Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 15 (1924)
Heft: 10

Artikel: Die Berechnung fester Wärmespeicher
Autor: Grütter, K.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057089

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich,
im Januar dazu die Beilage „Jahresheft".

Alle den **Inhalt** des „Bulletin" betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins
Seefeldstrasse 301, Zürich 8 — Telephon: Hottingen 7320,
welches die Redaktion besorgt.

Alle Zuschriften betreffend **Abonnement, Expedition** und **Inserate** sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.
Stauffacherquai 36/38 Zürich 4 Telephon Selnau 7016

Ce bulletin paraît mensuellement. — „**L'Annuaire**" est distribué comme supplément dans le courant de janvier.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la **matière** du „Bulletin" au

Secrétariat général
de l'Association Suisse des Electriciens
Seefeldstrasse 301, Zurich 8 — Telephon: Hottingen 7320
qui s'occupe de la rédaction.

Toutes les correspondances concernant les **abonnements, l'expédition** et les **annonces,** doivent être adressées à l'éditeur

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Stauffacherquai 36/38 Zurich 4 Telephon Selnau 7016

Abonnementspreis (für Mitglieder des S. E. V. gratis)
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft:
Schweiz Fr. 20.—, Ausland Fr. 25.—
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 2.— plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 20.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 2.—, port en plus.

XV. Jahrgang
XVe Année

Bulletin No. 10

Oktober
Octobre 1924

Die Berechnung fester Wärmespeicher[1]).

Von Dipl.-Ing. *K. Grütter,* Winterthur.

Der zeitliche Verlauf der Temperaturen innerhalb eines plattenförmigen, homogenen Speichers aus festem Material wird berechnet unter der Annahme, dass die an der Innenwand zugeführte Wärmemenge und die Umgebungstemperatur periodisch veränderlich seien. Die Wärmeabgabe an der Oberfläche wird für verschiedene Strombezugsdiagramme berechnet, ebenso die Temperatur der Innenwand. Schliesslich werden die gefundenen Beziehungen benützt zur Entwurfsberechnung von plattenförmigen Wärmespeichern aus homogenem festem Material.

L'auteur calcule les valeurs que prend, en fonction du temps, la température à l'intérieur d'une plaque homogène susceptible d'accumuler de la chaleur, en supposant une variation périodique de l'énergie calorifique transmise à la paroi intérieure, et de la température extérieure. La chaleur rayonnée par la surface extérieure et la température de la paroi intérieure sont calculées pour différents régimes dans l'énergie électrique consommée. Enfin l'auteur applique les relations déduites au calcul d'accumulateurs de chaleur formés de plaques homogènes.

Die Berechnung elektrisch beheizter Speicheröfen soll Aufschluss geben über die Wärmeabgabe des Ofens in Funktion der Zeit, wenn die Stromzufuhr ebenfalls in Funktion der Zeit gegeben ist und über die zu erwartenden Temperaturen an der Oberfläche, sowie an der Stelle, an welcher die Heizkörper liegen.

Die Berechnung der Temperaturverteilung und des Wärmeflusses innerhalb fester Körper stützt sich auf die von dem französischen Mathematiker Fourier stammenden Untersuchungen und wurde in dieser Zeitschrift von Herrn ten Bosch und Herrn Zangger[2]) behandelt. Diese Arbeiten untersuchten den Temperaturverlauf im Wärmespeicher, wenn er vom stationären Zustand aus, in dem die Temperatur im ganzen Speicher konstant ist, während einer bestimmten Zeit geheizt wird und sich hierauf abkühlt. Dieser Vorgang entspricht dem erstmaligen Anheizen und der nachfolgenden Abkühlung.

Im praktischen Betrieb wird jedoch ein Ofen täglich geheizt, d. h. Anheizen und Abkühlen folgen sich periodisch. Dabei tritt der von ten Bosch und Zangger ange-

[1]) Das Manuskript ist am 4. Februar 1924 bei der Redaktion eingegangen.
[2]) Siehe Bulletin S.E.V. 1923, No. 4, Seite 193 und Seite 202.

nommene Anfangszustand gleichmässiger Temperaturverteilung niemals ein. Die vorliegende Untersuchung will daher die eingangs erwähnten Fragen beantworten unter der Annahme, dass der zeitliche Wärmeverlauf im Speicher ein periodischer sei, d. h. dass sich die an der Innenwand zugeführte Wärmemenge und die Umgebungstemperatur des Speichers periodisch ändern.

Berechnung der Temperaturverteilung.

Die von Fourier aufgestellte Differentialgleichung des Wärmeflusses in einem festen Körper lässt sich auf Grund einer einfachen vektoranalytischen Ueberlegung leicht ableiten. Der Wärmefluss in einem beliebigen Punkt innerhalb eines festen Körpers ist ein räumlicher Vektor $[q]$[3]), der in die Richtung des Temperaturgefälles an dieser Stelle fällt und diesem proportional ist, wobei der Proportionalitätsfaktor gleich der Wärmeleitfähigkeit λ des Stoffes ist. Die als Funktion des Ortes gegeben gedachte Temperatur ϑ stellt also das Potential dar, dessen Gradient, das Temperaturgefälle, mit der Wärmeleitzahl λ multipliziert den Wärmeflussvektor $[q]$ gibt, in vektoranalytischer Schreibweise:

$$[q] = \lambda \operatorname{grad} \vartheta . \tag{1}$$

Der Wärmefluss erfährt nun in jedem Punkt während dem Zeitelement ∂t eine Aenderung, die gleich ist der Energieänderung pro Volumeneinheit des betreffenden Raumpunktes. Diese Energieänderung ist die Veränderung des Wärmeinhaltes der Volumeneinheit, somit proportional der Temperaturänderung multipliziert mit dem spezifischen Gewicht γ und der spezifischen Wärme c des Stoffes und ergibt sich aus der skalar ausgeführten Differentiation des Vektors $[q]$; vektoranalytisch als Divergenz bezeichnet und geschrieben:

$$\partial t \operatorname{div} [q] = c \gamma \partial \vartheta . \tag{2}$$

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\frac{\lambda}{c \gamma} = a , \tag{3}$$

so erhält man durch Einsetzen von Gleichung (1) in Gleichung (3):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta .$$

Wird die doppelte Differentiation div grad in Raumkoordinaten x, y, z ausgeführt (siehe z. B. „Hütte", 23. Aufl., pag. 123), so lautet diese Gleichung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) . \tag{4}$$

Das ist die allgemeine Differentialgleichung für den Wärmefluss in einem festen, homogenen Körper unter der Voraussetzung, dass das spez. Gewicht, die spez. Wärme und die Wärmeleitzahl von der Temperatur unabhängig sind. Die Materialkonstanten erscheinen hier zu einer einzigen Grösse a zusammengefasst, für die sich die Bezeichnung „Temperaturleitfähigkeit" eingebürgert hat. Wie Gleichung (3) zeigt, hat sie die Dimension Länge^2/Zeit.

Elektrische Speicheröfen sind in der Regel aus Platten zusammengesetzt, d. h. aus Körpern, die von parallelen Ebenen begrenzt sind. In solchen Platten verläuft, wenigstens in genügender Entfernung von den Rändern, die Wärme senkrecht zu den Begrenzungsebenen und die Flächen gleicher Temperatur sind parallele Ebenen. Legt man die x-Axe senkrecht zu diesen Ebenen, so ändert sich die Temperatur

[3]) Im folgenden sollen räumliche Vektoren durch eine [ ] Klammer bezeichnet werden.

nur in der Richtung der x-Axe, während die Derivierten der Temperatur nach y und z Null sind. Gleichung (4) vereinfacht sich daher zu:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \cdot \tag{5}$$

In der Nähe der Ränder weicht allerdings der Temperaturverlauf von dem hier vorausgesetzten ab. Diese Partien bilden jedoch einen verhältnismässig geringen Teil des Ofens. Wir beschränken daher unsere Untersuchung auf die eindimensionale Form der Wärmeströmung, d. h. auf Lösungen der Gleichung (5).

Diese Differentialgleichung ist linear und homogen. Ihre allgemeine Lösung besteht aus einer Summe partikulärer Lösungen und zwar müssen deren soviele gesucht werden, dass die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt werden können. Ein erstes partikuläres Integral erhält man, wenn man in Gleichung (5) beide Seiten für sich Null setzt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0 ,$$

deren Integration liefert:

$$\vartheta = \vartheta_k \quad \text{und} \quad \vartheta_k = C_1 x + C_2 ,$$

d. h. die Temperatur bleibt in jedem Punkt zeitlich konstant und ändert sich örtlich innerhalb der Platte linear. Diese Lösung entspricht dem stationären Zustand, der sich einstellt, wenn eine konstante Wärmemenge q_k die Platte von der Dicke s durchfliesst. Dann nimmt die Aussenwand die konstante Temperatur ϑ_{ak}:

$$\vartheta_{ak} = \frac{q_k}{\alpha} + \vartheta_{uk} \tag{6}$$

und die Innenwand die konstante Temperatur ϑ_{ik}:

$$\vartheta_{ik} = q_k \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{s}{\lambda} \right) + \vartheta_{uk} \tag{7}$$

an. Hierin bedeutet α die Wärmeübergangszahl der Aussenwand an die Luft und ϑ_{uk} die konstante Umgebungstemperatur.

Ueber diesen Zustand lagert sich die zeitlich veränderliche Temperaturverteilung, die von den veränderlichen Anteilen der an der Innenwand zugeführten Wärmemenge q und der Umgebungstemperatur ϑ_u herrührt.

Da wir diese Anteile als periodisch veränderlich voraussetzen, können wir sie als Fouriersche Reihen, d. h. als Summen von Sinusgliedern darstellen in der Form:

$$\left.\begin{aligned} q &= \Sigma\, Q_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_{qn}\right) \\ \vartheta_u &= \Sigma\, \Theta_{un} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_{\vartheta un}\right) \cdot \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Hierin bedeutet T die Dauer einer Periode, d. h. im allgemeinen 24 Std. n sind ganze positive Zahlen. φ_q und φ_ϑ sind Phasenverschiebungswinkel, über die noch verfügt werden kann.

Die Lösung der Differentialgleichung (5) wird gliedweise den Randbedingungen angepasst, d. h. für jedes Glied der Randbedingungen wird ein partikuläres Integral berechnet. Die Form der Lösungen ist natürlich für alle Glieder identisch. Wir haben

deshalb allgemein die Lösung zu suchen, die an der Innenwand der Bedingung:

$$q = Q \sin \frac{2 \pi n t}{T} \tag{9a}$$

und für die Umgebungstemperatur der Bedingung:

$$\vartheta_u = \Theta_u \sin \frac{2 \pi n t}{T} \tag{9b}$$

genügt. Wir werden sehen, dass der Anfangspunkt $t = 0$ bei der Ausrechnung für jedes Glied besonders festgesetzt werden kann, so dass die Phasenverschiebungswinkel φ für die allgemeine Lösung nicht in Betracht fallen.

Die allgemeine Lösung muss sich sowohl innen ($x = 0$) wie aussen ($x = s$) nach Grösse und Phase den Randbedingungen anpassen. Wir müssen deshalb über vier Integrationskonstanten verfügen können, d. h. die allgemeine Lösung muss sich aus vier partikulären Integralen zusammensetzen.

Diese Bedingungen werden erfüllt durch die Gleichung[4]):

$$\left.\begin{aligned} \vartheta = &\left(A e^{\frac{x}{s} S} \sin \frac{x}{s} S + B e^{\frac{x}{s} S} \cos \frac{x}{s} S + C e^{\frac{-x}{s} S} \sin \frac{x}{s} S + D e^{\frac{-x}{s} S} \cos \frac{x}{s} S\right) \sin \frac{2 \pi t}{T} \\ &+ \left(B e^{\frac{x}{s} S} \sin \frac{x}{s} S - A e^{\frac{x}{s} S} \cos \frac{x}{s} S - D e^{\frac{-x}{s} S} \sin \frac{x}{s} S + C e^{\frac{-x}{s} S} \cos \frac{x}{s} S\right) \cos \frac{2 \pi t}{T} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Durch Differentiation und Einsetzen in die vorgelegte Differentialgleichung (5) findet man, dass diese erfüllt ist, wenn:

$$S = s \sqrt{\frac{\pi}{a T}} \,. \tag{11}$$

Zur Berechnung der Integrationskonstanten A, B, C, D ist zu berücksichtigen, dass:

1. die der Innenwand ($x = 0$) zugeführte Wärmemenge q dem dort herrschenden Temperaturgefälle proportional sein muss:

$$q = Q \sin \frac{2 \pi t}{T} = - \lambda \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x = 0} \tag{12}$$

2. die durch die Aussenwand ($x = s$) tretende Wärme proportional ist einerseits dem dort herrschenden Temperaturgefälle, andererseits der Temperaturdifferenz zwischen Aussenwand und Umgebung:

$$- \lambda \left| \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x = s} = \alpha \left(\vartheta_{x = s} - \vartheta_u\right),$$

woraus:

$$\vartheta_u = \Theta_u \sin \frac{2 \pi t}{T} = \left| \vartheta + \frac{\lambda}{\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x = s} . \tag{13}$$

Schreiben wir zur Abkürzung $\frac{\alpha}{\lambda} = h$ und:

---

[4]) Eine Ableitung dieser Lösung in etwas anderer Form findet man in dem Buche von Dr. Heinrich Gröber: „Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges", Seite 78 u. ff.

$$\left.\begin{aligned}
Fa &= e^{S}\left(\sin S + \frac{S}{s\,h}(\sin S + \cos S)\right) = e^{S}\frac{1}{s\,h}\sqrt{S^2 + (S + sh)^2} \\
&\qquad \sin\left(S + \operatorname{arctg}\frac{S}{S + sh}\right) \\
Fb &= e^{S}\left(\cos S + \frac{S}{s\,h}(\cos S - \sin S)\right) = e^{S}\frac{1}{s\,h}\sqrt{S^2 + (S + sh)^2} \\
&\qquad \cos\left(S + \operatorname{arctg}\frac{S}{S + sh}\right) \\
Fc &= e^{-S}\left(\sin S + \frac{S}{s\,h}(\cos S - \sin S)\right) = -\,e^{-S}\frac{1}{s\,h}\sqrt{S^2 + (S - sh)^2} \\
&\qquad \sin\left(S - \operatorname{arctg}\frac{S}{S - sh}\right) \\
Fd &= e^{-S}\left(\cos S - \frac{S}{s\,h}(\cos S + \sin S)\right) = -\,e^{-S}\frac{1}{s\,h}\sqrt{S^2 + (S - sh)^2} \\
&\qquad \cos\left(S - \operatorname{arctg}\frac{S}{S - sh}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

und setzen ϑ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ aus Gleichung (10) in (12) und (13) ein, so erhalten wir:

$$-\frac{\lambda S}{s}\left((A + B + C - D)\sin\frac{2\pi t}{T} + (-A + B - C - D)\cos\frac{2\pi t}{T}\right) = Q\sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$(A\,Fa + B\,Fb + C\,Fc + D\,Fd)\sin\frac{2\pi t}{T} + (-A\,Fb + B\,Fa + C\,Fd - D\,Fe)\cos\frac{2t}{T}$$

$$= \Theta_u \sin\frac{2\pi t}{T}\,.$$

Diese Gleichungen sind nur dann für alle Werte von t erfüllt, wenn:

$$\left.\begin{aligned}
A + B + C - D &= -\frac{Q\,s}{\lambda\,S} \\
-A + B - C - D &= 0 \\
A\,Fa + B\,Fb + C\,Fc + D\,Fd &= \Theta_u \\
-A\,Fb + B\,Fa + C\,Fd - D\,Fe &= 0\,.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Aus diesen vier Gleichungen können die vier Integrationskonstanten berechnet werden, am besten durch Auflösen der aus den Koeffizienten von A, B, C und D in Verbindung mit den konstanten Gliedern gebildeten Determinanten. Wir erhalten damit die Konstanten in der Form:

$$A = \frac{Az}{N}\,; \qquad B = \frac{Bz}{N}\,; \qquad C = \frac{Cz}{N}\,; \qquad D = \frac{Dz}{N}\,.$$

Für den gemeinsamen Nenner N erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}
N = \{S^2 + (S + sh)^2\}\,e^{2S} + \{S^2 + (S - sh)^2\}\,e^{-2S} - 2\,(2S^2 - (sh)^2)\cos 2\,S \\
- 4\,S\,sh\sin 2\,S\,.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Zur Berechnung der Zähler werden die betreffenden Determinanten in je zwei Unterdeterminanten zerlegt, von denen die eine den Faktor Q, die andere den Faktor Θ_u enthält. Es ist also:

$$Az = Aq + A_\vartheta \; ; \quad Bz = Bq + B_\vartheta \; ; \quad Cz = Cq + C_\vartheta \; ; \quad Dz = Dq + D_\vartheta$$

und die Auflösung der Determinanten unter Berücksichtigung der Gleichungen (14) ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
Aq &= \frac{Qs}{2\lambda S}\{-e^{-2S}(S^2+(S-sh)^2)+(2S^2-2S\,sh-sh^2)\cos 2S \\
&\qquad +(2S^2+2S\,sh-(sh)^2)\sin 2S\} \\
Bq &= \frac{Qs}{2\lambda S}\{-e^{-2S}(S^2+(S-sh)^2)+(2S^2+2S\,sh-sh^2)\cos 2S \\
&\qquad -(2S^2-2S\,sh-(sh)^2)\sin 2S\} \\
Cq &= \frac{Qs}{2\lambda S}\{-e^{2S}(S^2+(S+sh)^2)+(2S^2+2S\,sh-sh^2)\cos 2S \\
&\qquad -(2S^2-2S\,sh-(sh)^2)\sin 2S\} \\
Dq &= \frac{Qs}{2\lambda S}\{e^{2S}(S^2+(S+sh)^2)-(2S^2-2S\,sh-sh^2)\cos 2S \\
&\qquad -(2S^2+2S\,sh-(sh)^2)\sin 2S\} \\
A_\vartheta &= -C_\vartheta = \Theta_u\,sh\left\{e^{S}\sqrt{S^2+(S+sh)^2}\,\sin\left(S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\right. \\
&\qquad \left.+e^{-S}\sqrt{S^2+(S-sh)^2}\,\sin\left(S-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)\right\} \\
B_\vartheta &= D_\vartheta = \Theta_q\,sh\left\{e^{S}\sqrt{S^2+(S+sh)^2}\,\cos\left(S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\right. \\
&\qquad \left.-e^{-S}\sqrt{S^2+(S-sh)^2}\,\cos\left(S-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)\right\}.
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Man kann nun auch die Gleichung (10) in zwei Teile zerlegen:

$$\vartheta = \vartheta_q + \vartheta_\vartheta \, ,$$

wobei ϑ_q nur von der an der Innenwand zugeführten Wärmemenge und ϑ_ϑ nur von der Umgebungstemperatur ϑ_u abhängig ist. Der Einfluss dieser beiden Grössen auf die Temperaturverteilung kann also ganz unabhängig von einander untersucht werden.

Es interessieren uns im weiteren nur noch die an der Aussenwand und an der Innenwand auftretenden Temperaturen. Man findet sie, indem man in Gleichung (10) $x = s$ resp. $x = 0$, sowie die Konstanten gemäss Gleichung (16) und (17) einsetzt und erhält nach einigen Umformungen den von der Innenwandheizung abhängigen Teil der Aussenwandtemperatur:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_{qa} = \frac{2Qs}{\lambda N}\Bigg\{&e^{S}\sqrt{S^2+(S+sh)^2}\,\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\left(S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\right) \\
&-e^{-S}\sqrt{S^2+(S-sh)^2}\,\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\left(S-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)\right)\Bigg\},
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

den von der Umgebungstemperatur abhängigen Teil der Aussenwandtemperatur $\vartheta_{\vartheta a}$:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{\vartheta a} = \frac{\Theta_u\, sh}{N}\Bigg\{\sqrt{S^2+(S+sh)^2}\Bigg[e^{2S}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\\ +\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\left(2S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\right)\Bigg]-\sqrt{S^2+(S-sh)^2}\Bigg[\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right.\\ \left.+2S-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)+e^{-2S}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)\Bigg]\Bigg\},\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

den von der Innenwandheizung abhängigen Teil der Innenwandtemperatur ϑ_{qi}:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{qi} = \frac{Q\,s}{\sqrt{2}\,\lambda\, SN}\Bigg\{[e^{2S}(S^2+(S+sh)^2)-e^{-2S}(S^2+(S-sh)^2)]\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\frac{\pi}{4}\right)\\ -2\sqrt{4S^4+(sh)^4}\,\sin\left((2S-\operatorname{arctg}\frac{2\,S\,sh}{2S^2-(sh)^2}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg\}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

und endlich den von der Umgebungstemperatur abhängigen Teil der Innenwandtemperatur $\vartheta_{\vartheta i}$:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{\vartheta i} = \frac{2\,\Theta_u\, sh}{N}\Bigg\{e^{S}\sqrt{S^2+(S+sh)^2}\,\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\left(S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}\right)\right)\\ -e^{-S}\sqrt{S^2+(S-sh)^2}\,\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\left(S-\operatorname{arctg}\frac{S}{S-sh}\right)\right)\Bigg\}.\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Diese Ausdrücke haben wie die Randbedingung Gleichung (9) die allgemeine Form:

$$\bar{\vartheta} = \Theta\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\varphi\right),$$

sie können also ähnlich wie Wechselstromgrössen als zeitliche Vektoren[5]) dargestellt werden, von der absoluten Grösse Θ und einer Phasenverschiebung φ gegenüber dem Vektor $\bar{q}$ für $\bar{\vartheta}_{qa}$ und $\bar{\vartheta}_{qi}$ resp. gegenüber dem Vektor $\bar{\vartheta}_u$ für $\bar{\vartheta}_{\vartheta a}$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta i}$. Der resultierende Vektor $\bar{\vartheta}_a$ resp. $\bar{\vartheta}_i$ ist aus den Vektoren $\bar{\vartheta}_{qa}$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta a}$ resp. $\bar{\vartheta}_{qi}$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta i}$ geometrisch zusammenzusetzen. Die Vektoren der Randbedingungen $\bar{q}$ und $\bar{\vartheta}_u$ können daher einen beliebigen Winkel miteinander einschliessen.

Temperatur und Wärmeabgabe an der Aussenwand.

Fig. 1 zeigt das Vektordiagramm der Temperaturen an der Aussenwand für eine Platte, deren Material und Abmessungen unten (1. Zahlenbeispiel) angegeben sind. Der nur von der zugeführten Wärmemenge abhängige Vektor $\bar{\vartheta}_{qa}$ setzt sich gemäss Gleichung (18) aus zwei Vektoren $\bar{V}_1$ und $\bar{V}_c$ zusammen. Der Vektor $\bar{V}_1$ hat die absolute Grösse $V_1 = \frac{2\,Q\,s}{\lambda\, N}\,e^{S}\sqrt{S^2+(S+sh)^2}$ und läuft dem Vektor $\bar{q}$ um den Winkel φ_1 nach. $\varphi_1 = S+\operatorname{arctg}\frac{S}{S+sh}$. Der Vektor $\bar{V}_c$ hat die absolute Grösse

[5]) Zeitliche Vektoren werden im folgenden im Gegensatz zu den auf Seite 494 eingeführten räumlichen Vektoren mit einem horizontalen Strich – bezeichnet, z. B. $\bar{\vartheta}$.

$V_c = \frac{2\,Q\,s}{\lambda\,N}\,e^{-S}\sqrt{S^2 + (S - sh)^2}$ und läuft dem Vektor $\bar{q}$ um den Winkel

$\varphi_c = \pi - \left(S - \operatorname{arctg}\frac{S}{S - sh}\right)$ nach.

Gleichung (19) zeigt, dass der nur von der Umgebungstemperatur abhängige Vektor $\bar{\vartheta}_{\vartheta a}$ sich aus vier Teilvektoren *I*, *II*, *III*, *IV* zusammensetzt[6]), deren absolute Beträge, sowie die Winkel, um die sie gegen den Vektor $\bar{\vartheta}_u$ verschoben sind, aus Gleichung (19) abgelesen werden können. Die Vektoren $\bar{\vartheta}_{qa}$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta a}$ sind in Fig. 1 zum resultierenden Vektor $\bar{\vartheta}_a$ zusammengesetzt, der den variablen Teil der Aussenwandtemperatur darstellt. Die abgegebene Wärmemenge

$$\bar{q}_a = \alpha\,(\bar{\vartheta}_a - \bar{\vartheta}_u)$$

ist ebenfalls periodisch veränderlich und gegeben durch den Vektor $\frac{\bar{q}_a}{\alpha}$ der dritten Seite in dem von $\bar{\vartheta}_a$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta u}$ gebildeten Dreieck.

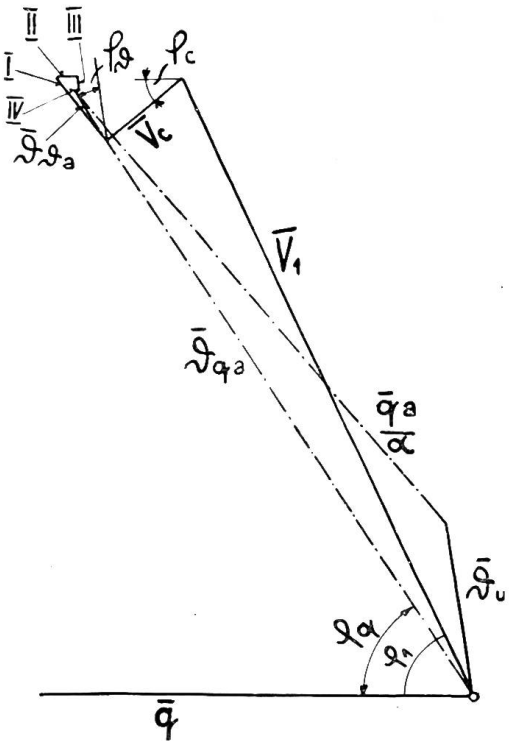

Fig. 1.

Obschon Fig. 1 masstäblich für extreme Verhältnisse, nämlich $Q = 10$ Watt/dm² und $\Theta_u = 5\,^0$ C gezeichnet ist, zeigt sich, dass der Einfluss der Umgebungstemperatur auf die Aussenwandtemperatur klein ist gegenüber demjenigen der Heizung. Die folgenden Untersuchungen beschränken sich daher auf den Fall $\vartheta_u = 0$, d. h. konstante Umgebungstemperatur. Dann ist die an der Aussenwand abgegebene Wärmemenge proportional der Aussenwandtemperatur ϑ_{qa}.

Der Vektor $\bar{V}_1$ ist stets grösser als der Vektor $\bar{V}_c$. Er ist daher der Hauptvektor und $\bar{V}_c$ der Korrektionsvektor. Dieser kann bei grossem S vernachlässigt werden und man erhält dann die Aussenwandtemperatur angenähert:

$$\vartheta_a = \frac{2\,Q\,s}{\lambda\,e^S\sqrt{S^2 + (S + sh)^2}}\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \left(S + \operatorname{arctg}\frac{S}{S + sh}\right)\right).$$

Um den Einfluss der Materialkonstanten, der Wandstärke und der Periodendauer auf Grösse und Phase der Aussenwandtemperatur zu untersuchen, dividieren wir Zähler und Nenner von Gleichung (18) durch S^2 und schreiben zur Abkürzung:

$$\frac{sh}{S} = a\sqrt{\frac{T}{\pi\,\gamma\,e\,\pi}} = k\,, \tag{22}$$

dann wird:

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{qa} = \frac{Q}{a}\,\frac{2k}{N_*}\Bigg\{ & e^S\sqrt{1 + (1 + k)^2}\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \left(S + \operatorname{arctg}\frac{1}{1 + k}\right)\right) \\ & - e^{-S}\sqrt{1 + (1 - k)^2}\,\sin\left(\frac{2\,\pi\,t}{T} + \left(S - \operatorname{arctg}\frac{1}{1 - k}\right)\right)\Bigg\} = \frac{Q}{a}\,\bar{\vartheta}_{qa1}\,,\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

[6]) Da $\bar{\vartheta}_{qa}$ und $\bar{\vartheta}_{\vartheta a}$ zufälligerweise fast genau in dieselbe Richtung fallen, tritt der Vektor $\bar{\vartheta}_a$ in Fig. 1 nicht deutlich hervor.

worin:

$$N_* = \frac{N}{S^2} = (1 + (1+k)^2)\, e^{2S} + (1 + (1-k)^2)\, e^{-2S} - 2\,(2 - k^2) \cos 2S - 4k \sin 2S\,. \tag{24}$$

$\frac{Q}{a}$ hat die Dimension einer Temperatur. $\overline{\vartheta}_{qa1}$ ist ein dimensionsloser Vektor, der nur von den zwei Grössen k und S abhängig ist.

Bei der Zusammensetzung der beiden Vektoren $\overline{V}_1$ und $\overline{V}_c$ zu $\overline{\vartheta}_{qa1}$ ist das Vorzeichen von $\overline{V}_c$ zu berücksichtigen. Die Wurzel im zweiten Glied von Gleichung (23) kann nämlich positiv oder negativ sein, je nachdem $k \gtrless 1$. Bezüglich der um den Winkel S dem Heizvektor $\overline{q}$ vorlaufenden Axe liegt der Vektor $\overline{V}_c$ im zweiten Quadranten, wenn $k < 1$, d. h. $\frac{1}{1-k}$ positiv ist. Ist $k = 1$, so ist $\frac{1}{1-k} = \infty$ und $\operatorname{arctg} \frac{1}{1-k} = \frac{\pi}{2}$, der Korrektionsvektor steht senkrecht auf der dem Heizvektor $\overline{q}$ um den Winkel S vorlaufenden Axe. Wird schliesslich $k > 1$, d. h. $\frac{1}{1-k}$ negativ, so liegt der Korrektionsvektor gegenüber der um S gegen den Heizvektor $\overline{q}$ gedrehten Axe im ersten Quadranten. Die Richtigkeit dieser Ueberlegung ergibt sich, wenn man $\overline{V}_c$ in die Vektoren $\overline{V}_{cs} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + S\right)$ und $\overline{V}_{cc} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + S\right)$ zerlegt.

Von den zwei Grössen, die in Gleichung (23) auftreten, ist k nur von den Materialkonstanten und der Periodendauer abhängig. S ist der Wandstärke s proportional. Für ein bestimmtes Material und gegebene Periodendauer ist k konstant und Gleichung (23) ergibt $\overline{\vartheta}_{qa1}$ in Abhängigkeit von der Wandstärke.

Fig. 2 zeigt den Vektor $\overline{\vartheta}_{qa1}$ als Funktion von S für verschiedene k als Parameter und zwar über der Abszissenaxe den absoluten Wert Θ, unter der Abszissenaxe die Phasenverschiebung φ gegenüber dem Heizvektor $\overline{q}$. Θ nimmt mit steigendem S ab. Bei einer bestimmten Heizleistung ist daher die Differenz zwischen höchster und tiefster Temperatur um so geringer, je dicker die Platte ist. Da S ferner der Wurzel aus der Periodendauer T umgekehrt proportional ist, so wird Θ um so kleiner, je kürzer die Periodendauer. Ist die periodisch veränderliche Heizleistung durch eine Fouriersche Reihe gegeben, so wird das Verhältnis $\frac{\Theta}{Q}$ für die Glieder höherer Ordnung stets kleiner, d. h. die Fouriersche Reihe, welche die Aussenwandtemperatur darstellt, konvergiert besser als diejenige der Heizleistung. Endlich wächst auch die Phasenverschiebung zwischen Aussenwandtemperaturvektor und Heizvektor, d. h. mit zunehmendem S verschiebt sich die Wärmeabgabe gegenüber der Stromzufuhr um so mehr, je grösser S ist.

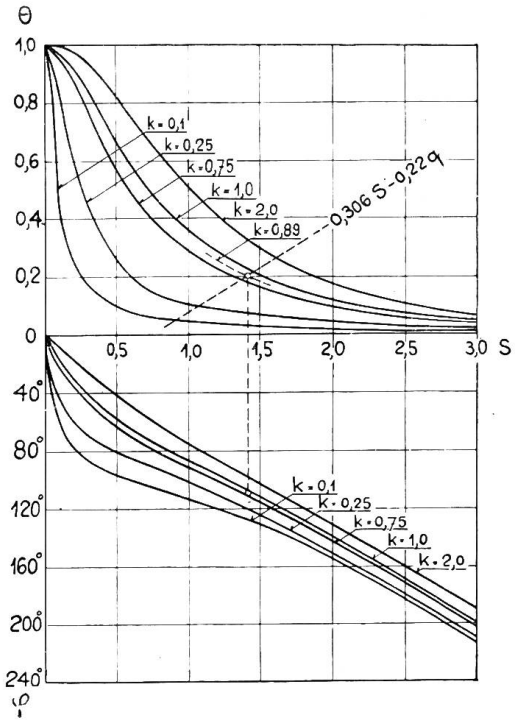

Fig. 2.

Da S ausser von der Wandstärke auch von den Materialkonstanten abhängt und die Wirkungsweise des Speichers im wesentlichen bestimmt, kann S als die charakteristische Grösse der plattenförmigen Wärmespeicher angesprochen werden. Auswahl des Materials und Konstruktion des Speichers müssen ein möglichst grosses S anstreben.

Die Aussenwandtemperatur für eine gegebene Strombezugszeit.

Wird der Speicher täglich ($T = 24$ Std.) während T_s Stunden mit der konstanten Leistung Q_s Watt/dm² geheizt, so ist zur Berechnung der Aussenwandtemperatur vorerst das Strombezugsdiagramm Fig. 3 harmonisch zu analysieren, d. h. in Form einer Fourierschen Reihe darzustellen. Dabei ergibt sich zunächst ein konstantes Glied:

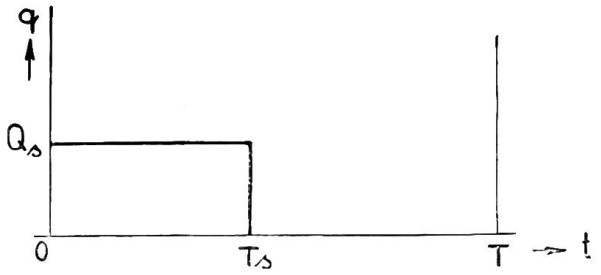

Fig. 3.

$$q_k = \frac{Q_s T_s}{T} .$$

Den Koeffizienten a_n des $n$ten Sinusgliedes erhält man in bekannter Weise (siehe z. B. „Hütte", 23. Aufl., pag. 125):

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T Q_s \sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt = \frac{2Q_s}{T}\int_0^{T_s} \sin\frac{2\pi nt}{T}\,dt + 0 = \frac{Q_s}{\pi n}\left(1 - \cos\frac{2\pi nT_s}{T}\right)$$

und analog den Koeffizienten b_n des $n$ten Cosinusgliedes:

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T Q_s \cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt = \frac{2Q_s}{T}\int_0^{T_s} \cos\frac{2\pi nt}{T}\,dt + 0 = \frac{Q_s}{\pi n}\sin\frac{2\pi n T_s}{T} .$$

Sinus- und Cosinusglied können zu einem resultierenden Sinusglied mit dem Koeffizienten c_n und der Phasenverschiebung φ_{qn} zusammengesetzt werden und es ist:

$$c_n = \frac{Q_s}{\pi n}\sqrt{\left(1 - \frac{\cos 2\pi nT_s}{T}\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi nT_s}{T}\right)^2} = \frac{2Q_s}{\pi n}\sin\frac{\pi nT_s}{T}$$

und:
$$\operatorname{tg}\varphi_{qn} = \frac{\sin\frac{2\pi nT_s}{T}}{1 - \cos\frac{2\pi nT_s}{T}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi n T_s}{T}} = \cot\frac{\pi n T_s}{T} ,$$

somit:
$$\varphi_{qn} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi n T_s}{T} .$$

Das Strombezugsdiagramm Fig. 3 für eine konstante Heizleistung Q_s während T_s Stunden innerhalb der Periodendauer von T Stunden kann also analytisch dargestellt werden durch die Fouriersche Reihe:

$$q = \frac{Q_s T_s}{T} + \frac{2Q_s}{\pi}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi T_s}{T}\sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi n T_s}{T}\right) . \qquad (25)$$

Um nun den aus diesen Strombezugsbedingungen resultierenden zeitlichen Verlauf der Oberflächentemperatur zu berechnen, bestimmt man zu jedem Glied der Glei-

chung (25) den zugehörigen Vektor $\overline{\vartheta}_{qa1}$. Hierfür benutzt man die Kurvenschar der Fig. 2. Zunächst berechnet man k nach Gleichung (22) und S nach Gleichung (11). Für das $n$te Glied ist dann:

$$k_n = \frac{k}{\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad S_n = S\sqrt{n}\,.$$

Nun kann man in Fig. 2 auf den zu den Abszissen S_n gehörenden Ordinaten den absoluten Betrag Θ_n und die Phasenverschiebung φ_n auf den zu den Parametern k_n (eventuell interpoliert) gehörenden Kurven abgreifen. Damit sind die Glieder der Fourierschen Reihe, die den variablen Teil der Aussenwandtemperatur darstellt, bestimmt. Die einzelnen Glieder sind jedoch noch auf den gleichen Anfangspunkt zu beziehen. Zu diesem Zweck ist das Argument um den Phasenverschiebungswinkel φ_{qn} des betreffenden Gliedes der Reihe für q zu vermehren. Man erhält somit unter Berücksichtigung von Gleichung (25):

$$\vartheta_{qa} = \frac{2Q_s}{\pi a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n T_s}{T}\,\Theta_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T} + \frac{\pi}{2} - \frac{n\pi T_s}{T} - \varphi_{qn}\right). \tag{26}$$

Theoretisch sind zur Berechnung der Aussenwandtemperatur unendlich viele Glieder nötig. Da jedoch, wie erwähnt, die Konvergenz von Gleichung (26) besser ist als von Gleichung (25), so genügen bei den üblichen Strombezugszeiten schon einige wenige Glieder. In dem nachfolgenden Zahlenbeispiel mussten allerdings für einstündige Strombezugszeit ($T_s = 1$ Std.) 15 Glieder berücksichtigt werden, um eine genügend genaue ϑ_{qa}-Kurve zu erhalten.

Dem variablen Teil ϑ_{qa} überlagert sich nun noch die konstante Mitteltemperatur ϑ_{am}, die wir nach Gleichung (6) finden zu:

$$\vartheta_{am} = \vartheta_{uk} + \frac{q_k}{a} = \vartheta_{uk} + \frac{Q_s T_s}{a\,T}\,. \tag{27}$$

1. Zahlenbeispiel. Zur Erläuterung dieser Untersuchung haben wir für die gleiche Platte, deren Anheizvorgang Herr Zangger im eingangs erwähnten Aufsatz untersucht hat, den periodischen Verlauf der Aussenwandtemperatur für verschiedene Strombezugszeiten berechnet. Um die Leistung in Watt einführen zu können, sind auch die Materialkonstanten so festgesetzt, dass die Wärmemengen in Wattstunden (Wh) erscheinen. Die Platte ist $s = 1$ dm dick und besteht aus Speckstein mit einem spez. Gewicht $\gamma = 2{,}9$ kg/dm², einer spez. Wärme $c = 0{,}29$ Wh/kg ⁰C und einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}29$ W/dm ⁰C. Damit ergibt sich eine Temperaturleitfähigkeit:

$$a = \frac{0{,}29}{0{,}29 \cdot 2{,}9} = 0{,}345 \text{ dm}^2/\text{h}\,.$$

Der Wärmeübergangskoeffizient der Oberfläche beträgt $\alpha = 0{,}134$ W/dm² ⁰C. Die Innenwand der Platte wird mit einer spezifischen Leistung $Q_s = 17{,}4$ W/dm² geheizt. Für eine Periodendauer von einem Tag, d. h. $T = 24$ Std. ist:

$$S = 1\sqrt{\frac{\pi}{0{,}345 \cdot 24}} \doteq 0{,}618 \quad \text{und} \quad k = 0{,}134\sqrt{\frac{24}{2{,}9 \cdot 0{,}29 \cdot 0{,}29}} = 0{,}75\,.$$

Der in der angegebenen Weise mit diesen Zahlen berechnete Temperaturverlauf ist in den Fig. 4 ÷ 6 für verschiedene Strombezugszeiten aufgetragen. Diese Kurven geben die Differenz zwischen Wand- und Umgebungstemperatur in ⁰C (Masstab links) und gleichzeitig, da die Umgebungstemperatur als konstant vorausgesetzt ist, die pro dm² Oberfläche abgegebene Wärmemenge in W/dm² (Masstab rechts).

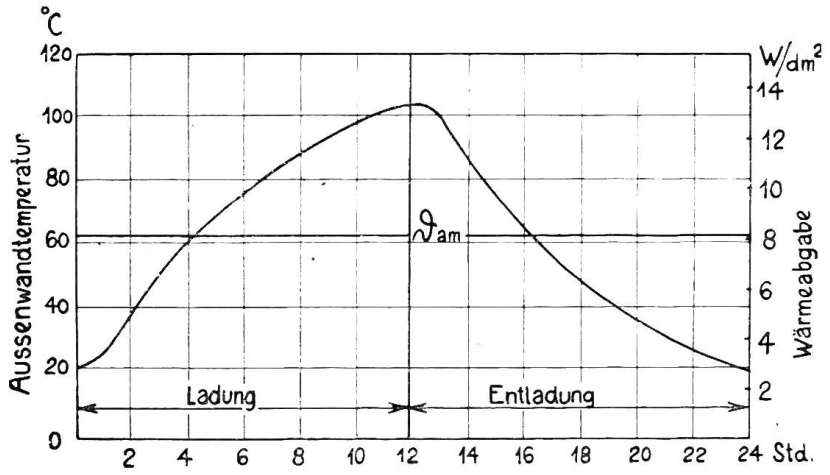

Fig. 4.

Fig. 4 gilt für 12stündige Strombezugszeit $T_s = 12$ Std. pro Tag. Da hierfür das Strombezugsdiagramm aus zwei spiegelbildlich symmetrischen Hälften besteht,

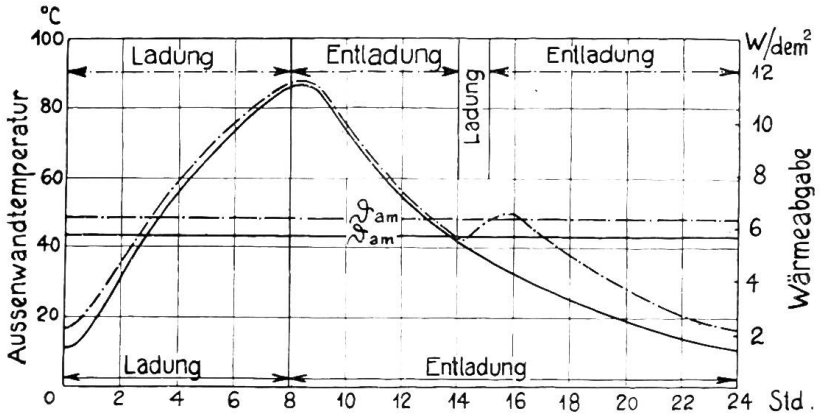

Fig. 5.

enthält die Fouriersche Reihe nur Sinusglieder ungerader Ordnung. Daher erhält man auch für die Reihe der Aussenwandtemperatur nur Sinusglieder ungerader

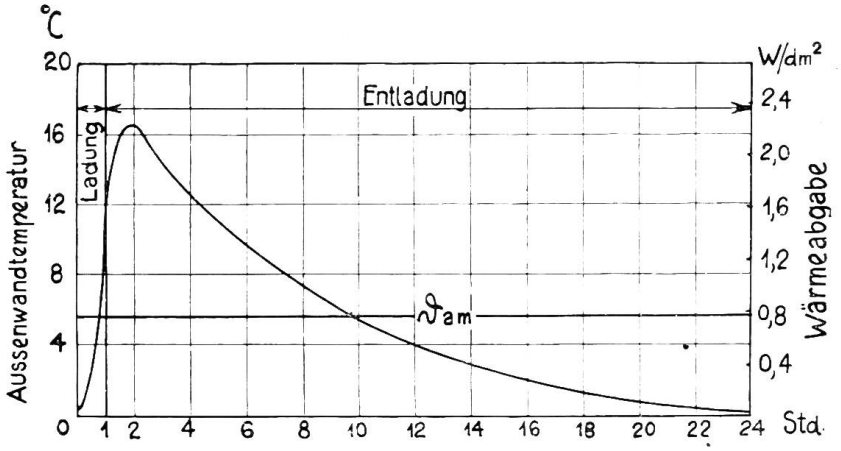

Fig. 6.

Ordnung, d. h. auch diese Kurve besteht aus zwei spiegelbildlich symmetrischen Hälften. Fig. 5 gibt den Temperaturverlauf für 8stündige Strombezugszeit $T_s = 8$ Std.

(ausgezogene Kurve) und Fig. 6 für 1 stündige Strombezugszeit $T_s = 1$ Std. Endlich sind in Fig. 5 (strichpunktierte Kurve) die Kurven für $T_s = 8$ Std. und $T_s = 1$ Std. zusammengelegt, jedoch so, dass der Beginn der beiden Strombezugszeiten 210 Winkelgrad = 14 Std. auseinanderliegt. Dieser Fall entspricht also dem praktisch wichtigen, dass der Strom für die Heizung während 8 Nachtstunden, z. B. von 22 bis 6 Uhr und einer Mittagsstunde, z. B. von 12 bis 13 Uhr zur Verfügung steht. Diese Kurve zeigt, wie wertvoll gerade dieser Mittagsstrom für den Betrieb von Speicheröfen ist, weil die von ihm erzeugte Wärme die Heizung am Nachmittag sehr wesentlich verbessert. Spezialtarife für Heizzwecke sollten, wenn immer möglich, den Bezug von Mittagsstrom erlauben.

Endlich zeigen die berechneten Kurven deutlich, dass die Aussenwandtemperatur und damit die Wärmeabgabe noch eine Zeitlang zunimmt, wenn der Strom bereits ausgeschaltet ist, eine Erscheinung, die bei jedem guten Speicherofen beobachtet werden kann.

Die Innenwandtemperatur.

Der von der Heizleistung herrührende variable Teil der Innenwandtemperatur gemäss Gleichung (20) kann durch einen Vektor $\bar{\vartheta}_{qi}$ dargestellt werden, der sich aus zwei Vektoren zusammensetzt, von denen der eine $\bar{\vartheta}_{qi1}$ dem Vektor der Heizleistung um $\frac{\pi}{4}$, der andere $\bar{\vartheta}_{qi2}$ um $\frac{3\pi}{4}$ nachläuft. Setzen wir den Vektor $\bar{\vartheta}_{qi1}$ mit dem absoluten Wert Θ_1:

$$\Theta_1 = e^{2S}(S^2 + (S + sh)^2) - e^{-2S}(S^2 + (S - sh)^2)$$

und den Vektor $\bar{\vartheta}_{qi2}$ mit dem absoluten Wert Θ_2:

$$\Theta_2 = \sqrt{4S^4 + (sh)^4}\,\sin\left(2S - \operatorname{arctg}\frac{2\,S\,sh}{2S^2 - (sh)^2}\right)$$

graphisch durch das rechtwinklige Dreieck Fig. 7 oder analytisch zusammen, so erhalten wir den Vektor $\bar{\vartheta}_{qi}$; dessen absoluter Wert Θ_i beträgt:

$$\Theta_i = \frac{Q\,s}{\sqrt{2}\,\lambda\,S\,N}\sqrt{\Theta_1^2 + \Theta_2^2}$$

und dessen Phase gegenüber dem Vektor $\bar{q}$ der Heizleistung um den Winkel φ_i verschoben ist:

$$\varphi_i = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\,.$$

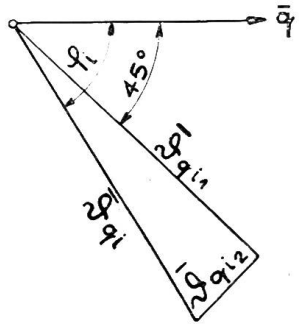

Fig. 7.

Setzt man S nach Gleichung (10) ein, so geht Gleichung (20) über in:

$$\vartheta_{qi} = Q\sqrt{\frac{T}{2\pi\gamma\lambda c}}\,\frac{\Theta_i}{N}\left(\sin\frac{2\pi t}{T} - \left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{\Theta_2}{\Theta_1}\right)\right). \tag{28}$$

Für grosse Werte von S kann sowohl e^{-2S} wie Θ_2 gegenüber e^{2S} vernachlässigt werden und man erhält angenähert:

$$\vartheta_{qi} \sim Q\sqrt{\frac{T}{2\pi\lambda\gamma c}}\left(\sin\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{4}\right). \tag{28a}$$

Der Wert $\frac{\Theta_i}{N}$ hat also den Charakter eines Korrektionsfaktors und der Winkel $\operatorname{arctg}\frac{\Theta_2}{\Theta_1}$, der sich mit zunehmendem S Null nähert, eines Korrektionswinkels der Näherungsgleichung (28a).

Der Einfluss der Umgebungstemperatur auf die Innenwandtemperatur nach Gleichung (21) ist so gering, dass er nicht weiter untersucht werden soll.

Der zeitliche Verlauf der Innenwandtemperatur für ein bestimmtes periodisches Strombezugsdiagramm kann nun wieder ähnlich wie für die Aussenwandtemperatur gefunden werden, indem man das Strombezugsdiagramm als Fouriersche Reihe darstellt und zu jedem Glied mit Gleichung (28) Koeffizient und Phase des zugehörigen Gliedes der Innenwandtemperatur bestimmt und schliesslich die Glieder zusammensetzt.

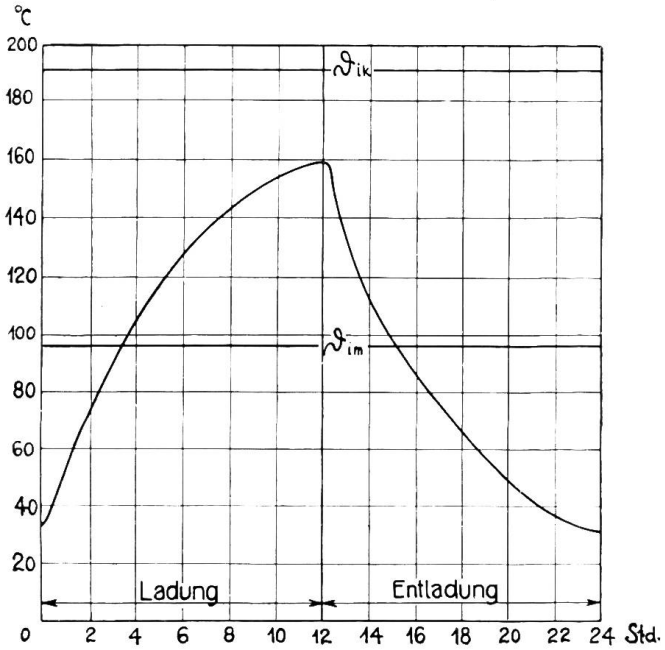

Fig. 8.

Zu dem variablen kommt noch der konstante Teil der Innenwandtemperatur, für den wir mit Gleichung (7) erhalten:

$$\vartheta_{im} = Q_s \frac{T_s}{T}\left(\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\right). \qquad (29)$$

Fig. 8 zeigt den Verlauf der Innenwandtemperatur in der in obigem Zahlenbeispiel beschriebenen Platte für eine Strombezugszeit $T_s = 12$ Std.

Würde die Platte dauernd mit der Leistung Q_s geheizt, so würde sich an der Innenwand die Temperatur nach langer Zeit der Endtemperatur ϑ_{ik} nähern.

$$\vartheta_{ik} = Q_s\left(\frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}\right). \qquad (30)$$

ϑ_{ik} ist in Fig. 8 ebenfalls eingetragen. Beim periodischen Betrieb erreicht die Höchsttemperatur etwa 85 % davon.

Entwurf von Wärmespeichern.

Die bisherigen Berechnungen zeigen, wie man den zeitlichen Verlauf der Wärmeabgabe und der Innenwandtemperatur angeben kann, wenn die Abmessungen der Speicherplatte gegeben sind. Soll jedoch ein Wärmespeicher für bestimmte Verhältnisse entworfen werden, so ist durch Rechnung festzustellen, wie dick die Platte gewählt werden soll und wie stark sie pro Flächeneinheit geheizt werden darf.

Da die Fouriersche Reihe für die üblichen Strombezugszeiten von 8—12 Stunden pro Tag konvergent ist, und das Verhältnis zwischen den Amplituden der Heizleistung und der Aussenwandtemperatur für höhere Glieder stets kleiner wird, überwiegt in der Fourierschen Reihe für die Aussenwandtemperatur die erste Harmonische die übrigen bedeutend. So beträgt z. B. der Unterschied zwischen höchster und tiefster Aussentemperatur für die im 1. Zahlenbeispiel berechnete Platte bei 12-stündiger Strombezugszeit nur 9 % und bei 8-stündiger Strombezugszeit 19 % mehr als die doppelte Amplitude der ersten Harmonischen.

Es genügt daher für den ersten Entwurf nur die erste Harmonische zu berücksichtigen. Man kann mit den gefundenen Plattendimensionen eine genaue Berechnung

des Temperaturverlaufes durchführen, um dann auf Grund des Ergebnisses die gefundenen Daten, soweit nötig, zu ändern.

Als Voraussetzung der Berechnung wird festgesetzt, dass:

1. die höchste Aussenwandtemperatur $\vartheta_{a\,max}$ den durch hygienische Anforderungen gegebenen Höchstwert von ca. $100-120^0$ C nicht überschreite;
2. die Innenwandtemperatur $\vartheta_{i\,max}$ selbst bei dauernder Belastung nicht höher werde, als für die Haltbarkeit der Heizwiderstände zulässig ist.

Die zulässige Höchsttemperatur $\vartheta_{i\,max}$ hängt wesentlich vom Material und der Konstruktion der Heizwiderstände ab, die hier nicht erörtert werden sollen. Das Generalsekretariat des S. E. V. hat hiefür in dieser Zeitschrift (Bulletin 1918, Seite 125) $400-600^0$ C angegeben.

Die höchste Aussenwandtemperatur ist die Summe aus der Mitteltemperatur ϑ_{am} und der halben Differenz $\Delta\,\vartheta$ aus der höchsten und tiefsten Temperatur. Nach obigem darf die Amplitude der ersten Harmonischen betragen:

$$\vartheta_{qa} = \frac{\Delta\,\vartheta}{2}\,\eta\,,$$

worin $\eta = 0{,}8-0{,}9$ beträgt, je nach der Strombezugszeit. Ist $T_s < \frac{T}{2}$ so stellt allerdings die Mitteltemperatur ϑ_{am}, wie die Fig. 5 und 6 zeigen, nicht das arithmetische Mittel zwischen höchster und tiefster Temperatur dar. Bei der Entwurfsberechnung, die nur die erste Harmonische berücksichtigt, braucht jedoch hierauf nicht Rücksicht genommen zu werden.

Ist Q_s die gesuchte Belastung pro Flächeneinheit für die gegebene Strombezugszeit T_s innerhalb der Periode T, so erhält man mit den Gleichungen (26) und (27) die höchste Aussenwandtemperatur $\vartheta_{a\,max}$:

$$\vartheta_{a\,max} = \vartheta_{am} + \frac{\Delta\,\vartheta}{2} = \vartheta_{uk} + \frac{Q_s}{\alpha}\left(\frac{T_s}{T} + \frac{2}{\pi\,\eta}\,\Theta \sin\frac{\pi\,T_s}{T}\right). \tag{31}$$

In dieser Gleichung ist Θ eine durch die Gleichung (23) resp. die Kurvenschar Fig. 2 gegebene Funktion von k und S. k ist eine durch die Konstanten des Materials gemäss Gleichung (22) gegebene Grösse. S ist ausserdem von der gesuchten Plattenstärke abhängig.

Die maximale Innenwandtemperatur $\vartheta_{i\,max}$ bei Dauerbelastung erhält man, indem man in Gleichung (30) s aus Gleichung (11) substituiert unter Berücksichtigung von Gleichung (22) ebenfalls als Funktion von k und S.

$$\vartheta_{i\,max} = \vartheta_{uk} + Q_s\left[\frac{S}{\lambda\sqrt{\frac{\pi}{a\,T}}} + \frac{1}{\alpha}\right] = \vartheta_{uk} + \frac{Q_s}{\alpha}\,(k\,S+1)\,. \tag{32}$$

Aus den Gleichungen (31) und (32) kann man durch Division $\frac{Q_s}{\alpha}$ eliminieren und erhält:

$$\Theta = \frac{\pi\,\eta}{2\sin\frac{T_s\,\pi}{T}}\left[\frac{\vartheta_{a\,max} - \vartheta_{uk}}{\vartheta_{i\,max} - \vartheta_{uk}}\,(k\,S+1) - \frac{T_s}{T}\right]. \tag{33}$$

Aus dieser Gleichung sind die unbekannten Grössen Θ und S mit Hilfe von Fig. 2 zu bestimmen. Die linke Seite wird als Funktion von S durch die zu dem bekannten k gehörende Kurve ausgedrückt. Die rechte Seite dagegen kann durch eine Gerade

als Funktion von S dargestellt werden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der zu k gehörenden Kurve hat die Ordinate S aus der sich die Plattenstärke s:

$$s = S \sqrt{\frac{a\,T}{\pi}} \tag{34}$$

und die Ordinate Θ, aus der sich die Amplitude ϑ_{qa} der ersten Harmonischen berechnen lassen.

$$\vartheta_{qa} = \frac{2\,Q_s}{\pi\,a}\,\Theta \sin \frac{\pi\,T_s}{T}\,. \tag{35}$$

Mit S erhalten wir ferner die Heizflächenbelastung Q_s durch Gleichung (32):

$$Q_s = \frac{a\,(\vartheta_{i\,max} - \vartheta_{uk})}{(k\,S + 1)}\,. \tag{36}$$

Auf der gleichen Ordinate unterhalb der Abszissenaxe finden wir in Fig. 2 auf der zum Parameter k gehörenden φ-Kurve den Winkel φ, um den der Vektor der Aussenwandtemperatur dem Heizvektor nacheilt. Die Funktion des festen Wärmespeichers besteht im Gegensatz zu andern Wärmespeichersystemen (Dampf- oder Flüssigkeitsspeicher) nicht darin, eine bestimmte Wärmemenge aufzunehmen und zu beliebiger Zeit wieder abzugeben. Vielmehr erfolgt die Wärmeabgabe um eine bestimmte, durch die Konstruktion des Speichers gegebene Zeit T_a später als der Strombezug. Die Verzögerungszeit T_a ist im Wesentlichen gegeben durch den Winkel φ um den die erste Harmonische der Aussenwandtemperatur dem Heizvektor nacheilt.

$$T_a = T \frac{\varphi}{360^0}\,. \tag{37}$$

Der Winkel φ ist daher diejenige Grösse, welche die Wirkungsweise des Speicherofens im Wesentlichen charakterisiert. Er ist von der Belastung der Heizfläche unabhängig und durch die Wandstärke sowie die Materialkonstanten bestimmt und beträgt nach Gleichung (23) im Winkelmass angenähert:

$$\varphi = \frac{S}{2\,\pi}\,360^0 + \operatorname{arctg} \frac{1}{1 + k}\,. \tag{38}$$

2. *Zahlenbeispiel.* Zur Erläuterung soll für eine Strombezugszeit von $T_s = 9$ Std. täglich ein Wärmespeicher berechnet werden, dessen Material (z. B. Basalt) folgende Materialkonstanten habe:

spez. Gewicht $\gamma = 3$ kg/dm³; Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}25$ W/dm ^{0} C;
spez. Wärme $c = 0{,}23$ Wh/kg ^{0} C,

womit sich eine Temperaturleitfähigkeit a ergibt.

$$a = \frac{0{,}25}{3 \cdot 0{,}23} = 0{,}362 \text{ dm}^2/\text{h}\,.$$

Die Wärmeübergangszahl der Oberfläche α sei:

$$\alpha = 0{,}134 \text{ W/dm}^2\,{}^0\text{C}\,.$$

Damit erhalten wir:

$$k = 0{,}134 \sqrt{\frac{24}{3 \cdot 0{,}23 \cdot 0{,}25}} = 0{,}89\,.$$

Bei einer konstanten Raumtemperatur von 15° C soll die höchste Aussenwandtemperatur 105° C nicht überschreiten. Für die Innenwandtemperatur werde bei Dauerbelastung 415° C zugelassen. Mit:

$$\sin\frac{\pi T_s}{T} = \sin\left(\frac{\pi 9}{24} = 67^0 30'\right) = 0{,}924$$

wird Gleichung (33):

$$\Theta = \frac{\pi \cdot 0{,}9}{2 \cdot 0{,}924}\left(\frac{90}{400}(0{,}89\,S + 1) - \frac{9}{24}\right).$$

Die Gerade $\Theta = 0{,}306\,S - 0{,}229$ ist in Fig. 2 eingetragen. Ihr Schnittpunkt mit der Θ-Kurve für $k = 0{,}89$, zwischen den Kurven für $k = 0{,}75$ und $k = 1{,}0$ interpoliert, hat die Abszisse $S = 1{,}41$ und die Ordinate $\Theta = 0{,}20$.

Damit erhält man die Wandstärke s:

$$s = 1{,}41\sqrt{\frac{0{,}362 \cdot 24}{\pi}} = 2{,}34 \text{ dm}$$

und die Heizflächenbelastung Q_s:

$$Q_s = \frac{0{,}134 \cdot 400}{0{,}89 \cdot 1{,}41 + 1} = 23{,}8 \text{ W/dm}^2.$$

Die Differenz zwischen höchster und tiefster Aussenwandtemperatur ergibt sich angenähert zu:

$$\Delta\vartheta = \frac{4 \cdot 23{,}8 \cdot 0{,}924 \cdot 0{,}2}{\pi \cdot 0{,}134 \cdot 0{,}9} = 46^0 \text{ C},$$

während die mittlere Temperaturdifferenz zwischen Aussenwand- und Raumtemperatur ϑ_{am} beträgt:

$$\vartheta_{am} = \frac{23{,}8}{0{,}134}\,\frac{9}{0{,}134} = 67^0 \text{ C}.$$

Die Aussenwandtemperatur variiert also zwischen:

$$15 + 67 \pm \frac{46}{2} = 105^0 \text{ und } 59^0 \text{ C}.$$

Die Phasenverschiebung kann der Fig. 2 entnommen werden zu $\varphi = 116^0$. Die Wärmeabgabe ist somit gegenüber dem Strombezug um T_a Std. verzögert:

$$T_a = 24\,\frac{116}{360} = 7{,}7 \text{ Std.}$$

Mit Q_s und s sind die Abmessungen des Ofens bestimmt. Soll er einen Raum heizen, dessen Wärmeverluste W (Watt) betragen, so ist die erforderliche Heizfläche H_{fl}:

$$H_{fl} = \frac{W\,T}{Q_s\,T_s} \text{ dm}^2 \tag{39}$$

und das Speichervolumen Vol:

$$Vol = s\,H_{fl} = \frac{W\,s\,T}{Q_s\,T_s}. \tag{40}$$

Ein Teil des Speichervolumens wird allerdings als „Plattenrand“ anzusprechen sein, d. h. der Wärmefluss wird daselbst nicht senkrecht zu der Oberfläche verlaufen und daher die gegebene Berechnung dafür nur teilweise zutreffen. Es ist jedoch Aufgabe des Konstrukteurs, tote Winkel nach Möglichkeit zu vermeiden. Zu diesem Zwecke ist der Ofen so auszubilden, dass der Wärmestrom überall möglichst senkrecht zur Heizfläche austritt; dann wird das nach Gleichung (40) berechnete Speichervolumen genügen.

Schliesslich soll noch einmal darauf hingewiesen werden, dass alle Berechnungen auf der Annahme beruhen, die Materialkonstanten seien von der Temperatur unabhängig. Das trifft jedoch nicht zu; namentlich die Leitfähigkeit ist für viele Speichermaterialien von der Temperatur ziemlich stark abhängig. Man muss daher mit Mittelwerten rechnen. Die Abhängigkeit der Materialkonstanten von der Temperatur in der Rechnung zu berücksichtigen, würde wohl sehr weit führen und kaum befriedigend gelingen, weil nur einfache Ansätze in Betracht kommen können, die der Wirklichkeit doch nur teilweise entsprechen. Wenn das Bedürfnis nach weiterer Erkenntnis besteht, so wird wohl nur der Laboratoriumsversuch genügend Aufschluss geben, wobei festzustellen wäre, wie weit die tatsächlich erreichten Temperaturen von den mit Mittelwerten für die Materialkonstanten berechneten abweichen. Bei diesen Versuchen müssten die unserer Berechnung zugrunde liegende Annahme periodischen Wärmeflusses verwirklicht werden, d. h. der Ofen mehrere Tage nacheinander geheizt und der Wärmeabgabe überlassen werden, um jede Unsicherheit über den Anfangszustand der Temperaturverteilung auszuschliessen.

Eigenschaften und Anwendung des Quarzilit-Widerstandsmaterials.

Von der *A.-G. Kummler & Matter*, Aarau.

In diesem Aufsatz werden die physikalischen Eigenschaften der aus Quarz und Kohle hergestellten Quarzilitwiderstände besprochen und daraus Schlüsse auf die Anwendungsmöglichkeit desselben gezogen.

Dans cet article on indique les propriétes physiques des résistances en quartz-silit, fabriquées au moyen de quartz et de charbon, puis on en tire des conclusions relatives aux applications possibles de ces résistances.

Im folgenden werden die physikalischen Eigenschaften desjenigen Quarzilitmaterials einer kurzen Betrachtung unterzogen, welches im Bulletin des S. E. V., Jahrgang 1922, Heft 7, als zur zweiten Gruppe gehörend bezeichnet wurde, nämlich zur Gruppe der Widerstandsmaterialien aus Metalloiden, Metallkarbiden und Kohlenstoff für niedrige Temperaturen.

Der Apparatebau stellt das hauptsächlichste Anwendungsgebiet desselben dar. Es hat sich namentlich dadurch Eingang in denselben verschafft, weil es einen Widerstand von fast beliebigem Ohmwert auf einen möglichst kleinen Raum zu konzentrieren vermag. Quarzilitwiderstände können bei denselben Abmessungen nur Bruchteile eines Ohm bis zu mehreren Millionen Ohm aufweisen. Der Widerstand ist bei den gebräuchlichen Stromfrequenzen induktionslos. Diesen Umständen ist es zuzuschreiben, dass Quarzilit-Widerstände immer weitere Verbreitung finden, namentlich auf dem Gebiete des Ueberspannungsschutzes: als Dämpfungswiderstände, als Schutzwiderstände für Stromwandler und Relais gegen Sprungwellen mit steiler Front, als Antennenwiderstände bei Radioempfangsanlagen, in der (gewöhnlichen) Telegraphie usw.

Es erscheint uns deshalb angebracht, die wichtigsten Eigenschaften des Materials kurz zu beschreiben. Es soll dies in folgender Reihenfolge geschehen:

1. das spezifische Gewicht des Materials;
2. die spezifische Wärme;