von 1600 kg zu bauen, der von einem 10 cm dicken, geteerten und mit einer Zementschicht und ölgestrichenem Segeltuch umgebenen Korkmantel isoliert wurde. Dessen drucklose Speisung erfolgt aus einem separaten Becken mit Schwimmer. Eine elektromagnetische Drosselklappe sorgt dafür, dass ausser der Heizzeit kein kaltes Wasser einfliessen kann, damit das warme Wasser bis auf den letzten Tropfen tatsächlich warm ausfliesst. Sechs elektrische Heizrohre von je 10 kW Leistung besorgen die Heizung; sie sind im Reservoir unterhalb der Warmwasserausflussöffnung eingebaut, so dass sie stets in mindestens 250 l Wasser tau-