Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 22 (1931)

Heft: 8

Artikel: Neue graphische Methode für die Berechnung des Skineffekts im Nutenkupfer

Autor: Waldvogel, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1058577

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

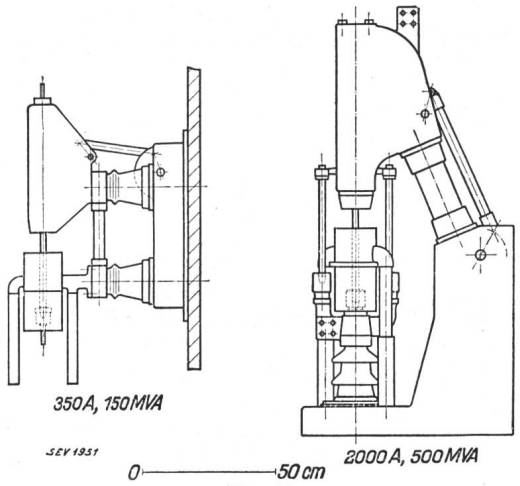

Fig. 33.
Expansionsschalter 10 kV, 350 A und 2000 A.

Bogen nur dann erloschen bleibt, wenn das Temperaturgefälle grösser ist als der Anstieg der wiederkehrenden Spannung. Praktisch ausgewertet bedeutet dies, dass das Medium, in welchem der Lichtbogen brennt, zur Zeit des Nulldurchganges desselben genügend stark abgekühlt werden muss, was am besten durch adiabatische Expansion erreicht wird. Diese Ueberlegung wird durch den in Fig. 32 sichtbaren Schaltvorgang erhärtet; hier ist das Glasgefäss der Explosionskammer infolge der glühenden Gase geborsten, der dadurch entstandene Druckabfall und die daraus resultierende Abkühlung der Gase bringen sofort den Lichtbogen zum Verlöschen. Die schematische Darstellung dieses neuen Schalters zeigt Fig. 33; er wird zur Zeit nur für mittlere Spannungen gebaut.

Neue graphische Methode für die Berechnung des Skineffekts im Nutenkupfer.

Von *P. Waldvogel*, dipl. Ing., Zürich.

537.311.62: 621.313.045.

Der Autor beschreibt eine neue praktische Methode für die Berechnungen des Skineffektes im Nutenkupfer, die sich durch Einfachheit auszeichnet, und vergleicht sie mit der analytischen Methode. In einem Zahlenbeispiel wird die praktische Anwendung dieser graphischen Methode gezeigt.

L'auteur décrit une nouvelle méthode graphique très simple de calcul de l'effet pelliculaire dans le cuivre des encoches et la compare à la méthode analytique. L'exposé se termine par un exemple numérique qui montre l'application pratique de cette méthode graphique.

I. Aufstellung der Grundgleichungen.

Fliesst ein Wechselstrom durch einen Kupferdraht, so verteilt er sich nicht gleichförmig über den Querschnitt. Die Stromdichte j ist also nicht nur Funktion der Zeit, sondern auch des Orts.

Wir betrachten den Fall, wo rechteckige Kupferstäbe sich in einer offenen Nute befinden. Die verschiedenen Schichten sind von unten nach oben mit den Indices 1, 2, 3 ... p ... m gekennzeichnet. Die Anzahl Stäbe pro Schicht spielt weiter keine Rolle; b bezeichnet die gesamte Kupferbreite [Fig. 1].

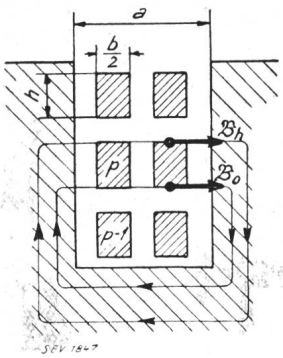

Fig. 1.

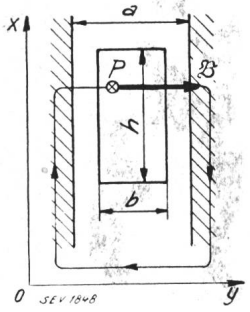

Fig. 2.

Wir wollen die Ueberlegungen für den p^{ten} Stab machen. Wir legen ein Achsensystem [Fig. 2], so dass oz parallel zum Stab wird. Dann werden offenbar die 3 Komponenten des Vektors j im Punkte P

$$j_x = o \qquad j_y = o \qquad j_z = j \qquad (1)$$

Ausserdem hängt j als Ortsfunktion betrachtet bloss von x ab.

Das erzeugte magnetische Feld $\mathfrak{H}$ im Punkte P ist sicher parallel zu oy, so dass die 3 Komponenten der Induktion $\mathfrak{B}$ im Punkte P

$$\mathfrak{B}_x = o \qquad \mathfrak{B}_y = \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}_z = o \qquad (2)$$

sind. $\mathfrak{B}$ ist auch eine Funktion der Zeit t und des Ortes x.

Die 2 Grundgesetze des Magetismus und der Elektrodynamik lauten:

$$\mathfrak{B} = \gamma_o \mu \mathfrak{H} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{E} = j \varrho' \qquad (3)\ (4)$$

Wir wählen folgende Einheiten:

$\mathfrak{B}$ in Gauss, $\mathfrak{H}$ in A/cm, $\mathfrak{E}$ in V/cm, j in A/cm².

Dann hat man $\gamma_0 = 0{,}4 \cdot \pi$ zu setzen.

μ = magnetische Permeabilität des Kupfers = 1.
ϱ' = spezifischer Widerstand des Kupfers in Ω/cm $= \varrho \cdot 10^{-4}$ wenn
ϱ = spezifischer Widerstand des Kupfers in Ωmm²/m, wie es üblich ist.

Dann werden die 2 Gesetze des magnetischen Kreises und der Induktion für ruhende Leiter benützt:

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = j \qquad \text{rot}\, \mathfrak{E} \parallel -10^{-8} \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad (5)\ (6)$$

Wir schreiben diese beiden Gleichungen für die Achsen oz und oy:

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = j \qquad -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} = -10^{-8} \cdot \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \qquad (7)\ (8)$$

Gl. (7) wird über die Nutenbreite integriert; weder $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x}$ noch j sind von y abhängig; es ergibt sich:

$$a \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial x} = b\, j \qquad (7)$$

Wir haben also die folgenden Differentialgleichungen zu lösen:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} = \gamma_0 \frac{b}{a} j \qquad \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 10^8 \cdot \varrho' \cdot \frac{\partial j}{\partial x} \qquad (9)\ (10)$$

Durch Flimination von j:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial x^2} = K \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \text{ mit } K = \frac{b}{a} \frac{\gamma_0}{\varrho'} \cdot 10^{-8} \qquad (11)\ (12)$$

II. Analytische Lösung der Differentialgleichung.

Probieren wir einen Ansatz:

$$\mathfrak{B} = X \cdot T \text{ wo } X = X(x) \text{ und } T = T(t) \qquad (13)$$

$$\frac{d^2 X}{d x^2} \cdot T = K \cdot X \cdot \frac{d T}{d t} \qquad \frac{X''}{X} = K \cdot \frac{T'}{T} \qquad (14)$$

Dies ist nur dann möglich wenn:

$$\frac{X''}{X} K i \omega \text{ und } \frac{T'}{T} = i \omega \qquad (15)$$

wo $i\omega$ eine willkürliche Konstante ist. (i ist das Symbol der Imaginären.)

Die allgemeinen Lösungen (16) dieser Gleichungen enthalten drei Integrationskonstanten A, B und C reell oder imaginär.

$$X = A e^{a(1+i)x} + B e^{-a(1+i)x} \qquad T = C e^{i\omega t} \qquad (16)$$

wenn man den Ansatz $\alpha^2 = \frac{K\omega}{2}$ benützt.

$$\mathfrak{B} = X \cdot T = A \cdot C \cdot e^{ax} \cdot e^{i(\omega t + a x)} + B \cdot C \cdot e^{-ax} \cdot e^{i(\omega t - a x)} \qquad (17)$$

$$\mathfrak{B} = M \cdot e^{ax} \cdot e^{i(\omega t + ax + \varphi_1)} + N \cdot e^{-ax} \cdot e^{i(\omega t - ax + \varphi_2)} \qquad (17')$$

M und N sind die Module, φ_1 und φ_2 die Argumente der komplexen Zahlen $A \cdot C$ und $B \cdot C$.

III. Vektorielle Darstellung der gefundenen Lösung.

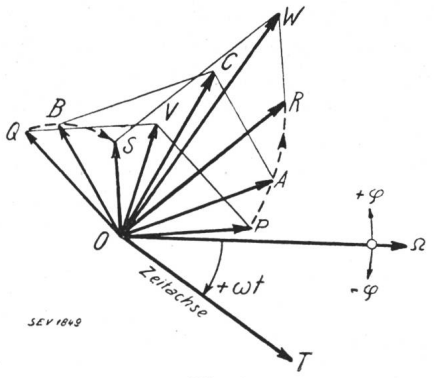

Fig. 3.

Wir benützen nun die vektorielle Darstellung der komplexen Zahlen (Fig. 3). Zur Vereinfachung setzen wir:

$$z = \alpha \cdot x \qquad \xi = \alpha \cdot h$$

$$\overrightarrow{OA} = M \cdot e^{z} \cdot e^{i(z+\varphi_1)} \qquad (18)$$

$$\overrightarrow{OB} = N \cdot e^{-z} \cdot e^{i(-z+\varphi_2)} \qquad (19)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad (19')$$

$$\mathfrak{B} = M \cdot e^{z} \cdot e^{i(z+\varphi_1)} + N \cdot e^{-z} \cdot e^{i(-z+\varphi_2)}$$

$\overrightarrow{OC}$ ergibt also den maximalen Wert $\overrightarrow{\mathfrak{B}}$ der Induktion $\mathfrak{B}$ am Orte z. Die Projektion von $\overrightarrow{OC}$ auf die Zeitachse OT würde den momentanen Wert von $\mathfrak{B}$ am Orte z geben. Die geometrischen Orte A und B sind 2 logarithmische Spiralen.

Wenn: $z = O$, A in P, B in Q

$$\overrightarrow{OP} = M e^{i\varphi_1} \qquad \overrightarrow{OQ} = N e^{i\varphi_2}$$

Wenn: $z = \xi$, A in R, B in S

$$\overrightarrow{OR} = M e^{\xi} e^{i(\varphi_1+\xi)} \qquad \overrightarrow{OS} = N e^{-\xi} e^{i(\varphi_2-\xi)}$$

also: $\sphericalangle \widehat{POR} = +\xi \qquad \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} = e^{\xi} \qquad (20)$

$$\sphericalangle \widehat{QOS} = -\xi \qquad \frac{\overline{OS}}{\overline{OQ}} = e^{-\xi} \qquad (21)$$

$$\overline{OP} = M \qquad \sphericalangle \widehat{\Omega OP} = \varphi_1 \qquad (22)$$

$$\overline{OQ} = N \qquad \sphericalangle \widehat{\Omega OQ} = \varphi_2 \qquad (23)$$

ξ ist eine bekannte Grösse. Wir kennen also gemäss Gl. (20) und (21) die Formen der Dreiecke OPR und OQS. Wir kennen aber weder ihre Grösse, noch ihre Lage, die gemäss Gl. (22) und (23) durch die 4 Integrationskonstanten $M\, N \varphi_1\, \varphi_2$ bestimmt sind.

Dafür müssen wir die Randbedingungen benützen.

IV. Randbedingungen.

Aus Fig. 1 erkennt man, dass:

$\frac{a \mathfrak{B}_o}{\gamma_o}$ = Durchflutung unter dem p^{ten} Leiter $= (p-1)\, I \sqrt{2}, \cos \omega t,$

$\frac{a \mathfrak{B}_h}{\gamma_o}$ = Durchflutung über dem p^{ten} Leiter $= p\, I \sqrt{2}, \cos \omega t;$

dabei ist I der effektive Wert des Stromes, der durch einen Leiter geht.

Also, wenn man die Abkürzung

$$C = \gamma_o \frac{I\sqrt{2}}{a}$$

einführt, lauten die Randbedingungen:

$$\mathfrak{B}_o = C \cdot (p-1)\, e^{i\omega t} \qquad \mathfrak{B}_h = C \cdot p \cdot e^{i\omega t} \qquad (24)$$

oder für die maximalen Werte geschrieben:

$$\overrightarrow{\mathfrak{B}}_o = C \cdot (p-1) \qquad \overrightarrow{\mathfrak{B}}_h = C \cdot p. \qquad (24')$$

In unser Diagramm übertragen ergibt sich:

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \equiv \overrightarrow{OV} = C \cdot (p-1)$$
$$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} \equiv \overrightarrow{OW} = C \cdot p. \qquad (24'')$$

V. Geometrische Lösung.

Die geometrische Bedeutung dieser Bedingungen ist die folgende:

Man hat die Dreiecke OPQ und ORS in solchen Maßstäben zu vergrössern und in solche Lagen zu bringen, dass die Punkte V und W auf die Gerade $O\Omega$ fallen, und dass: $\overline{OV} = C \cdot (p-1)$ und $\overline{OW} = C \cdot p$ wird, denn C und p sind bekannt.

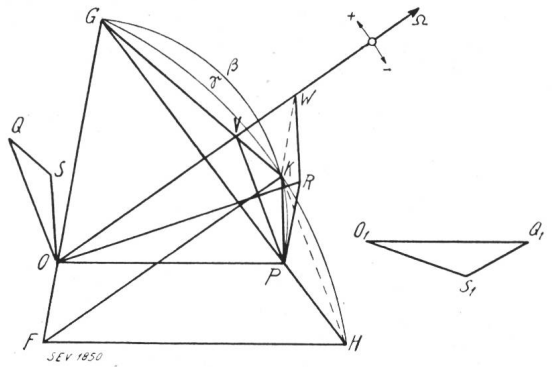

Fig. 4.

Dieses geometrische Problem kann durch folgende *Konstruktion, die nur 2 Kreise und ein paar Gerade benötigt,* gelöst werden (Fig. 4). Man zeichnet mit ganz willkürlichen Maßstäben 2 Dreiecke OPR und $O_1Q_1S_1$ nach Gl. (20) und (21). Man zieht $\overrightarrow{OF}$ parallel, gleich und gleichgerichtet zu $\overrightarrow{RP}$. Man ermittelt auf der Geraden OF den Punkt G, so dass $\dfrac{\overrightarrow{GO}}{\overrightarrow{GF}} = \dfrac{p-1}{p}$. Man ermittelt den Punkt H als Schnittpunkt von GP mit der Parallelen durch F zu OP. Man konstruiert den Kreisbogen β, Ort der Punkte, von welchen man die Strecke PG unter einem Winkel gleich $\sphericalangle \widehat{O_1S_1Q_1}$ sieht. Man konstruiert den Kreisbogen γ, Ort der Punkte, von welchen man die Strecke GH unter einem Winkel gleich $\sphericalangle (\pi - \widehat{O_1Q_1S_1})$ sieht. Die beiden Kreisbogen schneiden sich in K. Die Achse $O\Omega$ ist parallel und gleichgerichtet zu FK. Es sei V der Schnittpunkt von KG und $O\Omega$. Man zieht dann durch R eine Parallele zu PK, die die Achse $O\Omega$ in W schneidet. (Man kann kontrollieren, dass $\overline{RW} = \overline{PK}$ ist). Das Problem ist nun vollkommen gelöst. $\overline{VW} = C$ ergibt den Maßstab des Diagramms (C in Gauss). Dann ist das Dreieck OQS gleich dem Dreieck PVK und ähnlich gelegen.

Bemerkung.

Die Bestimmung von K ist nicht ganz eindeutig, wie aus Fig. 5 leicht zu erkennen ist. Man bekommt 2 Punkte K und K', die symmetrisch in Bezug auf TH liegen. Man hat dann denjenigen zu wählen, der zu einem Dreieck PVK führt, das den gleichen Drehsinn wie $O_1Q_1S_1$ hat; der andere führt nämlich zu einem Dreieck mit entgegengesetztem Drehsinn.

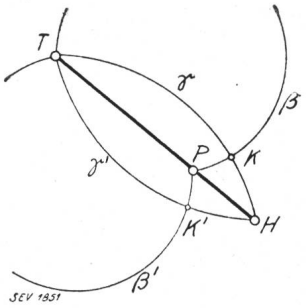

Fig. 5.

VI. Beweis der geometrischen Konstruktion.

1. Zunächst wollen wir beweisen, dass das konstruierte Dreieck OQS (bzw. das ihm ähnliche PVK) ähnlich dem Urdreieck $O_1Q_1S_1$ ist.

Wegen dem Parallelismus von OP mit FH folgt:

$$\frac{\overline{GP}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{GF}}$$

Wegen dem Paralellismus von $O\Omega$ mit FK folgt:

$$\frac{\overline{GV}}{\overline{GK}} = \frac{\overline{GO}}{\overline{GF}}$$

Also: $\dfrac{\overline{GP}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{GV}}{\overline{GK}}$. Dann ist PV parallel zu HK.

Hieraus und aus der Eigenschaft des Kreisbogens γ folgt:

$$\sphericalangle \widehat{PVK} = \pi - \sphericalangle \widehat{GVP} = \pi - \sphericalangle \widehat{GKH}$$
$$= \pi - (\pi - \sphericalangle \widehat{O_1Q_1S_1}) = \sphericalangle \widehat{O_1Q_1S_1}.$$

Ausserdem folgt aus der Eigenschaft des Kreisbogens β:

$$\sphericalangle \widehat{VKP} = \sphericalangle \widehat{O_1S_1Q_1}.$$

Diese beiden Gleichungen beweisen, dass die Dreiecke PVK und $O_1Q_1S_1$ wohl ähnlich sind.

2. Dann bemerkt man, dass eine Translation $\overrightarrow{FO}$, den Punkt P nach R und den Punkt K auf die Gerade $O\Omega$ hinüberführt (denn OF ist parallel zu PR und $O\Omega$ zu FK). Dabei wird die Gerade PK mit der zu ihr parallelen Geraden RW zusammenfallen. Da W sich schon auf $O\Omega$ befindet, muss $RW = PK$ sein. Dann ist:

$$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RW} = \overrightarrow{OW}.$$

Andererseits: $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PV} = \overrightarrow{OV}$.

Die Endpunkte V und W der beiden Vektoren $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ und $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}$ fallen also auf die Achse $O\Omega$.

3. Aus dem vorigen Abschnitte folgt insbesondere, dass KW parallel zu FO ist, so dass: $\overline{OW} = \overline{KF}$.

$$\text{Also: } \frac{\overline{OW}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{FK}}{\overline{OV}} = \frac{\overline{GF}}{\overline{GO}} = \frac{p}{p-1}$$

$$\text{oder: } \frac{\overline{OW}}{\overline{OW}-\overline{OV}} = \frac{p}{p-(p-1)} = p$$

$$\overline{OW} = p \cdot (\overline{OW}-\overline{OV}) = p \cdot \overline{VW} = C \cdot p$$

$$\overline{OV} = C \cdot (p-1).$$

Die Richtigkeit der Konstruktion ist also vollkommen bewiesen.

VII. Verwandtschaft zwischen Induktion $\mathfrak{B}$ und Stromdichte j.

Durch Anwendung der Gleichungen (9) und (17') bekommt man für j folgenden Ansatz:

$$j = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\gamma_0} \cdot \alpha\,(1+i) \cdot \left\{ \begin{array}{l} M e^{ax} \cdot e^{i(\omega t + ax + \varphi_1)} \\ -N \cdot e^{-ax} \cdot e^{i(\omega t - ax + \varphi_2)} \end{array} \right\} \quad (25)$$

$$j = j_g \cdot \frac{2\xi}{c} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M \cdot e^{ax} \cdot e^{i(\omega t + ax + \varphi_1)} \\ -N \cdot e^{-ax} \cdot e^{i(\omega t - ax + \varphi_2)} \end{array} \right\} \quad (25')$$

Wenn man $j_g = \dfrac{I}{bh}$ = Stromdichte für Gleichstrom einsetzt, oder wenn man zur effektiven Stromdichte übergeht und die Formel vektoriell schreibt:

$$\vec{j}_{\text{eff}} = j_g \cdot \frac{\xi\sqrt{2}}{C} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \left\{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right\}$$

$$= j_g \cdot \frac{\xi\sqrt{2}}{C} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \overrightarrow{BA}. \quad (26)$$

Die Multiplikation durch den reellen und bekannten Faktor bedeutet einfach eine Maßstabänderung; die Multiplikation durch die komplexe Zahl $e^{i\frac{\pi}{4}}$ eine Rotation $+\dfrac{\pi}{4}$.

Hieraus folgt also: Hat man durch die obige Konstruktion die geometrischen Orte von A und B ermittelt, so findet man auch gleichzeitig j_{eff} als Funktion von x, das heisst die Verteilung der Stromdichte längs des Stabes, indem man einfach die Differenz $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ bildet.

VIII. Bestimmung des Koeffizienten k_p für die zusätzlichen Kupferverluste.

Ist P_v der Kupferverlust in unserem durch Wechselstrom durchflossenen Stabe und P'_v der Kupferverlust im nämlichen Stab, wenn er durch einen aequivalenten Gleichstrom durchflossen ist, so definieren wir als scheinbare Erhöhung des Ohmschen Widerstandes den Koeffizienten k_p, dessen Index p daran erinnern soll, dass es sich um die p^{te}-Schicht handelt.

$$k_p = \frac{P_v}{P'_v} > 1$$

$$k_p = \frac{1}{h} \cdot \int_0^h \left(\frac{j_{\text{eff}}}{j_g}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{\xi} \cdot \int_0^\xi \cdot \left(\frac{j_{\text{eff}}}{j_g}\right)^2 \cdot \mathrm{d}z \quad (27)$$

$$k_p = \frac{1}{\xi} \cdot \int_0^\xi \frac{2\xi^2}{C^2} \cdot \overline{BA}^2 \cdot \mathrm{d}z = \frac{2\xi}{C^2} \cdot \int_0^\xi \overline{BA}^2 \cdot \mathrm{d}z \quad (27')$$

Gemäss Gleichungen (18) und (19) ist aber:

$$\overline{BA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2 \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \cos(\sphericalangle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \quad (28)$$

$$= M^2 \cdot e^{2z} + N^2 \cdot e^{-2z} - 2\,MN \cdot \cos(2z + \varphi_1 - \varphi_2).$$

Die Integration liefert dann:

$$k_p = \frac{\xi}{C^2} \cdot \left\{ M^2 e^{2\xi} - M^2 - N^2 e^{-2\xi} + N^2 - 2\,MN \cdot \left[\sin(2\xi + \varphi_1 - \varphi_2) - \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \right\} \quad (29)$$

$$k_p = \frac{\xi}{C^2} \cdot \left\{ \overline{OR}^2 - \overline{OP}^2 - \overline{OS}^2 + \overline{OQ}^2 - 2 \cdot \overline{OR} \cdot \overline{OS} \cdot \sin(\widehat{SOR}) + 2 \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \sin(\widehat{QOP}) \right\} \quad (30)$$

Dabei sind die Winkel algebraisch zu messen und die Längen absolut.

Wir benützen nun folgende geometrische Beziehungen, die ganz allgemein für jedes schiefwinklige Dreieck gelten und die wir ohne Beweis annehmen (Fig. 6):

OZ ist senkrecht zu RS und U = Mitte von RS

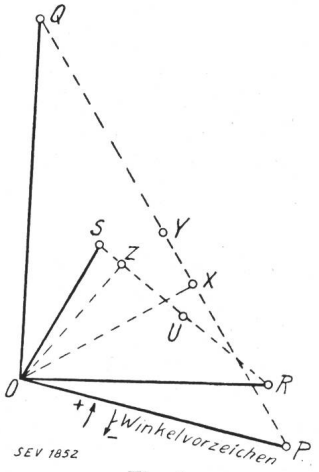

Fig. 6.

$$\overline{OR}^2 - \overline{OS}^2 = E_1 \cdot 2 \cdot \overline{RS} \cdot \overline{ZU} \quad (31)$$

$$E_1 = +1 \quad \text{wenn} \quad \overline{OR} > \overline{OS}$$

$$E_1 = -1 \quad \text{wenn} \quad \overline{OR} < \overline{OS}$$

$$\overline{OR} \cdot \overline{OS} \sin(\widehat{SOR}) = E_2 \cdot \overline{RS} \cdot \overline{ZO} \quad (32)$$

$E_2 = +1$ wenn $\sphericalangle \widehat{SOR}$ positiv ist,

$E_2 = -1$ wenn $\sphericalangle \widehat{SOR}$ negativ ist.

Für das Dreieck OPQ gelten ganz analoge Beziehungen, so dass Gl. (30) sich in folgende Form bringen lässt:

$$k_p = \frac{2\,\xi}{C^2} \cdot \left\{ \overline{RS} \cdot \left(\pm \overline{ZU} \pm \overline{ZO} \right) - \overline{PQ} \cdot \left(\pm \overline{XY} \pm \overline{XO} \right) \right\} \quad (33)$$

$$\overline{OR} > \overline{OS} \quad \widehat{ROS} > 0 \qquad \overline{OP} > \overline{OQ} \quad \widehat{POQ} > 0$$

$$\overline{OR} < \overline{OS} \quad \widehat{ROS} < 0 \qquad \overline{OP} < \overline{OQ} \quad \widehat{POQ} < 0$$

Man kann also k_p graphisch ermitteln sobald die Konstruktion der Punkte $PRQS$ ausgeführt worden ist. Dafür hat man nur 2 Gerade zu ziehen, nämlich die Höhen OZ und OX.

IX. Vergleich zwischen der analytischen und der graphischen Methode.

Der Berechnungsgang nach der graphischen Methode wäre der folgende: $\xi\, p\, C$ und j_g sind bekannte Grössen. Dann kann man die im Paragraph V angegebene Konstruktion ausführen.

Hieraus folgt unmittelbar die Kenntnis von k_p. Nun zeichnet man die Spiralbogen PR und QS. Zu jedem z gehört ein gewisser Punkt A und ein gewisser Punkt B.

Bei der analytischen Methode stösst man auf ein System von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten $M\,N\,\varphi_1$ und φ_2, deren Lösung genau dem in Paragraph V gestellten geometrischen Problem entspricht. Für die Berechnung von k_p braucht man glücklicherweise nicht das System gänzlich zu lösen, denn im Ausdruck von k_p kommen nur die 2 Kombinationen $M^2 \cdot e^{\xi} + N^2 \cdot e^{-\xi}$ und $M\,N \cos(\xi + \varphi_1 - \varphi_2)$ vor. Die Berechnung wird in der Praxis besonders einfach, wenn man die Tabellen der Funktionen $\varphi\,(\xi)$ und $\psi\,(\xi)$ zur Verfügung hat. Für die Berechnung von $\mathfrak{B}$ und j_{eff} als Funktion von x muss man aber das System gänzlich lösen, das heisst $M\,N\,\varphi_1$ und C_2 selbst bestimmen, und dies führt zu recht komplizierten Ansätzen.

X. Anwendung der graphischen Methode auf ein Zahlenbeispiel.

Der Kommutationsvorgang bei einer Gleichstrommaschine ist nichts anderes als eine Stromwendung.

Während der Kurzschlusszeit T_n des Stromvolumens einer Nute fliesst also durch diese Nute

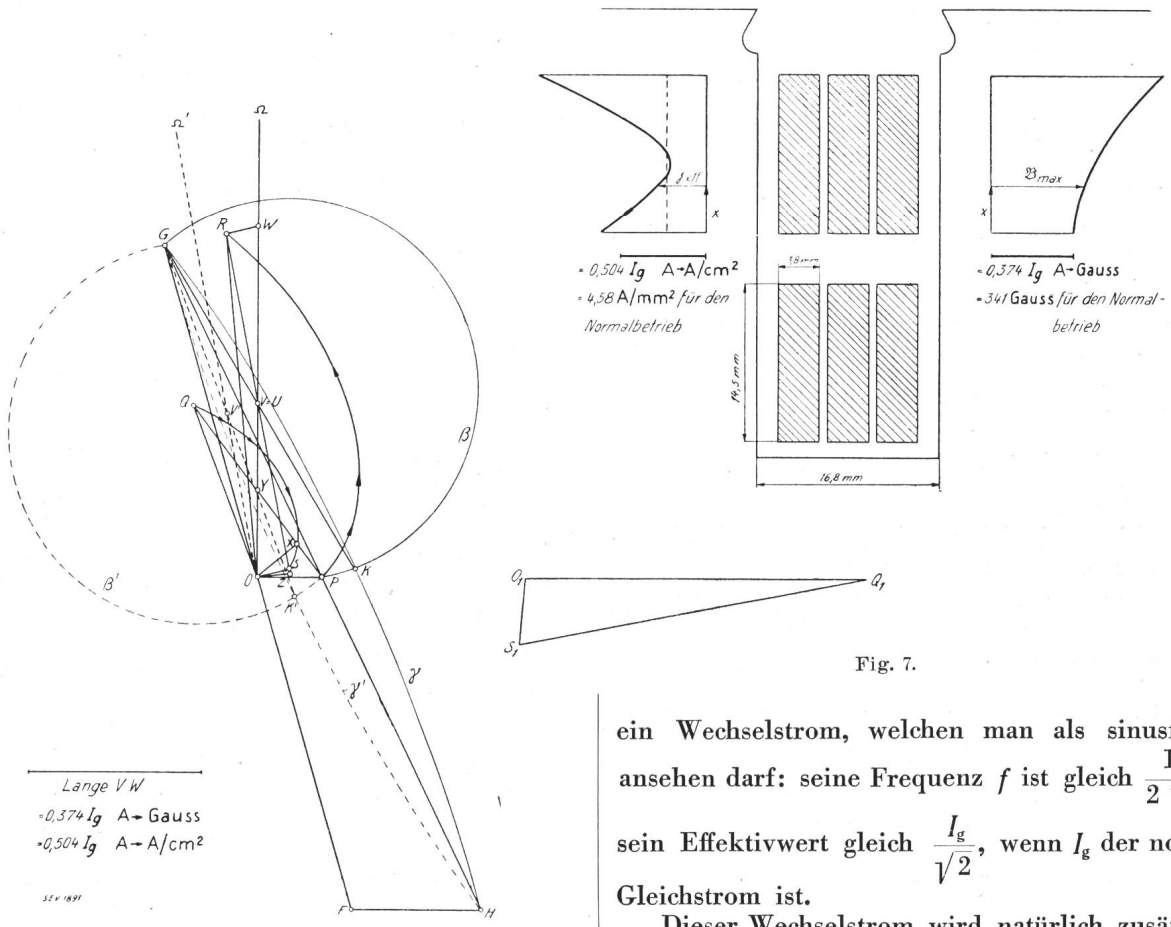

Fig. 7.

$\overrightarrow{BA}$ ist ein Mass für j_{eff} in einem bekannten Maßstabe. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ ist ein Mass für $\mathfrak{B}$ in einem bekannten Maßstabe. Man ermittelt auf diese Weise die Verteilung von $\mathfrak{B}$ und j_{eff} längs des Stabes.

ein Wechselstrom, welchen man als sinusförmig ansehen darf: seine Frequenz f ist gleich $\frac{1}{2\,T_n}$ und sein Effektivwert gleich $\frac{I_g}{\sqrt{2}}$, wenn I_g der normale Gleichstrom ist.

Dieser Wechselstrom wird natürlich zusätzliche Verluste in den Nutenstäben verursachen. Allerdings darf man hier einen verhältnismässig grossen Koeffizienten k_p zulassen, weil die ganze Erscheinung nur während der Kommutationszeit zur Wirkung kommt.

Die Berechnung ist für einen Doppelschluss-

generator von 500 kW ausgeführt worden (siehe Arnold II, S. 347, 3. Auflage). Fig. 7 zeigt die Ausbildung einer Ankernute.

Die Kurzschlusszeit einer Nute berechnet sich als der Quotient der Kommutationsbreite (6,42 cm) und der Umfangsgeschwindigkeit (1250 cm/s).

$$T_n = \frac{6{,}42}{1250}\ \text{s und}\ f = \frac{1}{2\,T_n} = 97{,}3\ \text{Per/s}.$$

Die Konstante α berechnet man am einfachsten mit dem folgenden Ansatz (siehe § I und II):

$$\alpha = \sqrt{\frac{K\omega}{2}} = \sqrt{\frac{b\gamma_0 10^{-8}\,\omega}{2\,\alpha\,\varrho'}} =$$

$$= \sqrt{\frac{b\cdot 0{,}4\,\pi\cdot 10^{-8}\cdot 2\,\pi f}{2\,\alpha\,\varrho\cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{b}{a}}\times\sqrt{\frac{f}{50}}\times\sqrt{\frac{1}{50\,\varrho}}$$

Jetzt werden wir setzen:

$b = 3\cdot 0{,}38 = 1{,}14$ cm $\qquad a = 1{,}68$ cm

$f = 97{,}3$ Per/s $\qquad \varrho = \frac{1}{50}$ für Kupfer,

hieraus folgt:

$\alpha = 1{,}15$ und $\xi = \alpha\cdot h = 1{,}15\cdot 1{,}45 = 1{,}667.$

Die Konstruktion wird für die zweite (obere) Schicht nach den angegebenen Methoden ausgeführt.

Da $p = 2$ ist, fallen in diesem Spezialfalle die Punkte U und V zusammen.

Bestimmung von $k_p \equiv k_2$. Nach Gl. (33) wird:

$$k_2 = \frac{2\cdot 1{,}667}{0{,}81^2}\cdot[1{,}56\cdot(+0{,}790 - 0{,}155) - 0{,}98\cdot(-0{,}31 + 0{,}24)] = 5{,}38.$$

Nach der analytischen Methode haben wir bekommen:

$$k_2 = 5{,}43.$$

Weiter haben wir die Verteilung der Maximalwerte der Stromdichte j_{eff} und der Induktion $\mathfrak{B}$ ermittelt.

Bemerkenswert ist die sehr starke Verdrängung des Stroms an dem unteren und besonders an dem oberen Stabende, während die Induktion ungefähr linear zunimmt.

Ueber die Bestimmung der Maßstäbe wollen wir noch einige Erläuterungen geben. Die Länge VW stellt bekanntlich (Paragraph V) C Gauss dar. Die Konstante C lässt sich folgendermassen berechnen, wenn man bemerkt, dass I nichts anderes als $\frac{I_g}{2\sqrt{2}}$ ist, denn durch die obere Schicht fliessen $\frac{I_g}{2}$ A Gleichstrom (I_g ist nichts anderes als der abgegebene Gleichstrom = 910 A im Normalbetrieb).

$$C = \gamma_0 \times \frac{I\sqrt{2}}{a} = 0{,}4\,\pi\cdot\frac{I_g}{2\cdot 1{,}68} = 0{,}374\cdot I_g\ \text{A} \rightarrow \text{Gauss},$$

im Normalbetrieb: $C = 0{,}374\cdot 910 = 341 \rightarrow$ Gauss.

Für die Stromdichten bedeutet die Länge VW nach Gl. (26):

$$j_g\cdot\xi\sqrt{2} = \frac{I}{b\,h}\cdot\xi\sqrt{2} = \frac{\xi}{2\,b\,h}\cdot I_G = \frac{1{,}667}{2\cdot 1{,}14\cdot 1{,}45}\cdot I_g = 0{,}504\cdot I_g \rightarrow \text{A/cm}^2.$$

Im Normalbetrieb:

$0{,}504\cdot 910 = 458 \rightarrow \text{A/cm}^2 = 4{,}58 \rightarrow \text{A/mm}^2.$

Technische Mitteilungen. — Communications de nature technique.

Drahtlose Uebertragungsversuche mit einer Wellenlänge von 18 cm.

621.396.029.6

Wie uns die Bell Telephone Manufacturing Co. mitteilt, ist es dieser Gesellschaft am 31. März d. J. gelungen, zwischen Calais und Dover eine beidseitige drahtlose Verständigung mit einer Wellenlänge von 18 cm und einer Sendeleistung von ½ Watt herzustellen. Die Verständigung soll so gut gewesen sein wie bei einer gewöhnlichen Telephonverbindung. Auch gedruckte Texte wurden als Bildtelegramme übertragen.

Das angewendete Verfahren, hervorgegangen aus den Laboratorien der International Telephone und Telegraph Co., London, und der Firma Le Matériel Téléphonique, Paris, besteht in folgendem: Sowohl auf der Sende- wie auf der Empfangsseite sind besonders konstruierte Parabolreflektoren von 3 m Durchmesser aufgestellt, deren Rotationsachsen in derselben Geraden liegen. Im Brennpunkt dieser Reflektoren befindet sich je eine ca. 3 cm lange Antenne, welche mit einer besonderen Sende- resp. Empfangsröhre verbunden ist. Der Sendereflektor konzentriert die von der Sendeantenne ausgestrahlten Wellen, deren Frequenz $1{,}6\cdot 10^9$ beträgt, zu einem Strahlenbündel, ähnlich den Lichtstrahlen eines Scheinwerfers, das vom Empfängerreflektor aufgefangen und auf die Empfängerantenne konzentriert wird. Diese Strahlen, «Mikrostrahlen» genannt, sollen keinen Schwinderscheinungen (Fading) unterworfen sein; sie sollen auch nicht, wie die Lichtstrahlen, von Regen und Nebel absorbiert werden.

Wirtschaftliche Mitteilungen. — Communications de nature économique.*)

Die Energieerzeugung der Kraftwerke und der Fremdstrombezug der Schweizerischen Bundesbahnen (SBB), sowie Fortschritte der Elektrifizierungsarbeiten im Jahre 1930.

621.311(494) + 621.334(494):625.1(494)

Eine Zusammenstellung der Quartalsberichte der Generaldirektion der SBB pro 1930 ergibt folgendes [1]):

1. Allgemeines.

Der Verwaltungsrat genehmigte die Projekte für die Elektrifizierung der Linien Neuenburg-Le Locle-Col des Roches und Delsberg-Basel und bewilligte dafür notwendige Kredite.

Den Regierungen der Kantone Zürich, Schwyz und Zug wurde das Bauprojekt für das Etzelwerk zugestellt zwecks Durchführung des Plangenehmigungsverfahrens; das Projekt wurde im August und September öffentlich aufgelegt.

Im Kraftwerk Varzo der Gesellschaft Dinamo in Mailand ist zur Hilfsspeisung der Strecke Brig-Domodossola eine Maschinengruppe von 2500 kW in Betrieb gesetzt worden.

Der Verwaltungsrat genehmigte das Projekt für die Umformeranlage im Unterwerk Seebach und bewilligte den für die Ausführung nötigen Kredit.

Mit der Bernische Kraftwerke A.-G. wurde ein Nachtrag zum Vertrag vom 26. September 1924, betreffend Lieferung von elektrischer Energie, abgeschlossen.

[1]) Vergl. Bull. SEV 1930, No. 7, S. 428, dasselbe pro 1929.

*) Die Zusammenstellung der „Mittleren Marktpreise" erscheint aus technischen Gründen erst in der nächsten, die Energieproduktions-Statistik erst in der übernächsten Nummer.