**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens
**Band:** 22 (1931)
**Heft:** 24

**Artikel:** Widerstand, Selbstinduktivität und Kapazität
**Autor:** Holzer, Wolfgang
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1058607

# Widerstand, Selbstinduktivität und Kapazität.

Von *Wolfgang Holzer*, Dipl.-Ing., Berlin.

537.31+537.7+621.319.7

*Der Autor leitet für einen und denselben Feldraum drei lineare Beziehungen ab zwischen Widerstand, Selbstinduktivität und Kapazität, von der Form: $R \cdot C$, $L \cdot C$ und $\frac{L}{R}$ = Materialkonstanten mal reine Zahl. Diese Beziehungen (mit Ausnahme derjenigen für $R \cdot C$) gelten mit einigen anderen Einschränkungen unter Vernachlässigung der magnetischen Felder im Innern der Leiter, also nur für hochfrequente Vorgänge (z. B. Wanderwellen). Sie ermöglichen die Bestimmung von zwei dieser Grössen, wenn die dritte gemessen wurde oder sonst bekannt ist.*

*L'auteur développe, pour un milieu donné, trois relations linéaires entre la résistance, la self-induction et la capacité, de la forme: $R \cdot C$, $L \cdot C$ et $\frac{L}{R}$ = constante caractérisant ce milieu, multipliée par un nombre. A l'exception de celle pour $R \cdot C$, ces relations sont valables, avec quelques autres restrictions, lorqu'on néglige les champs magnétiques à l'intérieur des conducteurs, donc seulement pour des phénomènes à haute fréquence (ondes mobiles par exemple). Ces relations permettent de déterminer deux des grandeurs lorsqu'on peut mesurer la troisième ou qu'on la connaît déjà.*

Zwischen den Grössen des Widerstandes, der Selbstinduktivität und der Kapazität in einem und demselben, aber beliebig gestalteten Feldraume bestehen eigentümliche Beziehungen, welche sowohl für die theoretische Erkenntnis, als auch für die praktische Anwendung von Bedeutung sind. Die Verknüpfung zweier der genannten Messgrössen ist dadurch möglich, dass das elektrische Feldbild in den meisten Fällen ein und dasselbe ist. Eine bekannte derartige Beziehung stellt der Reziprozitätssatz [1]) dar. Vermöge der Eigenschaft der Reziprozität ist es möglich, die Lösung eines Problems auf den reziproken Fall zu übertragen. Dasselbe aber gilt auch von den Messmethoden. In Tabelle I ist jeder Grösse die entsprechende reziproke unterstellt.

Tabelle I.

| Grösse | $U$ | $I$ | $R$ | $C$ | $L$ | $Q$ | $\Phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reziproke Grösse | $I$ | $U$ | $1/R$ | $L$ | $C$ | $\Phi$ | $Q$ |

Der Reziprozitätssatz ermöglicht u. a. die Verknüpfung einer Kapazitätsgrösse mit einer Induktivität. Eine einheitliche Verknüpfung aller drei Kenngrössen eines Feldraumes scheint jedoch noch nicht darin beschlossen zu sein. Es wird im folgenden versucht, zu zeigen, dass es möglich ist, alle drei Feldgrössen einheitlich zu verknüpfen. Im besonderen wird darauf Wert gelegt, die Uebergangsbeziehungen in einer praktisch leicht auswertbaren Form darzustellen.

Diese Beziehungen gewinnen wir in elementarer Weise durch die Verknüpfung zweier bekannter Ausdrücke, nämlich durch die Verknüpfung der Widerstandskapazität [2]) mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen [3]). Der Ausdruck der Widerstandskapazität lässt sich einfach ableiten. Wir betrachten zwei beliebig im Querschnitt ausgebildete Elektroden $A$ und $B$. Zwischen denselben herrsche die Potentialdifferenz $U$. Sei nun der Feldraum von einem Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$ erfüllt, so ergibt sich für die Berechnung der Kapazität die Ableitung:

$$U = \int_A^B E \cdot \mathrm{d}l = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \int_A^B D \cdot \mathrm{d}l = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\Phi}{q} \mathrm{d}l$$
$$= \frac{C \cdot U}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{q}$$

$$C = \frac{\varepsilon\,\varepsilon_0}{\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{q}}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich, wenn wir den Feldraum von einem leitenden Medium, welches den spezifischen Widerstand $\varrho$ besitze, erfüllt haben, der Widerstand zwischen den Elektroden $A$ und $B$ zu:

$$U = \int_A^B \varrho \cdot i \cdot \mathrm{d}l = I \cdot \varrho \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{q}$$
$$R = \varrho \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{q}$$

Das Produkt beider Grössen, $R \cdot C = \varrho \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0$, ist die Widerstandskapazität. Diese Grösse stellt die Entladungszeitkonstante der Entladung des Kondensators von der Grösse $C$ über den Widerstand $R$ dar. Diese Zeit ist bei gegebenem Feldraume nur mehr von den spezifischen Eigenschaften beider Feldmedien abhängig.

$$R \cdot C = \varrho \cdot \varepsilon \cdot 8{,}842 \cdot 10^{-14} = \varrho \cdot \varepsilon \cdot k_1 \text{ s} \qquad (1)$$
$$k_1 = 8{,}842 \cdot 10^{-14}$$

Mit Hilfe der Beziehung der Widerstandskapazität ist es nun möglich, Kapazitäten auf dem Wege von Widerstandsmessungen zu bestimmen. Dieses Verfahren wird bei Kabelmodellversuchen oft angewendet. Eine einfache Ueberprüfung der Beziehung kann am Beispiel des Plattenkondensators erfolgen. Die Kapazität eines Plattenkondensators von grosser Fläche und relativ kleinem Abstande wird durch folgende Formel beschrieben:

$$C = 8{,}842 \cdot 10^{-14} \cdot \varepsilon \cdot F/d \text{ F}$$

Der Widerstand desselben Feldraumes beträgt:

$$R = \varrho \cdot d/F\ \Omega$$

Der spezifische Widerstand ist dabei, wie stets im folgenden, mit der Dimension Ohm.cm eingesetzt. Die Widerstandskapazität des Plattenkondensators ergibt sich demnach zu:

$$R \cdot C = \varrho \cdot \varepsilon \cdot 8{,}842 \cdot 10^{-14} \text{ s}$$

---

[1]) Russel, Alternating currents, Bd. 1, Cambridge 1904; E. Orlich, Kapazität und Induktivität, Braunschweig 1909, S. 120.

[2]) F. Kohlrausch, Verh. d. Phys. Ges. 1906, S. 151; F. Kohlrausch, Lehrbuch d. prakt. Physik, 1921, S. 446.

[3]) L. Binder, Die Wanderwellen auf exp. Grundlage, Berlin 1928, S. 3.

Denselben Wert hatten wir in Formel (1) schon allgemein abgeleitet.

Als zweite Uebergangsbeziehung wollen wir die bekannte Darstellung der Wellengeschwindigkeit verwenden. Diese wird durch Formel (2) beschrieben.

$$L \cdot C = \frac{\varepsilon}{v^2} = \frac{\varepsilon}{9 \cdot 10^{10}} = \varepsilon \cdot k_2 \qquad (2)$$

Formel (2) ist eine Umformung der bekannteren Schreibweise:

$$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^5}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ km/s}$$

Die Konstante $k_2$ in Formel (2) hat den Wert:

$$k_2 = \frac{10^{-10}}{9}$$

Wir können nunmehr durch eine Verknüpfung der Formeln (1) und (2) eine dritte Beziehung [4]) ableiten, welche Widerstand und Selbstinduktivität desselben Feldraumes verknüpft. Durch Quotientenbildung aus Formel (2) durch Formel (1) ergibt sich:

$$\frac{L \cdot C}{R \cdot C} = \frac{\varepsilon \cdot k_2}{\varepsilon \cdot \varrho \cdot k_1} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{10^{-10}}{9} \cdot \frac{10^{14}}{8{,}842}$$

$$= \frac{1}{\varrho} \cdot 125{,}664$$

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\varrho} \cdot 125{,}664 = \frac{1}{\varrho} \cdot k_3 \qquad (3)$$

$$k_3 = 125{,}664 = 40\,\pi$$

Wir haben somit drei lineare Beziehungsgleichungen gewonnen, welche in einfacher Weise die Bestimmung jeder der drei Kennwerte des Feldraumes aus einer einzigen Messung ermöglicht. Diese drei Beziehungsgleichungen lauten:

$$R \cdot C = \varrho \cdot \varepsilon \cdot k_1 = \varrho \cdot \varepsilon \cdot 8{,}842 \cdot 10^{-14} \qquad (1)$$

$$L \cdot C = \varepsilon \cdot k_2 = \varepsilon \cdot \frac{10^{-10}}{9} \qquad (2)$$

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{\varrho} \cdot k_3 = \frac{1}{\varrho} \cdot 125{,}664 = \frac{1}{\varrho} \cdot 40\,\pi \qquad (3)$$

Bei der Verwendung der Beziehungen müssen einige Voraussetzungen gemacht werden. Die Verwendung der Beziehung der Widerstandskapazität ist bei beliebigen Elektrodenformen möglich. Dies ist bei den Formeln (2) und (3) nicht mehr der Fall. Der Begriff der Induktivität hat nur für geschlossene Kreise einen Sinn. Es beziehen sich die Formeln (2) und (3) auf solche. Widerstand, Induktivität und Kapazität sind in den Formeln pro Kilometer Länge der Elektroden einzusetzen, da in der Konstanten $k_2$ die Lichtgeschwindigkeit in km/s eingesetzt wurde. Ferner muss die wesentliche Einschränkung gemacht werden, dass die auf solche Weise ermittelte Induktivität nur für hochfrequente Vorgänge messtechnisch exakt realisierbar ist. Diese Einschränkung hat folgenden Grund: Die Uebergangsbeziehungen können nur Vorgänge in einem und demselben Feldraume verknüpfen. Diese Forderung ist bei der Beziehung der Widerstandskapazität streng erfüllt. Da aber das magnetische Feld auch den Leiter durchsetzt, verliert die Beziehung (2) und damit auch die Beziehung (3) ihren völlig allgemeinen Charakter. Sie beschränken sich anwendungsgemäss auf solche Vorgänge, bei denen infolge der Stromverdrängung das Eigenfeld vernachlässigbar klein geworden ist, also auf Wanderwellen- und sonstige hochfrequente Vorgänge. Aus ähnlichen Gründen wurde bei der ganzen Betrachtung ein unmagnetischer Feldraum vorausgesetzt.

Die Anwendung der Uebergangsbeziehungen soll an dem einfachen Beispiel des konzentrischen Einleiterkabels dargestellt werden. Dieses habe den inneren Mantelradius $r_2$ und den äusseren Seelenradius $r_1$. Die Formel für den Widerstand dieser Anordnung sei als bekannt vorausgesetzt; sie lautet:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \varrho \cdot 10^{-5} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \Omega/\text{km}$$

Wir fragen nach einer Formel für Induktivität und Kapazität. Die Induktivität erhalten wir aus Formel (3) zu:

$$L = R \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot k_3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \varrho \cdot 10^{-5} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot 40 \cdot \pi$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \text{ H/km}$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus Formel (1) die Kapazität des Kabels zu:

$$C = \frac{\varrho \cdot \varepsilon \cdot k_1}{R} = \frac{\varrho \cdot \varepsilon \cdot 8{,}842 \cdot 10^{-14}}{\varrho \cdot 10^{-5} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{1}{2\pi}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot 0{,}555 \cdot 10^{-7} \text{ F/km}$$

Dieselbe Formel ist natürlich auch aus Formel (2) unter Einsetzung des Induktivitätswertes aus Formel (3) zu erhalten. Die auf diese Weise einfach gewonnenen Formeln der Induktivität und Kapazität stellen die bekannten Formeln für diesen Fall dar. Wie schon erwähnt, ist der Ausdruck für die Kapazität exakt, der Ausdruck für die Induktivität gilt unter Vernachlässigung des Feldes in Seele und Mantel.

Die Anwendung der Uebergangsbeziehungen beschränkt sich jedoch nicht auf die elementare Umformung von Formeln, welche auch auf ande-

---

[4]) Die absolute Widerstandsmessung mit Hilfe der Induktivität nach Kirchhoff nutzt eine ähnliche Beziehung aus. Diese gründet sich im wesentlichen auf der Dimensionsbeziehung: $|\text{Widerstand}| = \left|\frac{\text{Induktivität}}{\text{Zeit}}\right|$

rem Wege, zwar umständlicher, erhalten werden können. Ein besonderer Vorzug der Uebergangsbeziehungen dürfte darin zu erblicken sein, dass man dadurch in der Wahl der Meßschaltung bei praktischen Messungen an Feldräumen, welche nicht einfach oder überhaupt nicht mathematisch behandelbar sind, frei ist. So kann man die zweifellos meist einfachere Messung der Kapazität dazu benutzen, um die Induktivität zu bestimmen. Auf diese Weise kann man z. B. das Problem, die Induktivität eines zylindrischen Drahtes in einer Hülle von quadratischem Querschnitt zu bestimmen, auf dem Umwege über eine Kapazitäts- bzw. Widerstandsmessung lösen. Dabei hat man noch den Vorteil, dass man durch Wahl geeigneter Werte von $\varepsilon$ bzw. $\varrho$ den Absolutwert der zu bestimmenden Grösse in einen anderen Grössenbereich übertragen kann, was bei Sondermessungen die Genauigkeit der Messung entscheidend beeinflussen kann. Schliesslich kann die numerische Auswertung von Schaltvorgängen durch die Eliminierung des Wertes der Selbstinduktivität bzw. der Kapazität mit Hilfe der Formel (2) rechnerisch erleichtert werden. Dabei ist jedoch stets eine Nachprüfung der Zulässigkeit unserer Vereinfachungen bzw. Einschränkungen am Platze.

## Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

### Elektrizitätswerk der Gemeinde Erstfeld.

621.311.21(494)

Das im Januar 1931 in Betrieb genommene Wasserkraftwerk der Gemeinde Erstfeld nützt das Gefälle des Bockibaches von der Bockischlucht bis Ripshausen auf ca. 1,7 km Bachlänge aus. Die maximale Staukote beträgt 852 m ü. M., das Bruttogefälle 387 m, die ausgenützte Wassermenge 0,1 bis 0,5 $m^3/s$. Die Konzession wurde für 70 Jahre erteilt, mit Heimfall des Werkes an den Kanton Uri mit Erlöschen der Verleihung.

Die Baukosten des Werkes betragen Fr. 720 000.—. Für Strassen- und Brückenbau über die Reuss wurden Franken 55 000.— verausgabt, die aber das Werk nur zu ganz kleinem Teil belasten, da diese Bauten von Bund, Kanton und Korporation Uri subventioniert wurden und der Rest zum grössten Teil von der Einwohnergemeindeverwaltung getragen wird.

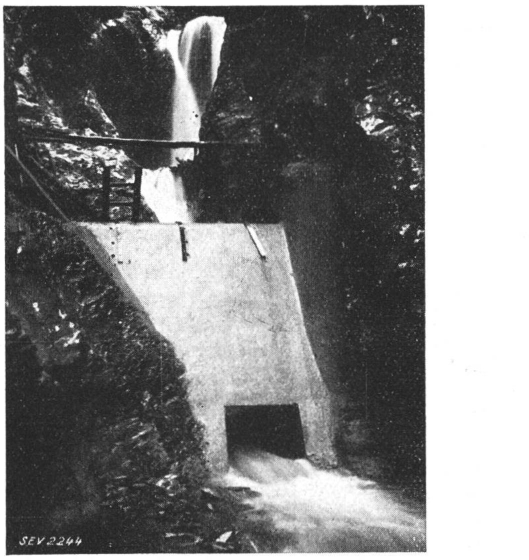


Fig. 1.
Wasserfassungsanlage in der Bocki-Schlucht.

Die *Wasserfassung* befindet sich in der engen Bockischlucht, die mittels zweier 30 m langen Eisenleitern erreichbar ist. Das 4 m breite Beton-Ueberfallwehr, mit einem Grundablass versehen, ist beidseitig in gesundem Fels häftig verankert. Auf der rechten Seite sind die Einlauf- und Kiesablass-Schleussen, welche in den Vorstollen münden. Die 3 m hohe Mittelmauer im Vorstollen trennt die Wasserwege der Einlauf- und Kiesablass-Schleuse. Die Einlaufschleuse ist ca. 1,7 m über dem Bachbett angeordnet, damit das Geschiebe des Baches nicht in den Vorstollen eindringen kann. Allfälliges Kleingeschwemmsel, das in den Vorstollen eindringt, wird mittels der in der Mittelwehrwand am tiefsten Punkt vor dem Stolleneinlauf angeordneten Sandablass-Schleuse abgeführt und gelangt durch den Kiesablass wieder in das Bachbett zurück.

Die Einlauföffnung in den eigentlichen Stollen ist wiederum etwa 1,5 m über der Vorstollensohle angeordnet und die freie Oeffnung mit einem automatischen Trommelrechen abgedeckt, so dass alles mitgeführte Laub, Holz und anderes Kleinmaterial an demselben hängen bleibt. Das im Rechen hängen gebliebene Material bedingt ein Steigen des Wasserspiegels im Vorstollen und das Mehrwasser fliesst in einen Kanal, der ein gewöhnliches Blechwasserrad von 2 m Durchmesser in Bewegung setzt, das auf der Welle des Trommelrechens montiert ist. Durch die Drehung des Wasserrades und des Trommelrechens wird das Geschwemmsel am Rechenkamm abgestreift und mit dem überfliessenden Wasser über das Wasserrad abgeführt. Durch diese einfache Anordnung wird die Wartung des Rechens überflüssig und es ist nur die zeitweilige Betätigung der verschiedenen Schleusen für das Abführen des angesammelten Geschiebes notwendig.

Der 285 m lange *Reservoirstollen* mit einem Gefälle von 2 % und einem Kreisprofil von 3,7 m Durchmesser kann 3500 $m^3$ Wasser aufspeichern und bildet für das Werk in wasserarmer Zeit die Tagesreserve, um die verfügbare Leistung für die Deckung der täglichen Spitzenbelastungen zu erhöhen. Der Stollen ist auf seiner ganzen Länge ausbetoniert und mit einem Zementspritzverfahren abgedichtet. Auf der linken Seite befindet sich 1,5 m über der Sohle ein 50 cm breiter Betongehsteg, so dass nach dem Ablassen des Akkumulierwassers eine Stollenrevision vorgenommen werden kann, ohne dass der Betrieb unterbrochen werden müsste. Zwei im Stollen vorgefundene Quellen wurden seitlich gefasst und im Scheitel in den Stollen eingeführt. In der vordern Abschlusswand des Stollens befinden sich in der obern Hälfte des Stollenprofiles die eiserne Eingangstüre und in der untern Hälfte die Rohreinläufe für Druckleitung und Leerlauf. Dem Druckleitungseinlauf ist nochmals ein Feinrechen vormontiert sowie eine 1,2 m hohe Ueberfallmauer vorgelagert, damit beim Stollenreinigen allfälliger Sand nicht in die Druckleitung gelangen kann. Die Leerlaufleitung von 30 cm Durchmesser ist wiederum 25 cm tiefer verlegt. In der Apparatenkammer befinden sich die beiden Abschlußschieber für Druckleitung und Leerlaufleitung und das Entlüftungsrohr. Hinter dem Schieber der Leerlaufleitung befindet sich ein Flansch für den Anschluss eines erweiterten Steigrohres für den Schwimmer des elektrischen Registrier-Fernwasserstandanzeigers. Die Apparatur des Wasserfernmelders und das Telephon befinden sich in einem kleinen Häuschen direkt über dem Apparatenstollen im Bockiberg.

Die *Druckleitung* ist 1165 m lang, zum grössten Teil im Boden verlegt und besitzt drei verschiedene Rohrdimensionen. Die obersten 800 m sind Flanschenrohre von 50 cm Durchmesser und 6 mm Blechstärke, der mittlere Teil besteht ebenfalls aus Flanschenrohren, aber von 45 cm Durchmesser und 6 mm Blechstärke, während der unterste Teil von 370 m Länge in Mannesmannrohren von einer Licht-