Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 27 (1936)
Heft: 21

Artikel: Stehende und fortschreitende Wellen auf Antennen
Autor: Metzler, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057536

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Stehende und fortschreitende Wellen auf Antennen.*)

Von *E. Metzler*, Bern.

621.396.671

Der Stromverlauf Fuss- und Mitte-gespeister Antennen wird durch fortschreitende und stehende Wellen dargestellt. Aus der Bedeutung der fortschreitenden Welle für den Strom im Speisepunkt wird ein Rückschluss auf den Phasenverlauf von Strom und Spannung auf der Antenne gezogen. Aus dem Stromverlauf für die Fuss- und Mitte-gespeiste Antenne werden die Feldstärke-Vertikaldiagramme abgeleitet, 2 Beispiele praktisch durchgerechnet und die Resultate mit den nach der üblichen Methode erhaltenen verglichen. Der komplexen Zusammensetzung des Antennenstromes entspricht eine ebensolche des Feldes, was sich augenfällig durch das Fehlen des Nullwinkels (beim Phasenwechsel) für überhöhte Antennen zeigt.

Le courant circulant dans les antennes alimentées à la base et au milieu est composé d'ondes progressantes et d'ondes stationnaires. D'après les conditions créées par l'onde progressante pour le courant au point d'alimentation, on peut déterminer la phase et l'intensité du courant dans l'antenne. De la répartition du courant dans les antennes alimentées à la base ou au milieu, l'auteur déduit le diagramme vertical de l'intensité de champ, calcule deux exemples pratiques et compare les résultats avec ceux obtenus par la méthode usuelle. A la structure complexe du courant dans l'antenne correspond une structure également complexe du champ, ce qui se traduit par l'absence de l'angle avec rayonnement nul (lors du changement de phase) pour les antennes surélevées.

Zur Erzielung günstiger Strahlungsverhältnisse muss die Verteilung des Stromes auf der Antenne nach Amplitude und Phase bekannt sein. Dies ist im Grunde gleichbedeutend mit der Kenntnis der *Antennenimpedanz* über die ganze Antennenlänge, wobei deren reelle Komponente im Speisepunkt den *Strahlungswiderstand* darstellt. Der Strahlungswiderstand war bereits Gegenstand vieler Untersuchungen, als die drahtlose Technik noch in den Anfängen stand (Abraham, Rüdenberg, Zennek, v. d. Pol u. a.). Seither haben verschiedene Autoren sich mit dessen Berechnung unter vereinfachenden Annahmen befasst. Zur Berechnung der Impedanz kann nach verschiedenen Methoden vorgegangen werden. So ergeben sich beispielsweise aus dem Linienintegral $\int \mathfrak{E}_z(z)\, i(z)\, dz$ die Komponenten der Antennenimpedanz aus der mit dem Strom in Phase befindlichen, bzw. um 90° verschobenen Oberflächenfeldstärke $\mathfrak{E}_z$ [1]). Dabei ist für den Strom meist sinusförmige Verteilung über die Antenne angenommen. Besonders für Antennenlängen, welche über die Halbwelle hinausgehen, ist die Annahme sinusförmiger Stromverteilung wegen des im sog. Knoten fliessenden Stromes unzulässig.

Im folgenden soll versucht werden, in Analogie zur offenen Leitung eine physikalisch übersichtliche Darstellung des *Stromverlaufes* auf einer Antenne zu geben. Obwohl zur Vereinfachung einige Einschränkungen nötig sind, glauben wir, dass im ganzen doch ein gutes Bild der grundsätzlichen Verhältnisse gewonnen werden kann. Der Vergleich von Antenne und offener, homogener Zweidrahtleitung ist deshalb nicht ganz korrekt, weil in der für die Leitung gültigen Telegraphengleichung der Drahtabstand klein angenommen ist, während bei der Antenne durch Strahlungsinduzierung [2]) jedes Leiterelement zusätzliche Blind- und Wirkwiderstände in die ganze Leiterlänge hinein induziert. Sodann ist die Auffassung der Antenne als homogene Leitung nicht absolut zulässig, indem ihre Parameter stetig veränderlich sind und somit auch der Wellenwiderstand. Für die nachfolgenden Ueberlegungen ist indessen ein mittlerer Wellenwiderstand angenommen und die Längen werden mit dem der kleineren (fiktiven) Fortpflanzungsgeschwindigkeit auf der Antenne entsprechenden Maßstab gemessen.

Wie sich später zeigt, ist das *elektrische Spiegelbild* der Antenne an der Erdoberfläche mitbestimmend für die Stromverteilung auf Mitte-gespeisten Antennen. Die Erdoberfläche wird im folgenden als vollkommen leitend angesehen, eine Annahme, die in der Praxis für die engere Umgebung der Antenne durch die meist dichtangelegten Erdnetze genügend realisiert ist.

Für die am Ende offene Leitung erhält man, wenn die Zählung vom freien Ende aus erfolgt,

für die Spannung $\mathfrak{v}_x = \mathfrak{v}_e \dfrac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2}$

und für den Strom $\mathfrak{i}_x = \dfrac{\mathfrak{v}_e}{\mathfrak{z}} \dfrac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2}$

wo $\mathfrak{v}_e$ = Spannung am offenen Ende,
$\gamma = \beta + j\alpha$ Fortpflanzungskonstante,
$\mathfrak{z}$ = Wellenwiderstand.

In reeller Schreibweise wird der Strom für Sinuswellen

$$i_x = I\left[e^{\beta x}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\beta x}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] \tag{1}$$

Dieser Ausdruck ergibt durch Zusammenfassen zwei räumlich und zeitlich um 90° verschobene stehende Wellen [3]).

$$i_x = 2I\left[\mathfrak{Sin}\,\beta x \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t + \mathfrak{Cos}\,\beta x \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t\right]$$

Die Analogie zur Leitung verlangt nun für richtigen Abschluss rein fortschreitende Wellen, d. h.

*) La traduction française de cette étude paraîtra au Bulletin Technique de l'Administration des Télégraphes et des Téléphones Suisses 1936, No. 5.

[1]) J. Labus, Z. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik Bd. 41 (1933), S. 27.

[2]) H. Schmidt, Diss. Z. Hochfrequenztechnik u. Elektroakustik Bd. 40 (1932), S. 158.

[3]) W. Berndt u. A. Gothe, Telefunkenztg. Nr. 72, S. 8. (In dieser Arbeit sind irrtümlicherweise die Phasenvorzeichen vertauscht, so dass die beiden Wellen durch das Minuszeichen verbunden sind.)

im vorliegenden Fall: Auch die Speisung der Antenne erfolgt durch eine *fortschreitende Welle*. Dies ist selbstverständlich, da ja die abgestimmte Antenne im Speisepunkt rein ohmschen Widerstand zeigen muss, auf welchen der Ausgang des Senders anzupassen ist.

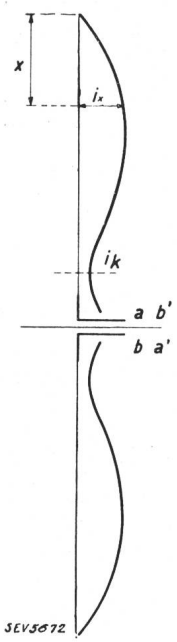

Fig. 1.
Unten gespeiste, durch eine gespreizte Doppelleitung dargestellte Antenne.

Da hier angenommen wird, dass die (Strahlungs-)Dämpfung gleichmässig über die Länge der Antenne verteilt ist (konstantes β), kann man die offene Leitung ersetzen durch eine solche ohne Eigendämpfung, abgeschlossen mit einem ohmschen Widerstand, welcher dem Strahlungswiderstand der Antenne im Speisepunkt entspricht. Dieser Ersatz erfüllt wohl die Bedingungen im Speisepunkt; für die offene endlich lange Leitung ist aber, um die Randbedingung ($x = 0$, $i = 0$) zu erfüllen, eine *stehende Welle* nötig, die im Speisepunkt durch 0 geht oder in bezug auf die fortschreitende Welle keine Blindkomponente hat.

Der Strom auf der Antenne lässt sich nun auf einfache Weise in die verlangte fortschreitende und stehende Komponente spalten; indem man ansetzt

$$i_x = I_{1x} \sin \omega t \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - I_{2x} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

$$= I\left[e^{\beta x} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\beta x} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]$$

wird

$$i_x = 2 I_{01} \left[\mathfrak{Cos}\, \beta x \sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\beta x} \sin \omega t \cos \frac{2\pi x}{\lambda}\right] \qquad (2)$$

Für $x = \frac{\lambda}{4}; \frac{3\lambda}{4}; \frac{5\lambda}{4}$, usw. hat die stehende Welle Nullstellen, das heisst die Antenne zeigt in diesen Punkten nur ohmschen Widerstand, wie das für die Antenne von der Länge $\frac{\lambda}{4}; \frac{3\lambda}{4}$ usw. bekannt ist. Für Speisung im Knoten, d. h. für Antennenlängen $\frac{\lambda}{2}; \lambda; \frac{3\lambda}{2}$; usw. wird der Strom $2 I\, \mathfrak{Sin}\, \beta \frac{\lambda}{2} \sin \omega t$; $-2 I\, \mathfrak{Sin}\, \beta \lambda \sin \omega t$ usw. Fortschreitende und stehende Wellen haben entgegengesetzte Phase; die Antenne kann also auch in diesen Punkten ohne zusätzliche Abstimmittel erregt werden.

Im Gegensatz zur fusserregten Antenne, wo hinsichtlich der Spiegelung an der Erdoberfläche beide Quellpunkte identisch werden, ist bei obenerregten Antennen der Einfluss des Spiegelbildes zu berücksichtigen. Dies geschieht am besten durch Superposition der durch den *reellen* und den *Spiegelbild-Speisepunkt* hervorgerufenen Stromverteilungen. Man geht dabei von der Ueberlegung aus, dass im Speisepunkt nur eine fortschreitende Welle auftritt. Betrachtet man in Fig. 2 das Teilstück ab bis l (dessen elektrische Länge bei abgestimmter Antenne immer $n \frac{\lambda}{4}$ beträgt, wo n eine ganze Zahl ist), so ergibt sich mit Zählung vom Spiegelbildende aus

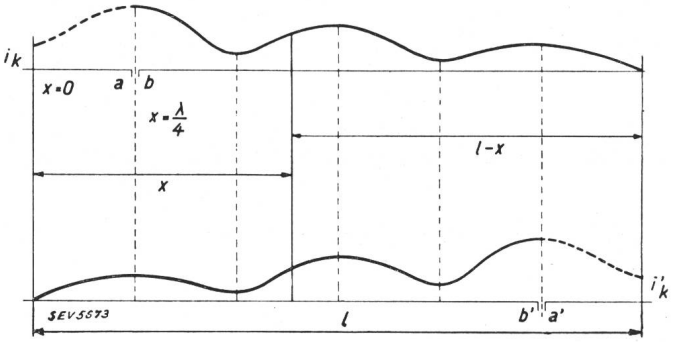

Fig. 2.

nach vorigen Ueberlegungen eine Darstellung wie in der Figur angegeben. Berechnet man den entsprechenden Strom für das Teilstück a′ b′ bis 0 aus dem Spiegelbild-Speisepunkt, so erhält man die resultierende Stromverteilung auf dem gemeinsamen Stück a b bis a′ b′.

Bei beliebigem $\frac{l}{\lambda}$ ist zu beachten, dass an der Erdungsstelle kein Phasensprung eintreten darf. Dieser Forderung genügt man durch Einfügen von zusätzlichen Abstimmitteln. Für $\frac{l}{2} < \frac{\lambda}{2}$ ist es eine Induktivität; $\frac{\lambda}{2} < \frac{l}{2} < \frac{3\lambda}{4}$ erfordert Kapazität oder Induktivität, je nachdem auf die Halbwelle oder die Dreiviertelwelle abgestimmt werden soll. Der die Praxis interessierende Fall bezieht sich auf Antennenlängen $\frac{\lambda}{2} \leqq \frac{l}{2} < \frac{3\lambda}{4}$ (Fig. 3).

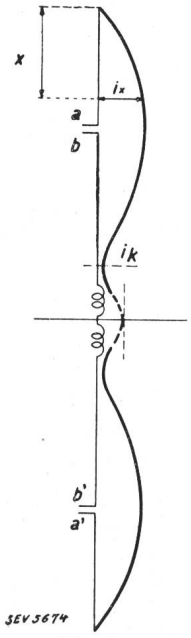

Fig. 3.

Es lässt sich zeigen, dass die Phase am Fusspunkt für das hier interessierende Antennenstück x $= \frac{\lambda}{4}$ bis $\frac{l}{2}$ nur in den Ausdrücken für die Wellen, die vom reellen Speisepunkt ausgehen, eine Bedeutung hat.

Für die am Fusspunkte der Antenne zu korrigierende Phase gilt offenbar die Bedingung

$$\frac{2\pi \frac{l}{2}}{\lambda} + \psi = \frac{3\pi}{2}$$

woraus $\psi = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi l}{\lambda}$

Im Spiegelbild ergibt sich derselbe Betrag, so dass man erhält

$$i'_x = I'\left[e^{\beta x}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\beta x}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] \quad (3a)$$

aus dem Spiegelbild,

$$i''_x = I'\left[e^{\beta(l-x)}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) + 2\psi\right) - e^{-\beta(l-x)}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}(l-x) - 2\psi\right)\right] \quad (3b)$$

aus der Antenne.

Durch Einsetzen des Ausdruckes für ψ vereinfacht sich (3b) auf

$$i''_x = I'\left[e^{-\beta(l-x)}\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{\beta(l-x)}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]$$

Der Gesamtstrom wird

$$i_x = I'\left[e^{\beta x}(1 + e^{-\beta l})\sin\left(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}\right) - e^{-\beta x}(1 + e^{\beta l})\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] \quad (4)$$

Die Gleichungen für die beiden Strombilder (Fig. 2) dürfen nicht über den zugehörigen Speisepunkt hinaus angewendet werden, da dies einer Verschiebung des Speisepunktes gleichkommt. Extrapoliert man über den tatsächlichen Speisepunkt hinaus bis ans Antennen- bzw. Spiegelbildende, so ergibt sich ein Strom

$$i_k = i'_k = I\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\frac{3\lambda}{2}$$

welcher einer Speisung im Knoten, was ja nicht zutrifft, entspricht.

Der Strom auf den Abschnitten $x = 0$ bis $\frac{\lambda}{4}$ und $(l - x) = (l - \frac{\lambda}{4})$ bis l berechnet sich einfach aus Gl. (2), wobei der Strom im Speisepunkt sich aus (2) und (5) nach Phase und Amplitude gleich ergeben muss.

Durch Spalten von (4) in eine fortschreitende und eine stehende Welle erhält man nach dem bereits benützten Ansatz:

$$i_x = 2I'\left[e^{\beta x}(1 + e^{-\beta l})\sin\omega t\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - [\mathfrak{Cos}\,\beta x + \mathfrak{Cos}\,\beta(x - l)]\sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right] \quad (5)$$

Dieser Ausdruck muss verschiedene Bedingungen erfüllen:

1. Nach früheren Ueberlegungen (wir messen in der verkürzten Wellenlänge) muss die stehende Welle im Speisepunkt durch 0 gehen oder in Phase, bzw. Gegenphase zur fortschreitenden Welle liegen, was sich ohne weiteres ergibt, da $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = 0$.

2. Der Knotenstrom $\left(x = \frac{\lambda}{2}\right)$ ist in Phase oder Gegenphase mit der fortschreitenden Welle

$$i_{\frac{\lambda}{2}} = 2I'\left[-e^{\beta\frac{\lambda}{2}}(1 + e^{-\beta l})\sin\omega t + \left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{2} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l\right)\right)\sin\omega t\right]$$
$$= -I'\left[\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{\lambda}{2} + \mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l\right)\right]\sin\omega t$$

3. Für $l = \lambda$ (Mitte gespeiste Halbwellenantenne) fliesst im Fusspunkt $x = \frac{\lambda}{2}$ kein Strom

$$i_{\frac{\lambda}{2}} = -I'\left(\mathfrak{Sin}\,\beta\frac{\lambda}{2} + \mathfrak{Sin}\,\beta\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\right)\sin\omega t = 0$$

Da von einer Grundgleichung ohne bestimmte Endbedingungen ausgegangen wurde, ist es nötig, das Verhältnis der maximalen Amplituden für (2) und (5) festzulegen. Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Amplituden im Speisepunkt gleich sein müssen. Dabei ist natürlich auch Phasenübereinstimmung nötig.

Aus Gl. (2)

$$x = \frac{\lambda}{4};\ i_x = -I\left(e^{\beta\frac{\lambda}{4}} + e^{-\beta\frac{\lambda}{4}}\right)\cos\omega t = -2I\,\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}\cos\omega t$$

und aus Gl. (5)

$$x = \frac{\lambda}{4};\ i_x = -2I'\left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)\right)\cos\omega t$$

geht hervor, dass die Phasenbedingung erfüllt ist.

Nimmt man I' als Einheit, so bestimmt sich I zu

$$1 + \frac{\mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)}{\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}}$$

Die Richtigkeit der so erhaltenen Stromgleichungen kann man nun nachprüfen. Wenn man nämlich $l = \lambda$ entsprechend der Halbwellenantenne setzt, müssen sich vom Speisepunkt aus gezählt für gleiche Abstände a der Symmetrie wegen dieselben Ströme ergeben. Es ist demnach zu setzen:

$$2\left(1+\frac{\mathfrak{Cos}\,\beta\left(-\frac{3\lambda}{4}\right)}{\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}}\right)\left[\mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4}-a\right)\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}-a\right)\right)-e^{-\beta\left(\frac{\lambda}{4}-a\right)}\sin\omega t\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}-a\right)\right]$$

$$=2\left[e^{\beta\frac{\lambda}{4}}(1+e^{-\beta\lambda})\sin\omega t\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}+a\right)-\mathfrak{Cos}\,\beta\left(a-\frac{3\lambda}{4}\right)\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{4}+a\right)\right)\right]$$

Die durchgeführte Rechnung ergibt die verlangte Symmetrie.

Phasen- und Amplitudenverhältnisse auf der Antenne lassen sich nach den vorstehenden Ergebnissen graphisch veranschaulichen.

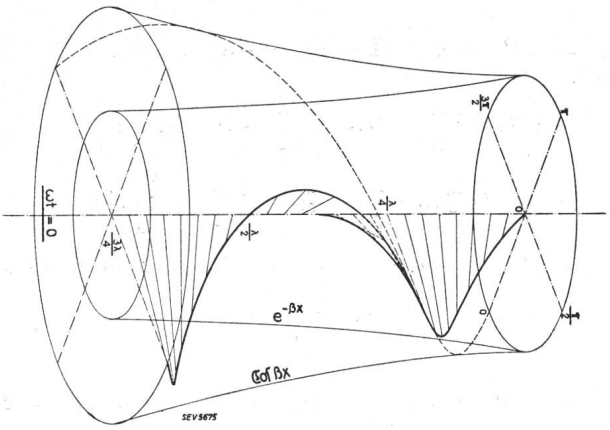

Fig. 4.

Man benützt dazu eine Darstellung, die von Schulz [4]) vorgeschlagen ist. In den Fig. 4 bis 6 sind Momentanbilder des Schwingungszustandes einer fussgespeisten Antenne von der Länge $\frac{l}{2}=\frac{3\lambda}{2}$ aufgezeichnet. Die beiden Rotationskörper mit den Mantellinien $e^{-\beta x}$ und $\mathfrak{Cos}\,\beta x$ haben einen gemeinsamen zur Axe senkrechten Schnitt ($x=0$). Im

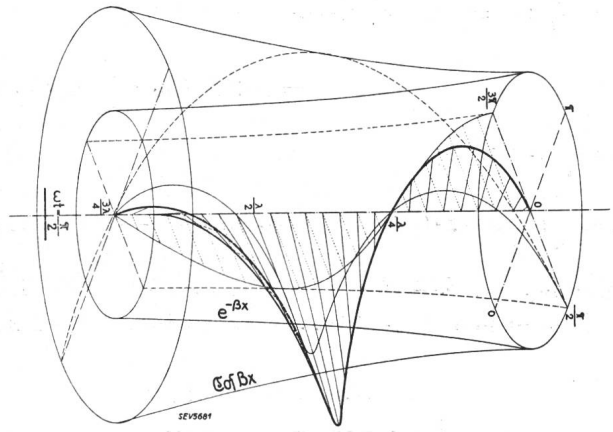

Fig. 5.

Momentanzustand zur Zeit t ergibt sich die stehende Schwingung als gedämpfte ebene Sinuswelle, deren Schwingungsebene um den Winkel ωt gegen die 0-Ebene verdreht ist. Die fortschreitende Welle, ebenfalls eine gedämpfte Sinuslinie, windet sich, der Raumphase folgend, um die X-Axe. Als resultierende aus beiden Wellen erhält man durch vektorielle Addition den *momentanen Stromzustand* auf der Antenne. Durch Projektion auf eine zur Axe senkrechte Ebene ergibt sich eine den Breisigschen Spiraldiagrammen entsprechende Darstellung.

Die Ueberlegung, dass im Speisepunkt keine stehende Welle auftreten darf, führt zur Darstellung der Phase φ, welche sich aus

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{2}\,\frac{e^{-\beta x}\sin\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right)}{\mathfrak{Cos}\,\beta x-e^{-\beta x}\cos^2\frac{2\pi x}{\lambda}} \tag{6}$$

ergibt. Der Phasenverlauf ist aus den Fig. 4 bis 6 ersichtlich, wenn man zum Vektor der fortschreitenden Welle die gleichphasige Komponente der stehenden Welle addiert. Der Winkel zwischen dem

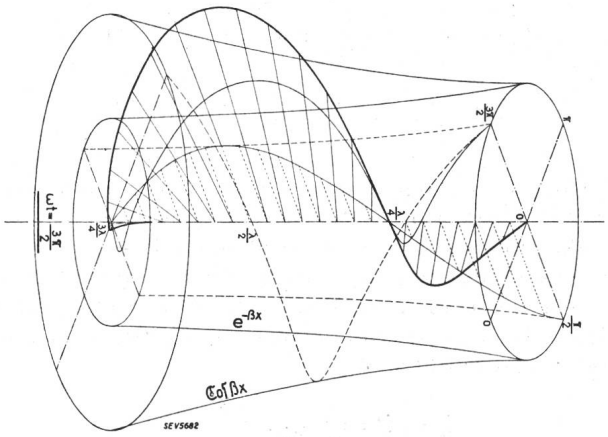

Fig. 6.

so entstandenen Vektor und der verbleibenden stehenden Komponente ist offenbar gleich φ.

Es kann auch versucht werden, aus der Bedingung

$$I_{ab}^2 R_s=\int_0^{\frac{l}{2}} I_x^2\, r\,\mathrm{d}x=\text{const.}$$

den Verlauf des Strahlungswiderstandes R_S zu erhalten. Die Integration führt auf eine in β implizite Form, welche graphisch zu lösen wäre. Auf die Schwierigkeiten, die sich dieser Methode der Bestimmung des Strahlungswiderstandes aus dem genaueren Stromverlauf auf der Antenne entgegenstellen, wurde bereits hingewiesen [5]).

[4]) Schulz, Theorie des Fernsprechens, Telegr. u. Fernspr. Techn. 1927.

[5]) E. Siegel und J. Labus, Z. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 43 (1934), S. 166.

Vertikales Strahlungsdiagramm.

Für den Antennenbauer ergibt sich als wichtigste Folgerung aus der Kenntnis der Stromverteilung die *vertikale Strahlungscharakteristik.* Ein Dipolelement dx durchflossen vom Strom $ix = I_0 \sin \omega t$ erzeugt im Abstande r ($r >$ einige Wellenlängen) nach Hertz die elektrische Feldstärke

$$d\mathfrak{E}^{mV/m} = \frac{2\pi \cdot c \cdot 10^{-9}}{\lambda \cdot r} I_0 \, dx \cos\varphi \sin\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right)$$

$c =$ Lichtgeschwindigkeit
$\varphi =$ Richtungswinkel

Da r eine Funktion der Höhe des Dipolelementes über dem Erdboden ist, kommen die einzelnen Dipolstrahlungsanteile am Empfangsort mit verschiedener Phase an. Die Phasenverhältnisse sind einfach zu erfassen, wenn jedem Dipolelement sein Spiegelbild zugeordnet wird. Alle resultierenden Teilstrahlungen erhalten so die Phase der Fusspunktlage [6]), wobei, wie sich zeigen lässt, die Amplitude proportional $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\varphi\right)$ verläuft (Fig. 7).

Die Gesamtfeldstärke in mV/m an einem Empfangsort im Abstand r km vom Sender und unter dem Erhebungswinkel φ gegen die Horizontale wird

$$E_{(\varphi)} = \frac{120\pi}{\lambda \cdot r} \cos\varphi \int_0^{l/2} i_x \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \sin\varphi\right) dx \qquad (7)$$

dabei bedeutet λ die Wellenlänge in m und i den Strom in Ampère.

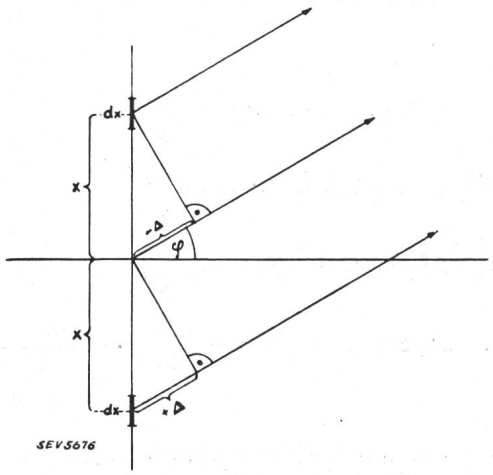

Fig. 7.

Im folgenden soll die Vertikalcharakteristik einer *fusserregten Antenne* unter Berücksichtigung der in Gl. (2) gegebenen Stromverteilung berechnet werden. Die Gleichung ist dabei so umzuformen, dass die Effektivwerte gleichphasiger Glieder zusammengefasst werden. Man erhält so entsprechend Gl. (7)

$$\mathfrak{E}_{(\varphi)} = E_{00} \cos\varphi \left[\int_{x=0}^{l/2} \mathfrak{Sin}\, \beta x \cos\frac{2\pi x}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\lambda} \sin\varphi\right) dx + j \int_{x=0}^{l/2} \mathfrak{Cos}\, \beta x \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{l}{2} - x\right)}{\lambda} \sin\varphi\right) dx \right] \qquad (8)$$

Die Integration ist verhältnismässig einfach durchzuführen, wenn man die Hyperbel und Kreisfunktionen in der Exponentialform einführt. Es ist

$$\mathfrak{Sin}\, \beta x = \frac{e^{\beta x} - e^{-\beta x}}{2}; \qquad \mathfrak{Cos}\, \beta x = \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2}$$

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{e^{j\frac{2\pi x}{\lambda}} - e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda}}}{2j};$$

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{e^{j\frac{2\pi x}{\lambda}} + e^{-j\frac{2\pi x}{\lambda}}}{2}; \qquad \frac{l}{2} = l'$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(l' - x)\sin\varphi\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(l'-x)\sin\varphi} + e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(l'-x)\sin\varphi}}{2}$$

Man setzt noch

$$\frac{2\pi l'}{\lambda}\sin\varphi = k_0; \qquad \frac{2\pi}{\lambda}(1 + \sin\varphi) = k_1;$$

$$\frac{2\pi}{\lambda}(1 - \sin\varphi) = k_2; \qquad \frac{2\pi l'}{\lambda} = k_3$$

Durch die Integration vermischen sich reelle und imaginäre Glieder und nach einigen Zwischenrechnungen ergibt sich

$$\int_0^{l'} [\xi(x) + j\chi(x)]\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_1 x - k_0)]}{\beta + j k_1} + \frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_2 x + k_0)]}{\beta + j k_2}\right]_0^{l'} + \mathfrak{C}$$

Da $\mathfrak{Cos}\,(a + jb) = \mathfrak{Cos}\, a \cos b + j\, \mathfrak{Sin}\, a \sin b$, wird die Klammer

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathfrak{Cos}\,\beta x \cos(k_1 x - k_0) + j\,\mathfrak{Sin}\,\beta x \sin(k_1 x - k_0)}{\beta + j k_1} + \frac{\mathfrak{Cos}\,\beta x \cos(k_2 x + k_0) + j\,\mathfrak{Sin}\,\beta x \sin(k_2 x + k_0)}{\beta + j k_2}\right]$$

Durch Erweitern der Klammerausdrücke mit $\beta - jk_1$, bzw. $\beta - jk_2$, und Zusammenfassen der reellen und

[6]) Balth. v. d. Pol, Ueber die Wellenlängen und Strahlung mit Kapazität und Selbstinduktion beschwerter Antennen. Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie Bd. 13, 1918.

imaginären Glieder ergibt sich nach Einsetzen der Grenzen:

$$\int_0^{l'} [\xi(x) + j\chi(x)]\,\mathrm{d}x = \tag{9a}$$

$$\frac{1}{2}\Bigg[\frac{1}{\beta^2+k_1^2}\{\beta\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\cos k_3 + k_1\,\mathfrak{Sin}\,\beta l'\sin k_3 - \beta\cos k_0\}$$

$$+\frac{1}{\beta^2+k_2^2}\{\beta\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\cos k_3 + k_2\,\mathfrak{Sin}\,\beta l'\sin k_3 - \beta\cos k_0\}$$

$$+\frac{j}{\beta^2+k_1^2}\{\beta\,\mathfrak{Sin}\,\beta l'\sin k_3 - k_1\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\cos k_3 + k_1\cos k_0\}$$

$$+\frac{j}{\beta^2+k_2^2}\{\beta\,\mathfrak{Sin}\,\beta l'\sin k_3 - k_2\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\cos k_3 + k_2\cos k_0\}\Bigg]$$

Die Integrationskonstante wird 0, da für $l' = 0$, $E = 0$, und die gesuchte Vertikalcharakteristik stellt sich somit dar:

$$\mathfrak{E}(\varphi) = E_{00}\cos\varphi \int_0^{l'} [\xi(x) + j\chi(x)]\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

Wie eine Betrachtung der Formel (9a) lehrt, können in (9) der reelle und imaginäre Teil des Integrals nicht gleichzeitig durch 0 gehen, woraus sich der wichtige Schluss ergibt, dass die Feldstärke nur für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verschwindet. Nun ist aber diese Tatsache beim Entwerfen von Antennen bisher unberücksichtigt geblieben [7]).

Für die *Mitte-gespeiste* Antenne wird der Strom zu beiden Seiten des Speisepunktes durch verschiedene Ausdrücke dargestellt. Auf diesen Umstand ist bei der Integration der Feldstärke für diese Antenne zu achten; im übrigen wird gleich verfahren wie bei der Fuss-gespeisten Antenne.

In der nachstehenden Ableitung des Vertikaldiagrammes für die Mitte-gespeiste Antenne sollen nur die Hauptpunkte erwähnt werden. Integriert wird über die Abschnitte 0 bis $\frac{\lambda}{4}$ (Speisepunkt) und $\frac{\lambda}{4}$ bis l', wobei für den Abschnitt 0 bis $\frac{\lambda}{4}$ Gl. (2) und für $\frac{\lambda}{4}$ bis l' Gl. (4) massgebend ist. Zu (2) kommt noch der Faktor für die Amplitudenanpassung hinzu und das Integral erhält die Form

$$\int_0^{l'} [\xi_1(x) + j\chi_1(x)]\,\mathrm{d}x = \Bigg[\Bigg\{\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_1 x - k_0)]}{\beta + j k_1}$$

$$+\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_2 x + k_0)]}{\beta + j k_2}\Bigg\}_0^{\frac{\lambda}{4}}\left(1 + \frac{\mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)}{\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}}\right)$$

$$+\left\{\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_1 x - k_0)]}{\beta + j k_1} + \frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta x + j(k_2 x + k_0)]}{\beta + j k_2}\right\}_{\frac{\lambda}{4}}^{l'}$$

$$+\Bigg\{\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta(x - l) + j(k_2 x - k_0)]}{\beta + j k_1}$$

$$+\frac{\mathfrak{Cos}\,[\beta(x - l) + j(k_2 x + k_0)]}{\beta + j k_2}\Bigg\}_{\frac{\lambda}{4}}^{l'}\Bigg] + \mathfrak{C}_1$$

Wir führen zu den bestehenden noch die Abkürzungen ein:

$$k_1\frac{\lambda}{4} - k_0 = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(1 - \frac{4l'}{\lambda}\right)\sin\varphi\right\} = k_4$$

$$k_2\frac{\lambda}{4} + k_0 = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(1 - \frac{4l'}{\lambda}\right)\sin\varphi\right\} = k_5$$

und erhalten

$$\int_0^{l'} [\xi_1(x) + j\chi_1(x)]\,\mathrm{d}x =$$

$$\Bigg[\frac{1}{\beta^2+k_1^2}\left\{k_1\sin k_4\,\mathfrak{Sin}\,2\beta l' - \beta\left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)\right)\cos k_0 + 2\beta\cos k_3\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\,\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}\right\}$$

$$+\frac{1}{\beta^2+k_2^2}\left\{k_2\sin k_5\,\mathfrak{Sin}\,2\beta l' - \beta\left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)\right)\cos k_0 + 2\beta\cos k_3\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\,\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}\right\}$$

$$+\frac{j}{\beta^2+k_1^2}\left\{\beta\sin k_4\,\mathfrak{Sin}\,2\beta l' + k_1\left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)\right)\cos k_0 - 2k_1\cos k_3\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\,\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}\right\}$$

$$+\frac{j}{\beta^2+k_2^2}\left\{\beta\sin k_5\,\mathfrak{Sin}\,2\beta l' + k_2\left(\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4} + \mathfrak{Cos}\,\beta\left(\frac{\lambda}{4} - l\right)\right)\cos k_0 - 2k_2\cos k_3\,\mathfrak{Cos}\,\beta l'\,\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}\right\}\Bigg]\cdot\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\beta\frac{\lambda}{4}} + \mathfrak{C}_1$$

Das Vertikaldiagramm der Mitte-gespeisten Antenne wird somit:

$$\mathfrak{E}(\varphi) = E_{01}\cos\varphi \int_0^{l'} \left[\xi_1(x) + j\chi_1(x)\right]\mathrm{d}x \tag{10}$$

Der Ausdruck ist formal erwartungsgemäss derselbe wie für die Fuss-gespeiste Antenne. Als Grenzfall,

[7]) Siehe auch v. Verfasser, Z. Hochfrequenztechn. u. Elektroakustik Bd. 47, S. 155.

nämlich für $l = 2\,l' = \frac{\lambda}{2}$ $\left(\frac{\lambda}{4}\text{-Antenne}\right)$ geht die Mitte-gespeiste Antenne über in die Fuss-gespeiste. Setzt man in den Gl. (9a) und (10a) $l = \frac{\lambda}{2}$, so ergibt sich, wenn man beachtet, dass

$$\mathfrak{Sin}\,\beta\,\frac{\lambda}{2} = 2\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,\frac{\lambda}{4}\cdot\mathfrak{Cos}\,\beta\,\frac{\lambda}{4}$$

in der Tat Uebereinstimmung der beiden Vertikaldiagramme.

Numerische Beispiele für Stromverteilung und Vertikaldiagramm Fuss- und Mitte-gespeister Antennen.

Zum Vergleich wurde Strom und Vertikaldiagramm für je einen der betrachteten Antennentypen mittels der abgeleiteten Formeln berechnet.

Als Näherungswert für β gilt bei hohen Frequenzen, wie aus der Leitungstechnik bekannt ist, der Ausdruck $\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Für Antennen kann weiter vereinfachend gesetzt werden $\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2\,Z_A}$, wo R den Widerstand pro Längeneinheit und Z_A den mittleren Wellenwiderstand bedeuten. Für die Widerstandsfunktion finden sich in der Literatur Angaben [5]). Als Wellenwiderstand sei $Z_A = 210$ Ohm gewählt. In den Fig. 8 und 9 sind die gefundenen Stromverteilungen für eine Mitte- und Fuss-gespeiste Antenne dargestellt (nach den Gl. (2) und (5), wobei I_{max} in beiden Fällen gleich gewählt wurde). Der grössere *Knotenstrom* bei der Fuss-gespeisten Antenne ist augenfällig. Den beiden Figuren entsprechen die Vertikaldiagramme Fig. 10 und 11, wo sich der verschiedenen Grösse der Knotenströme entsprechend verschiedene Grössen der *Feldstärkeminima* ergeben. Zum weiteren Vergleich wurde das entsprechende Diagramm unter der gewöhnlichen Annahme sinusförmiger Stromverteilung berechnet (Fig. 12).

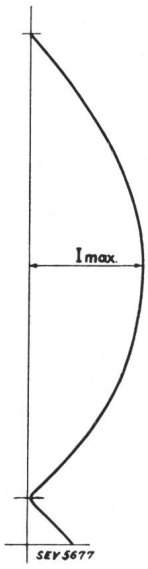

Fig. 8.

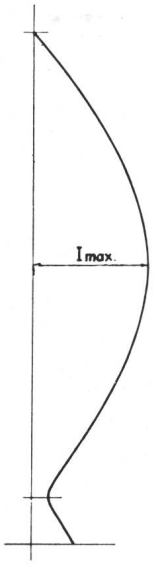

Fig. 9.

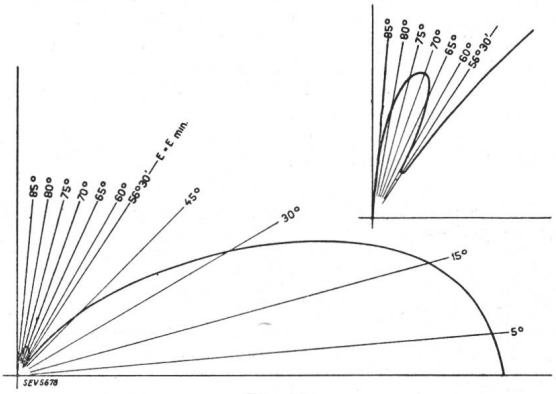

Fig. 10.

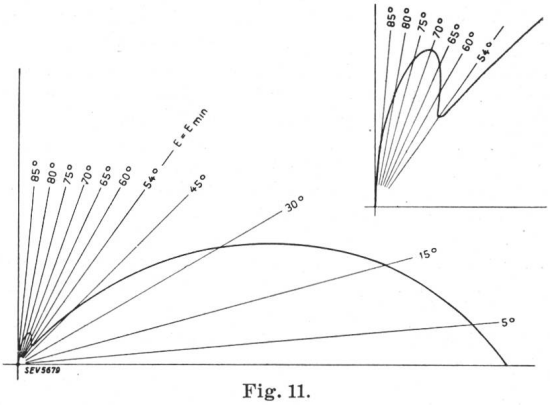

Fig. 11.

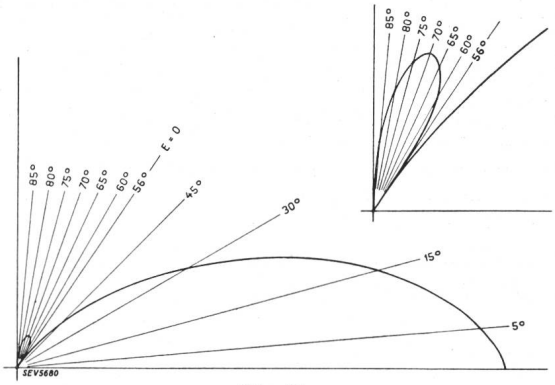

Fig. 12.

Dem Nullwinkel, welcher sich für Fig. 12 bestimmt aus $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{l}{2} - x\right)\sin\varphi\right) = 0$, wo h die resultierende effektive Höhe bedeutet, entspricht in Fig. 10 u. 11 ein Feldstärkeminimum $\frac{d}{d\varphi}\,\mathfrak{E}\,(\varphi) = 0$. In der erwähnten Arbeit von Berndt und Gothe [3]) sind ähnliche Resultate angegeben.

Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

Transformateur de réglage en quadrature.

I. But et champ d'application.

621.314.214

A. Le transformateur en quadrature ou déphaseur, introduit dans une boucle fermée transportant de la puissance, sert soit à répartir à volonté la puissance transmise sur les 2 branches de la boucle (fig. 1 et 2), soit à empêcher les à-coup de courant ou les oscillations de puissance produits par l'ouverture ou la fermeture de la boucle, soit à supprimer les courants de circulation.

Deux cas peuvent être envisagés: a) Une centrale débite sur 2 lignes en parallèle (fig. 1), b) plusieurs centrales sont