

<b>Zeitschrift:</b>	Bulletin de l'Association suisse des électriciens
<b>Herausgeber:</b>	Association suisse des électriciens
<b>Band:</b>	15 (1924)
<b>Heft:</b>	7
<b>Artikel:</b>	Mathematische Theorien für den Durchschlag fester Isoliermaterialien
<b>Autor:</b>	Dreyfus, L.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-1057076">https://doi.org/10.5169/seals-1057076</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die beschriebenen Versuche werden nach Vornahme einiger weniger umfangreicher Ergänzungsversuche gute Anhaltspunkte für die Aufstellung der neuen Vorschriften und für die Bemessung der am häufigsten zur Verwendung gelangenden Fundamente von Freileitungstragwerken bieten. Umsomehr gebührt Allen, die deren Durchführung und die Vornahme eingehender Messungen ermöglicht haben, der Dank des Vereins.

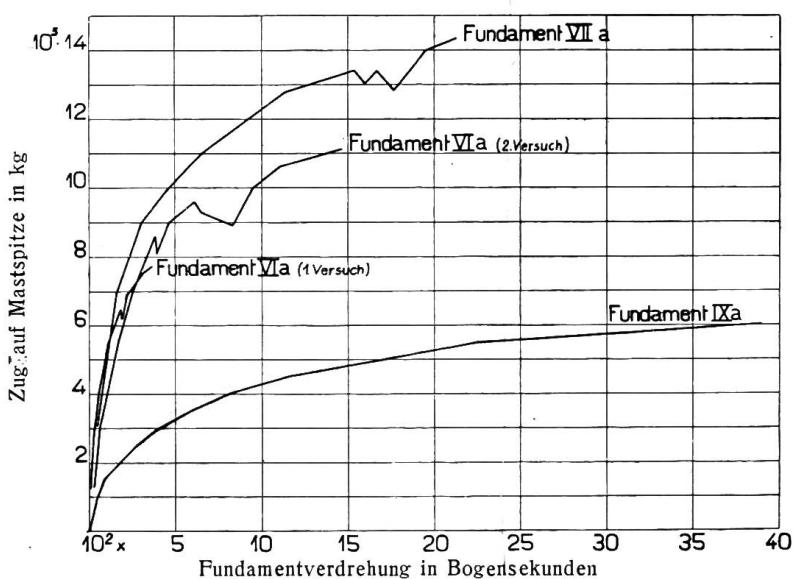


Fig. 38.

## Mathematische Theorien für den Durchschlag fester Isoliermaterialien.

Von Dr. ing. L. Dreyfus, Västerås.

Der Verfasser verweist anfangs auf die verschiedenen Erklärungen des Durchschlages fester Isolierstoffe und behandelt hierauf analytisch und graphisch eindimensionale, ebene und zylindrische Wärmeleitungsprobleme fester Isolierstoffe mit Bezug auf die Durchschlagsfestigkeit des letzteren.

Schliesslich wird die praktische Anwendung der hier abgeleiteten Wärmeleitungstheorie zur Konstruktion von Durchführungen behandelt.

L'auteur rappelle les différentes explications qu'on donne du phénomène de percement des isolants et montre comment on peut résoudre analytiquement et graphiquement des problèmes de transmission de la chaleur dans des corps plans ou cylindriques.

Il montre l'application de sa méthode de calcul à la construction d'isolateurs de traversée.

### Einleitung.

Zur Erklärung des elektrischen Durchschlages fester Isolierstoffe kann man drei Wege einschlagen.

1. Man kann versuchen, denselben als ein rein elektrostatisches Problem aufzufassen, wonach durch die elektrische Feldstärke der Zusammenhang der Moleküle gelockert wird, was einen momentanen Durchschlag zur Folge hat. Die elektrische Festigkeit muss sich dann in einer bestimmten Feldstärke  $F$  (kV/cm), oder in einem bestimmten Werte des Linienintegrals der Feldstärke längs eines gewissen Weges  $x_0$  (also  $\int_0^{x_0} F dx$ ) angeben lassen. Dass diese Auffassung sich nicht mit der Wirklichkeit deckt, ist frühzeitig erkannt worden. Man weiss, dass alle festen Materialien momentan sehr viel höhere Feldstärken ertragen als bei Prüfdauern von einer Minute oder mehr. Man pflegt daher für die Isolationsprüfung von Maschinen und Apparaten eine Prüfung mit Ueberspannung von der Dauer einer Minute vorzuschreiben.

2. Ein zweiter Weg zur Erklärung des elektrischen Durchschlages ist der, dass man denselben ausschliesslich als ein Erwärmungsproblem auffasst. Im elektrischen Felde erleidet das Isolationsmaterial Verluste (Leitungsverluste im Gleichfeld, Leitungs- und Hystereseverluste im Wechselfeld). Diese Verluste erwärmen das Material. Bei den meisten Isolationsmaterialien steigen aber die Verluste mit der Temperatur.

Erhöhte Temperatur bedeutet also erhöhte Verluste, erhöhte Verluste ein weiteres Ansteigen der Temperatur. Je höher die Temperatur des Isoliermaterials über die der Umgebung steigt, um so mehr Wärme kann abgeleitet werden. Es ist also möglich, dass schliesslich ein Wärmegleichgewicht eintritt, wobei die erzeugte Wärmemenge gleich der abgeleiteten ist. In diesem Falle schlägt das Material nicht durch. Es ist aber auch möglich, dass dieses Gleichgewicht infolge des Anwachsens der Verluste mit der Temperatur nicht eintritt. Dann steigt die Temperatur bis zur Zerstörungstemperatur des Materials, also bis zum Durchschlag.

Diese Auffassung ist der schwedischen elektrischen Industrie seit langem vertraut und kommt in ihren Prüfmethoden zum Ausdruck. Im Laboratorium der A. S. E. A. werden beispielsweise seit seinem Bestehen die Durchschlagsspannungen aller wichtigen Isolierstoffe als Funktion der Prüfdauer bestimmt und diese ganze Zeitkurve wird womöglich bei verschiedener Temperatur ( $15^{\circ}\text{C}$  bis  $90^{\circ}\text{C}$ ) aufgenommen.

3. Eine weitere Auffassung weicht von der vorigen insofern ab, als sie auch die Möglichkeit eines elektrischen Durchschlages ohne vorherige abnorme Erwärmung zulässt; also der Lockerung des molekularen Zusammenhangs durch besonders hohe Feldstärken nicht alle Bedeutung absprechen will. Vielleicht sind „momentane Durchschläge“ durch den elektrischen Funken in dieser Weise zu erklären.

Mag man nun der zweiten oder dritten Auffassung zustimmen, so wird man doch, wenn man an eine rechnerische Untersuchung des Durchschlagsproblems geht, die zweite Auffassung zugrunde legen müssen. Denn während uns die Gesetze der Wärmeleitung seit langem bekannt sind, und für die Veränderlichkeit der Verluste mit der Feldstärke und Temperatur unzählige experimentelle Kurven vorliegen, wissen wir so gut wie nichts über die sogenannte Lockerung des molekularen Aufbaues. Auch ist ziemlich sicher, dass diese wenigstens bei Prüfdauern von mehr als einigen Sekunden gegen die Zerstörung des Aufbaues durch zu grosse Erwärmung ganz in den Hintergrund tritt.

Innerhalb der zweiten Auffassung sehe ich, je nach der Stärke der Schicht, in welcher man das Isolationsmaterial auf Durchschlag untersucht, zwei Wege für eine mathematische Behandlung des Problems.

In vielen wichtigen Fällen der Hochspannungstechnik verwendet man Isoliermaterial mit solcher Wandstärke, dass lokale Inhomogenitäten die Verlustziffer eines kleinen Zylinders, den man sich in Richtung der elektrischen Kraftlinien herausgeschnitten denken kann, nicht wesentlich beeinflussen. Eine Theorie, welche sich auf diese Voraussetzung stützt, kann man als eine Theorie des Durchschlages für quasi homogenes Material bezeichnen. Ein klassisches Beispiel hierfür ist der Durchschlag von Kondensatordurchführungen. In der Tat ist die Ursache dieser Durchschläge bereits 1916 von Dir. Liljeblad erkannt (Teknisk Tidskrift 1916, Heft 8 und 9) und 1920 von Ing. Broon und dem Verfasser als reines Erwärmungsproblem mathematisch behandelt worden (Interner Technischer Bericht der A. S. E. A.).

Eine zweite Gruppe von Erscheinungen umfasst den Durchschlag von Isoliermaterialien in sehr dünnen Schichten. Hierbei muss man die Möglichkeit zulassen, dass ein kleiner, in Richtung des Feldes herausgeschnittener Zylinder aus Material von wesentlich höherer als der durchschnittlichen Verlustziffer bestehe. Bei der Prüfung erhitzen sich diese Stellen mehr als ihre Umgebung, es tritt ein Wärmeausgleich zwischen den heissen Kanälen und den angrenzenden Schichten auf, der bei nicht zu hohen Verlusten zu einem Wärmegleichgewicht, bei Ueberschreitung einer bestimmten Beanspruchung dagegen zum Durchschlag führt. Eine auf dieser Vorstellung fussende Theorie für inhomogenes Material ist kürzlich von Prof. Wagner veröffentlicht worden<sup>1)</sup>. Wir wollen derartige Theorien kurzweg als „Kanaltheorien“ bezeichnen.

Der Unterschied zwischen der älteren und neueren Theorie ist also folgender: Die ältere Theorie für quasihomogenes Material sucht den Durchschlag aus der

<sup>1)</sup> The physical nature of the electrical breakdown of solid dielectrics, Journal of the A. I. E. E., December 1922, pag. 1034.

mittleren Verlustziffer des Materials abzuleiten, die neuere Kanaltheorie hingegen aus der *grössten lokalen* Verlustziffer. Es ist daher ohne weiteres klar, dass die Kanaltheorie – sofern sie mathematisch richtig durchgeführt wird – für gleiche Verhältnisse niedrigere Durchschlagsspannungen liefern muss als die ältere Theorie. Da die Wagnersche Theorie diese Forderung nicht unter allen Umständen erfüllt, wird es nötig sein, sie einer Kritik zu unterziehen.

### Die Theorie des Durchschlages von quasihomogenen, festen Isolierstoffen bei Dauerprüfung, mit besonderer Berücksichtigung der massiven Papierdurchführungen.

Es ist schwierig, eine physikalisch einwandfreie Theorie für inhomogene Isolierstoffe aufzustellen, wenn man nicht zuvor die Theorie des Durchschlages von quasi homogenen Isolierstoffen beherrscht. Wagners Kanaltheorie krankt daran, dass ihr Verfasser diese Vorstufe übersprungen hat.

Der Durchschlag bei grosser Prüfdauer ist eine Folge des Versagens der Wärmeableitung. Hieraus folgt, dass ein und dasselbe Material bei gleicher Dicke eine verschiedene Durchschlagfestigkeit besitzen kann, je nach den äusseren Bedingungen für die Ableitung der Verlustwärme. Jede Theorie des Durchschlages muss daher nicht allein die Vorgänge im Isoliermaterial, sondern auch die Verlustableitung ausserhalb des Isoliermaterials in Betracht ziehen.

Bei vielen technisch wichtigen Beispielen ist das Temperaturgefälle in einer Richtung so viel grösser als in den dazu senkrechten Richtungen, dass man das Temperaturgefälle nur in dieser einen Koordinatenrichtung zu berücksichtigen braucht. Solche Probleme nennen wir „eindimensionale“. Je nach der Form des untersuchten Probestückes und der Elektroden unterscheiden wir ausserdem „eindimensionale ebene“ und „eindimensionale zylindrische“ Wärmeleitungsprobleme.

#### 1. Analytische Theorie für eindimensionale, ebene Wärmeleitungsprobleme.

Das einfachste Beispiel dieser Klasse stellt Fig. 1 dar. Sie zeigt den Querschnitt durch eine Isolierplatte, welche zwischen zwei Staniol-elektroden von einem homogenen elektrischen Felde senkrecht durchsetzt wird. Die von den Elektroden bedeckte Fläche sei so gross und die Wärmeableitung von solcher Art, dass wir in dem gezeichneten Bereich die Temperatur als eine Funktion der Abszisse  $x$  allein betrachten dürfen. Die Wärmeleitung innerhalb der Platte erfolgt darum ausschliesslich in dieser ( $x$ -) Richtung, und zwar symmetrisch zur Mittellebene, wenn beide Elektroden dieselben Ableitungsmöglichkeiten besitzen.

Es sei:

$\lambda \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{cm}}}$  die Wärmeleitzahl des Isoliermaterials;

$p \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$  seine Verlustziffer bei einer bestimmten Feldstärke  $F$ , Periodenzahl  $\nu$  und Temperatur  $\vartheta$ ;

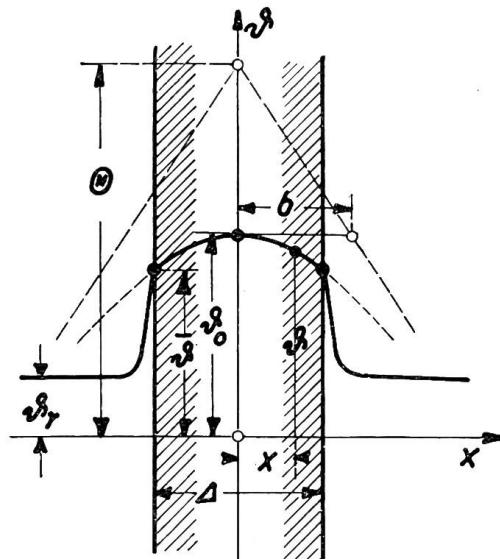


Fig. 1.  
Isolierplatte zwischen Metallelektroden.

$\bar{p}$   $\frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$  die entsprechende Verlustziffer bei der Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$  der Platte;

$\frac{p}{\bar{p}} = \varphi(\vartheta)$  die Funktion, welche das Anwachsen der Verluste mit der Temperatur ausdrückt.

Dann lautet die Gleichung der Wärmeleitung innerhalb der Platte nach Erreichung des Wärmegleichgewichtes:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \bar{p} \varphi(\vartheta) = 0. \quad (1)$$

Diese Gleichung besitzt für die angenommenen Symmetrieverhältnisse die Lösung:

$$\frac{d \vartheta}{dx} = - \sqrt{\frac{2 \bar{p}}{\lambda}} \sqrt{\int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d \vartheta}, \quad (2)$$

und

$$x = \sqrt{\frac{\lambda}{2 \bar{p}}} \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \frac{d \vartheta}{\sqrt{\int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d \vartheta}}. \quad (3)$$

Dabei haben wir die Maximaltemperatur  $\vartheta_0$  in der Mittelebene als Integrationskonstante gewählt.

Aus Gleichung (3) können wir eine außerordentlich wichtige Folgerung ziehen: Denken wir uns die Integration zwischen Rand und Mitte ausgeführt und verdoppelt, so ergibt sich:

$$A = \sqrt{\frac{2 \lambda}{\bar{p}}} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d \vartheta}{\sqrt{\int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d \vartheta}} \quad (4)$$

oder mit Einführung der Substitution:

$$\varphi(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) = \sqrt{2} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d \vartheta}{\sqrt{\int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d \vartheta}} \quad (5)$$

$$A \sqrt{\frac{\bar{p}}{\lambda}} = \varphi(\vartheta_0, \bar{\vartheta}). \quad (6)$$

In dieser Gleichung ist die rechte Seite bei gegebener Verlustfunktion  $\varphi$  und Randtemperatur  $\bar{\vartheta}$  ausschließlich eine Funktion der Höchsttemperatur  $\vartheta_0$ . Die linke Seite dagegen enthält die Plattenstärke, die Verlustziffer bei der Oberflächentemperatur und die Wärmeleitfähigkeit des Materials. Gleichung (6) behauptet also, dass bei gegebener Randtemperatur Platten von ganz beliebiger Stärke  $A$  dieselbe Höchsttemperatur aufweisen, soweit sie nur in der „charakteristischen Temperatur“:

$$\vartheta_k = A^2 \frac{\bar{p}}{\lambda} \quad (7)$$

übereinstimmen.

Eine beinahe noch wichtigere Folgerung lässt sich aus dem Verlauf der Temperaturfunktion  $\varphi(\vartheta_0, \bar{\vartheta})$  ableiten: Wenn nämlich die Verlustfunktion  $\varphi$  dauernd mit der Temperatur zunimmt, so besitzt die Funktion  $\varphi(\vartheta_0, \bar{\vartheta})$  für  $\bar{\vartheta} = \text{konst.}$  ein Maximum  $\varphi_{\max}$  bei einer gewissen Temperatur  $\vartheta_{0m}$ . Das bedeutet:

Soll die Temperaturverteilung innerhalb der Platte stabil sein, so darf die Innen-temperatur niemals die Höchsttemperatur  $\vartheta_{0m}$  überschreiten. Andernfalls ist kein Wärmegleichgewicht möglich, sondern die Temperatur wächst bis zum Durchschlag der Platte. Dabei ist  $\vartheta_{0m}$  eine Funktion der Randtemperatur  $\bar{\vartheta}$  und damit von der Wärmeableitung der Elektroden abhängig.

Mit Rücksicht auf diese neue Erkenntnis setzen wir:

$$\mathcal{A}_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda}{p}} \psi_{\max}. \quad (8)$$

Dies ist die grösste Plattenstärke, mit welcher bei gegebener Randtemperatur  $\bar{\vartheta}$  und Verlustziffer  $p$  stabile Verhältnisse erreicht werden können.

Gleichung (8) lässt noch eine weitere Schlussfolgerung zu: Bei gegebener Temperatur und Periodenzahl ist die Verlustziffer ausschliesslich eine Funktion der elektrischen Feldstärke  $F = \frac{E^{kv}}{\mathcal{A}^{cm}}$  und daher auch umgekehrt:

$$\frac{E}{\mathcal{A}} = f(\bar{p}).$$

Diejenige Spannung, welche bei Dauerprüfung schliesslich zum Durchschlag führen muss, beträgt also:

$$E = \mathcal{A} f(\bar{p}) = \mathcal{A} f\left(\lambda \frac{\psi_{\max}^2}{\mathcal{A}^2}\right). \quad (9)$$

Wir sehen hieraus, dass die Durchschlagsspannung bei gegebener Oberflächentemperatur keinesfalls proportional der Plattenstärke sein kann. Setzen wir beispielsweise:

$$\bar{p} = C \left(\frac{E}{\mathcal{A}}\right)^n \text{ bzw. } \frac{E}{\mathcal{A}} = \left(\frac{\bar{p}}{C}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (10)$$

so wird  $E = \mathcal{A}^{\frac{n-2}{n}} \left(\lambda \frac{\psi_{\max}^2}{C}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (11)$

Bei grossen Feldstärken, wie sie dünne Platten ertragen, ist  $n > 2$ . Hier steigt also die Durchschlagsspannung für konstante Oberflächentemperatur mit der Plattenstärke. Bei dicken Platten dagegen, die nur geringe Feldstärken aushalten, kann  $n = 2$  gesetzt werden. Von einer gewissen Plattenstärke an steigt daher die Durchschlagsspannung bei Dauerprüfung nicht mehr mit Vergrösserung der Plattenstärke. Dieses Resultat steht mit der Wirklichkeit in weit besserer Uebereinstimmung als das Ergebnis der Wagnerschen Kanaltheorie, wonach die Durchschlagsspannung proportional der Plattenstärke sein soll.

Wir haben bisher alle Grössen auf die Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$  der Platte bezogen. Es gibt eine grosse Zahl praktischer Beispiele, in welchen wir  $\bar{\vartheta}$  schätzen können. Wo dies nicht zutrifft, müssen wir versuchen,  $\bar{\vartheta}$  auf Grund einer Annahme über die Wärmeabgabe der Elektroden aus der Temperatur  $\vartheta_r$  des umgebenden Mediums zu berechnen. Gewöhnlich setzt man die von 1 cm<sup>2</sup> der Elektroden abgeleitete Wärme proportional dem Temperaturgefälle  $\bar{\vartheta} - \vartheta_r$ . Bezeichnet daher  $p_m$  die mittlere Verlustziffer der Platte und verläuft die Wärmeströmung symmetrisch zur Platten-Mittelebene, so gilt für  $x = \frac{\mathcal{A}}{2}$

$$-\lambda \left(\frac{d\vartheta}{dx}\right) = p_m \frac{\mathcal{A}}{2} = \mu (\bar{\vartheta} - \vartheta_r). \quad (12)$$

Nun ist nach Gleichung (2)

$$-\lambda \frac{d\vartheta}{dx} = \sqrt{2\bar{p}\lambda} \sqrt{\int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d\vartheta}$$

und nach Gleichung (6)

$$\frac{2}{A} = \frac{2}{\psi} \sqrt{\frac{\bar{p}}{\lambda}}.$$

Durch Multiplikation folgt daraus für die mittlere Verlustziffer

$$p_m = 2\bar{p} \frac{\sqrt{2 \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d\vartheta}}{\psi} \quad (13)$$

und für die Umgebungstemperatur

$$\vartheta_r = \bar{\vartheta} - \frac{A p_m}{2\mu} = \bar{\vartheta} - \frac{A \bar{p}}{\mu} \frac{\sqrt{2 \int_{\vartheta}^{\vartheta_0} \varphi d\vartheta}}{\psi}. \quad (13a)$$

Da die Höchsttemperatur  $\vartheta_0$  aus der Randtemperatur berechnet werden kann, so ist die rechte Seite ausschliesslich eine Funktion von  $\bar{\vartheta}$  und umgekehrt  $\bar{\vartheta}$  ausschliesslich eine Funktion von  $\vartheta_r$ . Diese Funktion ist jedoch in der vorliegenden Form so verwickelt, dass ich sie nicht anwenden will, um den Einfluss der Wärmeabgabekonstante  $\mu$  auf die Stabilität des Wärmegleichgewichtes zu untersuchen. Es genüge der Hinweis, dass bei dünnen Platten die Herabsetzung der Stabilitätsgrenze durch das Temperaturgefälle  $\bar{\vartheta} - \vartheta_r$  sehr erheblich sein kann, und dass wir später eine einfache graphische Methode kennen lernen werden, um sie genügend genau zu bestimmen. Hier will ich nur noch die Grössenordnung der Wärmeabgabekonstanten  $\mu$  angeben. Bei Elektroden mit natürlicher Luftkühlung kann

$$\mu \cong 0,001 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^0\text{C}}$$

gesetzt werden. Bei Prüfung in Oel ist dagegen

$$\mu = 0,01 \sim 0,012 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ }^0\text{C}}.$$

In beiden Fällen sind dünne, flache Elektroden vorausgesetzt, die mit ihrer ganzen Fläche auf der Platte aufliegen und die ihre Wärme nur an das umgebende Medium und nicht etwa an anderweitig gekühlte oder erhitzte Metallmassen abgeben.

Wir wollen nun die Theorie auf ein Material anwenden, das wegen seiner grossen Bedeutung für die Hochspannungstechnik besonderes Interesse beansprucht, nämlich auf das Bakelitpapier. Produkte, die aus Bakelitpapier hergestellt sind, kommen unter den verschiedensten Bezeichnungen in den Handel, so als Pertinaxpapier, -platten, -durchführungen, oder als Haefelyplatten, -zylinder usw. Die Verlustkurven eines nicht erstklassigen schwedischen Bakelitpapiers zeigt Fig. 2. Die Aufnahmepunkte liessen sich gut durch Parabeln interpolieren, ein Beweis dafür, dass bis zu 20 kV/cm die Verluste proportional dem Quadrate der Feldstärke ( $F$ ) gesetzt werden dürfen. Fig. 3 zeigt die Zunahme der Verluste mit der Temperatur.

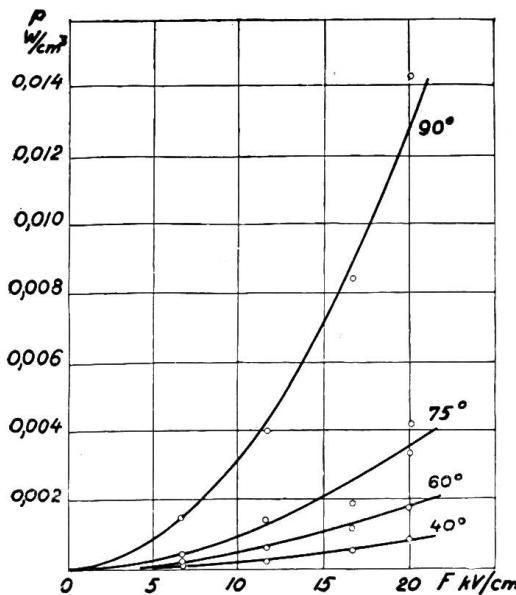


Fig. 2.  
Verlustkurven von Bakelitpapier bei konstanter Temperatur.

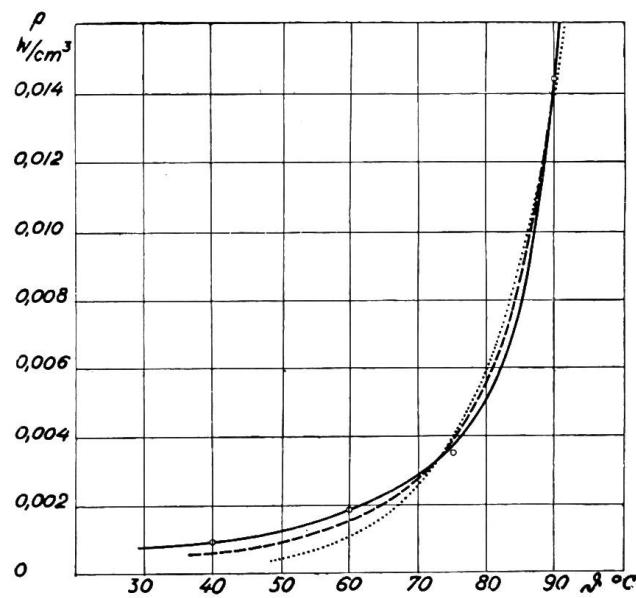


Fig. 3.  
Verlustkurven von Bakelitpapier bei konstanter Feldstärke.

Die strichlierte Kurve, welche sich mit der experimentellen Kurve bei Temperaturen über 50 Grad beinahe deckt, gehorcht der Formel:

$$p = \left( \frac{F}{20} \right)^2 \frac{\kappa}{(\Theta - \vartheta)^3} \quad (14)$$

mit  $k = 275 \quad (14a)$

und  $\Theta = 117^{\circ} \text{C.} \quad (14b)$

Bei dieser Temperatur wird nach Gleichung (14) die Verlustziffer unendlich gross.

In der Tat tritt bei derart hohen Temperaturen ein langsames Verkohlen des Papiers ein, welches allmählich zum Durchschlag führen muss. Indessen liegt die Höchsttemperatur  $\vartheta_{0m}$ , bei welcher eben noch ein Wärmegleichgewicht möglich ist, erheblich tiefer als  $\Theta$ , so dass man die Verlustkurve zwischen  $\vartheta$  und  $\vartheta_{0m}$  auch durch andere Gesetze interpolieren darf, die erst für unendliche Temperatur eine unendliche Verlustziffer ergeben. Ein solches, besonders von Physikern gerne angewandtes Gesetz ist die Exponentialfunktion.

$$p = \bar{p} e^{\alpha(\vartheta - \bar{\vartheta})}. \quad (15)$$

Die punktierte Kurve in Fig. 3 ist mit:

$$\bar{p}_{65^{\circ}} = \left( \frac{F}{20} \right)^2 0,0016 \quad (15a)$$

und  $\alpha = 0,087 \quad (15b)$

gezeichnet und kann für Temperaturen über  $65^{\circ}$  ebenfalls als eine brauchbare Interpolation bezeichnet werden. Da sich dieses zweite Gesetz bei zylindrischen Problemen als besonders leicht anwendbar erweist, wollen wir die im vorigen abgeleitete allgemeine Theorie nach beiden Formeln (14) und (15) durchführen.

*Erstes Gesetz.*

$$\varphi(\vartheta) = \left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta} \right)^3. \quad (14c)$$

Gleichung (5):

$$\begin{aligned}
 \psi &= \sqrt{2} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta} \right)^3 d\vartheta}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{(\Theta - \bar{\vartheta})^3}} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{1}{(\Theta - \vartheta_0)^2} - \frac{1}{(\Theta - \vartheta)^2}}} \\
 &= 2 \frac{(\Theta - \vartheta_0)^2}{\sqrt{(\Theta - \bar{\vartheta})^3}} \sqrt{\left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta_0} \right)^2 - 1}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Wir berechnen:

$$\psi_{\max} = \sqrt{\Theta - \bar{\vartheta}} \tag{17}$$

$$\text{für: } \left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta_{0\max}} \right)^2 = 2. \tag{18}$$

Die höchste Innentemperatur, bei welcher noch ein Wärmegleichgewicht möglich ist, beträgt somit für gegebene Randtemperatur  $\bar{\vartheta}$

$$\vartheta_{0\max} = 0,293 \Theta + 0,700 \bar{\vartheta} = 34,3^{\circ} + 0,707 \bar{\vartheta}. \tag{18a}$$

Die zugehörige grösste Plattenstärke ist nach Gleichung (8):

$$A_{\max} = \sqrt{\frac{\lambda}{p} (\Theta - \bar{\vartheta})} \tag{19}$$

und die höchste erreichbare Durchschlagsspannung:

$$E_{\max} = \sqrt{\lambda \frac{F^2}{p} (\Theta - \bar{\vartheta})}. \tag{20}$$

Setzen wir hierin:

$$\lambda = 0,00165 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{C}}$$

und für  $F \leq 20 \text{ kV/cm}$ :

$$\frac{F^2}{p} = 1,455 (\Theta - \bar{\vartheta})^3$$

so wird:

$$E_{\max} = 0,049 (\Theta - \bar{\vartheta})^2 = 0,049 (117 - \bar{\vartheta})^2. \tag{20a}$$

Also:

$$\begin{array}{rccccc}
 \bar{\vartheta} & = & 50^{\circ} & 60^{\circ} & 70^{\circ} & 80^{\circ} & 90^{\circ} \\
 E_{\max}^{\text{kV}} & = & 220 & 160 & 108 & 67 & 36.
 \end{array}$$

Man kann also eine Platte aus diesem Material so stark machen wie man will. Wenn man sie in heissem Oel prüft, und die ganze Verlustwärme in der Richtung der elektrischen Kraftlinien abgeleitet werden muss, kommt man über eine bestimmte, recht niedrige Durchschlagsspannung nicht hinaus.

Geht man nicht bis zur Stabilitätsgrenze, so kann man die höchste Innentemperatur aus Gleichung (6) und (16)

$$A \sqrt{\frac{p}{\lambda}} = \psi = 2 \frac{(\Theta - \vartheta_0)^2}{\sqrt{(\Theta - \bar{\vartheta})^3}} \sqrt{\left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta_0} \right)^2 - 1}$$

berechnen. Hieraus folgt nämlich gemäss Gleichung (19):

$$\frac{A}{A_{\max}} = 2 \left( \frac{\Theta - \vartheta_0}{\Theta - \bar{\vartheta}} \right)^2 \sqrt{\left( \frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta_0} \right)^2 - 1}$$

und:

$$\frac{\vartheta_0 - \bar{\vartheta}}{\Theta - \bar{\vartheta}} = 1 - \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{A^2}{A_{\max}^2}}}{2}}. \quad (21)$$

Fig. 4 illustriert diese Gleichung. Stabil ist im allgemeinen die Temperaturverteilung nur in dem abgebildeten Bereich  $\frac{\vartheta_0 - \bar{\vartheta}}{\Theta - \bar{\vartheta}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,293$ .

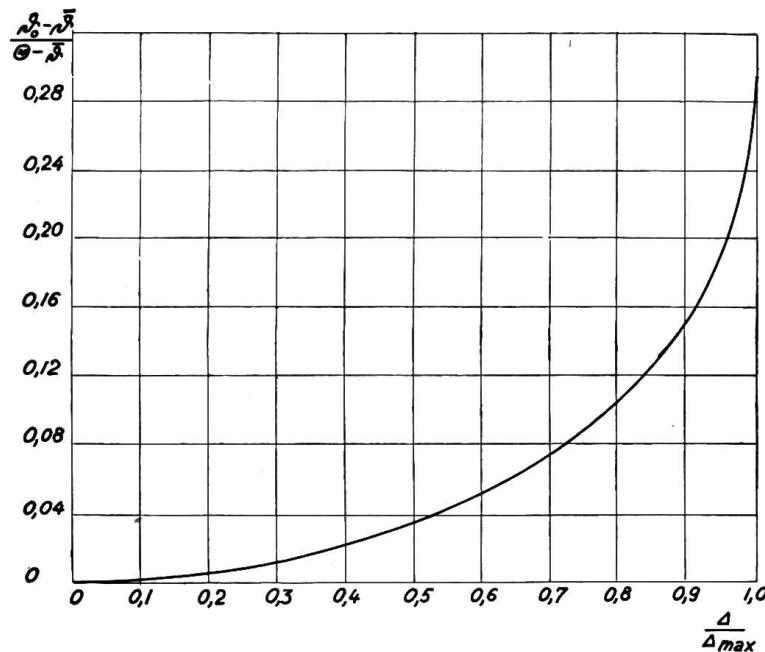


Fig. 4.

$$\frac{\vartheta_0 - \bar{\vartheta}}{\Theta - \bar{\vartheta}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{A^2}{A_{\max}^2}} \right)}$$

Wenn auch das Gesetz der Temperaturverteilung interessiert, so muss Gleichung (3) und (16) zu Rate gezogen werden. Durch einfache Umformung folgt aus denselben:

$$\frac{(\Theta - \vartheta)^2}{(\Theta - \vartheta_0)^2} - \frac{x^2}{A_{\max}^2 \left( \frac{\Theta - \vartheta_0}{\Theta - \bar{\vartheta}} \right)^4} = 1. \quad (22)$$

Das ist die Gleichung einer Hyperbel mit der Temperaturachse  $\Theta - \vartheta_0$  und der Breitenachse:

$$b = A_{\max} \left( \frac{\Theta - \vartheta_0}{\Theta - \bar{\vartheta}} \right)^2, \quad (22a)$$

welche in Fig. 1 eingezeichnet ist.

An der Grenze der Stabilität wird:

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{\Delta_{\max}}{2} \\ \vartheta_m &= \text{Mittel } (\vartheta) = \bar{\vartheta} + 0,644 (\vartheta_0 - \bar{\vartheta}) \\ \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_x &= \frac{\Delta}{2} = 5,3 [\vartheta_m - \bar{\vartheta}] \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

Ob grössere Unterschiede zwischen Umgebungs- und Elektroden temperatur zu erwarten sind, lehrt Gleichung (13a). Hiernach gilt:

$$\bar{\vartheta} - \vartheta_r = \frac{\Delta p}{\mu} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} \right)^2}} = \frac{\Delta p_m}{2\mu} \quad (23)$$

und maximal für  $\Delta = \Delta_{\max}$ :

$$\bar{\vartheta} - \vartheta_r = \frac{\Delta_{\max} \bar{p}}{\mu} = \frac{\sqrt{\lambda \bar{p} (\Theta - \bar{\vartheta})}}{\mu} = \frac{\Delta_{\max} p_m}{2\mu}. \quad (23a)$$

Aus der letzten Gleichung kann man schliessen, dass an der Stabilitätsgrenze die mittlere Verlustziffer der ganzen Platte doppelt so gross ist als die Verlustziffer  $p$  der Randschichten. Es ist daher sehr empfehlenswert, Prüfungen der Durchschlagfestigkeit mit Verlustmessungen zu kombinieren. Kommt man dabei zu dem Resultat, dass bei ungefähr gleicher Elektroden temperatur die Verluste nach einiger Zeit auf mehr als das Doppelte gestiegen sind, so kann man ziemlich sicher sein, dass die Platte durchschlagen wird.

### Zweites Gesetz.

Als zweites Gesetz haben wir angenommen, dass die Verluste mit der Temperatur nach einem Exponentialgesetz zunehmen, dass also für gleiche Feldstärke:

$$p = \bar{p} e^{\alpha (\vartheta - \bar{\vartheta})} \quad (15)$$

gesetzt werden kann. Wir können mit diesem Gesetz ein anderes kombinieren, wonach auch die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  mit der Temperatur nach einem ähnlichen Gesetz zunimmt:

$$\epsilon = \bar{\epsilon} e^{\beta (\vartheta - \bar{\vartheta})}. \quad (24)$$

Für unser Bakelitpapier z. B. steigt die Dielektrizitätskonstante mit ungefähr 0,6 % pro Grad. Dies hat zur Folge, dass sich die Prüfspannung  $E$  nicht gleichmässig auf die Plattenstärke  $\Delta$  verteilt, sondern dass die Feldstärke  $F = -\frac{dE}{dx}$  der inneren Schichten im Verhältnis der Dielektrizitätskonstanten geringer ausfällt als die Feldstärke  $\bar{F}$  der Randschicht. Nehmen wir ausserdem an, dass die Verluste mit der  $n$ ten Potenz der Feldstärke wachsen, so lautet nunmehr unser Verlustgesetz:

$$\varphi = \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon} \right)^n e^{\alpha (\vartheta - \bar{\vartheta})} = e^{\gamma (\vartheta - \bar{\vartheta})} \quad (25)$$

mit:

$$\gamma = \alpha - n\beta \quad (25a)$$

oder für:

$$\alpha = 0,087, \quad \beta = 0,006, \quad n = 2,$$

$$\gamma = 0,075. \quad (25b)$$

Den weiteren Rechnungsgang brauche ich nur anzudeuten:

Gleichung 5: 
$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{2} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} e^{\gamma(\vartheta-\bar{\vartheta})} d\vartheta}} \\ &= \sqrt{\frac{2\gamma}{e^{\gamma(\vartheta_0-\bar{\vartheta})}}} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-e^{\gamma(\vartheta_0-\bar{\vartheta})}}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{2}(\vartheta_0-\bar{\vartheta})} \operatorname{arctg} h \sqrt{1-e^{-\gamma(\vartheta_0-\bar{\vartheta})}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir berechnen:

$$\psi_{\max} = \frac{1,875}{\sqrt{\gamma}} \quad (27)$$

für:

$$\vartheta_{0\max} - \bar{\vartheta} = \frac{1,188}{\gamma} = 15,9^\circ. \quad (27a)$$

Wir sehen daraus, wie gering zuweilen die Temperaturunterschiede zwischen Plattenmitte und Oberfläche sein müssen, wenn die Stabilitätsgrenze nicht überschritten werden soll. Hierbei ist die Feldstärke in der Plattenmitte ( $F_0$ ) etwas kleiner als an der Oberfläche ( $\bar{F}$ ), da die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  mit der Temperatur zunimmt:

$$\frac{F_0}{\bar{F}} = e^{\beta(\vartheta_{0\max} - \bar{\vartheta})} = e^{-1,188 \frac{\beta}{\gamma}} = 0,91. \quad (27b)$$

Daher beträgt die mittlere Feldstärke angenähert:

$$\frac{F_m}{\bar{F}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{F_0}{\bar{F}} = \frac{1 + 2 e^{-1,188 \frac{\beta}{\gamma}}}{3} = 0,94. \quad (27c)$$

Nach Gleichung (8) erreichen wir die Stabilitätsgrenze bei gegebener Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$  mit einer Plattenstärke:

$$A_{\max} = 1,875 \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{p} \gamma}} \quad (28)$$

und berechnen daraus die grösste erreichbare Durchschlagsspannung:

$$E_{\max} = \frac{1 + 2 e^{-1,188 \frac{\beta}{\gamma}}}{3} 1,875 \sqrt{\lambda \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}} \frac{1}{\gamma}} \cong 0,94 \cdot 1,875 \sqrt{\lambda \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}} \frac{1}{\gamma}}.$$

Setzen wir hierin wieder:

$$\lambda = 0,00165, \quad \gamma = 0,075$$

$$\frac{\bar{F}^2}{\bar{p}} = \frac{400}{0,0016} e^{-\alpha(\bar{\vartheta} - 65^\circ)} \quad (15a)$$

so wird:

$$E_{\max} = 130 e^{-\frac{\alpha}{2}(\bar{\vartheta} - 65^\circ)} \quad \dots \quad \alpha = 0,087 \quad (29a)$$

also:

$$\begin{array}{lllll} \bar{\vartheta} &= 65^\circ & 70^\circ & 80^\circ & 90^\circ \\ E_{\max}^{\text{kV}} &= 130 & 105 & 68 & 43,5. \end{array}$$

Das sind im grossen und ganzen dieselben Werte, wie die nach dem ersten Gesetz (Gleichung 20a) gefundenen.

Die mittlere Verlustziffer beträgt dabei nach Gleichung (13):

$$(p_m)_{\max} = 2 p \frac{\sqrt{2} \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta_m} e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})}}{\psi_{\max}} = 2,88 \bar{p} \quad (30)$$

wobei noch zu beachten ist, dass  $\bar{p}$  zu  $\bar{F} = 1,06 F_m$  zu berechnen ist. Nach dem zweiten Verlustgesetz ist daher eine etwas höhere Verlustziffer zulässig als nach dem ersten Gesetz.

## 2. Graphische Behandlung eindimensionaler, ebener Wärmeleitungsprobleme.

Die im vorigen Abschnitt entwickelte Theorie lässt sich erheblich vereinfachen, wenn man eine unwesentliche Vernachlässigung und eine kleine Unsicherheit in Kauf nimmt. Da die hierauf gegründete graphische Behandlung einfach und für die praktische Anwendung wertvoll ist, glaube ich, dieselbe an dieser Stelle nicht übergehen zu dürfen.

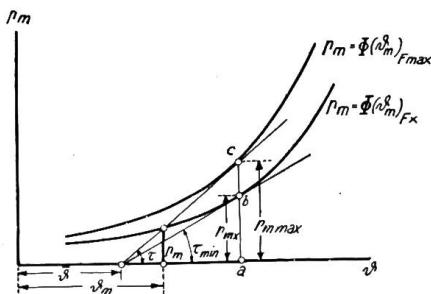


Fig. 5.

Graphische Behandlung für  $\bar{\vartheta} = \text{konst.}$

Die erwähnte Vernachlässigung besteht darin, dass wir die mittlere Verlustziffer  $p_m$  des Materials der Verlustkurve  $p = \Phi(\vartheta)$  zu  $\vartheta = \vartheta_m$  entnehmen (Fig. 5), wobei  $\vartheta_m$  den Mittelwert der Temperatur über die Plattendicke  $\Delta$  bedeutet. Die ebenfalls erwähnte Unsicherheit besteht darin, dass wir für die an eine Elektrode bei symmetrischer Wärmeströmung abgegebenen Verluste den Ansatz

$$p_m \frac{\Delta}{2} \simeq c \lambda \frac{\vartheta_m - \bar{\vartheta}}{\Delta} = -\lambda \left( \frac{d \vartheta}{d x} \right)_x = \frac{\Delta}{2} \quad (31)$$

anwenden, wobei der Proportionalitätsfaktor  $c$  wie wir später zeigen werden, zwischen  $c = 5$  und  $c = 6$  variieren kann.

Es ist klar, dass wir mit diesen beiden Annahmen eine ausserordentliche Vereinfachung erzielen. Denn nun ist einerseits:

$$p_m = (\vartheta_m - \bar{\vartheta}) \operatorname{tg} \tau \quad (\text{Fig. 5})$$

mit:

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{2 c \lambda}{\Delta^2} \quad (32)$$

und andererseits auch gemäss der Verlustkurve:

$$p_m = \Phi(\vartheta_m).$$

Ist also die Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$  vorgeschrieben, so brauchen wir nur die für die richtige Feldstärke gezeichnete Verlustkurve mit der unter dem Neigungswinkel  $\tau$  durch  $\vartheta = \bar{\vartheta}$  gezeichneten Geraden zum Schnitt zu bringen, um das zustande kommende Wärmegleichgewicht  $p_m$ ,  $\vartheta_m$  zu erhalten Fig. 5.

Ebenso einfach bestimmt man die grösste mittlere Verlustziffer bzw. die grösste Prüfspannung, mit welcher bei konstanter Oberflächentemperatur noch eben ein (labiles) Wärmegleichgewicht möglich ist. Offenbar muss für diesen Fall die Gerade durch  $\vartheta = \bar{\vartheta}$  die Verlustkurve berühren. Ist diese für irgend eine Feldstärke  $F_x$

gezeichnet, und legt man an diese Kurve die Tangente, so wird ihre Neigung im Verhältnis  $\operatorname{tg} \tau_{\min} / \operatorname{tg} \tau$  kleiner als die Neigung der durch Gleichung (32) vorgeschriebenen Geraden. Die grösste zulässige Verlustziffer  $(p_m)_{\max}$  darf also im gleichen Verhältnis grösser sein als die Verlustziffer  $p_{mx}$  im Berührungs punkt der Tangente an die für  $F_x$  gezeichnete Verlustkurve. Wachsen nun die Verluste mit der  $n$ ten Potenz der Feldstärke, so folgt ohne weiteres für die maximale Feldstärke:

$$\frac{F_{\max}}{F_x} = \sqrt[n]{\frac{\operatorname{tg} \tau}{\operatorname{tg} \tau_{\min}}} = \sqrt[n]{\frac{2 c \lambda}{\Delta^2} \operatorname{ctg} \tau_{\min}} \quad (33a)$$

und für die Durchschlagsspannung bei Dauerprüfung:

$$E_{\max} = \Delta^{\frac{n-2}{n}} F_x \sqrt[n]{2 c \lambda \operatorname{ctg} \tau_{\min}}. \quad (33)$$

Mit der graphischen Methode arbeitet man also schnell und einfach und ist frei von einschränkenden Annahmen über das Gesetz der Verlustkurve. Aus diesem Grunde ist sie trotz der erwähnten Vernachlässigungen oft genauer als die früher mitgeteilte mathematisch exaktere Theorie.

Was ausserdem der Näherungstheorie noch besonderen Wert verleiht ist der Umstand, dass die Lösung ebenso einfach bleibt, wenn nicht die Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$ , sondern die Umgebungstemperatur  $\vartheta_r$  gegeben ist, und wenn für den Zusammenhang zwischen beiden Temperaturen der Ansatz der Gleichung (12) gemacht werden kann. Derartige Aufgaben, die nach der analytischen Theorie recht umständlich zu lösen sind, wird man daher immer graphisch behandeln. Zunächst berechnet man aus Gleichung (12) und (31):

$$\bar{\vartheta} = \frac{\mu}{\frac{c \lambda}{\Delta} + \mu} \vartheta_r + \frac{\frac{c \lambda}{\Delta}}{\frac{c \lambda}{\Delta} + \mu} \vartheta_m. \quad (34)$$

Dies in Gleichung (31) eingesetzt, liefert:

$$\left. \begin{aligned} p_m &= (\vartheta_m - \bar{\vartheta}) \operatorname{tg} \tau \\ \operatorname{tg} \tau &= \frac{1}{\frac{\Delta^2}{2 c \lambda} + \frac{\Delta}{2 \mu}}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

mit:

Wir brauchen also nur  $\tau$  in Fig. 5 und Gleichung (32) durch  $\tau$  und  $\bar{\vartheta}$  durch  $\vartheta_r$  zu ersetzen, um alle früheren Ableitungen auch auf diesen allgemeinen Fall anwenden zu können. In Fig. 6 ist diese Behandlung durchgeführt. Ausserdem ist durch die strichlierte Gerade mit dem Neigungswinkel  $\tau$  auch die Oberflächentemperatur  $\bar{\vartheta}$  bestimmt. Die Konstruktion der Tangente mit dem Neigungswinkel  $\tau_{\min}$  liefert die Mitteltemperatur  $\vartheta_{m\max}$  an der Stabilitätsgrenze und es ist sehr bemerkenswert, dass dieser Scheitelwert nur von der Umgebungstemperatur  $\vartheta_r$  und nicht auch von dem Temperaturfall  $\bar{\vartheta} - \vartheta_r$  bzw. von  $\mu$  abhängt. Die zugeordnete Feldstärke, die das Material eben noch dauernd erträgt ist:

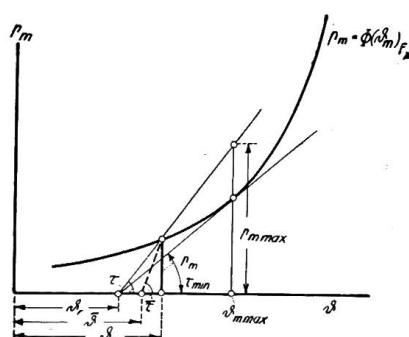


Fig. 6.  
Graphische Behandlung für  $\vartheta_r = \text{konst.}$

$$F_{\max} = F_x \sqrt[n]{\frac{\operatorname{ctg} \tau_{\min}}{\frac{\Delta^2}{2c\lambda} + \frac{\Delta}{2\mu}}} \quad (36)$$

und die Durchschlagsspannung:

$$E_{\max} = \Delta^{\frac{n-2}{n}} F_x \sqrt[n]{\frac{\operatorname{ctg} \tau_{\min}}{\frac{1}{2c\lambda} + \frac{1}{2\mu\Delta}}} = \Delta^{\frac{n-1}{n}} F_x \sqrt[n]{\frac{\operatorname{ctg} \tau_{\min}}{\frac{\Delta}{2c\lambda} + \frac{1}{2\mu}}} \quad (37)$$

Verglichen mit dem zuerst behandelten Grenzfall ( $\bar{\vartheta} = \vartheta_r$ ,  $\mu = \infty$ ), liegt diese Durchschlagsspannung im Verhältnis:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{1 + \frac{c\lambda}{\Delta\mu}}} \quad (37a)$$

tiefer. Ausserdem wächst jetzt die Durchschlagsspannung auch für das quadratische Verlustgesetz ( $n = 2$ ) dauernd mit der Plattenstärke und erreicht erst für  $\Delta = \infty$  den früher bezeichneten Grenzwert. Die Zunahme erfolgt für  $n = 2$  mit der Wurzel aus der Plattenstärke, solange  $\frac{\Delta\mu}{c\lambda}$  klein gegen 1, was für die Prüfung von Bakelitpapier in Luft bis zu Plattenstärken von 1 cm und darüber der Fall sein kann.

Ich habe nun noch zu zeigen, von welcher Größenordnung die mit dieser Näherungsmethode begangenen Fehler sind. Zu diesem Zwecke muss ich einen Vergleich mit der analytischen Methode durchführen, wobei ich das für Bakelitpapier aufgestellte erste Gesetz:

$$p = \Phi(\vartheta) = \left(\frac{F}{F_x}\right)^n \frac{k}{(\Theta - \vartheta)^3} \quad (14)$$

zugrunde lege.

Der eine Fehler bestand darin, dass wir die mittlere Verlustziffer  $p_m$  der mittleren Temperatur  $\vartheta_m$  nach derselben Kurve zu ordnen, wie die lokale Verlustziffer  $p$  der lokalen Temperatur  $\vartheta$ . Solange das Temperaturintervall  $(\vartheta_0 - \bar{\vartheta}) \cong 1,5 (\vartheta_m - \bar{\vartheta})$  so klein ist, dass zwischen diesen Grenzen die Verlustkurve praktisch genau durch eine Gerade ersetzt werden kann, ist auch der begangene Fehler praktisch gleich Null. Erst wenn zwischen diesen Grenzen die Verlustkurve merkbar gekrümmmt ist, wird auch der Fehler messbar. Den denkbar grössten Fehler begehen wir somit bei einer Prüfung mit dem denkbar grössten Temperaturintervall, das ist für  $\bar{\vartheta} = \vartheta_r$  ( $\mu = \infty$ ) und Anstrengung des Materials bis zur Stabilitätsgrenze.

Hierfür leiten wir ab:

$$\frac{\Theta - \vartheta_m}{\Theta - \vartheta_0} = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{\Delta}\right)^2} dx \left(\frac{2x}{\Delta}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin h 1 = 1,148$$

und:  $\frac{\Theta - \bar{\vartheta}}{\Theta - \vartheta_0} = \sqrt{2}$ .

$$\text{Ferner gilt allgemein: } p_m = \left(\frac{F}{F_0}\right)^n \frac{k}{(\Theta - \bar{\vartheta})(\Theta - \vartheta_0)^2} \quad (38)$$

$$\text{An der Stabilitätsgrenze wird daher: } p_m = 1,07 \left(\frac{F}{F_0}\right)^n \frac{k}{(\Theta - \vartheta_m)^3} \quad (38a)$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem oben angenommenen lokalen Verlustgesetz 14, so erkennt man, dass der Fehler der graphischen Behandlung höchstens 7 % beträgt. Man kann ihn auf  $\pm 3\frac{1}{2}$  % herunterdrücken, wenn man die Kurve der mittleren Verlustziffer mit  $p_m = 1,035 p$  zeichnet.

Wir erwähnten ferner die Unsicherheit, die in der Annahme des Koeffizienten  $c$  liegt. Dieser Koeffizient schwankt für  $\Delta = 0$  bis  $\Delta = \Delta_{\max}$  zwischen 6 und einem unteren Grenzwert von  $5 \sim 5,3$ . Er kann unter Annahme des Verlustgesetzes 14 als Funktion des Verhältnisses:

$$\delta = \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} \right)^2 \quad (39a)$$

berechnet werden und liefert die Gleichung:

$$c = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \delta}}{1 - \frac{1 + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - \delta}}} \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin h \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \delta}}{1 + \sqrt{1 - \delta}}}}, \quad (39)$$

nach welcher Fig. 7 aufgezeichnet ist. Die Unsicherheit in der Wahl von  $c$  wird daher beseitigt, wenn man den Parameter  $\delta$  aus der graphischen Konstruktion ableiten kann. Dies ist aber in der Tat der Fall, denn nach Gleichung (32) ist:

$$\delta = \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} \right)^2 = \frac{\operatorname{tg} \bar{\tau}_{\min}}{\operatorname{tg} \bar{\tau}}. \quad (\text{vgl. Fig. 8}) \quad (40)$$

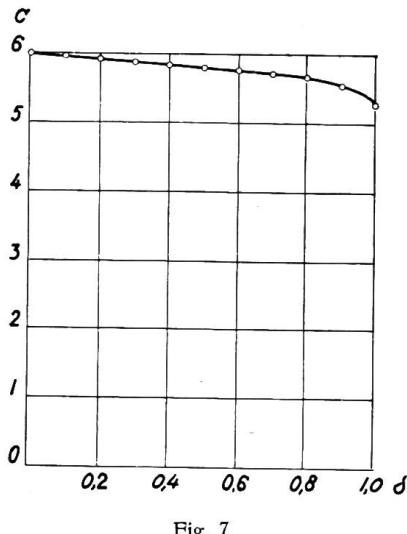


Fig. 7.

Funktion  $C =$

$$\frac{2(1 - \sqrt{1 - \delta})}{1 - \frac{1 + \sqrt{1 - \delta}}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{1 - \delta})} \arcsin h \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \delta}}{1 + \sqrt{1 - \delta}}}}$$

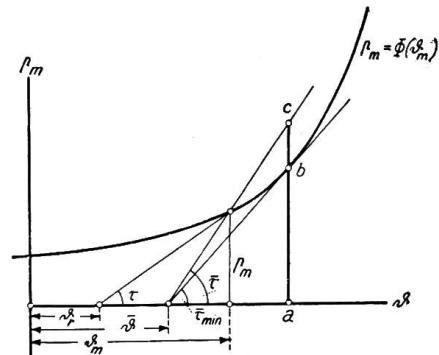


Fig. 8.

Bestimmung von

$$\delta = \frac{b a}{c a} = \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\max}} \right)^2$$

Man wird also zunächst die in Fig. 8 abgebildete Konstruktion mit einem geschätzten Werte von  $c$  durchführen und erhält damit einen guten Näherungswert für  $\delta = \frac{a b}{a c}$ . Mit diesem tritt man in Fig. 7 ein und erhält einen genaueren Wert für  $c$ , mit welchem die Konstruktion nötigenfalls korrigiert werden kann.

### 3. Analytische Theorie für eindimensionale, zylindrische Wärmeleitungsprobleme.

Das wichtigste Beispiel für zylindrische Isolierkörper, bei denen die Verlustwärme hauptsächlich in radialer Richtung fortgeleitet wird, sind massive Papierdurchführungen. Werden dieselben als Kondensatordurchführungen gebaut (Fig. 10), so lässt sich durch geeignete Abstufung der Stannoleinlagen erreichen, dass die Feldstärke zwischen Bolzen und Flansch nahezu konstant bleibt. Die Verlustziffer kann dann in erster Annäherung als eine Funktion der Temperatur allein betrachtet werden. Behilft man sich ohne Stannoleinlagen, so ist die Feldstärke im mittleren Teile zwischen Flansch und Bolzen nahezu umgekehrt proportional dem Radius und daher die Verlustziffer eine Funktion der Temperatur *und* des Radius. Mit diesem allgemeineren Falle wollen wir beginnen.

#### 3a). Massive Papierdurchführungen ohne Stannoleinlagen (Fig. 9).

Für den Beharrungszustand lautet die Wärmeleitungsgleichung:

$$\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vartheta}{dr} \right) + p = 0. \quad (41)$$

Bei konstanter Temperatur sei die Verlustziffer der  $n$ ten Potenz der Feldstärke proportional. Für die Abhängigkeit der Verlustziffer von der Temperatur gelte das Exponentialgesetz  $e^{\alpha(\vartheta - \bar{\vartheta})}$ , desgleichen für die Zunahme der Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur ein Exponentialgesetz  $e^{\beta(\vartheta - \bar{\vartheta})}$ . Dann gilt für die Feldstärke zwischen Bolzen und Flansch:

$$\frac{F}{\bar{F}} = \left( \frac{\bar{r}}{r} \right) e^{-\beta(\vartheta - \bar{\vartheta})} \quad (41a)$$

und für die Verlustziffer:

$$p = \bar{p} \left( \frac{F}{\bar{F}} \right)^n e^{\alpha(\vartheta - \bar{\vartheta})} = \bar{p} \left( \frac{\bar{r}}{r} \right)^n e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})}, \quad (41b)$$

wobei:  $\gamma = \alpha - n\beta$ . (41c)

Fig. 9.  
Massive  
Papierdurchführung.

Mit Rücksicht hierauf lässt sich Gleichung (41) auch wie folgt darstellen:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{d(lnr)^2} + \bar{p} \bar{r}^2 \left( \frac{\bar{r}}{r} \right)^{n-2} e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})} = 0. \quad (42)$$

Obschon diese Gleichung elementar lösbar ist, wollen wir uns hier auf die Untersuchung desjenigen Gebietes beschränken, in welchem die Verluste mit dem Quadrat der Feldstärke ( $n = 2$ ) zunehmen. Setzen wir ausserdem:

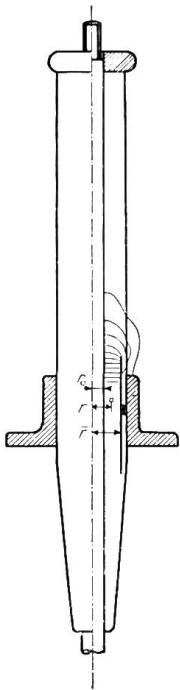
$$ln \frac{r}{r_0} = x \quad (43a)$$

so erhalten wir die uns bereits geläufige Differentialgleichung:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{dx^2} + \bar{p} \bar{r}^2 \varphi(\vartheta) = 0 \quad (43) \text{ (vgl. 1)}$$

wobei anstelle von:

$$\varphi(\vartheta) = e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})} \quad (43a)$$



auch ein beliebiges anderes Temperaturgesetz stehen könnte. Die geringfügige Wärmeableitung durch den Bolzen kann man bei langen Durchführungen vernachlässigen. Wir führen daher als Grenzbedingungen ein:

Für:  $\left\{ \begin{array}{l} r = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \vartheta}{d r} = 0 \\ \frac{d \vartheta}{d x} = 0 \end{array} \right. .$  (43b)

Da auch die Theorie der eindimensionalen ebenen Wärmeleitung mit derselben Annahme arbeitete, können wir alle Resultate dieser Theorie sinngemäss anwenden, wenn wir nur:

$$x \text{ durch } \ln \frac{r}{r_0}, \quad \frac{\Delta}{2} \text{ durch } \ln \frac{\bar{r}}{r_0}, \quad \bar{p} \text{ durch } \bar{p} \bar{r}^2$$

ersetzen.

Was uns an erster Stelle interessiert, ist wiederum die Lage der Stabilitätsgrenze. Aus Gleichung (8) und (27) erhalten wir:

$$\left( \ln \frac{\bar{r}}{r_0} \right)_{\max} = \frac{1}{2 \bar{r}} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{p}}} \psi_{\max} = 0,938 \frac{1}{\bar{r}} \sqrt{\frac{\lambda}{\bar{p} \gamma}} \quad (44)$$

und berechnen hieraus die grösste erreichbare Durchschlagsspannung:

$$E_{\max} \cong 0,94 \bar{F} \bar{r} \ln \frac{\bar{r}}{r_0} = 0,88 \sqrt{\lambda \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}} \frac{1}{\gamma}}. \quad (45)$$

Die Durchschlagsspannung massiver Papierdurchführungen ohne Stannioleinlagen liegt also gerade halb so hoch wie die Durchschlagsspannung von Platten, bezogen auf gleiche Randtemperatur  $\bar{\vartheta}$ . Dabei beträgt die mittlere Verlustziffer genau wie bei Platten Gleichung (30):

$$(p_m)_{\max} = 2,28 \bar{p}_m \quad (46)$$

wenn:

$$\bar{p}_m = \bar{p} \frac{2 \ln \frac{\bar{r}}{r_0}}{1 - \frac{r_0^2}{\bar{r}^2}} \quad (46a)$$

die mittlere Verlustziffer bei einer über den ganzen Isolatorquerschnitt konstanten Temperatur  $\bar{\vartheta}$  bedeutet.

### 3b). Massive Kondensatordurchführungen (Fig. 10).

Bei der Behandlung der massiven Kondensatorklemme wollen wir annehmen, dass bei konstanter Temperatur die Feldstärke zwischen Bolzen und Flansch konstant sei. Nach erreichtem Wärmegleichgewicht ist dann die Feldstärke der inneren Schichten etwas kleiner als die der äusseren, da ihre Temperatur höher und ihre Dielektrizitätskonstante grösser ist. Machen wir für die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante und Verlustziffer von der Temperatur dieselben Annahmen wie im vorigen Abschnitte, so erhalten wir nunmehr als Verlustgesetz unabhängig vom Radius:

$$p = \bar{p} e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})} \text{ mit } \gamma = a - n \beta. \quad (47)$$

Nach erreichtem Wärmegleichgewicht gilt daher die Differentialgleichung:

$$\lambda \frac{d^2 \vartheta}{d(\ln r)^2} + \bar{p} r^2 e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})} = 0. \quad (48)$$

Durch die Substitutionen:

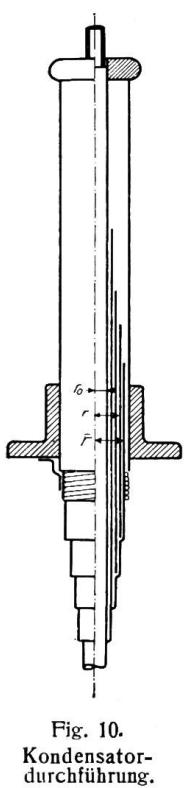


Fig. 10.  
Kondensator-  
durchführung.

wird diese Gleichung übergeführt in:

$$\frac{d^2 u}{d x^2} + \bar{p} r^2 \frac{\gamma}{\lambda} e^u = 0. \quad (49a)$$

Wenn der Bolzen keine erhebliche Wärmemenge aus dem Mittelstück ableitet, können wir als Grenzbedingungen einführen:

Für:  $\left\{ \begin{array}{l} r = r_0 \\ x = \ln \frac{r_0}{r} \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} \frac{d \vartheta}{d r} = 0 \\ \frac{d u}{d x} = 2 \end{array} \right\}. \quad (50)$

Wir können nun zur schrittweisen Integration der Differentialgleichung schreiten:

$$\frac{d u}{d x} = - \sqrt{4 c^2 - 2 \bar{p} r^2 \frac{\gamma}{\lambda} e^u} \quad (51)$$

oder wenn wir zur Abkürzung:  $\frac{2 \lambda}{\bar{p} \gamma} = R^2 \quad (51a)$

einführen:  $\frac{d u}{d x} = - 2 \sqrt{c^2 - \frac{r^2}{R^2} e^u}. \quad (51b)$

Für die Integrationskonstante  $c$  folgt aus Gleichung (50):

$$c^2 = 1 + \frac{r_0^2}{R^2} e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})}. \quad (52)$$

Für kleine Bolzendurchmesser ist daher ungefähr:  $c = 1. \quad (52a)$

Durch weitere Integration (Integrationskonstante  $b$ ) finden wir:

$$2 c x = - \int \frac{d u}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{c R}\right)^2 e^u}} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c R}\right)^2 c^2 e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})}}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{c R}\right)^2 c^2 e^{\gamma(\vartheta - \bar{\vartheta})}}} + \ln b^2$$

oder:

$$\frac{r}{R} e^{\frac{\gamma}{2}(\vartheta - \bar{\vartheta})} = \frac{2 c}{b \left(\frac{r}{R}\right)^c + \frac{1}{b} \left(\frac{r}{R}\right)^c}. \quad (53)$$

Wendet man diese Gleichung auf die Randschichten ( $r = \bar{r}$ ,  $\vartheta = \bar{\vartheta}$ ) an, so ergibt sich:

$$\frac{\bar{r}}{R} = \frac{2c}{b + \frac{1}{b}}. \quad (54)$$

Dagegen erhält man für die Bolzenoberfläche ( $r = r_0$ ,  $\vartheta = \vartheta_0$ ), (vgl. 52):

$$\frac{r_0}{R} e^{\frac{\gamma}{2}(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})} = \frac{2c}{b \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^c + \frac{1}{b} \left(\frac{r_0}{\bar{r}}\right)^c} = \sqrt{c^2 - 1} \quad (55a)$$

oder nach einigen Umformungen:  $b = \sqrt{\frac{c+1}{e-1}} \left(\frac{r_0}{\bar{r}}\right)^c.$  (55)

Treten wir damit in Gleichung (54) ein, so ergibt sich endgültig für die Dicke  $\Delta = \bar{r} - r_0$  der Kondensatordurchführungen:

$$\Delta = R \frac{2c \left(1 - \frac{r_0}{\bar{r}}\right)}{\sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \left(\frac{r_0}{\bar{r}}\right)^c + \sqrt{\frac{c-1}{c+1}} \left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^c} = R f \left(c, \frac{r_0}{\bar{r}}\right). \quad (56)$$

Nach unseren früheren Erfahrungen dürfen wir als sicher annehmen, dass die rechte Seite dieser Gleichung bei jedem gegebenen Verhältnis  $\frac{r_0}{\bar{r}}$  für einen bestimmten Wert der Integrationskonstante  $c$  ein Maximum besitzt. Die grösste Wandfläche, bei welcher eben noch ein Gleichgewicht möglich ist, beträgt dann:

$$\Delta_{\max} = \sqrt{\frac{2\lambda}{p\gamma}} \left[ f \left( \frac{r_0}{\bar{r}} \right) \right]_{\max}. \quad (57)$$

Für die Berechnung dieses Maximalwertes erhalten wir aus (46) die Bedingungsgleichung:

$$\frac{1+b^2}{1-b^2} + \ln b = \frac{c}{c^2-1} + \frac{1}{2} \ln \frac{c+1}{c-1}. \quad (48)$$

Das Resultat der Rechnung enthält Fig. 11 und Tabelle I.

Tabelle I.

$\frac{r_0}{\bar{r}}$	0	0,071	0,217	0,331	0,436	0,507	0,560	1,000
$c$	1	1,01	1,10	1,25	1,5	1,75	2,0	—
$b$	1	0,981	0,863	0,752	0,644	0,582	0,543	—
$f_{\max}$	1	0,938	0,855	0,802	0,772	0,752	0,737	0,662
$\gamma(\vartheta_0 - \bar{\vartheta})_{\max}$	1,386	1,366	1,314	1,272	1,258	1,239	1,235	1,188
$1 - \frac{F_m}{F}$	0,074	0,073	0,070	0,068	0,067	0,066	0,066	0,063
$\sqrt{2} F_{\max} \frac{F_m}{F}$	1,310	1,232	1,125	1,055	1,020	0,995	0,972	0,878
$\left(\frac{p_m}{2p}\right)_{\max}$	1	1	1,02	1,05	1,065	1,08	1,09	1,14

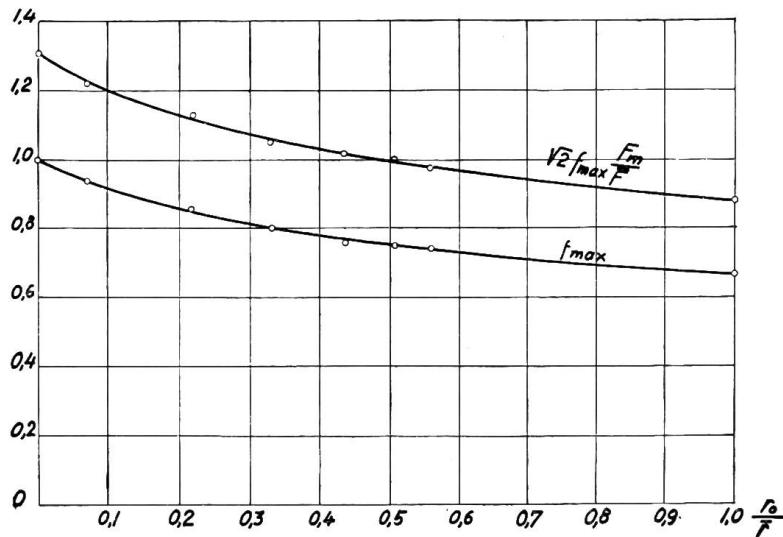


Fig. 11.

Durchführungen ohne Stanioleinlagen. Wir erhalten nämlich:

$$E_{\max} = F_m \mathcal{A}_{\max} = \left( \sqrt{2} f_{\max} \frac{F_m}{F} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma} \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}}} \quad (59)$$

$$\text{wobei gemäss (27b): } \frac{F_m}{F} = 1 - \frac{2}{3} (1 - e^{-\beta(\vartheta_0 - \vartheta)_{\max}}). \quad (59b)$$

Also für  $\frac{r_0}{r} = 0$  bis 0,25:

$$E_{\max} = (1,31 \sim 1,10) \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma} \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}}}. \quad (59a)$$

$$\text{Dagegen war für beidseitig gekühlte Platten (29): } E_{\max} = 1,76 \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma} \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}}}$$

$$\text{und für gewöhnliche Papierdurchführungen (45): } E_{\max} = 0,88 \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma} \frac{\bar{F}^2}{\bar{p}}}.$$

Im Prüffeld zu entscheiden, ob eine Durchführung bei einer bestimmten Spannung oberhalb oder unterhalb der Stabilitätsgrenze arbeitet, erfordert eine vielstündige Dauerprobe. Es ist daher erwünscht, von vornehmerein die mittlere Verlustziffer angeben zu können, welche ein Isolator in der Nähe der Stabilitätsgrenze besitzt. Die allgemeine Formel hierfür lautet:

$$p_m = - \frac{2 \bar{r} \pi}{(r^2 - r_0^2) \pi} \lambda \left( \frac{d \vartheta}{d r} \right)_{r=\bar{r}}. \quad (60)$$

Hieraus berechnen wir:

$$\begin{aligned} (p_m)_{\max} &= \frac{2 \lambda}{\gamma} \left[ b \frac{1-c}{c} + \frac{1}{b} \frac{1+c}{c} \right] \frac{\bar{r}}{r^2 - r_0^2} \\ &= 2 \bar{p} \frac{1 - \frac{r_0}{r}}{1 + \frac{r_0}{r}} \frac{1 + c \frac{1 - b^2}{1 + b^2}}{f_{\max}^2}. \end{aligned} \quad (61)$$

Je kleiner also der Bolzendurchmesser im Verhältnis zum Flanschdurchmesser, umgrösser darf man die Wandstärke machen und desto mehr Spannung hält die Durchführung aus. Der Grenzwert für  $\frac{r_0}{r} = 1$ , welchen die Tabelle enthält, ist nach Gleichung (28) für einseitig gekühlte Platten berechnet.

Bezüglich der Durchschlagsspannung liegt die Kondensatorklemme ungefähr in der Mitte zwischen beidseitig gekühlten Platten und massiven

Wie die letzte Reihe der Tabelle I zeigt, ist angenähert:  $p_m = 2 \bar{p}$  (61a)

wobei jedoch  $\bar{p}$  zu einer Feldstärke zu berechnen ist, die ungefähr 7 % höher liegt als die mittlere (dies wegen der Zunahme der Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur). Die höchste Verlustziffer an der Bolzenoberfläche ist:

$$p_{0 \max} = \bar{p} e^{\gamma (\vartheta_{0 \max} - \vartheta)} = \bar{p} (c^2 - 1) \frac{R^2}{p_0^2} . \quad (62)$$

Da nun gemäss Tabelle I der Exponent  $\gamma (\vartheta_{0 \max} - \vartheta)$  ungefähr gleich 1,3 gesetzt werden kann, so ist ungefähr:

$$p_{0 \max} \cong 3,7 \bar{p} . \quad (62a)$$

Dies Resultat ist wichtig für praktische Anwendungen der Theorie. Denn wie Fig. 3 zeigt, ist es nicht immer möglich, die ganze experimentell bestimmte Verlustkurve  $p = \Phi(\vartheta)$  durch eine Exponentialfunktion zu interpolieren. Nach Gleichung (62a) ist dies aber auch nicht nötig, sondern es genügt, wenn in dem Gebiet  $p$  bis 3,7  $\bar{p}$  eine gute Annäherung erzielt wird.

Zum Schluss seien noch einige praktische Ziffern gegeben, die zeigen sollen, mit welchen Grenzen man bei der Konstruktion grosser Kondensatordurchführungen zu rechnen hat. Wertet man Gleichung (59a) für eine Verlustkurve nach Fig. 3 aus, so erkennt man sofort, dass Transformatordurchführungen mit dieser Papierqualität für Betriebsspannungen über 66 kV zwischen Bolzen und Flansch nicht mehr herstellbar sind. Man muss also entweder die Konstruktion oder das Material verbessern.

Nehmen wir zunächst den letzten Fall an: Es möge durch fortgesetzte Ueberwachung der Verlustziffer die Qualität auf folgende Höhe gebracht haben (die Werte sind vom Verfasser experimentell festgestellt):

$$\alpha = 0,0212 \frac{1}{^{\circ}C} \quad \lambda = 0,00165 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2 \text{ } ^{\circ}C}$$

$$\beta = 0,0016 \frac{1}{^{\circ}C} \quad \gamma = 0,018 \frac{1}{^{\circ}C}$$

und für 20 kV/cm und für 70<sup>0</sup> C:  $p_{70^0} = 0,002 \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^3}$ .

Dann ergeben sich bei einem Verhältnis  $\frac{r_0}{r} = 0,2$  folgende Grenzen für die erreichbare Betriebsspannung zwischen Bolzen und Fassung:

$\bar{\vartheta}$ $^{\circ}$ C	40	50	60	70	80	90
$\bar{p}$ für 20 kV/cm	0,0011	0,0013	0,0016	0,0020	0,0025	0,0031
$E_{\max}^{\text{kV}}$	208	192	172	154	138	124

Vergleicht man diese Grenzwerte mit Tabelle I, Seite 339, so sieht man, wie ausserordentlich viel durch Verbesserung der Papierqualität gewonnen worden ist. Immerhin ist es nicht ausgeschlossen, dass man in Zukunft mit der Betriebsspannung zwischen Bolzen und Flansch noch höher gehen will, und dann dürfte es nötig werden, die Wärmeableitung zu verbessern. Hierzu gibt es verschiedene Wege:

Vielversprechend erscheint die Anordnung einer inneren und äusseren Kühlung nach Art von Fig. 12. Aeusserlich gleicht die Type den ölgefüllten Porzellandurch-

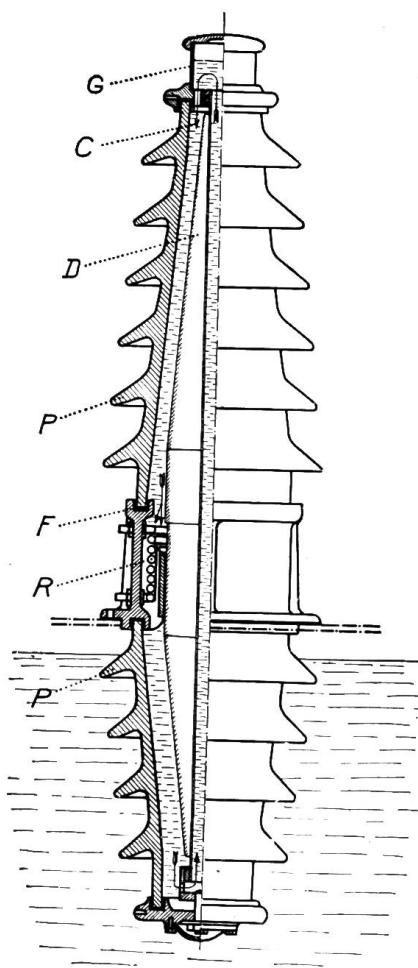


Fig. 12.

Durchführung mit äusserer u. innerer Kühlung

- G = Ölstandsglas.
- C = Ölzirkulation.
- D = Durchführung.
- P = Porzellanmantel.
- F = Flansch.
- R = Kühlrohre.

führungen der General-Electric Co. Doch wird in unserem Falle das Oel nicht so sehr als Isoliermaterial, sondern vielmehr als Kühlmittel benutzt. Infolge der natürlichen äusseren Kühlung, die in Fig. 12 durch Kühlslangen unter dem Flansch unterstützt wird, wird das mittlere spezifische Gewicht und daher der Druck des Oeles im äusseren Mantel etwas grösser als im Durchführungsrohr. Es kommt daher die durch Pfeile angedeutete Oelzirkulation zu stande, die infolge des hohen Wertes der Wärmeabgabe-Konstante ( $\mu \cong 0,012$ ) nur eine ganz geringe Erwärmung des Rohres über die Oeltemperatur zulässt. Es liegt nahe zu denken, dass trotzdem die innere Kühlung nicht wirksam sein könne, da die innere Kühlfläche so viel kleiner ist als die äussere. Die im folgenden durchgeführte mathematische Analyse beweist jedoch die Unrichtigkeit dieser Anschauung.

Der Einfachheit halber vernachlässige ich diesmal die Veränderlichkeit der Dielektrizitätskonstante mit der Temperatur, setze also  $\beta = 0$  und  $\alpha = \gamma$ . Ausserdem will ich von den Unterschieden der Oeltemperatur im äusseren Mantel ( $r = \bar{r}$ ) und im Durchführungsrohr ( $r = r_0$ ) absehen und an beiden Stellen mit  $\vartheta = \bar{\vartheta}$  rechnen. Als Grenzbedingung für den äusseren Umfang erhalten wir dann wie früher:

$$\frac{\bar{r}}{R} = \frac{2c}{b + \frac{1}{b}}. \quad (54)$$

Dagegen gilt für den inneren Umfang gemäss Gleichung (55a):

$$\frac{r_0}{R} = \frac{2c}{b \left( \frac{\bar{r}}{r_0} \right)^c + \frac{1}{b} \left( \frac{r_0}{\bar{r}} \right)^c}. \quad (63)$$

Die Papierdicke beträgt wie früher (gemäss Gleichung 54):

$$\Delta = R \left( 1 - \frac{r_0}{\bar{r}} \right) \frac{2c}{b + \frac{1}{b}} = R f. \quad (64)$$

Untersucht man, für welche Werte von  $c$  und  $b$  diese Dicke ein Maximum wird, so erhält man als Bedingungsgleichung mit  $\left( \frac{r_0}{\bar{r}} \right)^c = \varrho$ :

$$\frac{1 - 2 \frac{r_0}{\bar{r}} \varrho + \varrho^2}{1 - \varrho^2} \left[ \frac{1}{1 - \frac{r_0}{\bar{r}} \varrho} - \frac{\varrho}{\frac{r_0}{\bar{r}} - \varrho} \right] = - \frac{2}{\ln \varrho}.$$

Die Lösung enthält Fig. 13 und Tabelle II.

Tabelle II.

$\frac{r_0}{r}$	sehr klein	0,167	0,20	0,25	0,333	0,500	1
$\left(\frac{r_0}{r}\right)^c$	$\frac{1}{2} \frac{r_0}{r}$	0,044	0,05	0,0575	0,0675	0,089	—
c	$1 + \frac{\ln 2}{\ln \frac{r}{r_0}}$	1,743	1,865	2,060	2,455	3,49	—
b	$1 - \left(\frac{r_0}{2r}\right)^2$	0,597	0,575	0,544	0,498	0,455	—
$f_{\max}$	$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \cdot C$	1,280	1,288	1,298	1,305	1,320	1,324
$\sqrt{2} f_{\max}$	$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) \sqrt{2} C$	1,81	1,82	1,835	1,845	1,865	1,875

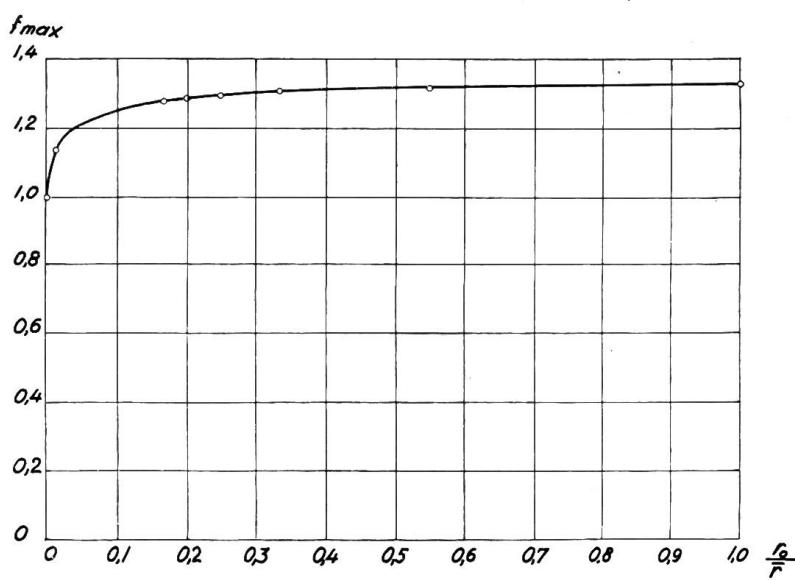


Fig. 13.

Man sieht aus Tabelle II, dass selbst bei so kleinen Verhältnissen wie  $\frac{r_0}{r} = 0,2$  die innere Kühlung die zulässige Betriebsspannung der Durchführung um 50 % erhöht, so dass wir nunmehr mit  $a = 0,0212$  und  $p_{70^\circ} = 0,002$  ( $F = 20$  kV/cm) folgende Grenzen für die Dauerspannung zwischen Bolzen und Flansch erhalten (für  $\frac{r_0}{r} = 0,2$ ).

Tabelle III

$\bar{\vartheta} 0^\circ \text{C}$	40	50	60	70	80	90
$p (F=20 \text{ kV/cm}) \dots \dots$	0,0011	0,0013	0,0016	0,002	0,0025	0,0031
$E_{\max} = \sqrt{2} F_{\max} \sqrt{\frac{\lambda}{a} \frac{F^2}{p}}$	306	282	254	227	203	182
Bei Serienschaltung von 2 Durchführungen (Fig. 14)	514	474	426	381	341	306

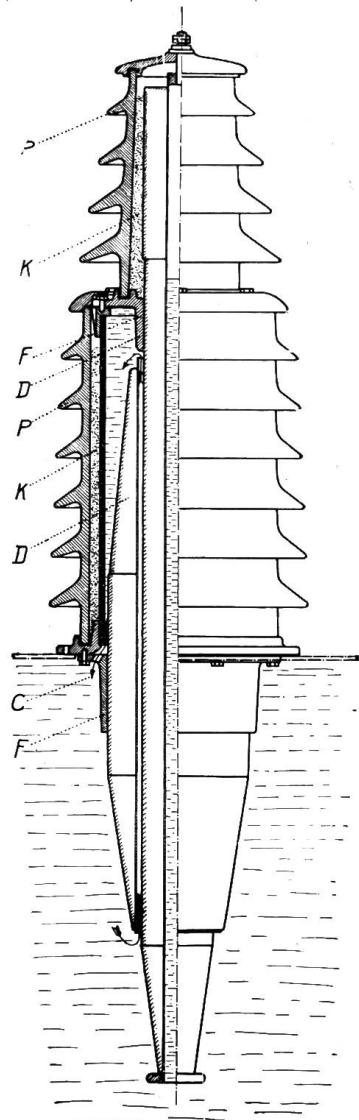


Fig. 14.

Durchführung mit äusserer und innerer Kühlung.

P = Porzellanmantel.

K = Komound.

F = Flansch.

D = Durchführung.

C = Oelzirkulation.

Man kann noch weitergehen und, wie Fig. 14 zeigt, eine erste Durchführung, die nur äussere Kühlung besitzt mit einer zweiten, doppelt gekühlten Durchführung in Serie schalten. Damit ergeben sich die Ziffern der letzten Reihe in Tabelle III. Bei Serienschaltung von 2 doppelt gekühlten Durchführungen erhöhen sich die Ziffern noch mehr, und nichts hindert, nötigenfalls zur Serieschaltung von mehr als 2 Durchführungen überzugehen, die nicht einmal notwendigerweise konzentrisch angeordnet zu sein brauchen. Man sieht: Auch ohne weitere Verbesserung der Papierqualität lassen sich die Grenzen für eine betriebssichere Konstruktion von Kondensatordurchführungen beliebig erweitern. Voraussetzung bleibt aber immer, dass man die Materialeigenschaften genau kennt und die Wärmeleitungstheorie beherrscht.

## Das Unterwerk Olten der S.B.B.

Von E. Heusser, Ingenieur, Aarau.

*Der Verfasser gibt eine kurze Beschreibung der Freiluftschanlage Olten der S.B.B., worin besonders die für diese Anlage ungünstigen örtlichen Verhältnisse und Witterungseinflüsse Erwähnung finden. Ferner werden Angaben gemacht über den Versuch, Isolieröl direkt aus den Transportfässern der Lieferanten in die Apparate der Freiluftschanlage einzufüllen.*

*L'auteur fait une courte description de la sous-station extérieure des chemins de fer fédéraux établie à Olten dans des conditions locales particulièrement difficiles.*

*Il donne des renseignements sur l'essai de transvaser l'huile directement des fûts servant au transport dans les appareils du poste.*

Am 16. Mai 1924 wurden die ersten Züge mittels elektrischer Traktion über die Strecke Olten-Basel geführt und die Tageszeitungen meldeten als besonderes Ereignis die Vollendung der Elektrifikation der ganzen Gotthardroute von Basel bis

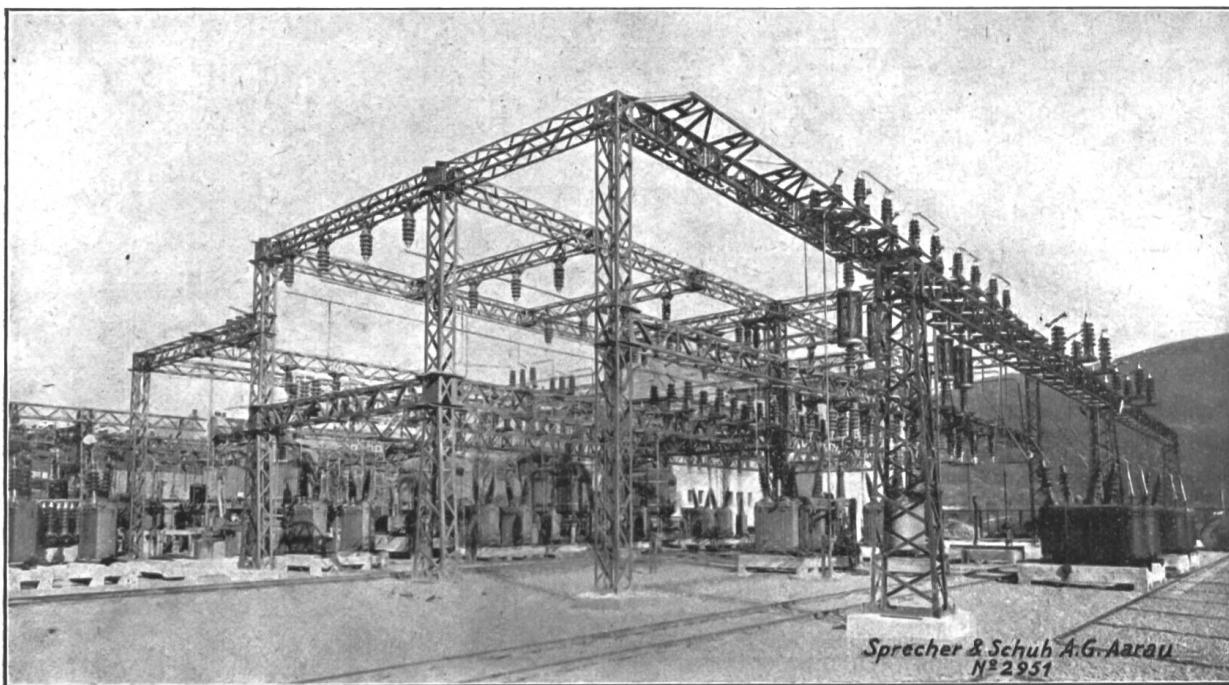


Fig. 1.  $4 \times 3000$  kVA 60/15 kV. Ansicht: Apparate und Sammelschiene 60 kV.

Chiasso. Mit diesem Zeitpunkt kam auch das Unterwerk Olten, eines der grössten seiner Art, in regelmässigen Dienst und da dieses, wie eine Anzahl anderer S.B.B.-Unterwerke, als Freiluftanlage gebaut ist, verlohnt es sich, dessen Entwicklung technisch etwas zu verfolgen.