Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 14 (1923)
Heft: 4

Artikel: Temperaturverlauf in Wärmespeichern
Autor: Bosch, ten
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1057576

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich, im Januar dazu die Beilage „Jahresheft".

Alle den **Inhalt** des „Bulletin" betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins
Seefeldstrasse 301, Zürich 8 — Telephon: Hottingen 7320, welches die Redaktion besorgt.

Alle Zuschriften betreffend **Abonnement, Expedition** und **Inserate** sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.
Stauffacherquai 36/38 Zürich 4 Telephon Selnau 7016

Abonnementspreis (für Mitglieder des S. E. V. gratis) für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft: Schweiz Fr. 20.—, Ausland Fr. 25.— Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 2.— plus Porto.

Ce bulletin paraît mensuellement. — „L'Annuaire" est distribué comme supplément dans le courant de janvier.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la **matière** du „Bulletin" au

Secrétariat général de l'Association Suisse des Electriciens
Seefeldstrasse 301, Zurich 8 — Telephon: Hottingen 7320 qui s'occupe de la rédaction.

Toutes les correspondances concernant les **abonnements, l'expédition** et les **annonces,** doivent être adressées à l'éditeur

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Stauffacherquai 36/38 Zurich 4 Telephon Selnau 7016

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 20.— pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger. L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 2.—, port en plus.

XIV. Jahrgang
XIVe Année

Bulletin No. 4

April
Avril 1923

Temperaturverlauf in Wärmespeichern.

Von dipl. Ing. *ten Bosch*, Zürich.

Der Autor leitet, ausgehend von der allgemeinen Fourierschen Differenzialgleichung der Wärmeleitung Formeln ab zur Berechnung des Temperaturverlaufs in der Platte und zwar für die vier möglichen Fälle der Wärmeaufnahme bezw. der Wärmeabgabe an den Grenzschichten. Am Beispiel der einseitigen Erwärmung einer Platte durch eine Wärmequelle konstanter Temperatur wird der Temperaturverlauf in Funktion des Ortes und der Zeit genauer untersucht.

L'auteur, partant des équations différentielles de Fourier pour la propagation de la chaleur, calcule la température dans un conducteur à section constante pour les 4 cas différents possibles lorsque le conducteur est chauffé ou refroidi par ses surfaces extrêmes.

Il examine en détail le cas où le conducteur est chauffé par une source de température constante et depuis une extrémité seulement.

Der in den Kriegsjahren herrschende Brennstoffmangel hat neben vielen, als Notbehelf zu bezeichnenden Aenderungen in der Wärmeausnützung auch Neuerungen gebracht, welche bleibenden Wert besitzen. Zu diesen Neuerungen ist sicher auch die Aufspeicherung von elektrischer Energie in der Form von Wärme zu rechnen, welche gestattet, im Ueberfluss vorhandenen und deshalb billigen Nachtstrom tagsüber für Raumheizung, Dampferzeugung und andere Zwecke zu verwenden.

Eine Klarlegung der Gesetze für die Wärmeübertragung in solchen Wärmespeichern ist um so mehr von Interesse, als die dazu erforderlichen Rechnungen durchaus nicht immer einfacher Natur sind und die abzuleitenden Beziehungen auch die Grundlage bilden für die Beurteilung einer grossen Anzahl von andern Problemen, wie die Wärmespannungen in Kesselblechen, in Schornsteinen, die Erwärmung von schnellaufenden Lagern, die Wärmevorgänge bei der Metallbearbeitung, für die Berechnung von Transformatoren usw.

Wenn ein elektrischer Strom J (in Ampere) an die elektrische Spannnungsdifferenz V (in Volt) angeschlossen wird, so ist die in der Zeit t Stunden durch denselben entwickelte Wärme

$$Q = 0{,}86\, J\, V\, t \;\; Cal. \qquad (1)$$

Ist an Stelle von V der Widerstand R (in Ohm) gegeben, so ist mit $J = \frac{V}{R}$

$$Q = 0{,}86\, J^2 R\, t \quad Cal.$$

Allgemein wird also durch einen Widerstand die Umsetzung elektrischer Energie in Wärme vermittelt. Dieser Widerstand kann fest, flüssig oder gasförmig sein; im letztern Fall bildet sich ein Lichtbogen. Die zu erhitzende Substanz kann nun selbst als Leitungswiderstand in den Stromkreis eingeschaltet werden (direkte Erhitzung), wie es für Wassererwärmung und beim elektrischen Stahlofen gebräuchlich ist. Oder die zu erhitzende Substanz befindet sich mit einem elektrisch geheizten Widerstand in direkter Berührung, oder durch Vermittlung eines Zwischenträgers, z. B. Luft. Diese Art der Erwärmung kommt bei den elektrischen Speicheröfen für Raumheizung wohl ausschliesslich vor.

So wurden, um einen raschen und billigen Ersatz für den fehlenden Brennstoff zu beschaffen, oft elektrische Heizelemente in den Feuerungsraum bestehender Kachelöfen eingebaut. Wenn auch unter den damals vorliegenden Verhältnissen diese Lösung vollständig gerechtfertigt war, so bestehen doch ernstliche Bedenken dagegen, wenn *neue* elektrische Speicheröfen nach diesem Prinzip aufgebaut werden.

Wie aus der Gleichung (1) folgt, hat man es durch Aenderung des Stromes und des Widerstandes vollständig in der Hand, in einem gegebenen Leiter in kürzester Zeit jede beliebige Wärmemenge zu konzentrieren. Aber das genügt noch nicht immer, da auch fast immer eine bestimmte Minimaltemperatur, z. B. für Dampferzeugung, erreicht werden muss. Die in dem Widerstand erzeugte Wärme wird nur teilweise zur Erwärmung des Körpers selbst gebraucht, während der Rest an die Umgebung abgegeben wird.

Sei nun:

ϑ = Temperatur des Körpers zur Zeit t;
ϑ_a = Anfangstemperatur und gleichzeitig die Temperatur der Umgebung;
c = die als unveränderlich angenommene spezifische Wärme des Körpers;
O = seine Oberfläche in m^2;
G = Gewicht des Körpers in kg;
α = Wärmeübergangszahl (W. Ü. Z.) zwischen Körperoberfläche und Umgebung[1]), so ist:

$$G\, c\, d\vartheta = 0{,}86\, J^2 R\, dt - \alpha 0\, (\vartheta - \vartheta_a)\, dt \tag{2}$$

Der Widerstand R ist im allgemeinen von der Temperatur abhängig, doch sind die Aenderungen meist so klein, dass diese bei der Betrachtung vernachlässigt werden darf. Wird nun zur Abkürzung

$$\frac{0{,}86\, J^2 R}{G c} \equiv A \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha 0}{G c} \equiv B$$

gesetzt, so ist:

$$d\vartheta = \{A - B\,(\vartheta - \vartheta_a)\}\, dt$$

oder integriert:

$$-\frac{1}{B}\, ln\{A - B(\vartheta - \vartheta_a)\} = t + C\,.$$

Für $t = 0$ ist $\vartheta = \vartheta_a$ also

$$-\frac{1}{B}\, ln\,(A - 0) = 0 + C$$

oder

$$1 - \frac{B}{A}(\vartheta - \vartheta_a) = e^{-Bt}$$

[1]) Für die verschiedenen Faktoren, welche die Wärmeübergangszahlen beeinflussen, vergl ten Bosch, Die Wärmeübertragung. J. Springer, Berlin. 1922.

und
$$\vartheta - \vartheta_a = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right)$$

Wird der stationäre Zustand abgewartet, dann ist $e^{-Bt} = 0$, und

$$\vartheta - \vartheta_a = \frac{A}{B} = 0{,}86\,\frac{J^2 R}{\alpha 0} \tag{3}$$

Durch entsprechende Wahl von J, R, O und α kann also leicht jede gewünschte Temperatur des Widerstandes erreicht werden. Bei der Ableitung dieser Gleichung ist aber stillschweigend vorausgesetzt, dass $\vartheta =$ Temperatur der Umgebung unveränderlich ist. Das trifft nun bei Wärmespeichern meist nicht zu. Sei G_1 die eingeschlossene Luft oder Flüssigkeitsmenge und c_1 die spezifische Wärme, dann kann aus der Differentialgleichung

$$G_1\, c_1\, d\vartheta_1 = \{\alpha 0\,(\vartheta - \vartheta_1) - kF\,(\vartheta_1 - \vartheta_a)\}\, dt$$

auch die veränderliche Temperatur der Umgebung berechnet werden. Wir wollen diese Rechnung hier aber nicht weiter verfolgen, sondern nur darauf hinweisen, dass wenn allgemein ein Körper die Wärmemenge Q Cal/m²/h durch seine Oberfläche F an die Umgebung abgeben soll, immer ein Temparatursprung $\Delta t = \frac{Q}{\alpha F}$ vorhanden ist, welcher um so grösser ist, je kleiner α ist. Soll nun, wie oben erwähnt, bei den Speicheröfen die Luft als Zwischenträger zwischen Heizkörper und Speichermasse dienen, so entsteht ein doppelter Temparatursprung, wodurch ein grosser Teil des erzeugten Temperaturgefälles verloren geht. Dieser Temperaturverlust ist um so bedeutender, weil α für ruhende oder schwach bewegte Luft sehr klein ist.

Betrachten wir eine Fläche dF im Innern eines ebenen, homogenen und isotropen Körpers von der Dicke s, und sei ϑ die Temperaturzunahme in der Zeiteinheit, so ist, wenn $c =$ unveränderliche spezifische Wärme und γ das spezifische Gewicht ist, die durch das Volumenelement $dx \cdot dF$ aufgenommene Wärme in der dt

$$\gamma\, c\, dF\, dx \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\, dt.$$

Nach dem Fourierschen Grundgesetz der Wärmeleitung ist diese Wärmemenge auch gleich

$$\lambda\, dF \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\, dt - \lambda\, dF \frac{\partial}{\partial x}\left(\vartheta - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\, dx\right) dt = \lambda\, dF \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\, dx\, dt.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke erhalten wir die Differenzialgleichung

$$\lambda\, dF \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\, dx\, dt = \gamma\, c\, dF\, dx \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\, dt$$

oder
$$\frac{\lambda}{\gamma c} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\,. \tag{4}$$

Warten wir den stationären Zustand ab, dann ist $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$, also

$$\lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = 0\,.$$

Integriert über die totale Wanddicke s

$$\lambda\,(\vartheta_1 - \vartheta_2) = ks\,.$$

Aus dieser Gleichung folgt also, dass die Temperatur in einer ebenen Wand im Beharrungszustand geradlinig verläuft.

Von der allgemeinen Differentialgleichung (4) sind

$$\left.\begin{aligned} \vartheta &= C\, e^{-n^2 at} \cos nx \\ \text{und} \quad \vartheta &= D\, e^{-m^2 at} \sin mx \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

zwei partikulare Lösungen, wovon man sich leicht durch Einsetzen der Werte überzeugen kann. Sowohl m als n, aber auch C und D können darin sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig durchlaufen, wodurch unendlich viele Teillösungen entstehen. Es kann demnach auch $m = n$ gesetzt werden, da beide ja innerhalb der angegebenen Grenzen jeden beliebigen Wert annehmen können. Die allgemeine Integralgleichung hat dann die Form:

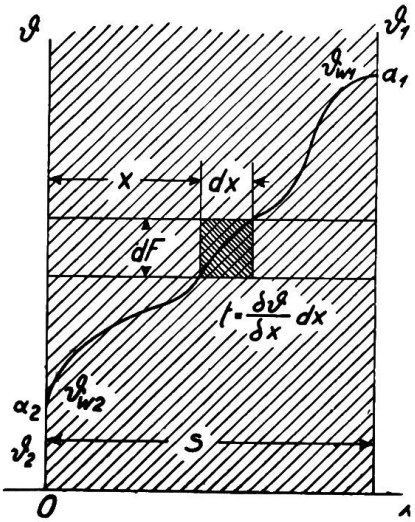

Fig. 1

$$\vartheta = A + B\,x + \sum_{-\infty}^{\infty} (C_k \cos n_k x + D_k \sin n_k x)\, e^{-n_k^2 at}$$

worin A und B beliebige Integrationskonstanten sind. Praktisch können nur entweder alle positiven oder alle negativen Werte von n_k in Betracht kommen, nie aber beide zusammen, weil eine der beiden Reihen für $n_k x$ dann immer imaginäre Werte gibt. Die allgemeine Gleichung vereinfacht sich dadurch zu

$$\vartheta = A + B\,x + \sum_{o}^{\infty} (C_k \cos n_k x + D_k \sin n_k x)\, e^{-n_k^2 at}. \qquad (6)$$

Hat man nun zwei verschiedene Körper, von gleicher Form und unter gleichen Anfangs- und Oberflächenbedingungen, so werden A, B, C_k, D_k und n_k in beiden Fällen gleich sein. Die Temperaturen der beiden Körper sind demnach in beiden Fällen gleich und werden sich an korrespondierenden Stellen auch gleich mit der Zeit verändern, wenn die Grösse $a = \dfrac{\lambda}{\gamma c}$ für beide Körper gleich ist. Aus diesem Grunde wird a auch die *Temperaturleitfähigkeit* genannt.

Wie schon erwähnt, sind die Integrationskonstanten aus den Anfangs- und Grenzbedingungen zu bestimmen; und zwar muss in den Grenzschichten die durch Leitung zu- resp. fortgeführte Wärme gleich der von der Umgebung aufgenommenen resp. abgegebenen Wärme sein. Für die Flächeneinheit also,

$$\left.\begin{aligned} \text{bei } x = 0, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)_{x=o} &= \alpha_1 (\vartheta_1 - \vartheta_{w_1}) \\ \text{bei } x = s, \quad \lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=s} &= \alpha_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{w_2}) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

worin die Wandtemperaturen $\vartheta_{w_1} = A + \sum_{o}^{\infty} C_k\, e^{-n_k^2 a t}$

und $\vartheta_{w_2} = A + B s + \sum_{o}^{\infty} (C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s)\, e^{-n_k^2 at}$.

Aus der Integralgleichung (6) folgt allgemein:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = B + \sum_{o}^{\infty} (-n_k C_k \sin n_k x + n_k D_k \cos n_k x)\, e^{-n_k^2 at}$$

$$\text{und für } x = 0, \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=o} = B + \sum_{o}^{\infty} n_k D_k\, e^{-n_k^2 at}$$

$$\text{für } x = s, \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=s} = B + \sum_{o}^{\infty} (-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s)\, e^{-n_k^2 at}. \qquad (8)$$

Bei der Bestimmung dieser Konstanten muss nun aber unterschieden werden, ob in diesen Grenzschichten Wärme aufgenommen oder abgegeben wird; und wenn die aufgenommene Wärme als positiv bezeichnet wird, muss dementsprechend die abgegebene Wärme als negative Grösse eingeführt werden.

1. Fall. In beiden Grenzschichten wird Wärme aufgenommen, also $\vartheta_1 > \vartheta_{w_1}$ und $\vartheta_2 > \vartheta_{w_2}$.

Aus den Bedingungsgleichungen (7) folgt dann:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{a}{\lambda}\{\vartheta_1 - A - \sum_0^\infty C_k e^{-n_k^2 at}\} = B + \sum_0^\infty n_k D_k e^{-n_k^2 at} \tag{9}$$

und

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=s} = \frac{a_2}{\lambda}\{t_2 - A - Bs - \sum_0^\infty (C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s) e^{-n_k^2 at}$$

$$= B + \sum_0^\infty (-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s) e^{-n_k^2 at}. \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) und (10) müssen nun für alle Werte von n_k identisch erfüllt sein, was nur dann möglich ist, wenn die Koeffizienten der einzelnen Glieder gleich sind.

Aus Gleichung (9) folgt also:

$$\frac{a_1}{\lambda}\{\vartheta_1 - A\} \equiv B$$

und

$$n_k D_k \equiv -\frac{a_1}{\lambda} C_k. \tag{11}$$

Und aus Gleichung (10)

$$\frac{a_2}{\lambda}(\vartheta_2 - A - Bs) \equiv B$$

und

$$-n_k C_k \sin n_k s + n_k D_k \cos n_k s \equiv -\frac{a_2}{\lambda}(C_k \cos n_k s + D_k \sin n_k s).$$

Dividiert man beiderseits durch $\cos n_k s$

$$-n_k c_k \operatorname{tg} n_k s + n_k D_k = -\frac{a_2}{\lambda} C_k - \frac{a_2}{\lambda} D_k \operatorname{tg} n_k s$$

$$\operatorname{tg} n_k s \left(\frac{a_2}{\lambda} D_k - n_k c_k\right) = -\frac{a_2}{\lambda} C_k - n_k D_k.$$

Den Wert von $n_k D_k$ aus Gleichung (11) darin eingesetzt:

$$\operatorname{tg} n_k s \left(-\frac{a_1 a_2}{\lambda^2} - n_k\right) = -\frac{a_2}{\lambda} + \frac{a_1}{\lambda}$$

$$\operatorname{tg} n_k s = n_k \lambda \frac{a_2 - a_1}{n_k^2 \lambda^2 + a_1 a_2}. \tag{12}$$

Aehnliche Beziehungen lassen sich auch für die anderen Fälle ableiten.

2. Fall: In beiden Grenzschichten wird Wärme abgegeben, dann folgt aus den Gleichungen (9) und (10):

$$-\frac{a_1}{\lambda}(\vartheta_1 - A) = B$$

$$n_k D_k = +\frac{a_1}{\lambda} C_k \tag{11a}$$

und
$$-\frac{a_2}{\lambda}(\vartheta_2 - A - B\,s) = B$$

$$tg\, n_k\, s = -\frac{a_2 - a_1}{n_k^2\,\lambda^2 + a_1\,a_2}\, n_k\,\lambda\,. \tag{12a}$$

3. Fall: In der Grenzschicht $x = 0$ wird Wärme aufgenommen, und in der Grenzschicht $x = s$ wird Wärme abgegeben.

$$\frac{a_1}{\lambda}(\vartheta_1 - A) = B$$

$$n_k\, D_k = -\frac{a_1}{\lambda}\, C_k \tag{11b}$$

und
$$-\frac{a_2}{\lambda}(\vartheta_2 - A - B\,s) = B$$

$$tg\, n_k\, s = -\, n_k\,\lambda\,\frac{a_1 + a_2}{n_k^2\,\lambda^2 - a_1\,a_2}\,. \tag{12b}$$

4. Fall: In der Grenzschicht $x = 0$ wird Wärme abgegeben, und in der Grenzschicht $x = s$ wird Wärme aufgenommen.

$$-\frac{a_1}{\lambda}(\vartheta_1 - A) = B$$

$$n_k\, D_k = \frac{a_1}{\lambda}\, C_k \tag{11c}$$

und
$$\frac{a_2}{\lambda}(\vartheta_2 - A - B\,s) = B$$

$$tg\, n_k\, s = +\, n_k\,\lambda\,\frac{a_1 + a_2}{n_k^2\,\lambda^2 - a_1\,a_2}\,. \tag{12c}$$

Durch die Grenzbestimmungen sind also die bisher *stetig* von 0 bis ∞ veränderlichen Werte von n_k auf Lösungen der Gleichungen (12) beschränkt. Diese transzendente Gleichung lässt sich am einfachsten auf graphischem Wege lösen, indem die beiden Kurven

$$f_1 = tg\, n_k\, s$$

und
$$f_2 = \pm\, n_k\, s\,\frac{a_2 \pm a_1}{n_k^2\,\lambda^2 \pm a_1\,a_2}$$

aufgezeichnet werden. Die Kurve f_1 besteht aus den unendlich vielen Zweigen der Tangenskurve, während f_2 allgemein eine Kurve dritten Grades ist, welche die Tangenskurve in unendlich vielen Punkten schneidet. Wir erhalten also immer noch unendlich viele Werte von n_k, welche aber nicht mehr sämtliche Zahlen von 0 bis ∞ stetig durchlaufen können, sondern bestimmte Werte umfassen.

Nachdem aus Gleichung (12) die Werte von n_k bestimmt sind, können die noch unbekannten Integrationskonstanten A, B, C_k und D_k aus der Anfangs- und Endtemperaturverteilung berechnet werden. Im Grenzfall des Beharrungszustandes, also für $t = \infty$, geht die Gleichung (6) über in

$$\vartheta_{t=\infty} = A + B\,x \tag{13}$$

das ist der schon früher gefundene geradlinige Temperaturverlauf, wodurch die Werte A und B festgelegt sind.

Die Konstanten C_k und D_k sind durch die Gleichungen (11) verbunden, so dass nur noch die Bestimmung von C_k übrig bleibt, wozu die ursprüngliche Temperaturverteilung, zur Zeit $t = 0$ für alle Werte von x, bekannt sein muss. Allgemein ist

$$\vartheta_{t=o} = A + Bx + \sum_{o}^{\infty} C_k \left(\cos n_k x \pm \frac{a_1}{\lambda n_k} \sin n_k x \right) = f(x) \tag{14}$$

und es ist die Aufgabe gestellt, die Funktion $f(x)$ in eine unendliche Reihe mit Sinus- und Kosinusgliedern zu zerlegen. Diese mathematische Aufgabe ist unter der Voraussetzung, dass einige besondere Bedingungen, die sog. „Dirichletschen" Bedingungen, erfüllt sind, durch die Theorie der Fourierschen Reihen gelöst. Allgemein ist

$$C_k = \frac{\int_{s_1}^{s_2} f(x) \cos n_k x \, dx}{\int_{s_1}^{s_2} \cos^2 n_k x \, dx} . \tag{15}$$

Praktisch wichtig ist besonders der Fall einer unveränderlichen Anfangstemperatur, also $\vartheta_{t=o} = \vartheta_a$ für alle Werte von x. Dann ist

$$C_k = \frac{\int_{s_1}^{s_2} \vartheta_a \cos n_k x \, dx}{\int_{s_1}^{s_2} \cos^2 n_k x \, dx} = \vartheta_a \frac{\left(\sin n_k x \right)_{x=s_1}^{x=s_2}}{\left(\frac{1}{4} \sin 2 n_k x + \frac{1}{2} n_k x \right)_{s_1}^{s_2}} .$$

Da der Koordinatenanfangspunkt beliebig gewählt werden darf, nehmen wir $s_1 = 0$

$$C_k = \vartheta_a \frac{\sin n_k s}{\frac{1}{4} \sin 2 n_k s + \frac{1}{2} n_k s} = \frac{4 \sin n_k s}{\sin 2 n_k s + 2 n_k s} . \tag{16}$$

Liegen nun Fälle vor, wo die Temperaturverteilung von Anfang an symmetrisch zur YZ-Ebene ist, und nach der Natur der Grenzbedingungen auch immer bleiben muss, dann ist es rechnerisch von Vorteil, den Nullpunkt in die Symmetrie-Ebene, also in die Mitte der Platte zu verlegen. Der Kosinus behält beim Uebergang vom positiven zum gleich grossen negativen Argument seinen Wert bei, während der Sinus das Vorzeichen ändert. Bei einer symmetrischen Temperaturverteilung können demnach in der allgemeinen Integralgleichung keine Sinusglieder auftreten, und in diesem Falle vereinfacht sich diese zu

$$\vartheta = A + \sum_{o}^{\infty} C_k \cos (n_k x) \, e^{-n_k^2 a^2} \tag{6a}$$

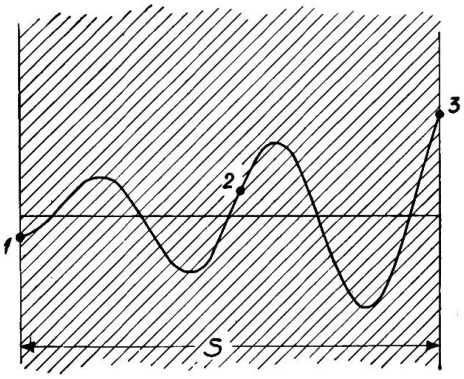

Fig. 2

während dann auch immer, wie leicht abzuleiten ist, die Kurve dritten Grades in eine gerade Linie übergeht. Da in diesem Falle $s_1 = s_2$ ist, wird

$$C_k = \vartheta_a \frac{2 \sin n_k s}{\frac{1}{2} \sin 2 n_k s + n_k s} .$$

Die Verlegung des Nullpunktes hat also keinen Einfluss auf C_k.

Wir haben nun aber eine neue Konstante ϑ_a eingeführt, während die Anfangstemperaturverteilung auch schon allgemein durch die Konstanten A, B und C_k festgelegt war. Es muss demnach eine Beziehung zwischen diesen Konstanten vorhanden sein. Die Bezeichnung $\vartheta_{t=o} = \vartheta_a$ muss für alle Werte von x gelten, also auch für $x = 0$

$$\vartheta_{t=o} = \vartheta_a + \Sigma C_k$$

und da sämtliche Werte von C_k nach der Gleichung (16) mit ϑ_a proportional sind, also $C_k = p \vartheta_a$ ist, muss

$$\vartheta_a = A + \vartheta_a \Sigma p = A + \sigma \vartheta_a$$

oder

$$\sigma = \frac{\vartheta_a - A}{A} \quad \text{und} \quad \Sigma C_k = \sigma \vartheta_a \tag{17}$$

sein.

Für $n_k = 0$ liefert Gleichung (16) den unbestimmten Wert $C_0 = \frac{0}{0}$. Wenn dieser Wert aus den Anfangs- und Endbedingungen wohl zu berechnen ist, so ist es doch zu empfehlen, den Nullpunkt des Koordinatensystems so festzulegen, dass die Kurven f_1 und f_2 keinen gemeinsamen Schnittpunkt mit der f-Axe haben, was ja immer leicht möglich ist.

Wenn nun mit diesen Koeffizienten für bestimmte Verhältnisse, also bei gegebenem Werte von a_1, a, λ, a und t_a der Temperaturverlauf für $t = 0$ aufgezeichnet wird, so erhält man, namentlich wenn starke Temperaturänderungen von dem Anfangszustand auftreten, wellenförmige Linien, welche in den

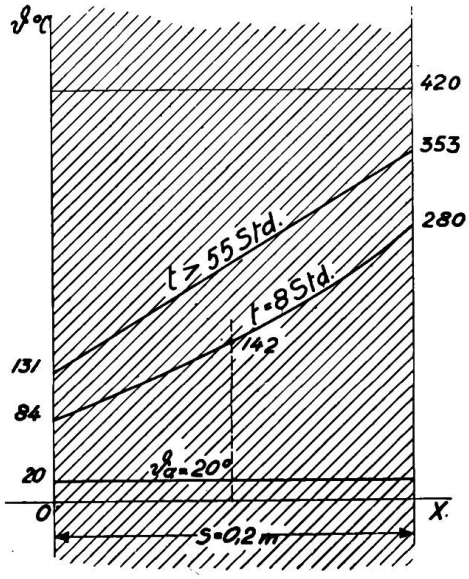

Fig. 3

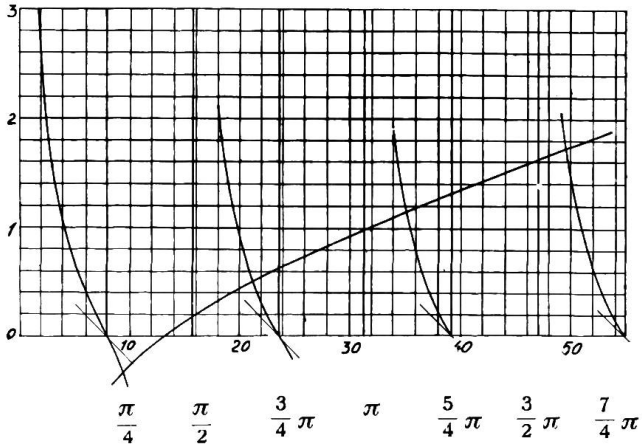

Fig. 4

Maxima und Minima ganz bedeutend von dem unveränderlichen Mittelwert abweichen, auch wenn 6,7 oder mehr Glieder der unendlichen Reihe berechnet werden. Wenn in solchen Fällen dann nur einzelne Punkte, z. B. 1, 2 und 3 berechnet werden, würde man ein ganz falsches Bild der Temperaturverteilung erhalten. Da aber diese Glieder mit dem Faktor $e^{-n_k^2 a t}$ zu multiplizieren sind, verschwinden diese Abweichungen mit der Zeit rasch.

Wichtiger als die Frage der Temperaturverteilung ist die Bestimmung der Wärmeabgabe, resp. Wärmeaufnahme. Ein Oberflächenelement lässt in der Zeit dt, $\alpha(\vartheta_{w_1} - \vartheta_1)\, dF\, dt$ *Cal* durch, so dass die in der Zeit aufgespeicherte Wärmemenge

$$Q = \int_0^t \alpha_1 (\vartheta_{w_1} - \vartheta_1)\, dF_1\, dt \pm \int_0^t \alpha_2 (\vartheta_2 - \vartheta_{w_2})\, dF_2\, dt$$

ist. Je nach den vorliegenden Anfangs- und Endbedingungen ist folgende Rechnungsart zur Bestimmung der aufgenommenen oder abgegebenen Wärme oft vorteilhafter. Ein Raumelement $dF dX$ der Platte hat innerhalb der Zeit t von 0 bis t sich um den Betrag $\vartheta - \vartheta_a$ erwärmt oder abgekühlt, wodurch es die Wärmemenge $c\gamma(\vartheta - \vartheta_a)\, dF\, dx$ aufgenommen resp. abgegeben hat. Die Gesamtwärme ist dann:

$$Q = c\gamma \int_0^t (\vartheta - \vartheta_a)\, dF\, dt$$

und da allgemein die Temperaturen ϑ mit Hilfe der Gleichung (6) bestimmt sind, lassen sich auch die Integrale berechnen.

Die Form der gefundenen Gleichungen ist aber nicht so, dass daraus einfach der Einfluss der einzelnen Faktoren, wie Wandstärke, Wärmeleitzahl, spezifische Wärme, W. U. Z. usw. abgeleitet werden kann, sondern dieser Einfluss muss durch Einsetzen von Zahlenwerten von Fall zu Fall untersucht werden. Als Beispiel seien ähnliche Verhältnisse, wie sie bei den Speicheröfen vorkommen können, gewählt.

Beispiel.

Eine ebene Wand von 200 mm Dicke hat eine gleichmässige Anfangstemperatur von 20° C und wird einseitig durch Gase von 420° C erwärmt. Es soll der Temperaturverlauf nach 8 Stunden, resp. nach Eintritt des Beharrungszustandes berechnet werden. Aus den physikalischen Tabellen ist zu entnehmen:

$$\gamma = 1800 \text{ kg/cm}^3 \qquad C = 0{,}22 \frac{Cal}{kg\,^0C} \qquad \lambda = 0{,}6 \frac{Cal\ m}{m^2\,h\,^0C}$$

$$\text{Angenommen sei } \left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 10 \\ \alpha_2 = 6 \end{array}\right\} \frac{Cal}{m^2\,h\,^0C} \qquad s = 0{,}2 \text{ m.}$$

Daraus berechnet sich $a = \frac{\lambda}{\gamma\, c} = \frac{0{,}6}{1800 + 0{,}22} = 0{,}0015\ m^2/h$

und
$$tg\, n_k\, s = n_k\, \lambda \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{n_k^2\, \lambda^2 - \alpha_1\, \alpha_2} \text{ (Fall 4)}$$
$$= \frac{9{,}6\, n_k}{0{,}36\, n_k^2 - 60}$$

oder
$$ctg\, n_k\, s = \frac{0{,}36\, n_k^2 - 60}{9{,}6\, n_k}\,.$$

Diese transzendente Gleichung wird graphisch gelöst (Fig. 4) und dadurch werden folgende Werte von n_k gefunden.

n_k	9,2	21,2	35,15	49,7	64,7	160,6
$n_k\, s$ im Bogenmass . . .	1,84	4,24	7,03	9,94	12,94	16,06
$n_k\, s$ im Gradmass . . .	105° 30'	243°	43°	210°	21° 50'	200° 40'
$sin\, n_k\, s$	0,964	− 0,891	0,628	− 0,500	0,372	− 0,353
$cos\, n_k\, s$	− 0,267	− 0,454	0,731	− 0,864	0,927	− 0,936
$2\, n_k\, s$	211°	126°	86°	60°	43° 40'	41° 20'
$sin\, 2\, n_k\, s$	− 0,515	0,809	0,998	0,866	0,690	0,660
$C_k = t_a \frac{4\, sin\, n_k\, s}{sin\, n_k\, s + 2\, n_k\, s}$ (für $\vartheta_a = 1$) . .	1,215	− 0,384	+ 0,167	− 0,092	+ 0,056	− 0,044
$D_k = C_k \frac{\alpha_1}{\lambda\, n_k}$	2,20	− 0,302	+ 0,0795	− 0,031	+ 0,0144	− 0,0046
$n_k^2\, a$	0,126	0,68	1,85	3,7	6,3	–
$n_k \frac{s}{2}$	52° 45'	121° 30'				
$sin\, n_k \frac{s}{2}$	0,785	0,862				
$cos\, n_k \frac{s}{2}$	0,605	− 0,522				

Die Koeffizienten A und B können aus den Endtemperaturen im Beharrungszustand berechnet werden, und zwar ist A dann die Wandtemperatur für $x = 0$, und $B = \frac{\vartheta_{w_1} - \vartheta_{w_2}}{s}$

$$A = \vartheta_{w_2} = \vartheta_2 + \frac{k}{a_2}(\vartheta_1 - \vartheta_2)$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{s}{\lambda} = 0{,}6, \text{ also } k = 1{,}67, \text{ und damit } A = 131\ ^0\text{C}.$$

$$\vartheta_{w_2} = \vartheta_1 - \frac{k}{a_1}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = 353\ ^0\text{C}$$

und damit
$$B = \frac{351 - 131}{0{,}2} = \mathbf{1110}$$

und
$$\sigma = \frac{\vartheta_a - A}{\vartheta_a} = \frac{20 - 131}{20} = -\frac{111}{20}.$$

Der Temperaturverlauf nach 8 Stunden ist dann:

$$\vartheta_{t=8} = 131 + 1110\,x - \frac{111}{20} \Sigma\, C_k \left(\cos n_k x + \frac{a_1}{\lambda\, n_k} \sin n_k x \right) e^{-n_k^2 a 8}$$

für $x = 0 = 84\ ^0\text{C}$ für $x = s$, $\vartheta = 280{,}5\ ^0\text{C}$ für $x = \frac{s}{2}$, $\vartheta = 142\ ^0\text{C}$

Der stationäre Zustand ist praktisch erreicht, wenn $n_k^2\, a\, t > 7$ für den kleinsten Wert von n_k ist, also nach $\frac{7}{0{,}126} = 54{,}5$ Stunden.

Auch die Abkühlung der Platte lässt sich mit den gleichen Formeln untersuchen, wobei aber nicht übersehen werden darf, dass bei Speicheröfen meist nur die Wärmeabgabe an der Seite der niedrigen Oberflächentemperaturen als Nutzwärme für die Raumheizung zu betrachten ist.

Analytische Behandlung der eindimensionalen Wärmeströmung in einer homogenen Platte.

Vom Generalsekretariat des S. E. V. und V. S. E. (Ingenieur *H. F. Zangger*).

Im Anschluss an vorstehende Arbeit werden Gleichungen abgeleitet, die den Temperaturverlauf in Funktion des Ortes und der Zeit angeben bei eindimensionaler Wärmeströmung in einer homogenen Platte und Erwärmung derselben mit konstanter Leistung, wie auch bei Abkühlung von beliebigem Erwärmungszustande aus nach abgestellter Heizung.

Der Temperaturverlauf wird ausserdem für drei Beispiele errechnet und graphisch dargestellt.

Parallèlement avec le travail présenté par M. ten Bosch, M. Zangger, développe dans l'article suivant les équations qui donnent, pour une plaque homogène, la variation de la température d'un endroit à l'autre, et dans le même point d'un instant à l'autre, lorsque cette plaque est chauffée par une source de puissance constante et aussi pendant la période de refroidissement lorsque la source de chaleur vient à être supprimée à uninstant quelconque.

La variation de la température est en plus illustrée par trois exemples.

Das Generalsekretariat des S. E. V. und V. S. E. hat sich in den Jahren 1918 und 1919 eingehend mit der Frage der Wärmespeicherung befasst und hat unter anderem auch den zeitlichen und örtlichen Temperaturverlauf bei eindimensionaler