

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin de l'Association suisse des électriciens
<b>Herausgeber:</b>	Association suisse des électriciens
<b>Band:</b>	15 (1924)
<b>Heft:</b>	11
<b>Artikel:</b>	Einige einfache Fälle von Bewegung unter der Wirkung der Newton-Coulombschen Anziehung
<b>Autor:</b>	Forster, A.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-1057092">https://doi.org/10.5169/seals-1057092</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

fisante, l'effort maximum à admettre, en cas de surcharge momentanée, ne devrait pas dépasser en exploitation la valeur garantie de 1250 kg.

Les isolateurs allemands (Hermsdorf-Freiberg) conservent en général leurs propriétés électriques jusqu'au moment de la rupture, la sécurité à fixer serait donc plutôt d'ordre mécanique. Les efforts maximum à ne pas dépasser, en cas de surcharge momentanée, seraient de l'ordre de 800 kg pour les types de suspension et de 1000 kg pour ceux d'amarrage, malgré les valeurs de 800 et 1500 kg garanties par le fournisseur.

Les types Hewlett sont certainement ceux de moindre valeur mécanique. La charge maximum à adopter, comme ne réduisant pas leur valeur électrique, est au maximum de 1400 à 1500 kg pour les éléments de l'Electro-Céramique et de Ste-Foy l'Argentière (tableau II, No. 11, 13 et 14) et de 2000 kg environ pour le type américain (tableau II, No. 12). Nous ne connaissons pas les efforts garantis par les différents fournisseurs, mais les expériences générales, acquises avec les autres éléments, permettent de fixer de 600 à 800 kg les efforts maximums à ne pas dépasser dans le cas de surcharge momentanée pour les modèles européens, et à 1000 kg environ pour le modèle américain.

Reste le type Motor, qui semble remplir les conditions de l'un et l'autre des meilleurs types soumis aux essais. L'absence de résultats positifs sur les éléments de ce type ne permet pas de fixer des chiffres précis sur sa valeur mécanique, mais il est certain que cette dernière n'est pas inférieure à celle des meilleurs autres types.

Les considérations qui précèdent inciteront peut-être des constructeurs de lignes et des exploitants à pousser leurs recherches dans le domaine que nous avons abordé, et à perfectionner les procédés d'investigation. Souvent, les acheteurs d'isolateurs à haute tension s'en remettent aux publications et aux arguments des fabricants, en se laissant guider dans leur choix d'un modèle d'isolateur par des questions plus commerciales que techniques, au lieu de suivre eux-mêmes les progrès constants réalisés dans la fabrication, en utilisant les laboratoires spéciaux qui sont à leur disposition.

## Einige einfache Fälle von Bewegung unter der Wirkung der Newton-Coulombschen Anziehung.

Von Alb. Forster, Zürich.

*Der Autor wendet sich gegen die von J. J. Thomson vorgeschlagene Annahme eines vom Coulombschen abweichenden Kraftgesetzes und befasst sich unter der Voraussetzung rein Newton-Coulombscher Anziehung und Abstossung mit einer Klasse von periodischen Umlauf- und Pendelbewegungen auf einer Ellipse, in deren Brennpunkten eine anziehende und abstossende Masse sich befindet. Zum Schluss bezieht sich der Verfasser auf ein Molekularmodell, welches von Fajans vorgeschlagen wurde und für welches er eine von ihm aufgestellte Existenzbedingung numerisch nachprüft.*

*L'auteur s'élève contre la proposition de J. J. Thomson de substituer à la loi de Coulomb une relation différente. En partant de la simple loi d'attraction et de répulsion énoncée par Newton et Coulomb, il examine une série de mouvements circulaires et pendulaires le long d'une ellipse, dont les foyers sont occupés par deux masses, l'une attractive, l'autre répulsive. En terminant, l'auteur parle du modèle imaginé par Fajans pour représenter certains mouvements moléculaires, et examine si ce modèle est théoriquement réalisable, en y appliquant une condition numérique déduite par lui.*

In der „General Electric Review“ wurde unlängst eine Folge von Vorträgen über die elektrische Konstitution von Atomen und chemischen Verbindungen wiedergegeben, welche J. J. Thomson anfangs April 1923 im Franklin-Institut in Philadelphia gehalten hat<sup>1)</sup>). Durch diese Publikation wurden die Vorträge auch in den

<sup>1)</sup> Siehe auch: Journal of the Franklin Institute, Vol. 195; No. 4469 der Bibliothek der Eidg. Technischen Hochschule, Zürich.

Kreisen hiesiger praktischer Elektriker bekannt und haben ihr Interesse erregt. Es hat hier wohl weniger die Kühnheit Eindruck gemacht, mit der Thomson das Newton-Coulombsche Anziehungsgesetz um eines theoretischen Vorteiles willen abändert<sup>2)</sup>, als vielmehr die Vielseitigkeit der von Thomson beherrschten physikalischen und chemisch-physikalischen Beziehungen. Ganz abgesehen vom Umfange dieses Wissens, bleibt die Thomsonsche Betrachtung immerhin ein Versuch der Einführung eines Attraktionsgesetzes, in welches die Kraft anders als nach dem umgekehrten Verhältnis des Abstandquadrates eingeht. Nun sind ja schon sehr viele Abweichungen vom Newton-Coulombschen Gesetz vorgeschlagen worden, um irgend einer Schwierigkeit seiner Anwendung zu begegnen; sie erstrecken sich von einem Anziehungsgesetz, das die Kraft proportional der ersten Potenz des Abstandes annimmt (quasi-elastische Bindung der Elektronenlehre) bis zu demjenigen, das diese Kraft proportional der 5<sup>ten</sup> bis 9<sup>ten</sup> Potenz des umgekehrten Abstandes bestimmt.

Wenn wir von Geschwindigkeiten absehen, die derjenigen des Lichtes nahekommen, so ist es eine bekannte Tatsache, dass kein messbarer Fall einer Abweichung vom Newtonschen Gesetz gefunden wurde, ausser wenn wir unaufgeklärte Erscheinungen zum vornehmesten mit einer solchen Abweichung „erklären“ wollen. Wir müssten nun schon die Ueberlegungen der *allgemeinen* Relativitätstheorie in Anwendung bringen, wenn wir für einen *statischen* Gleichgewichtszustand, wie er von Thomson vorgeschlagen wird, eine Abweichung erwarten dürften; nach der Einsteinschen *speziellen* Relativitätstheorie wäre das auch noch nicht der Fall. Lässt man dagegen die aus der allgemeinen Relativitätstheorie hervorgehenden Folgerungen gelten, so wäre hier für *jede* Massengruppierung wieder eine *andere* Gesetzmässigkeit für die statische „Kraft“ zu erwarten.

Umgekehrt ist die *Uebereinstimmung* des Gesetzes der Anziehung körperlicher Massen nach Newton mit dem Coulombschen Gesetze der elektrostatischen Anziehung eine so auffallende, wenn auch unerklärliche Tatsache und von so grosser praktischer Wichtigkeit, dass wir das einfache Newton-Coulombsche Gesetz als Rechnungsgrundlage benötigen, wie immer auch die philosophische Deutung sei, die diesem Erfahrungsgesetz beigelegt werde.

Befinden sich Körper unter der alleinigen Wirkung des Newtonschen oder des Coulombschen Gesetzes, so kann freilich für keine Gruppierung derselben ein statisches Gleichgewicht herrschen, ausgenommen den praktisch unhaltbaren Fall eines *labilen* Gleichgewichtes. Wohl aber können sich Gruppierungen in einem *dynamischen Beharrungszustand* befinden, dergestalt, dass bestimmte Lagen und Bewegungen periodisch wiederkehren, — ein Zustand, der unserem Gefülsbedürfnis nach Wohlordnung in besonderem Masse zu entsprechen scheint —. Rechnerisch ausgedrückt will das heissen, dass die, durch die Bewegungsgleichungen errechneten, vektoriell genommenen Trägheitskräfte in endlichen Zeitperioden wiederkehren und sich im Gleichgewicht befinden mit den Anziehungskräften, welche nach dem Newtonschen Gesetz errechnet werden. Damit ist nicht behauptet, dass diese errechneten Kräfte auch wirklich auftreten, sondern nur, dass diese Berechnungsmethode die tatsächlich eintretenden periodischen Bewegungszustände voraussehen lässt. Unser Planetensystem bietet für sich allein eine unerschöpfliche Fülle von periodischen Bahnbewegungen und durch das Bohrsche Atommodell wird uns ein Analogon dazu im elektrischen Gebiet verständlich gemacht.

Im allgemeinen ist es nicht einfach, diese periodischen Bewegungen rechnerisch voraus zu bestimmen, weil die strenge Integration der dabei auftretenden Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung schwierig ist oder sogar bis jetzt undurchführbar geblieben ist. Es gibt jedoch solche Fälle, bei denen die Rechnung sich durchsichtiger gestaltet und wenn man sich nicht ohne weiteres mit der von Thomson

<sup>2)</sup> Dieser Vorteil besteht in der Möglichkeit einer *stabilen* statischen Gruppierung von Elektronen und Kernen zu Atomen und Molekülen, sofern man von der allgemeinen Gravitation absehen kann wegen ihrer relativen Geringfügigkeit gegenüber der elektrostatischen Anziehung.

vorgeschlagenen Umgehung des Newton-Coulombschen Anziehungsgesetzes befriedigen will, so mag es nützlich sein, dass wir uns an dieser Stelle mit einem speziellen Falle dieser Art näher befassen.

Wenn eine Masse durch zwei feste, in einem bestimmten Abstand gelagerte Massen angezogen wird, so gibt es gewisse periodische Bewegungen, die schon von Euler und Legendre ohne die, damals noch unbekannten, Hilfsmittel der Hamilton-Jacobischen Methode untersucht wurden. Es soll nun gezeigt werden, dass es auch dann recht einfach zu klassierende Ellipsenbewegungen gibt, wenn die anziehenden Mengen von verschiedenem Vorzeichen sind, wenn also *Anziehung* und *Abstossung* vorliegt und zwar *ohne* dass eine Abänderung vom Gesetze der nach dem umgekehrten Verhältnis des Abstandquadrates wirkenden „Kräfte“ erforderlich ist.

Die Menge oder „Masse“  $Q$  werde angezogen durch eine Masse  $K_1$  und abgestossen durch eine „Masse“  $K'_1$ , wobei  $K_1$  im Abstand  $2c$  von  $K'_1$  auf einer im Raume festen Geraden liege, welche ebenfalls durch  $K'_1$  geht. Unter allen möglichen Bahnen sollen nur diejenigen betrachtet werden, welche in einer *Ebene* liegen, in welcher sich zugleich auch  $K_1$  und  $K'_1$  befinden. Es ist diese Festsetzung gleichbedeutend mit derjenigen, dass die Geschwindigkeit von  $Q$  stets in der Ebene  $Q K_1 K'_1$  liege, dass also *kein* Drehimpuls um die Verbindungsgerade  $K_1 K'_1$  vorhanden sei. Diese unveränderliche Ebene sei diejenige der Fig. 1.

Wenn keine anderen Wirkungen angenommen werden als die von den Massen  $K_1$  und  $K'_1$  auf  $Q$  ausgeübte Anziehung und Abstossung, so bleibt der gesamte Energieinhalt  $J$  konstant und gleich der Summe der kinetischen Energie  $T$  und der „potentiellen“ Energie  $V$ , welche letztere wir durch die negativ genommene Kräftefunktion  $U$  ( $= -V$ ) messen, so dass:

$$J = T + V = T - U. \quad (1)$$

Besitzt  $Q$  die Geschwindigkeit  $\bar{v}$ , so ist die kinetische Energie  $T = \frac{Q \bar{v}^2}{2}$  und wenn  $r_1$  und  $r_2$  die Entferungen  $\overline{K_1 Q}$  und  $\overline{K'_1 Q}$  bedeuten, so ist die Kräftefunktion:

$$U = \frac{k^2 Q K_1}{r_1} - \frac{k^2 Q K'_1}{r_2}$$

worin  $k^2$  eine Konstante ist. Wir ziehen diese Konstante mit dem Faktor  $K_1$  bzw.  $K'_1$  zusammen, wie es bei solchen Rechnungen üblich ist, indem wir setzen:

$$k^2 K_1 = K \quad ; \quad k^2 K'_1 = K' . \quad (2)$$

Es wird dann (1) zu:  $J = \frac{Q \bar{v}^2}{2} - \left( \frac{Q K'}{r_1} - \frac{Q K'}{r_2} \right)$ .

Dividieren wir durch  $Q$  und setzen:  $h = \frac{J}{Q}$ , (3)

so ist also:  $\frac{\bar{v}^2}{2} - \frac{K}{r_1} + \frac{K'}{r_2} = h .$  (4)

Diese Gleichung entsteht auch, wenn die Masse des sich bewegenden Massenpunktes  $Q$  gleich 1 ist und  $k^2$  ebenfalls gleich 1 genommen wird und wir werden also im folgenden mit diesen letzteren Verhältnissen rechnen können, wenn wir uns für die numerische Durchführung der Rechnung an die Bedeutung von  $K$ ,  $K'$  und  $h$  nach (2) und (3) erinnern.

Wir können nun die Lage von  $Q$  nach Fig. 1 dadurch kennzeichnen, dass wir sie als Schnittpunkt einer Ellipse  $\sigma$  mit einer Hyperbel  $\tau$  ansehen. Es ist eine Eigenschaft der Ellipse, dass die Summe der Brennstrahlen konstant ist *und ebenso gilt*

für die Hyperbel, dass die Differenz ihrer Brennstrahlen konstant ist. In beiden Fällen ist diese Konstante gleich der ganzen grossen Axe der Ellipse oder Hyperbel. Wir können nun durch jeden beliebigen Punkt der Bildebene je eine Ellipse und eine Hyperbel legen mit  $K$  und  $K'$  als Brennpunkte, deren jeweilige grosse Axe als Koordinate dieses Funktes dienen kann.

Ist also:

$$r_1 + r_2 = 2\lambda \quad (5)$$

$$r_1 - r_2 = 2\mu \quad (6)$$

so sind  $\lambda$  und  $\mu$  neue Veränderliche, welche an Stelle von  $r_1$  und  $r_2$  die Lage von  $Q$  definieren. Solche Veränderliche werden als elliptische Koordinaten bezeichnet. In gewöhnlichen cartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  (Fig. 1) hat man für das Quadrat der Geschwindigkeit  $v$  des Massenpunktes  $Q$ :

$$\bar{v}^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Diesen Ausdruck für  $\bar{v}^2$  wollen wir nun in elliptischen Koordinaten ausdrücken:

Die kleine Halbaxe  $b_e$  der Ellipse  $\lambda = \frac{r_1 + r_2}{2}$  ist  $b_e = \sqrt{\lambda^2 - c^2}$ , wenn  $c$  den Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkt bedeutet, und mit derselben Bezeichnung ist die kleine Halbaxe der Hyperbel  $b_h = \sqrt{c^2 - \mu^2}$  und somit lautet die Gleichung der:

$$\text{Ellipse} \quad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$$\text{Hyperbel} \quad \frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1.$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} c^2 x^2 &= \lambda^2 \mu^2 \\ c^2 y^2 &= (\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2) \end{aligned}$$

und durch Differentiation:

$$\begin{aligned} c dx &= \mu d\lambda + \lambda d\mu \\ c dy &= \lambda d\lambda \sqrt{\frac{c^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2}} - \mu d\mu \sqrt{\frac{\lambda^2 - c^2}{c^2 - \mu^2}}. \end{aligned}$$

Es ist also:  $(dx)^2 + (dy)^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} (d\lambda)^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} (d\mu)^2$

und somit:  $\bar{v}^2 = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2. \quad (7)$

Aus (5) und (6) erhält man durch Addition und Subtraktion:

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda + \mu \\ r_2 &= \lambda - \mu, \end{aligned} \quad (8)$$

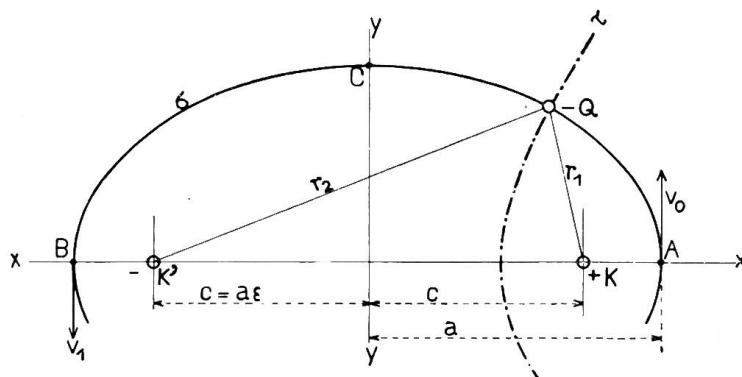


Fig. 1.

so dass:  $U = \frac{K}{r_1} - \frac{K'}{r_2}$  zu  $U = \frac{(K - K')\lambda - (K + K')\mu}{\lambda^2 - \mu^2}$  wird. (9)

Die Gleichung (4) lautet also in elliptischen Koordinaten wie folgt, unter Verwendung von (9) und (7):

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - c^2} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 - \frac{(K - K')\lambda - (K + K')\mu}{\lambda^2 - \mu^2} = h = -h_1. \quad (10)$$

Wir wollen nun alle diejenigen Bewegungen heraussuchen, bei denen  $Q$  eine Ellipse beschreibt, deren Brennpunkte mit  $K$  und  $K'$  zusammenfallen. Dann muss also  $\lambda$  sicher eine Konstante sein und zwar gleich der grossen Halbaxe  $a$  dieser Ellipse; es muss also jedenfalls  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  sein und damit wird (10) zu:

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2 - \mu^2} \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 - \frac{(K - K')\lambda - (K + K')\mu}{\lambda^2 - \mu^2} = -h_1,$$

oder:

$$(\lambda^2 - \mu^2)^2 \left( \frac{d\mu}{dt} \right)^2 = 2(\mu^2 - c^2) \{ (K + K')\mu - h_1\mu^2 - (K - K')\lambda + h_1\lambda^2 \}. \quad (10a)$$

Wegen der Konstanz von  $\lambda$  ist:  $-(K - K')\lambda - h_1\lambda^2 = -a_1$ ,

worin  $a_1$  eine Konstante ist und indem wir die Wurzel ziehen, können wir auch schreiben:

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{2(\mu^2 - c^2) \{ (K + K')\mu - h_1\mu^2 - a_1 \}}. \quad (11a)$$

Aus (10) erhalten wir ferner durch Elimination von  $\frac{d\mu}{dt}$  mit (10a) und unter Verwendung der Konstanten  $a_1$ :

$$(\lambda^2 - \mu^2) \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = 2(\lambda^2 - c^2) \{ (K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 \}$$

oder:  $(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2) \{ (K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 \}}. \quad (11)$

Die beiden Gleichungen (11) und (11a) bilden nun ein simultanes System von Zwischenlösungen der Gleichung (10), durch welches (10) identisch befriedigt wird. Man bezeichnet dieses Simultansystem als „intermediäre Lösungen“ von (10). In (11a) ist das negative Vorzeichen für die Wurzel gewählt in Uebereinstimmung mit der aus der Fig. 1 und (6) hervorgehenden Veränderlichkeit von  $\mu$  bei einer Bewegung von  $Q$  im Sinne des Uhrzeigers.

Um den Verlauf der Bewegung zu diskutieren, genügen uns nun die beiden intermediären Gleichungen (11) und (11a) vollkommen und ohne dass uns deren Integrale bekannt zu sein brauchen. Wir setzen zur Abkürzung:

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{R(\lambda)} = \sqrt{2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda)} \quad (12)$$

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{S(\mu)} = -\sqrt{2(\mu^2 - c^2)M(\mu)}, \quad (13)$$

wo also nach (11) und (11a) gesetzt ist:

$$R(\lambda) = 2(\lambda^2 - c^2)L(\lambda) \quad (14)$$

$$L(\lambda) = (K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 \quad (15)$$

$$S(\mu) = 2(\mu^2 - c^2)M(\mu) \quad (16)$$

$$M(\mu) = (K + K')\mu - h_1\mu^2 - a_1. \quad (17)$$

Wir bemerken noch, dass im Dreieck  $K, K', Q$  der Fig. 1 die Summe der beiden Seiten  $r_1$  und  $r_2$  stets grösser als die Seite  $K, K'$ , d. h. als  $2c$  ist; es ist demnach:

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = \lambda \geq +c \quad (18)$$

und aus ebensolchen geometrischen Gründen ist der absolute Wert von  $\mu$  stets kleiner oder höchstens gleich demjenigen von  $c$ :

$$|\mu| \leq |c|. \quad (19)$$

Diese Schranken werden uns im folgenden dienlich sein.

Soll nun  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  sein, so kann dies nach (12) nur dann der Fall sein, wenn entweder  $\lambda^2 - \mu^2$  unendlich gross ist (wenn die übrigen Faktoren endlich sind), oder es muss sein:

$$R(\lambda) = 0.$$

Nun hat  $\lambda$  und  $\mu$  für jeden in endlicher Entfernung liegenden Punkt  $Q$  aus geometrischen Gründen einen endlichen Wert, so dass die Annahme  $\lambda^2 - \mu^2 = \infty$  im Endlichen nicht zutrifft. Der andere Fall:  $R(\lambda) = 0$  tritt ein, wenn entweder  $\lambda^2 - c^2$  oder  $L(\lambda)$  gleich Null wird. Ist  $\lambda^2 - c^2 = 0$ , also  $\lambda = c$ , so reduziert sich die Ellipse auf die gerade Linie, welche die Brennpunkte verbindet und der Körper bewegt sich auf dieser Linie bis er zusammenstösst mit  $K$  oder  $K'$ , wir schliessen deshalb den Fall  $\lambda = c$  aus. Es kann dann nur noch  $L(\lambda) = 0$  werden. Bezeichnen wir mit  $s_1$  und  $s_2$  die beiden Wurzeln der Gleichung  $L(\lambda) = 0$ , so ist also:

$$L(\lambda) = (K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 = (\lambda - s_1)(s_2 - \lambda). \quad (20)$$

Diese Wurzeln sind:  $\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = \frac{K - K'}{2h_1} \mp \sqrt{\left( \frac{K - K'}{2h_1} \right)^2 - \frac{a_1}{h_1}}. \quad (21)$

Setzt man für  $\lambda$  die Werte  $s_1$  oder  $s_2$  in (11) ein, so wird also  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ ; aber damit  $\lambda$  eine Konstante sei, muss nicht nur  $\frac{d\lambda}{dt}$  verschwinden, sondern auch die zeitlichen Differentialquotienten höherer Ordnung von  $\lambda$ .

Substituieren wir in (11) die Bezeichnungen:

$$\lambda^2 - \mu^2 = \varphi(\lambda); \quad 2(\lambda^2 - c^2) = \varphi_1(\lambda); \quad (K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 = \varphi_2(\lambda), \quad (23)$$

so wird damit:  $\frac{d\lambda}{dt} = \varphi(\lambda)^{-1} \varphi_1(\lambda) \varphi_1(\lambda)^{1/2} \varphi_2(\lambda) \varphi_2(\lambda)^{1/2}$

und daraus erhält man durch Differentiation nach  $\lambda$  und nachfolgender Substitution von  $\frac{d\lambda}{dt}$ :

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{\varphi_1(\lambda)}{2\varphi(\lambda)^2} \left\{ \varphi'_2(\lambda) + \varphi_2(\lambda) \left[ \frac{\varphi'_1(\lambda)}{\varphi_1(\lambda)} - \frac{2\varphi'(\lambda)}{\varphi(\lambda)} \right] \right\}. \quad (24)$$

Aus (23) hat man aber:

$$\varphi'(\lambda) = 2\lambda ; \quad \varphi'_1(\lambda) = 4\lambda ; \quad \varphi'_2(\lambda) = K - K' - 2h_1\lambda .$$

Ist nun  $s_1 = s_2 (= s)$ , liegt also eine Doppelwurzel vor, so verschwindet nicht nur  $\varphi_2(\lambda)$ , sondern auch  $\varphi'_2(\lambda)$  wegen (25) und es wird nach (24)  $\frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0$ ; es verschwinden nun auch alle Differentialquotienten höherer Ordnung, was nicht der Fall wäre, wenn  $s_1$  keine Doppelwurzel von  $L(\lambda) = 0$  ist.

Nach (21), (22) wird für  $s_1 = s_2$ :

$$s = \frac{K - K'}{2h_1} = \lambda \quad (25)$$

und damit ist die grosse Halbaxe der elliptischen Bahn bestimmt.

Die Doppelwurzel  $s_1 = s_2$  tritt auf, wenn nach (21) und (22):

$$a_1 = \frac{(K - K')^2}{4h_1} , \quad (25a)$$

so dass  $a_1$  stets dasselbe Vorzeichen wie  $h_1$  besitzt. Da aber nach (18)  $\lambda$  immer positiv ist, so muss nach (25)  $h_1$  immer positiv sein, wenn  $K > K'$  ist und  $a_1$  ist also ebenfalls positiv. Den Fall  $K < K'$  werden wir später betrachten und fassen als Ergebnis zusammen:

*Wenn  $K > K'$  ist, so muss, damit  $\lambda$  eine Konstante sei, die Gleichung  $(K - K')\lambda - h_1\lambda^2 - a_1 = 0$  eine Doppelwurzel  $s = \lambda = \frac{K - K'}{2h_1}$  besitzen.*

Dies ist der Fall, wenn:  $a_1 = \frac{(K - K')^2}{4h_1}$  (26)

und es ist dann:  $a = \frac{K - K'}{2h_1}$ . (27)

Die Koordinate  $\mu = \frac{r_1 - r_2}{2}$  verändert sich während der Bewegung von  $Q$  auf der Ellipse stetig und ihr Differentialquotient nach der Zeit ist reell für alle Lagen, die  $Q$  einnimmt. Damit nun  $\frac{d\mu}{dt}$  reell bleibt, muss  $S(\mu)$  in (13) einen positiven Wert haben oder gleich Null sein. Nach (19) muss der Fall  $\mu = c$  ausgeschlossen werden (und ebenso nach früherem  $\lambda^2 - \mu^2 = \infty$ ), so dass nur die Nullstellen von  $M(\mu)$  für das Verschwinden von  $\frac{d\mu}{dt}$  massgebend sind. Man findet diese Nullstellen als Wurzeln  $w_1$  und  $w_2$  von  $M(\mu) = 0$  zu:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array} \right\} = \frac{K + K'}{2h_1} \pm \sqrt{\frac{(K + K')^2}{4h_1^2} - \frac{a_1}{h_1}} \quad (28)$$

und mit Verwendung des in (25a) gefundenen Wertes für  $a_1$ :

$$\left. \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array} \right\} = \frac{K + K'}{2h_1} \pm \sqrt{\frac{(K + K')^2}{4h_1^2} - \frac{(K - K')^2}{4h_1^2}} = \frac{K + K' \pm 2\sqrt{KK'}}{2h_1} \quad (29)$$

$$= \frac{1}{h_1} \left\{ \frac{K + K'}{2} \pm \sqrt{KK'} \right\} . \quad (30)$$

Nun ist das arithmetische Mittel  $\frac{K+K'}{2}$  zweier Größen  $K$  und  $K'$  stets grösser als das geometrische Mittel  $\sqrt{KK'}$ , so dass sowohl  $w_1$  als  $w_2$  immer positiv sind. Wir können auch zeigen, dass für die kleinere Wurzel  $w_1$  eine obere Grenze und für die grössere Wurzel  $w_2$  eine untere Grenze existiert;

Aus (27)  $a = \frac{K-K'}{2h_1}$  erhält man für  $K'$  den Wert:

$$K' = K - 2a h_1 \quad (31)$$

und wenn man diesen in (29) einsetzt, so wird:

$$\left. \begin{array}{l} w_1 \\ w_2 \end{array} \right\} = \frac{K - a h_1 \mp \sqrt{K(K - 2a h_1)}}{h_1} \quad (32)$$

$$\quad \quad \quad (33)$$

Nun ist  $a$  sowohl als (nach früherem)  $h_1$  positiv und  $w_1$  erreicht demnach seinen grössten Wert, wenn:

$$K(K - 2a h_1) = 0 \quad \text{ist}, \quad (34)$$

oder:

$$h_1 = \frac{K}{2a}. \quad (35)$$

$w_1$  wird dann aus (32) zu:  $w_1 = \frac{K - 2a h_1}{h_1} = a,$  (36)

in diesem Falle nimmt zugleich  $w_2$  seinen kleinsten Wert an, nämlich aus (33), (35):

$$w_2 = \frac{K - 2a h_1}{h_1} = a. \quad (37)$$

Schreibt man  $M(\mu)$  in der Form  $M(\mu) = (\mu - w_1)(w_2 - \mu)$ , so lautet (13):

$$(\lambda^2 - \mu^2) \frac{d\mu}{dt} = -\sqrt{2(\mu^2 - c^2)(\mu - w_1)(w_2 - \mu)}. \quad (37a)$$

Nach (19) ist aber  $\mu^2 < c^2$  und wenn also  $\mu$  von  $-c$  bis  $+c$  schwankt, so ist  $\mu^2 - c^2$  stets negativ. Tragen wir in der Fig. 2 auf einer  $\mu$  Axe die Werte der Funktion  $M(\mu)$  als Ordinaten auf, so können also nach (19) und (37a) nur solche

Funktionswerte reelle  $\frac{d\mu}{dt}$  ergeben,

welche in das schraffierte Gebiet  $-c < \mu < +c$  fallen. Für  $\mu = \pm\infty$  nimmt  $M(\mu)$  einen negativ unendlichen Wert an und die quadratische Funktion verläuft daher so, wie die Fig. 2 in ihren ausgezogenen Kurvenstücken zeigt. Die gestrichelten Kurven stellen unmögliche Fälle für den Typ der Kurve  $g_1$  dar, weil eine Nullstelle der Funktion  $M(\mu)$  kleiner als 0 ist,

was nach (30) ausgeschlossen ist; der Typ  $g_2$  kann deshalb nicht vorkommen, weil die grössere Wurzel  $w_2$  unter allen Umständen nach (37) grösser als  $a > c$  sein muss.

Wir betrachten nun die Funktion  $M(\mu)$ , wenn sie nach Typ II verläuft. Hier schwankt  $\mu$  zwischen  $-c$  und  $w_1 = \varrho'$ ; rechts von  $\varrho'$  ist  $M(\mu)$  positiv, also  $S(\mu)$

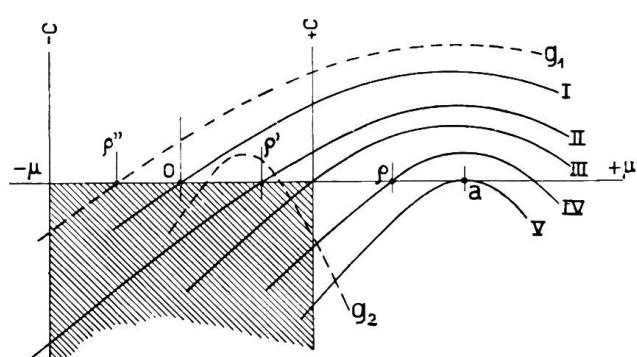


Fig. 2.

wegen  $\mu^2 - c^2 < 0$  negativ und daher  $\frac{d\mu}{dt}$  aus (37a) imaginär. Sobald die Kurve in ihrem weiteren Verlauf die positive  $\mu$  Axe wieder durchschritten hat, werden wieder negative Funktionswerte  $M(\mu)$  auftreten, aber dieselben liegen nun ausserhalb dem erlaubten Gebiet.  $Q$  vollzieht demnach eine stetige Bewegung auf der Ellipse  $\lambda = a$  von  $\mu = -c$  bis zum Schnittpunkt  $P_{\rho'}$  der Hyperbel  $\mu = \varrho'$  mit der Ellipse. Dem Punkt  $\mu = -c$  entspricht der  $K'$  benachbarte Scheitelpunkt  $A$  der Fig. 1. Der Schnittpunkt  $P_{\rho'}$  liegt, weil  $\mu$  positiv ist, auf dem  $K'$  benachbarten Ellipsenquadranten.

Je näher  $\varrho'$  gegen 0 in der Fig. 2 gelegen ist, um so näher rückt der Schnittpunkt  $P_{\rho'}$  gegen die kleine Axe der Ellipse hin, um schliesslich, wenn  $w_1 = 0$  ist, mit  $C$  in Fig. 1 zusammenzufallen. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $a_1 = 0$  wird wegen  $M(\mu) = \mu(w_2 - \mu) = w_2\mu - \mu^2$ . Nach (25a) ist dann  $K = K'$  und  $a$  kann nun einen von Null verschiedenen Wert nur dann besitzen, wenn nach (27) auch  $h_1 = 0$  ist.

In den beiden Fällen, die soeben besprochen wurden, handelt es sich also um eine pendelartige Hin- und Herbewegung von  $Q$  auf der Ellipse und wenn wir  $\varrho'$  gegen  $+c$  rücken lassen, so werden wir mit  $\varrho' = +c$  einen Grenzfall dieser Pendelbewegung erreichen, bei dem sich nun die Pendelung bis  $\mu = +c$  erstreckt, d. h. über die ganze Ellipse weg. In diesem Grenzfall muss dann in demjenigen Scheitelpunkt der Ellipse, welcher  $K'$  benachbart ist, die Geschwindigkeit  $v$  gleich Null sein.

Rückt dagegen  $\varrho'$  über  $+c$  hinaus nach  $\varrho$ , so ist für  $\mu$  eine Schwankung von  $-c$  bis  $+c$  erlaubt und es wird also auch hier  $Q$  die ganze Ellipse durchlaufen, nur ist jetzt die Geschwindigkeit  $v = V_1$  im Scheitel, welcher  $K'$  benachbart ist, nicht mehr Null, wie dies der Fall war für diejenigen Werte von  $K'$ , welche  $w_1 = +c$  als Lösung von  $M(\mu) = 0$  herbeiführten. Es findet also hier ein voller Umlauf statt um die beiden Massenpunkte  $K$  und  $K'$  als Brennpunkte.

Erreicht schliesslich  $\varrho'$  den Wert  $a$  (Kurve V, Fig. 2), so ist damit nach (36), (37) eine Doppelwurzel von  $M(\mu) = 0$  bedingt, was nach (30) nur dann möglich ist, wenn  $K' = 0$  ist. Dann haben wir den Fall eines Umlaufes von  $Q$  um eine einzige anziehende feste Masse  $K$ , also die Keplersche planetarische Bewegung um eine feststehende Sonne.

Die bis jetzt untersuchten Bewegungen lassen sich also klassifizieren an Hand der Wurzelwerte  $\varrho$  und wir werden nun noch die Abhängigkeit der Grössen  $h_1$ ,  $K'$  und  $a_1$  als Funktion von  $\varrho$  feststellen.

$$\text{Aus (27) entnehmen wir: } K = K' + 2a h_1, \quad (39)$$

während aus (30)  $w_1 = \varrho = \frac{1}{h_1} \left( \frac{K+K'}{2} - \sqrt{KK'} \right)$  hervorgeht:

$$K = K' \pm 2\sqrt{2K'\varrho h_1} + 2\varrho h_1. \quad (40)$$

Durch Gleichsetzen von (39) und (40) wird erhalten:

$$K' = \frac{h_1(a - \varrho)^2}{2\varrho}$$

und mit  $K = K' + 2a h_1$  wird daraus:

$$K = \frac{h_1(a + \varrho)^2}{2\varrho},$$

$$\text{also: } \frac{K'}{K} = \left( \frac{a - \varrho}{a + \varrho} \right)^2, \quad K' = K \left( \frac{a - \varrho}{a + \varrho} \right)^2. \quad (41), \quad (42)$$

Setzen wir in  $L(\lambda) = 0$  für  $\lambda$  die Doppelwurzel  $a$  ein, so ist nach (15):

$$(K - K') a - h_1 a^2 - a_1 = 0 \quad (43)$$

und wenn in  $M(\mu) = 0$  der Wurzelwert  $\varrho$  eingesetzt wird, ist nach (17):

$$(K + K') \varrho - h_1 \varrho^2 - a_1 = 0. \quad (44)$$

Subtrahiert man (44) von (43), so erhält man:

$$(K - K') a - (K + K') \varrho - h_1 (a^2 - \varrho^2) = 0$$

und hieraus: 
$$h_1 = \frac{K}{\varrho + a} + \frac{K'}{\varrho - a}, \quad (45)$$

oder wenn man  $K'$  aus (42) einsetzt:

$$h_1 = K \frac{2\varrho}{(a + \varrho)^2}. \quad (46)$$

Wenn  $\varepsilon$  die numerische Exzentrizität der Bahnellipse bedeutet, so dass die bekannten geometrischen Beziehungen gelten:

$$a\varepsilon = c; \quad r_1 = a(1 - \varepsilon); \quad r_2 = a(1 + \varepsilon); \quad (r_1 = \overline{KA}; \quad r_2 = \overline{KB}),$$

so kann man die im Vorhergehenden berechneten Größen durch  $\varepsilon$  ausdrücken. In der Tabelle I ist für die verschiedenen Fälle der Bewegung diese Substitution durchgeführt und die Geschwindigkeit  $v$  beigefügt, welche in den Scheiteln der Ellipse auftritt. Diese letztere ist aus den übrigen Größen, die in der Tabelle aufgeführt sind, mit Hilfe von (4) zu berechnen; dabei muss für die bis jetzt behandelten Fälle ( $K' < K$ ) statt  $h$  die Größe  $-h_1$  gesetzt werden, so dass:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{K}{a(1 - \varepsilon)} - \frac{K'}{a(1 + \varepsilon)} - h_1 \quad \text{wird.} \quad (47)$$

Wir haben bis jetzt immer angenommen, dass  $K > K'$  und sind unter (38) auch auf den Grenzfall  $K = K'$  gestossen. Ist nun  $K < K'$ , so ist die Wirkung der repulsiven Kraft noch grösser als für  $K = K'$ , so dass eine Bewegung zu erwarten ist von noch kleinerer Amplitude als im letzteren Fall, wo sie sich über den  $K$  benachbarten Ellipsenquadranten erstreckt. An den Bedingungen, die wir für  $\lambda$  festgestellt haben, ändert sich auch für  $K < K'$  gar nichts und erst von (25) an wird an der ganzen Betrachtung etwas geändert. Es ist jetzt  $a = \frac{K - K'}{2h_1} = -\frac{K' - K}{2h_1}$  und weil  $a$  positiv sein muss, so wird für  $K' > K$  nun  $h_1$  negativ und damit wird nach (25a) auch  $a_1$  negativ. Man findet dann auf demselben Wege, den wir im Vorangehenden beschritten haben für:

$$w_1 = -\varrho''; \quad -a\varepsilon < -\varrho'' < 0 \quad (48)$$

die folgenden Beziehungen:

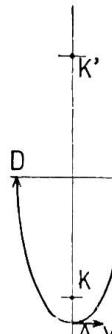
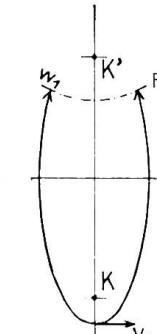
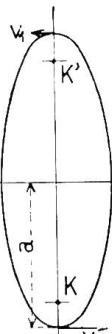
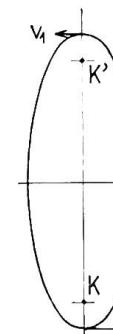
$$h_1 = -K \frac{2\varrho''}{(a - \varrho'')^2}; \quad K' = K \left( \frac{a + \varrho''}{a - \varrho''} \right)^2; \quad a_1 = -\frac{(K - K')^2}{4h_1}; \quad (49), (50), (51)$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{4K}{a(1 - \varepsilon^2)}} \sqrt{\frac{\varepsilon(a^2 + \varrho''^2) - a\varrho''(1 + \varepsilon^2)}{(a - \varrho'')^2}}; \quad V_1 = 0 \quad (52), (53)$$

Bewegung von  $Q$  unter der anziehenden Wirkung von  $K$  und der abstoßenden Wirkung von  $K'$  mit der Bedingung  $|K'| \leqq |K|$ .  
Energiegleichung:  $T - U = + |h_1|$ .

$$W_1 = \frac{K + K' - 2\sqrt{KK'}}{2h_1} \quad a = \frac{K - K'}{2h_1}$$

Tabelle I.

Fall	I	II	III	IV	V
$W_1 =$	0	$\varrho' ; \varrho' < a \varepsilon$	$a \varepsilon$	$\varrho ; a \varepsilon < \varrho < a$	$a$
$h_1 =$	0	$K \frac{2\varrho'}{(a + \varrho')^2}$	$\frac{2K}{a} \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}$	$K \frac{2\varrho}{(a + \varrho)^2}$	$\frac{K}{2a}$
$K' =$	$K$	$K \left( \frac{a - \varrho'}{a + \varrho'} \right)^2$	$K \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2$	$K \left( \frac{a - \varrho}{a + \varrho} \right)^2$	0
$a_1 =$	0	$\frac{(K - K')^2}{4h_1}$	$2aK \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon)^2}$	$\frac{(K - K')^2}{4h_1}$	$\frac{aK}{2}$
$v_0 =$	$\sqrt{\frac{4K\varepsilon}{a(1 - \varepsilon^2)}}$	$\sqrt{\frac{4K}{a(1 - \varepsilon^2)}} \sqrt{\frac{(a + \varrho)^2}{a\varrho'(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon(a^2 + \varrho'^2)}}$	$\frac{2}{1 + \varepsilon} \sqrt{\frac{2K}{a} \frac{(\varepsilon^3 + \varepsilon)}{(1 - \varepsilon^2)}}$	$\sqrt{\frac{4K}{a(1 - \varepsilon^2)}} \sqrt{\frac{(a + \varrho)^2}{a\varrho(1 + \varepsilon^2) + \varepsilon(a^2 + \varrho^2)}}$	$\sqrt{\frac{K}{a} \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)}}$
$v_1 =$	0	0	0	$\sqrt{\frac{4K}{a(1 - \varepsilon^2)}} \sqrt{\frac{(a + \varrho)^2}{a\varrho(1 + \varepsilon^2) - \varepsilon(a^2 + \varrho^2)}}$	$\sqrt{\frac{K}{a} \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + \varepsilon)}}$
Bewegungsart					
	Pendelung			Umlauf	
bis zur kleinen Axe	bis zur Hyperbel $\mu = \varrho'$	Grenzfall (labiles Gleichgewicht in B)			Grenzfall (Keplersche Bewegung um K)

und für den extremen Fall, dass  $\varrho'' = -a\varepsilon$  ist, erhält man daraus die speziellen Werte:

$$h_1 = -\frac{K}{a} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}; \quad K' = K \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2; \quad a_1 = -2aK \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2};$$

$$V_0 = 0; \quad V_1 = 0,$$

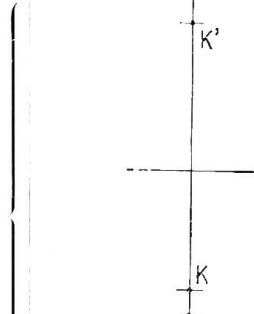
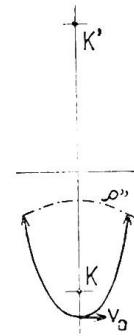
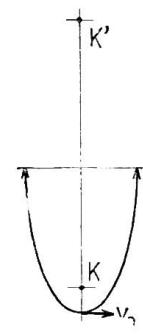
so dass es sich hier um denjenigen Grenzfall handelt, bei welchem  $Q$  sich im statischen labilen Gleichgewicht im Punkte  $A$  der Fig. 1 befindet. Eine weitere Vergrösserung von  $K'$  über den Wert  $K \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2$  hinaus erzeugt eine Bewegung, bei der sich  $Q$  immer mehr von  $K$  und  $K'$  entfernt und die also nicht mehr zu der hier betrachteten Gruppe von elliptischen Bewegungen gehört. In der Tabelle II

*Bewegung von Q unter der anziehenden Wirkung von K und der abstossenden Wirkung von K' mit der Bedingung  $|K'| > |K|$ .*

Energiegleichung:  $T - U = -|h_1|$ .

$$W_1 = \frac{K + K' - 2\sqrt{KK'}}{2h_1}; \quad a = \frac{K - K'}{2h_1}$$

**Tabelle II.**

Fall	Ib	Ia	I
$W_1 =$	$-a\varepsilon$	$-\varrho''; \quad 0 < \varrho'' < a\varepsilon$	0
$h_1 =$	$-\frac{K}{a} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}$	$-K \frac{2\varrho''}{(a-\varrho'')^2}$	0
$K' =$	$K \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2$	$K \left(\frac{a+\varrho''}{a-\varrho''}\right)^2$	$K$
$a_1 =$	$-2aK \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}$	$-\frac{(K' - K)^2}{4h_1}$	0
$V_0 =$	0	$\sqrt{\frac{4K}{a(1-\varepsilon^2)}}$ $\sqrt{\frac{(a-\varrho'')^2}{\varepsilon(a^2+\varrho''^2)-a\varrho''(1+\varepsilon^2)}}$	$\sqrt{\frac{4K\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}}$
$V_1 =$	0	0	0
Bewegungsart	 Grenzfall (labiles Gleichgewicht in Q')	 bis zur Hyperbel $\mu = \varrho''$	 Pendelung bis zur kleinen Axe

sind diejenigen Größen zusammengestellt, welche für die Bewegung massgebend sind, wenn  $K' > K$  ist, im Anschluss an die Tabelle I.

Ein labiles Gleichgewicht tritt auch dann auf, wenn im Falle III  $Q$  vom Punkte  $A$  aus (siehe Tabelle I) auf der Ellipse sich nach  $B$  bewegt hat. In  $B$  ist dann die Geschwindigkeit Null vorhanden und es halten sich die Anziehungs- und Abstossungskräfte von  $K$  und  $K'$  in diesem Punkte das Gleichgewicht wegen:

$$K' = K \left( \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 \quad \text{und} \quad r_1 = a(1 + \varepsilon) ; \quad r_2 = a(1 - \varepsilon).$$

Es besteht jedoch der Unterschied gegenüber dem Falle des labilen Gleichgewichtes nach Ib, dass eine kleine Störung in der Richtung der Tangente an die Ellipse sofort wieder einen ganzen Umlauf von  $Q$  um die Ellipse zur Folge hat, nach dessen Beendigung in  $B$  wiederum Gleichgewicht herrscht.

Mit den hier behandelten Fällen sind jedoch nicht alle Möglichkeiten einer elliptischen Bahnbewegung erschöpft, indem sie nur solche Bewegungen vollständig umfassen, bei denen  $K$  und  $K'$  die Brennpunkte der Bahnellipse bilden. Wie wir gesehen haben, ist dafür die Bedingung massgebend, dass die Gleichung  $L(\lambda) = 0$  eine Doppelwurzel besitzt. Wenn dies nun nicht mehr zutrifft und sich also für  $L(\lambda) = 0$  zwei verschiedene Wurzeln  $s_1$  und  $s_2$  ergeben, so wird nach (11), (12)  $\frac{d\lambda}{dt}$  so lange reell bleiben, als  $\lambda$  zwischen  $s_1$  und  $s_2$  schwankt, wobei sowohl  $s_1$  als  $s_2$  positiv und grösser als  $c$  sein muss. Es ist dann eine stetige Bewegung von  $Q$  möglich innerhalb der beiden Ellipsen  $\lambda = s_1$  und  $\lambda = s_2$  und es werden sich je nach dem Verlauf von  $\frac{d\mu}{dt}$  sehr verschiedene Bahnformen ergeben, unter denen sich auch elliptische befinden können. In der Fig. 3 sind einige Beispiele  $e$ ,  $i$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $p$  solcher Bahnen eingetragen; sie entsprechen ganz speziellen Bedingungen zwischen  $K$ ,  $K'$ ,  $c$ ,  $h_1$ ,  $a_1$ , deren Aufsuchung über den Rahmen dieser Ausführung hinausgeht.

Vollzieht sich die Bewegung eines Elektrons auf einer elliptischen Bahn, ohne dass Energie fortgestrahlt wird, nach Art der im Bohr-Sommerfeldschen Atommodell umlaufenden Elektronen, so finden sich unter den hier berechneten Ellipsenbahnen ebenfalls solche Bahnen, die ein Elektron unter der anziehenden und abstossenden Wirkung einer Gruppe von  $K$  positiven und  $K'$  negativen Ladungen beschreibt, welche sich im gegenseitigen Abstand von  $2c$  befinden. Ein solches System von Ladungen erscheint dann nach aussen hin und in grosser Entfernung als positiv oder negativ, je nachdem  $K$  grösser oder kleiner als  $K' + 1$  ist.

Zieht sich die durchlaufene Bahn auf einen kleinen Abschnitt der Ellipse (Fall Ia) zusammen, so entsteht in der Nähe des Scheitelpunktes  $A$  eine hin- und hergehende Bewegung, die angenähert durch eine geradlinige Bewegung ersetzt werden kann und dann der sog. quasielastischen Bewegung der Elektronentheorie gleicht; noch näher kommen einer solchen Bewegung diejenigen auf den Bahnen  $p$  und  $g$  der Fig. 3.

Die Bestimmung der Zeitdauer  $t$  eines vollen Umlaufes von  $Q$  ist nicht mehr auf so elementare Weise durchführbar wie diejenige der übrigen Bahnelemente und führt nur im Falle V auf eine algebraische Funktion, nämlich die Kepplersche Umlauf-

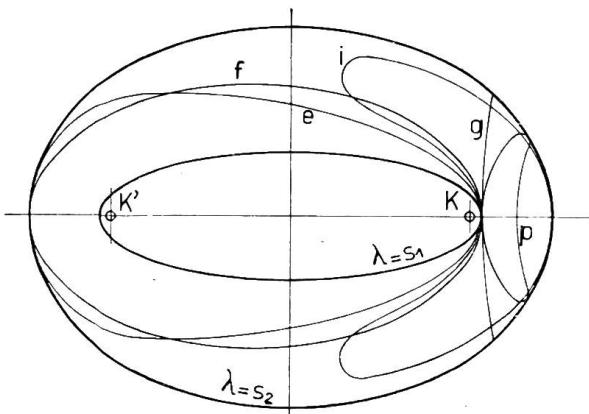


Fig. 3.

zeit um eine feste Sonne:  $t = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{K}}$ ; während sie im allgemeinen auf eine elliptische Funktion führt. Solange es sich aber bloss um die Bewegung auf derjenigen Ellipse handelt, deren Grundbedingung die ist, dass  $\lambda$  eine Konstante sei, so kann man nach (11a) oder (13) die Zeitdauer aus der Periodizität von  $\mu$  allein ableiten und es ist dann die Zeitdauer  $t_1$  eines halben Umlaufs gleich derjenigen, innerhalb welcher sich  $\mu$  von  $-c$  bis  $+c$  ändert; es ist also aus (13):

$$-\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\sqrt{S(\mu)}} \frac{d\mu}{dt} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\sqrt{S(\mu)}} d\mu = dt$$

und damit:

$$t_1 = \int_{-c}^{+c} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} - \lambda^2 \int_{-c}^{+c} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}.$$

Man kann aber *nicht* ebenso einfach ableiten, dass  $\int_{-c}^{+c} \frac{d\mu}{\sqrt{S(\mu)}} = 0$  ist, wie dies tatsächlich der Fall ist und wodurch der vorstehende Ausdruck sich reduziert auf:

$$t_1 = \int_{-c}^{+c} \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{S(\mu)}}. \quad (54)$$

Hierin ist  $S(\mu)$  eine algebraische Funktion 4<sup>ten</sup> Grades; es handelt sich also um ein elliptisches Integral.

$$K = +1; \quad Q = -1; \quad a = 2; \quad c = 1. \quad (\varepsilon = 1/2).$$

$$T - U = -h_1.$$

Tabelle III.

Fall	Ib	Ia	I	II	III	IV	V
$w_1$	- 1	- 0,5	0	+ 0,5	+ 1	+ 1,5	+ 2
$h_1$	- 2	- 0,4444	0	+ 0,16	+ 0,2222	+ 0,24490	+ 0,25
$K'$	+ 9	+ 2,7777	+ 1	+ 0,36	+ 0,1111	+ 0,02040	0
$a_1$	- 8	- 1,7777	0	+ 0,64	+ 0,8888	+ 0,9796	+ 1
$V_0$	0	1,01835	1,1547	1,2	1,2171	1,2234	1,2248
$V_1$	0	0	0	0	0	0,36886	0,40825
$t$	0	-	9,09	-	35,6	-	17,77

Für ein bestimmtes numerisches Beispiel sind in der Tabelle III die nach den Werten der Tabellen I und II berechneten Bahnelemente eingetragen und einige Umlaufzeiten zur Orientierung beigelegt. Für den Fall III ergibt sich dabei eine Umlaufzeit gleich der doppelten Kepplerzeit und im Falle I beträgt die Zeit, innerhalb welcher das Bogenstück  $D-A-C$  (siehe die Figur für Fall I in der Tabelle I) einmal durchlaufen wird, zu  $3/2$  derjenigen Zeit  $t_0$ , die für das Durchlaufen desselben Bogenstückes bei einer reinen Kepplerbewegung erforderlich wäre, wobei  $t_0 = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{K}} \left( \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi} \right)$  ist.

Bahnen, wie die hier beschriebenen, können nun auch bestehen, wenn man zu der elektrischen Anziehung oder Abstossung noch die reine Gravitationsanziehung der geladenen Körpermassen hinzurechnet. Bedeutet:

$$\left. \begin{array}{l} M_1 \text{ die mechanische Masse in } K \text{ und } +E_1 \text{ deren Ladung,} \\ M_2 \text{ " " " " } K' \text{ " } -E_2 \text{ " " " } \\ m_0 \text{ " " " " } Q \text{ " " } -e \text{ " " " } \end{array} \right\} \quad (55)$$

wobei die Ladungen in elektrostatischen Einheiten verstanden sind, so haben wir statt den in (2) festgesetzten Reduktionen für  $K$  und  $K'$  zu setzen:

$$K = \frac{e E_1}{m_0} + k^2 M_1 , \quad (56)$$

$$K' = \frac{e E_2}{m_0} - k^2 M_2 , \quad (57)$$

$$h_1 = \frac{J}{m_0} \quad (58)$$

und es gelten dann alle weiteren Berechnungen streng, was bei den Kraftgesetzen, die Thomson postuliert, nicht zutrifft. Eine messbare Beeinflussung, welche dem Bestande des Thomsonschen Modells gefährlich werden könnte, wird sich zwar erst zeigen, wenn Massen von der Grössenordnung  $10^{-2}$  bis  $10^{-5}$  Gramm vorliegen; solche Massen sind aber nur bei ionisierten Partikeln zu erreichen und weit grösser als die Massen von Molekülen oder gar Atomen, so dass das geäusserte Bedenken mehr nur theoretischer Natur ist. Als störende Ursache wird sich der Defekt jedoch dadurch bemerkbar machen, dass die von Thomson beschriebenen Gruppen von Kernen oder Atomen und Elektronen sich in kleinen inneren Schwingungszuständen befinden, ähnlich dem fortwährenden an- und abschwellenden Erzittern eines Dampferdecks unter der Wirkung der Maschinen und Propeller.

Schreiben wir nach (27)  $h_1 = \frac{K - K'}{2a}$  und setzen darin  $a\varepsilon = c$ ;  $a = \frac{c}{\varepsilon}$

so wird:

$$h_1 = \varepsilon \frac{K - K'}{2c} \quad (59)$$

und wenn sich der Energieinhalt des Systems in ganzen Vielfachen  $n$  einer Energieeinheitsmenge  $j (= h\nu)$  ausdrücken liesse, so könnte man schreiben:

$$h_1 = n j = \varepsilon \frac{K - K'}{2c}$$

$$\varepsilon = n j \frac{2c}{K - K'} .$$

Es würde sich also auch die Exzentrizität als ganzzahliges Vielfaches einer primiven Exzentrizität  $\varepsilon_1 = j \frac{2c}{K - K'}$  darstellen lassen und damit die sog. Quantenbahnen leicht bestimmen lassen. Ganz so leicht ist diese Bestimmung jedoch nicht, denn es liegt hier für  $Q$  eine Translationsbewegung vor, für welche aus den Grundsätzen der Quantenlehre hervorgeht, dass *allein der Impuls*, nicht aber die Energie massgebend für die quantenhafte Verteilung von Impuls und Energie ist. Wollen wir aber den Impuls (oder das Impulsmoment) nach diesen Grundsätzen berechnen, so stossen wir auf grössere mathematische Schwierigkeiten und wir müssen uns hier mit dieser Andeutung begnügen.

Zum Schlusse stellt sich uns noch die Frage, ob und unter welchen Umständen die Gruppierung von Kernen oder Atomen mit Elektronen nach Fig. 1 die tatsächlichen mechanischen Verhältnisse im Mikrokosmos eines Moleküls einfachster Art

richtig abbilden und insbesondere auch, in wie weit dadurch die chemischen Eigenchaften des Moleküls, wie: Bindung, Affinität, Polarität usw. mechanisch deutbar werden. Der Schreibende masst sich keinerlei Verdienst an für die Aufstellung eines derartigen Molekularmodelles, sondern verweist auf den Vortrag, welchen Prof. Fajans am 1. Juni 1923 im chemischen Institut der Universität Zürich abhielt, in dessen Verlauf Fajans die Ansicht vertrat, dass zwei Atome auf solche Weise zu einem Molekül zusammentreten, dass ein (oder mehrere) Elektron des einen Atoms  $K$  eine derartige Deformation seiner atomaren Bahn erleidet, dass diese schliesslich vom Atom  $K$  bis ins Innere des Atoms  $K'$  hineinreicht; ja, dass die deformierte Elektronenbahn am Schlusse gänzlich symmetrisch zu  $K$  und  $K'$  verläuft. Dieses wäre dann aber der Zustand, den wir hier rechnerisch behandelt haben, was in dem erwähnten Vortrag unterlassen wurde. Der Auffassung, dass die inneren Kräfte, welche die Atome zu Molekülen zusammenballen, nicht etwa einer besonderen chemischen Kraftart zugehören, sondern von derselben Beschaffenheit seien, wie die uns sonst in der Natur begegnenden elektrischen Anziehungskräfte, steht die Schwierigkeit gegenüber, dass es besonders in der organischen Welt eine grosse Anzahl von Stoffen gibt, bei denen gleichpolige Atome zu Molekülen zusammentreten. Dadurch würde sich, statt einer gegenseitigen Anziehung dieser Atome zu einem Molekül, eine abstossende Wirkung ergeben und man kann dann ohne Zuhilfenahme weiterer mehr oder weniger wahrscheinlicher Hilfsannahmen die Molekülbildung auf Grund rein elektrischer Kraftwirkungen wiederum nicht verstehen. In der polaren Verbindung NaCl, dem Steinsalz, verbindet sich beispielsweise ein elektropositives Na-Atom mit einem elektronegativen Cl-Atom, welche sich gegenseitig anziehen; in dem homöopolaren (nach der chemischen Terminologie) Lithiumhydrid LiH dagegen ist vor der Bindung sowohl das Wasserstoff- als auch das Lithiumatom elektropositiv, so dass sich die beiden Atome abstossen; nach der Fajansschen Auffassung löst sich nun ein Elektron, welches wir Bindungselektron nennen, aus dem Lithiumatom ab, wodurch ein negativ ionisiertes Lithiumatom entsteht, welches vom positiven H-Atom angezogen wird und das abgelöste Elektron umläuft in einer elliptischen

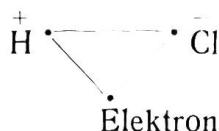
Bahn die beiden Atome H und Li nach Art der Fig. 1. Man sieht, dass dadurch die oben erwähnte Schwierigkeit, welche Verbindungen gleichpoliger Komponenten mit sich bringen, auf eine plausible Weise umgangen ist. Wie sich an Hand eines solchen Modells Fragen nach der chemischen Bindung, Ionisierungsenergie, Molekularrefraktion, Bindungswärme, Farbe usw. beantworten lassen, kann, wenigstens was die Bindung und Bindungswärme sowie die Ionisierungsenergie betrifft, aus der hier durchgeföhrten Berechnung elliptischer Bahnen abgeleitet werden, während wir für die übrigen auf die Darstellungen von Fajans verweisen.

Handelt es sich um ein Molekül, welches Teile einer Flüssigkeit oder eines Gases bildet und das im übrigen wiederum nach Fig. 1 aus zwei entgegengesetzt geladenen Atomen  $K^+$  und  $K^-$  bestehe, welche ein Elektron auf elliptischer Bahn umläuft, so kann der feste Abstand  $2c$ , den  $K^+$  von  $K^-$  hat, nicht davon herrühren, dass die beiden Atome  $K^+$  und  $K^-$  etwa wie in einem Braggschen Kristallgitter auf konstantem Abstand gehalten sind. Lässt man aber das ganze System der Fig. 1 eine langsame fortwährende Rotation machen um eine zur Bildebene senkrechte Drehaxe  $R$  und mit einer solchen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , dass die gegenseitige Anziehung der Atome  $K^+$  und  $K^-$  gerade durch die Zentrifugalkraft der Rotation ausbalanziert wird, wenn  $K^+$  und  $K^-$  sich im gegenseitigen Abstand  $2c$  befinden, so wird  $2c$  eine Konstante bleiben. Ist dann die Umlaufgeschwindigkeit  $\Omega$  des Elektrons um  $K^+ - K^-$  gross gegenüber  $\omega$ , d. h.:

$$\frac{\Omega}{\omega} \gg 1, \quad (60)$$

so wird die Bahn des Elektrons in der Bildebene nicht wesentlich geändert durch die Rotation der Bildebene, sondern nur kleine periodische Schwankungen erleiden, weil die Zentrifugalkraft, welche der Rotation  $\omega$  entspricht, klein ist gegenüber den Kräften, die auch im ruhenden Zustand der Bildebene auf das Elektron einwirken. Die Wirkung eines solchen Kräfteausgleiches, zwischen der gegenseitigen Anziehung

von  $K^+$  und  $\bar{K}'^-$  und ihrer Zentrifugalkraft, welche sie auseinandertreibt, wäre dann so, dass das Elektron eine elliptische Bahn beschreibt, die aber nicht mehr ruht, sondern sich mit der Bildebene um die Axe  $R$  dreht: die Bahnellipse besitzt eine Präzessionsbewegung  $\omega'$ , die sich nach Vorstehendem berechnen lässt. Es ist dabei vorauszusetzen, dass die schon erwähnte Bohr-Sommerfeldsche Bedingung einer nichtstrahlenden Bewegung der Ladungen auf Quantenbahnen sich auch auf die gegenseitige Umlaufbewegung der geladenen Atome  $K^+$  und  $\bar{K}'^-$  erstrecke und nicht nur auf diejenige des Elektrons. Eine präzessierende Bewegung der beschriebenen Art wäre ausserdem, nach einer Auffassung von Larmor, äquivalent mit dem Auftreten eines Magnetfeldes in der Richtung der Rotationsaxe  $R$  von einer der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  proportionalen Stärke. Nun kann ein solches Feld, wegen der ungeregelten Orientierung der einzelnen Moleküle eines Gases nach aussen, gänzlich verschwinden und seine magnetisch-mechanische Messung unmöglich werden, während seine Existenz vielleicht optisch bemerkbar wäre. Die Rotation der Atome oder des ganzen Moleküls macht sich optisch in wohlbekannten Rotationsspektren bemerkbar, welche insbesondere für Verbindungen wie  $HCl$ ,  $HF$ ,  $HBr$  u. a. genau gemessen worden sind, Verbindungen, deren Typ übereinstimmt mit dem hier behandelten Bewegungsfall einer Molekel:



Bei dem Gasmolekül sehen wir also, dass die Bindung, (als Mass der Trägheit, mit welcher das Molekül einer Trennung seiner Komponenten entgegenwirkt), angesehen werden kann als diejenige Kraft, welche die beiden Ladungen von

$K^+$  und  $\bar{K}'^-$  zusammenhält; sie ist für doppelt geladene  $K^+$  und  $\bar{K}'^-$  doppelt so gross wie für einfach geladene, entsprechend einer „doppelten Bindung“ der chemischen Terminologie. Die Ionisierungsenergie lässt sich aus den in der Tabelle I angegebenen Bahnelementen bestimmen, wenn wir die Energiekonstante  $h_1$  der Bahnbewegung kennen. Die Bindungswärme ergibt sich aus dem Unterschied der Energie  $h_1$  gegenüber der Energie  $h_2$ , welche das Elektron im ursprünglichen Verband mit einem der beiden Atome besass, wenn für  $KK'$  keine Energieänderung eintritt. Wir wollen noch durch eine überschlägliche Rechnung nachprüfen, ob unter einfachen atomaren Massenverhältnissen die Bedingungen erfüllt sein können, die wir unter (60) aufgestellt haben. Es sollen dabei die Bezeichnungen unter (55) gelten; die mechanische Masse der beiden Atome sei der Einfachheit halber als gleich gross angenommen (*nicht so* die nach (56) und (57) „reduzierte“ Masse) und es findet dann die Rotation  $\omega$  statt um den Punkt  $O$  der Fig. 1. Mit  $c = a\varepsilon$  ist dann die Zentrifugalkraft  $M a\varepsilon \omega^2$  gleich der gegenseitigen Anziehungskraft  $\frac{E_1 E_2}{(2 a\varepsilon)^2}$  zu setzen, so dass wir erhalten  $M a\varepsilon \omega^2 = \frac{E_1 E_2}{(2 a\varepsilon)^2}$

$$\omega^2 = \frac{E_1 E_2}{4 M a^3 \varepsilon^3}. \quad (61)$$

Für das Elektron  $Q$ , in der nichtrotierenden Bildebene, gilt für die Umlaufzeit  $t_1$ , wenn  $t$  die Kepplersche Umlaufzeit bedeutet:

$$2t > t_1 > t, \quad t = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{K}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\frac{e E_1}{m_0}}}, \quad t^2 = \frac{(2\pi)^2 a^3 m_0}{e E_1}$$

und also die Winkelgeschwindigkeit  $\Omega = \frac{2\pi}{t_1} > \frac{2\pi}{2t}$  und  $\Omega < \frac{2\pi}{t}$  oder deren Quadrat  $\Omega^2 > \left(\frac{\pi}{t}\right)^2 = \frac{\pi^2 e E_1}{4\pi^2 a^3 m_0}$ , so dass:

$$\frac{e E_1}{a^3 m_0} > \Omega^2 > \frac{e E_1}{4 a^3 m_0}. \quad (62)$$

Beträgt die absolute Grösse von  $e$  und  $E_1$  je diejenige einer elektrostatischen Elementarladung  $|e|$ , so hat man mit (61):

$$\omega^2 = \frac{e E_1}{4 M a^3 \epsilon^3} \quad (63)$$

und mit (62):

$$\frac{4 M}{m_0} \epsilon^3 > \frac{\Omega^2}{\omega^2} > \frac{M}{m_0} \epsilon^3 \quad (64)$$

$$2 \epsilon^{3/2} \sqrt{\frac{M}{m_0}} > \frac{\Omega}{\omega} > \epsilon^{3/2} \sqrt{\frac{M}{m_0}}. \quad (65)$$

Man sieht aus (65), dass die Bedingung (60) für die Möglichkeit einer rotierenden Gasmolekel erfüllt ist, wenigstens für grosse Exzentrizitäten  $\epsilon$ , denn es übertrifft die Atommasse  $M$  diejenige  $m_0$  des Elektrons um mindestens das 1846 fache.

Wir haben im Früheren angedeutet, dass das Impulsmoment des umlaufenden Partikels nach den Grundsätzen der Quantenlehre in Beziehung gebracht werden kann zu der Exzentrizität seiner elliptischen Bahn, was, auf das Fajanssche Molekularmodell übertragen, heisst, dass das Bindungselektron in einer Quantenbahn umlaufen kann. Es ist nun ein Vorzug des bekannten Bohrschen Atommodells, dass durch die quantenhafte Anlage der Elektronenbahnen im Atom eine gewisse Stabilität desselben zum Ausdruck kommt, welche wir aus verschiedenen anderweitigen Gründen demselben zuschreiben müssen, aber besonders sinnfällig wird dieser Vorzug erst bei dem Fajansschen Molekularmodell *mit* Bindungselektron auf einer *Quantenbahn*. Im Kristall haben wir nämlich ein einziges grosses Molekül vor Augen und der sichtbare Tatbestand lässt kaum einen Zweifel mehr übrig, dass es sich dabei nicht um einen Mückenschwarm umherschwirrender Elektronen und Atome handelt, sondern um ein Gerüst, welches durch quantenmässige Beziehungen ihrer gegenseitigen Lagen und Bahnen versteift wird. Allerdings bezieht sich dabei die Ueberzeugungskraft des Fajansschen Molekularmodelles auch nur auf die Elektronenbahnen, während der gegenseitige *Abstand* aller Atome zwar von verschiedenen Forschern berechnet wurde, aber nicht auf quantentheoretischer Grundlage.

Wir sind, wie der Leser bemerkte, von unserem Standpunkt der präzisen Bestimmung einer einfachen elliptischen Bahn einzig nach Newton-Coulombschen Prinzipien in unseren letzten Ausführungen etwas abgewichen, aber immerhin nicht so weit, dass wir das Erfahrungsgesetz der Kraftwirkung nach diesen Prinzipien einer Abänderung unterzogen, wie dies bei der Thomsonschen Hypothese der Fall ist.

