Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 3 (1912)

Heft: 12

Artikel: Über eine direkte Analyse von Wechselspannungen und Wechselströmen

Autor: Hänni, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-1056928

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 22.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen **„Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz"** sowie **„Jahresheft"** und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin" betreffenden Zuschriften sind zu richten an die

Redaktion: Ing.-Consulent Dr. W. Kummer, Mythenstrasse 15, Zürich II (Telephon 5806)

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G., Zürich
Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Est publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin parait mensuellement et comporte comme annexes annuelles la **„Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse"**, ainsi que l'**„Annuaire"**.

Toutes les communications concernant la matière du „Bulletin" sont à adresser à la

Rédaction: Ing.-Conseil Dr. W. Kummer Mythenstrasse 15, Zurich II (Téléphone 5806)

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les insertions sont à adresser à

l'éditeur: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S.-A., Zurich
Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

III. Jahrgang
IIIe Année

Bulletin No. 12

Dezember
Décembre 1912

Ueber eine direkte Analyse von Wechselspannungen und Wechselströmen.

Von *Dr. A. Hänni,* Konstantinopel.

Der üblichen mathematischen Behandlung des Wechselstromes wird eine periodische elektromotorische Kraft zu Grunde gelegt von rein sinusförmigem zeitlichen Verlaufe. Es wird damit eine Voraussetzung gemacht, die bei den gebräuchlichen Wechselströmen exakt niemals zutrifft. Der wahre zeitliche Verlauf der durch die Wechselstromgeneratoren erzeugten elektromotorischen Kräfte weicht immer von der Sinusform ab.

Die Abweichungen sind im Allgemeinen nicht gross, genügen aber doch, um einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf den Zusammenhang zwischen den gemessenen Wechselstromgrössen zu besitzen.[1])

Es sind deshalb schon zahlreiche Untersuchungen angestellt worden über die Ursachen und Wirkungen [2]) dieser Abweichungen und deren mathematische Behandlung; [3]) die verschiedensten Methoden zur raschen und genauen Ermittlung des wahren zeitlichen Verlaufes von Wechselspannungen und Wechselströmen wurden angegeben und ausgearbeitet.[4])

Derselbe ist jedenfalls eine von der Sinusfunktion wenig verschiedene periodische Funktion der Zeit, die man deshalb immer als Fourier'sche Reihe mit rasch abnehmenden Koeffizienten der höheren Glieder auffassen wird. In diesem Sinne kann man beim gewöhnlichen Wechselstrome von einer Deformation reden, das erste Glied seiner Fourier'schen

[1]) *H. F. Weber*: Wied. Ann. **63**, S. 366. — *Horschitz*: E. T. Z. 1903, S. 993. — *E. Orlich*: E. T. Z. 1902, S. 543.

[2]) *Feldmann*: Wechselstromtransformatoren, II, S. 424. — *Rosa, Lloyd & Reid*: Bull. of the Bur. of Stand, I, Nr. 3, S. 421. — *Feldmann*: E. T. Z. 1895, S. 478. — *Eisler*: E. T. Z. 1896, S. 762. — *Huguet*: E. T. Z. 1896, S. 579. — *Wangemann*: E. T. Z. 1904, S. 780. — *Lloyd*: E. T. Z. 1909, S. 500. — *Adams*: E. T. Z. 1910, S. 344, 407. — *Martienssen*: Phys. Zeitschr. 1910, S. 448. — *Fleming*: Electrician, 35, S. 304. — *M. Wien*: Wied. Ann. **66**, S. 859.

[3]) *H. F. Weber*: Wied. Ann. **63**, S. 366.

[4]) *E. Orlich*: „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven", Braunschweig 1906.

Entwicklung als seine Haupt- oder Grundwelle bezeichnen, die höheren Glieder als seine Oberwellen.

Die zwischen zwei Punkten eines Stromnetzes bestehende Wechselspannung wird demnach in der Form zu schreiben sein:

$$e = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{E}_n \sin (n\omega t + \alpha_n)$$

der in einem Zweige eines Stromnetzes herrschende Wechselstrom desgleichen in der Form:

$$i = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_n \sin (n\omega t + \beta_n)$$

Die Koeffizienten $\mathcal{E}_n$ und $\mathcal{J}_n$ sind dann die Amplituden, die Grössen α_n und β_n die Phasenkonstanten der einzelnen Wellen. Der Koeffizient ω giebt die Periode dieser Funktionen an, gemäss:

$$\omega = 2 \pi N$$

wenn N die Anzahl der Perioden in der Zeiteinheit bedeutet.

Da die Phasenkonstanten nur eine zeitliche Verschiebung der einzelnen Wellen gegeneinander ausdrücken, sind sie von untergeordneter Bedeutung gegenüber den Amplituden. Während diese die Grösse der Deformationen der Grundwelle angeben, charakterisieren die Phasenkonstanten nur die zeitliche Verteilung derselben.

Deshalb sind es die Amplituden der einzelnen Wellen, welche in erster Linie interessieren und auf deren Ermittlung es hauptsächlich ankommt, die Phasenkonstanten brauchen in den meisten Fällen gar nicht berücksichtigt zu werden, auch wenn die Bestimmung der Amplituden nebenbei die Phasenkonstanten liefern sollte.

Tatsächlich ergeben die bekannten Methoden zur Ermittlung der Amplituden einer Wechselspannung oder eines Wechselstromes (Wechselstromanalyse) gleichzeitig auch die Phasenkonstanten. Mit drei Ausnahmen [1]) beruhen sie alle auf der Bestimmung einer grossen Anzahl von Momentanwerten, entweder von solchen einer Wechselspannung zwischen zwei Punkten eines Stromnetzes oder von solchen eines Wechselstromes in einem Zweige desselben. Die gebräuchlichen Methoden benötigen deshalb alle [2]) eigens zu diesem Zwecke gebaute Vorrichtungen und Apparate, da die üblichen Instrumente der Meßtechnik ja nur effektive Werte der Wechselstromgrössen angeben.

Lassen auch einige der bekannten Methoden an Sicherheit, Genauigkeit und Raschheit der Ausführung nichts zu wünschen übrig, [3]) so wäre doch manchmal ein exaktes Verfahren erwünscht, welches mit den gebräuchlichen in jedem Laboratorium vorhandenen Meßinstrumenten auskommt. [2])

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es nun eben, eine solche Methode zur Ermittlung der Amplituden von Wechselspannungen und Wechselströmen auszuarbeiten und in ihrer Verwendbarkeit und Genauigkeit zu prüfen. [4])

Wie auch einige bisherigen Methoden ist sie nicht anwendbar zur Bestimmung von elektromotorischen Kräften, sie ermöglicht nur die Analyse von Wechselspannungen zwischen zwei Punkten eines Stromnetzes. Die Analyse von Wechselströmen muss hierbei zurück-

[1]) *Th. Des Coudres*: E. T. Z. 1900, S. 752, auch Verh. d. phys. Ges. zu Berl., **98**, S. 129. — *P. G. Agnew*: Bull. of the Bur. of Stand., **6**, S. 95 (1909). — E. T. Z. 1910, S. 515. — *Pupin*: Am. Journ. of Science, **48**, S. 379, 473 (1894).

[2]) Von den sub [1]) erwähnten Methoden benötigt diejenige von Coudres, trotzdem sie nicht auf der Ermittlung von Momentanwerten beruht, doch eine Spezialkonstruktion, während die von Agnew und von Pupin angegebenen ohne solche auskommen, dafür aber höchst unvollkommen sind.

[3]) *Niethammer*: E. T. Z. 1900, S. 309.

[4]) Die hier zu entwickelnde Methode geht von den gleichen Überlegungen aus wie diejenige von *P. G. Agnew*, und ist also in diesem Sinne als eine Vervollkommnung derselben aufzufassen.

geführt werden auf diejenige von Wechselspannungen, was natürlich stets möglich ist. Denn zwischen der Form eines Wechselstromes in einem Zweige eines Stromnetzes und der Form der Spannung zwischen zwei Stellen dieses Zweiges besteht eine eindeutige Beziehung, wie später gezeigt wird.

Im Gegensatze zu den bisherigen Methoden ergibt die hier zu besprechende bei der Ermittlung der Amplituden nicht gleichzeitig auch die Phasenkonstanten, welcher Umstand aber, entsprechend den geführten Betrachtungen, keinen Nachteil dieser Methode bedeutet.

Die Berechnung der Amplituden bei den indirekten Methoden.

Die Analyse von Spannungs- und Stromkurven.

Die sämtlichen üblichen indirekten Methoden zur Analyse von Wechselströmen und Wechselspannungen beruhen alle auf der Aufnahme der sogenannten Spannungs- resp. Stromkurven. Sie unterscheiden sich demnach nur in dem besonderen Verfahren [1]) der Ermittlung einer genügenden Anzahl von Momentanwerten, welche hierauf jedesmal (mit der Zeit als Abscisse), in einem Koordinatensysteme als Ordinaten aufgetragen, die gesuchte Kurve ergeben.

Eine vollständige Übersicht über alle bekannten Methoden und eine ausführliche Darstellung derselben findet man bei *E. Orlich* „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven".[2])

Sobald durch dieselben die Kurve der zu analysierenden Wechselspannung oder des Wechselstromes gefunden ist oder gezeichnet vorliegt, setzt erst die eigentliche Bestimmung der Amplituden ein. Alle solche Methoden führen also die Analyse von Wechselspannungen und Wechselströmen zurück auf diejenige ihrer Kurven und sind in diesem Sinne als indirekte Methoden zu bezeichnen.

Die wenigen bekannten direkten Methoden ermitteln dagegen die Amplituden durch Rechnung aus direkt gemessenen Wechselstromgrössen, mit denen sie in bestimmtem Zusammenhange stehen. Eine solche direkte Methode wird auch die in dieser Arbeit zu entwickelnde sein und soll eine Vereinfachung gegenüber den schon bestehenden ergeben.

Während bei den indirekten Methoden die Aufnahme der Kurven selbst zu einem ziemlich hohen Grade der Genauigkeit und Einfachheit gelangt ist, bedeutet hingegen die Analyse der gezeichneten Kurven immer noch, trotz mannigfach angegebener Vereinfachungen [3]) eine komplizierte und zeitraubende Arbeit.

Es werde deshalb der eigentlichen Aufgabe dieser Abhandlung ein Versuch vorangestellt, die Analyse gezeichneter Kurven auf arithmetischem Wege noch weitgehender zu vereinfachen als bisher.

Zur Analyse einer periodischen Kurve, d. h. zur Aufstellung ihrer Gleichung und zwar in der Form einer Fourier'schen Reihe, ist natürlich nur eine Periode derselben erforderlich und wird man als Abscisse nicht die Zeit selber, sondern den durch die Beziehung

$$\varphi = \omega t$$

definierten Winkel in Bogenmass benützen, wobei φ von 0 bis 2π zu zählen ist.

---

[1]) *Lutalowsky*: E. T. Z. 1896, S. 211. — *Drexler*: E. T. Z. 1896, S. 378. — *Behn-Eschenburg*: E. T. Z. 1896, S. 483. — *Eichberg*: E. T. Z. 1897, S. 556. — *Kübler*: E. T. Z. 1897, S. 652. — *Marcher*: E. T. Z. 1897, S. 220. — *Franke*: E. T. Z. 1899, S. 804, und Zeitschr. für Instr.-Kunde, **21**, S. 11. — *Niethammer*: E. T. Z. 1900, S. 309. — *Goldschmidt*: E. T. Z. 1902, S. 496. - *Fleming*: Electrician, 1895, February. — *Ryan*: Trans. of amer. Inst. of electr. eng., **16**, S. 345 (1900). — *Hospitalier*: L'Electricien, **22**, S. 194, und Zeitschr. für Instr.-Kunde, **22**, S. 166. — *Braun*: Wied. Ann., **60**, S. 552. — *Zenneck*: Wied. Ann., **69**, S. 838. — *Wehnelt & Donath*: Wied. Ann., **69**, S. 861. — *Blondel*: Rapp. du Congr. int. de phys., 3, S. 264 (1900); Journ. de Phys. (4) S. 273, 1902; Eclair. electr., **31**, S. 41, 161, **33**, S. 115 (1902).

[2]) In der Sammlung „Elektrotechnik in Einzeldarstellungen", von Dr. *G. Benischke* (1906).

[3]) *C. Runge*: „Theorie und Praxis der Reihen", S. 147, siehe auch: E. T. Z., 1905, S. 247. — *Hermann*: E. T. Z., 1910, S. 56. — *E. J. Houston & A. E. Kenelly*: E. T. Z., 1898, S. 714. — *W. B. Woodhouse*: Electrician, **46**, S. 987. — *Fischer-Hinnen*: E. T. Z., 1901, S. 396. — *Thompson*: Proc. Phys. Soc., 19, S. 443, und Phys. Soc. Lond., 1904, Dec. 9.

Die Gleichung der Kurve kann dann jedenfalls auf die Form gebracht werden:

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} V_n \sin(n\varphi + \alpha_n)$$

welche ihrerseits wieder, vermöge der Substitutionen:

$$A_n = V_n \cos \alpha_n \qquad B_n = V_n \sin \alpha_n$$

und

$$V_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \qquad \alpha_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{B_n}{A_n}$$

durch die gleichwertige Form:

$$y = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin n\varphi + B_n \cos n\varphi \tag{1}$$

ersetzt werden kann.

Die in der Bestimmung sämtlicher Koefizienten A_n und B_n bestehende Kurvenanalyse geschieht entweder mechanisch durch eigens dazu konstruierte Apparate, die harmonischen Analysatoren [1]) oder durch Rechnung. Im Prinzipe besteht jede rechnerische Analyse in der Aufstellung von ebensoviel Gleichungen 1, vermöge zusammengehöriger Werte φ und y, als Koeffizienten berechnet werden sollen. In dem besonderen Verfahren der Auflösung der dadurch gewonnenen Gleichungen unterscheiden sich erst die verschiedenen Methoden zur arithmetischen Analyse von Kurven.

Streng genommen wären zur exakten Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n unendlich viele Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten erforderlich, doch genügt es praktisch stets, die Fourier'sche Entwicklung bei einem Gliede von endlicher Ordnung abzubrechen, die Koeffizienten also beispielsweise nur bis zum $(2\,m)^{ten}$ Gliede zu berechnen, was einer Auflösung von $(4\,m)$ Gleichungen entspricht.

Den durch die Vernachlässigung der Koeffizienten der höheren Glieder gemachten Fehler in der Bestimmung der ersten $2\,m$ Koeffizienten kann man genau angeben, wenn man zur Aufstellung der Gleichungen 1 nicht beliebige Wertepaare φ_k und y_k wählt, sondern solche, deren Abscissen definiert sind durch die Form:

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2\,m} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ 4\,m$$

Vermöge der Beziehungen:

$$\sin(4\,\lambda\,m \pm n)\frac{k\pi}{2m} = \pm \sin\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) \qquad \cos(4\,\lambda\,m \pm n)\frac{k\pi}{2m} = \cos\left(n\frac{k\pi}{2m}\right)$$

lassen sich nämlich die Glieder der Gleichungen 1 derart zusammenziehen, dass sie in der Form geschrieben werden können:

$$y_k = \sum_{n=1}^{n=2\,m} S_n^{(m)} \sin\left(\frac{n\,k\pi}{2\,m}\right) + C_n^{(m)} \cos\left(\frac{n\,k\pi}{2\,m}\right) \tag{2}$$

mit

$$\begin{aligned} S_n^{(m)} &= A_n + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left(A_{(4\,\lambda\,m+n)} - A_{(4\,\lambda\,m-n)}\right) \\ C_n^{(m)} &= B_n + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left(B_{(4\,\lambda\,m+n)} + B_{(4\,\lambda\,m-n)}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) *E. Orlich*: „Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven".

Der Index „m" der Koeffizienten $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ bedeutet, dass dieselben berechnet wurden für die beim $(2m)^{ten}$ Gliede abgebrochene Fourier'sche Reihe.

Die arithmetische Kurvenanalyse besteht nunmehr in der Auflösung der Gleichungen 2 nach den Koeffizienten $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$, wobei man sich aber immer bewusst sein muss, dass diese sich von den wahren Koeffizienten unterscheiden um die durch die Beziehungen 3 definierten Beträge.

Reduktion der Berechnungsgleichungen.

In der Technik hat man es mit wenigen Ausnahmen [1]) immer mit normalen Wechselspannungen zu tun. Das sind solche, deren Kurven identische positive wie negative Hälften besitzen. Da demnach zwei um eine halbe Periode auseinander liegende Ordinaten entgegengesetzt gleich sind

$$y_\varphi = - y_{\pi+\varphi}$$

kann die entsprechende Fourier'sche Reihe keine Glieder von gerader Ordnung enthalten.[2])

Wir beschränken uns also auf die Analyse von solchen normalen Kurven, die sich darstellen lassen durch eine Fourier'sche Reihe:

$$y_k = \sum_{n=1,3,5\ldots}^{n=\infty} V_n \sin(n\,\varphi_k + \alpha_n)$$

mit Koeffizienten von nur ungerader Ordnung, die wir bestimmen durch Auflösung der $(2\,m)$ Gleichungen:

$$y_k = \sum_{1,3,5\ldots}^{2m-1} \left\{ S_n^{(m)} \sin\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) + C_n^{(m)} \cos\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) \right\} \qquad (4)$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots(2\,m-1)$$

wobei nunmehr der Index „m" der Koeffizienten $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ angibt, dass die Berechnung derselben sich bis zum m^{ten} Gliede von ungerader Ordnung n erstrecke.

Die $2\,m$ Gleichungen 4 mit $2\,m$ Unbekannten lassen sich spalten in m Gleichungen mit nur m Unbekannten. Man findet nämlich sofort:

$$y_k + y_{(2\,m-k)} = 2\sum_{1,3,5}^{2m-1} S_n^{(m)} \sin\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) \qquad y_k - y_{2\,m-k} = 2\sum_{1,3,5}^{2m-1} C_n^{(m)} \cos\left(n\frac{k\pi}{2m}\right)$$

$$k = 1,\ 2,\ 3\ldots.\ m \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ldots.\ (m-1)$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{y_k + y_{2\,m-k}}{2} = x_k \qquad \frac{y_k - y_{2\,m-k}}{2} = z_k$$

woraus folgt:

$$x_k = x_{2\,m-k} \qquad z_k = - z_{(2\,m-k)}$$

$$x_{(-k)} = - x_k \qquad z_{(-k)} = z_k$$

so sind wir hierdurch vor die Aufgabe gestellt, die $2\,m$ Gleichungen, zu deren Aufstellung es nur der einen Kurvenhälfte bedarf,

---

[1]) Bei Durchgang eines normalen Wechselstromes durch eine Aluminiumzelle (s. E. T. Z., 1900, S. 913), oder bei Erzeugung von Wechselstrom durch Unterbrechung von Gleichstrom.

[2]) *Simons*: E. T. Z., 1906, S. 631. — *H. F. Weber*: Wied. Ann., **63**, S. 366. — *Wangemann*: E. T. Z., 1904, S. 807.

$$x_k = \sum_{1,3,5\ldots}^{2m-1} S_n^{(m)} \sin\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) \qquad z_k = \sum_{1,3,5\ldots}^{2m-1} C_n^{(m)} \cos\left(n\frac{k\pi}{2m}\right) \tag{5}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3\ldots.\ m \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ldots.\ (m-1)$$

nach den noch unbekannten Koeffizienten aufzulösen.

Bis hierher stimmen die gegebenen Umformungen überein mit denjenigen anderer Methoden zur Analyse normaler Kurven. Nun aber möge die Auflösung der letzten zwei Gleichungssysteme auf neuem Wege durchgeführt werden.

Man kann zeigen, dass es, sofern m gerade ist, immer möglich sein wird, ein obiges System von m-Gleichungen zurückzuführen auf zwei Systeme von je $\frac{m}{2}$ Gleichungen mit $m/2$ Unbekannten, welch letztere zwei Systeme überdies auf gleiche allgemeine Form gebracht werden können wie das ursprüngliche Gleichungssystem. So oft m den Faktor 2 enthält, so oft lässt sich dieselbe Reduktion weiterführen, so dass nach $q$maliger Reduktion das eine Gleichungssystem ersetzt wird durch 2^q-Systeme von je $\left(\frac{m}{2^q}\right)$ Gleichungen von gleicher allgemeiner Form. Aus deren 2^qmal je $\left(\frac{m}{2^q}\right)$ Unbekannten können diejenigen des ursprünglichen Systemes natürlich eindeutig bestimmt werden.

Setzen wir:

$$m = m_p = a \cdot 2^p$$
$$(p - q) = \nu$$

wobei a eine möglichst kleine ungerade Zahl bedeutet, so hat jedes der durch $q$malige Reduktion erhaltenen Gleichungssysteme dieselbe allgemeine Form, welche wir schreiben können:

$$\overset{(r)}{x}_{(\lambda,\, m_\nu)} = \sum_{n=1,3,5}^{n=2m_\nu-1} \overset{(r)}{s}{}_n^{(\nu)} \sin\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right) \qquad \overset{(r)}{z}_{(\lambda,\, m_\nu)} = \sum_{n=1,3,5}^{n=2m_\nu-1} \overset{(r)}{C}{}_n^{(\nu)} \cos\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right) \tag{6}$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ 3\ldots m_\nu \qquad r = 0,\ 1,\ 2\ldots(m_\nu - 1)$$
$$r = 0,\ 1,\ 2,\ldots(2^q - 1)$$

Dabei werden durch (r) die einzelnen Gleichungssysteme von einander unterschieden, während λ die Stellung einer Gleichung innerhalb ihres Systemes angibt. (Der Index (r) ist dabei als „r-gestrichen" zu lesen:

$$\left(\overset{(r)}{x}_{\lambda,\, m_\nu}\right)_{r=0} = x_{\lambda,\, m_\nu},\quad \left(\overset{(r)}{x}_{(\lambda\, m_\nu)}\right)_{r=1} = x'_{(\lambda\, m_\nu)},\quad \left(\overset{(r)}{x}_{(\lambda\, m_\nu)}\right)_{r=2} = x''_{(\lambda\, m_\nu)} \text{ u. s. w.)}$$

Für $q=0$, also $\nu = p$ muss die allgemeine Form 6 übergehen in die spezielle 5. Dies gibt die Beziehungen:

$$\left(\overset{(r)}{x}_{\lambda,\, m_p}\right)_{r=0} = x_{k,\, m} = x_k \qquad \left(\overset{(r)}{z}_{\lambda,\, m_p}\right)_{r=0} = z_{(k,m)} = z_k$$

$$\left(\overset{(r)}{s}{}_n^{(p)}\right)_{r=0} = S_n^{(p)} = S_n^{(m)} \qquad \left(\overset{(r)}{c}{}_n^{(p)}\right)_{r=0} = C_n^{(p)} = C_n^{(m)}$$

Wir haben nun zu zeigen, dass die angedeutete Reduktion tatsächlich möglich ist, und wie sich die $\overset{(r)}{x}_{\lambda,m_\nu}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,m_\nu}$ aus den x_k und z_k berechnen, wie ferner aus den $\overset{(r)}{s}{}_n^{(\nu)}$ und $\overset{(r)}{c}{}_n^{(\nu)}$ rückwärts die $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ gefunden werden.

Dies geschieht durch Anwendung der Beziehungen:

$$\sin\left((2m_\nu - n)\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right) = -(-1)^\lambda \sin\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right)$$

$$\cos\left((2m_\nu - n)\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right) = (-1)^\lambda \cos\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right)$$

Hiermit lassen sich in jeder Gleichung 6 je zwei Glieder zusammenziehen, welche Gleichungen deshalb die Form annehmen:

$$\overset{(r)}{x}_{\lambda,m_\nu} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_\nu-1} \sin\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right)\left(\overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{n} - (-1)^\lambda \overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{(2m_\nu-n)}\right)$$

$$\overset{(r)}{z}_{\lambda,m_\nu} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_\nu-1} \cos\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_\nu}\right)\left(\overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{n} + (-1)^\lambda \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{(2m_\nu-n)}\right)$$

Setzen wir

$$\overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{n} - \overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{2m_\nu-n} = \overset{(2r)}{S}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{n} + \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{2m_\nu-n} = \overset{(2r)}{C}{}^{(\nu-1)}_{n} \tag{7}$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{n} + \overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{2m_\nu-n} = \overset{(2r+1)}{S}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{n} - \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{2m_\nu-n} = \overset{(2r+1)}{C}{}^{(\nu-1)}_{n}$$

und ersetzen einmal λ durch 2λ, das andere Mal durch $(2\lambda \pm 1)$, so lässt sich jedes Gleichungssystem zerlegen in zwei Systeme:

$$\overset{(r)}{x}_{2\lambda,m_\nu} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \sin\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r)}{S}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(r)}{z}_{2\lambda,m_\nu} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \cos\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r)}{C}{}^{(\nu-1)}_{n} \tag{8}$$

$$\lambda = 1, 2, 3 \ldots\ldots m_{\nu-1} \qquad \lambda = 0, 1, 2 \ldots\ldots (m_{\nu-1} - 1)$$

und

$$\overset{(r)}{x}_{(2\lambda\pm1),m_\nu} = \sum_{1,3,5\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \sin\left(n\frac{(2\lambda\pm1)\pi}{2m_\nu}\right) \overset{(2r+1)}{S}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(r)}{z}_{(2\lambda\pm1),m_\nu} = \sum_{1,3,5\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \cos\left(n\frac{(2\lambda\pm1)\pi}{2m_\nu}\right) \overset{(2r+1)}{C}{}^{(\nu-1)}_{n} \tag{9}$$

$$\lambda = 1, 2, 3 \ldots m_{\nu-1} \qquad \lambda = 0, 1, 2 \ldots (m_{\nu-1} - 1)$$

Aus den Gleichungen 9 bilden wir die Systeme:

$$\frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{x}_{(2\lambda+1),m_\nu} + \overset{(r)}{x}_{(2\lambda-1),m_\nu}\right) = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \sin\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_{\nu-1}}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2m_\nu}\right)\overset{(2r+1)}{S}{}^{(\nu-1)}_{n}$$

$$\lambda = 1, 2, 3 \ldots m_{\nu-1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{z}_{(2\lambda+1),m_\nu} + \overset{(r)}{z}_{(2\lambda-1),m_\nu}\right) = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \cos\left(n\frac{\lambda\pi}{2m_{\nu-1}}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2m_\nu}\right)\overset{(2r+1)}{C}{}^{(\nu-1)}_{n} \tag{10}$$

$$\lambda = 0, 1, 2 \ldots (m_{\nu-1} - 1)$$

Hiermit haben wir gezeigt, dass jedes der Systeme 6 sich zerlegen lässt in zwei Systeme 8 und 10 von nur halb soviel Gleichungen und Unbekannten.

Die Gleichungen 8 und 10 können aber auch einfach auf die allgemeine Form 6 gebracht werden.

Definieren wir:

$$\overset{(r)}{x}_{(\lambda,\, m_\nu)} = \frac{1}{2}\left(x^{\left(\frac{r-g}{2}\right)}_{(2\lambda+g)\, m_{(\nu+1)}} + x^{\left(\frac{r-g}{2}\right)}_{(2\lambda-g) m_{\nu+1}} \right) \qquad \overset{(r)}{z}_{\lambda,\, m_\nu} = \frac{1}{2}\left(z^{\left(\frac{r-g}{2}\right)}_{(2\lambda+\ ),\, m_{\nu+1}} + z^{\left(\frac{r-g}{2}\right)}_{(2\lambda-g),\, m_{\nu+1}} \right)$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(\nu)}_{n} = \overset{(r)}{h}{}^{(\nu)}_{n}\ \overset{(r)}{S}{}^{(\nu)}_{n} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(\nu)}_{n} = \overset{(r)}{h}{}^{(\nu)}_{n}\ \overset{(r)}{S}{}^{(\nu)}_{n} \tag{11}$$

wobei wir zur Abkürzung gesetzt haben:

$$g = \frac{1-(-1)^{(r)}}{2} \qquad \overset{(r)}{h}{}^{(\nu)}_{n} = \cos\left(\frac{n\pi}{2m_\nu}\cdot g\right) \tag{12}$$

so findet man durch Anwendung der Beziehungen 11 auf die Gleichungen 8 und 10, ohne weitere Rechnung, dass sie sich auch in der Form schreiben lassen:

$$\overset{(2r)}{x}_{\lambda,\, m_{\nu-1}} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \sin\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r)}{s}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(2r)}{z}_{\lambda,\, m_{\nu-1}} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \cos\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r)}{c}{}^{(\nu-1)}_{n}$$

$$\overset{(2r+1)}{x}_{\lambda,\, m_{\nu-1}} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \sin\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r+1)}{s}{}^{(\nu-1)}_{n} \qquad \overset{(2r+1)}{z}_{\lambda,\, m_{\nu-1}} = \sum_{1,3\ldots}^{2m_{\nu-1}-1} \cos\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,m_{\nu-1}}\right) \overset{(2r+1)}{c}{}^{(\nu-1)}_{n}$$

Die reduzierten Gleichungssysteme haben also tatsächlich beide dieselbe allgemeine Form wie das ursprüngliche Gleichungssystem.

Durch $q = p$-malige Reduktion der ursprünglichen Gleichungen wird deren Auflösung ersetzt durch diejenige der 2^p-Systeme von nur je a Gleichungen mit a Unbekannten:

$$\overset{(r)}{x}_{\lambda,\, a} = \sum_{1,3\ldots}^{2a-1} \overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{n} \sin\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,a}\right) \qquad \overset{(r)}{z}_{\lambda,\, a} = \sum_{1,3\ldots}^{2a-1} \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{n} \cos\left(n\,\frac{\lambda\pi}{2\,a}\right) \tag{13}$$

$$\lambda = 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ a \qquad \lambda = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ (a-1)$$

$$r = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots\ (2^p - 1)$$

Die hierzu nötigen Grössen $\overset{(r)}{x}_{\lambda,\, a}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,\, a}$ findet man aus den bekannten x_k und z_k durch successive Anwendung der Rekursionsformeln 11. Aus den Auflösungen $\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{n}$ und $\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{n}$ der letzten Gleichungen 13 findet man hierauf rückwärts die Koeffizienten $S^{(m)}_n$ und $C^{(m}_n$ durch fortgesetzte Benutzung der aus den Beziehungen 7 zu bildenden Rekursionsformeln:

$$\overset{(r)}{s}{}^{(\nu+1)}_{n} = \frac{\overset{(2r+1)}{S}{}^{(\nu)}_{n} + \overset{(2r)}{S}{}^{(\nu)}_{n}}{2} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(\nu+1)}_{n} = \frac{\overset{(2r)}{C}{}^{(\nu)}_{n} + \overset{(2r+1)}{C}{}^{(\nu)}_{n}}{2}$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(\nu+1)}_{(2m_{\nu+1}-n)} = \frac{\overset{(2r+1)}{S}{}^{(\nu)}_{n} - \overset{(2r)}{S}{}^{(\nu)}_{n}}{2} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(\nu+1)}_{2(m_{\nu+1}-n)} = \frac{\overset{(2r)}{C}{}^{(\nu)}_{n} - \overset{(2r+1)}{C}{}^{(\nu)}_{n}}{2} \tag{14}$$

mit Berücksichtigung der Beziehungen 11.

Das solchermassen angegebene Verfahren scheint recht kompliziert zu sein, einmal wegen der Bildung der $\overset{(r)}{x}_{\lambda,\, a}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$ aus den x_k und z_k, und dann wegen der successiven Berechnung der $S^{(m)}_n$ und $C^{(m)}_n$. Dem ist aber nicht so, denn in dem letzteren Umstande liegt gerade der eigentliche Vorteil dieses Verfahrens.

Berechnungstabellen zur Kurvenanalyse.

Die Vereinfachung der Kurvenanalyse durch das oben abgeleitete Verfahren zeigt sich erst, wenn dasselbe tabellarisch durchgeführt wird.

In erster Linie bildet man sich die Grössen $\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$ für soviele Werte von (r) als gewünscht werden. Für die Werte $r = 0$ bis $r = 7$ erhält man die Ausdrücke der Tabelle auf Seite 326.

Hierauf hat man die 2^p Gleichungssysteme 13 mit je a Gleichungen nach ihren Unbekannten aufzulösen. Dies ist ganz allgemein möglich. Man erhält nämlich:

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=1,2,3\ldots}^{\lambda=a} \overset{(r)}{x}_{\lambda,a} \sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right) \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=0,1,2\ldots}^{\lambda=(a-1)} \overset{(r)}{z}_{(\lambda,a)} \cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right) \tag{15}$$

$$n = 1,\ 3,\ 5\ldots(2a-1) \qquad r = 0,\ 1,\ 2\ldots(2^p-1)$$

Wegen der Relation:

$$\sin\left((2a-n)\lambda\frac{\pi}{2a}\right) = -(-1)^\lambda \sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right) \quad \cos\left((2a-n)\lambda\frac{\pi}{2a}\right) = (-1)^\lambda \cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

findet man aus den Gleichungssystemen 15 sofort:

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n + \overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=1,2\ldots}^{\lambda=a}\left(1-(-1)^\lambda\right)\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}\sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

$$\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n + \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=0,1,2\ldots}^{\lambda=(a-1)}\left(1+(-1)^r\right)\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}\cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n - \overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=1,2\ldots}^{\lambda=a}\left(1+(-1)^\lambda\right)\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}\sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

$$\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n - \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=0,1\ldots}^{\lambda=(a-1)}\left(1-(-1)^r\right)\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}\cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

oder mit:

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n + \overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \overset{(r)}{\sigma}_n\ (n = 1,3\ldots a) \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n + \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \overset{(r)}{\gamma}_n\ (n = 1,3\ldots a)$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n - \overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \overset{(r)}{\sigma}_{(2a-n)}\ \left(n = 1,3\ldots(a-2)\right)$$

$$\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n - \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \overset{(r)}{\gamma}_{(2a-n)}\ \left(n = 1,3\ldots(a-2)\right)$$

erhält man:

$$\overset{(r)}{\sigma}_n = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=1,3\ldots}^{\lambda=a}\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}\sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right) \qquad \overset{(r)}{\gamma}_n = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=0,2,4\ldots}^{\lambda=(a-1)}\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}\cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

$$n = 1,3\ldots a \qquad n = 1,3\ldots a \tag{16}$$

$$\overset{(r)}{\sigma}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=2,4\ldots}^{\lambda=(a-1)}\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}\sin\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right) \qquad \overset{(r)}{\gamma}_{(2a-n)} = \frac{1}{a}\sum_{\lambda=1,3,5\ldots}^{\lambda=(a-2)}\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}\cos\left(\lambda\frac{n\pi}{2a}\right)$$

$$n = 1,3\ldots(a-2) \qquad n = 1,3\ldots(a-2)$$

Aus den durch die Gleichungen 16 gewonnenen Grössen $\overset{(r)}{\sigma}_n$ und $\overset{(r)}{\gamma}_n$ findet man rückwärts die $\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n$ vermittelst der Beziehungen (siehe S. 333):

Zusammenstellung der Hülfsgrössen $\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}$ *und* $\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$.

	$\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}$	$\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$
$r=0$	$x\left(\lambda\frac{a}{m}\right)$	$z\left(\lambda\frac{a}{m}\right)$
$r=1$	$\frac{1}{2}\left(x\left((2\lambda+1)\frac{m}{2a}\right)+x\left((2\lambda-1)\frac{m}{2a}\right)\right)$	$\frac{1}{2}\left(z\left((2\lambda+1)\frac{m}{2a}\right)+z\left((2\lambda-1)\frac{m}{2a}\right)\right)$
$r=2$	$\frac{1}{2}\left(x\left((4\lambda+1)\frac{m}{4a}\right)+x\left((4\lambda-1)\frac{m}{4a}\right)\right)$	$\frac{1}{2}\left(z\left((4\lambda+1)\frac{m}{4a}\right)+z\left((4\lambda-1)\frac{m}{4a}\right)\right)$
$r=3$	$\frac{1}{4}\left(x\left((4\lambda+3)\frac{m}{4a}\right)+x\left((4\lambda+1)\frac{m}{4a}\right)+x\left((4\lambda-1)\frac{m}{4a}\right)+x\left((4\lambda-3)\frac{m}{4a}\right)\right)$	$\frac{1}{4}\left(z\left((4\lambda+3)\frac{m}{4a}\right)+z\left((4\lambda+1)\frac{m}{4a}\right)+z\left((4\lambda-1)\frac{m}{4a}\right)+z\left((4\lambda-3)\frac{m}{4a}\right)\right)$
$r=4$	$\frac{1}{2}\left(x\left((8\lambda+1)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-1)\frac{m}{8a}\right)\right)$	$\frac{1}{2}\left(z\left((8\lambda+1)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-1)\frac{m}{8a}\right)\right)$
$r=5$	$\frac{1}{4}\left(x\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda+1)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-1)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-3)\frac{m}{8a}\right)\right)$	$\frac{1}{4}\left(z\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda+1)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-1)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-3)\frac{m}{8a}\right)\right)$
$r=6$	$\frac{1}{4}\left(x\left((8\lambda+5)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-3)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-5)\frac{m}{8a}\right)\right)$	$\frac{1}{4}\left(z\left((8\lambda+5)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-3)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-5)\frac{m}{8a}\right)\right)$
$r=7$	$\frac{1}{8}\left(x\left((8\lambda+7)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda+5)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+\ldots+x\left((8\lambda-5)\frac{m}{8a}\right)+x\left((8\lambda-7)\frac{m}{8a}\right)\right)$	$\frac{1}{8}\left(z\left((8\lambda+7)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda+5)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda+3)\frac{m}{8a}\right)+\ldots+z\left((8\lambda-5)\frac{m}{8a}\right)+z\left((8\lambda-7)\frac{m}{8a}\right)\right)$
	u. s. w.	u. s. w.

Tabelle I

$k = 4$	$k = 8$	$k = 12$	$k = 2$	$k = 6$	$k = 10$
$\varphi = 30^0$	$\varphi = 60^0$	$\varphi = 90^0$	$\varphi = 15^0$	$\varphi = 45^0$	$\varphi = 75^0$
$y_4 = y_{30^0}$	$y_8 = y_{60^0}$	$y_{12} = y_{90^0}$	$y_2 = y_{15^0}$	$y_6 = y_{45^0}$	$y_{10} = y_{45^0}$
$y_{20} = y_{150^0}$	$y_{16} = y_{120^0}$	$y_{12} = y_{90^0}$	$y_{22} = y_{165^0}$	$y_{18} = y_{135^0}$	$y_{14} = y_{105^0}$
$x_4 = \frac{y_4 + y_{20}}{2}$	$x_8 = \frac{y_8 + y_{16}}{2}$	$x_{12} = y_{12}$	$x_2 = \frac{y_2 + y_{22}}{2}$	$x_6 = \frac{y_6 + y_{18}}{2}$	$x_{10} = \frac{y_{10} + y_{14}}{2}$
$z_4 = \frac{y_4 - y_{20}}{2}$	$z_8 = \frac{y_8 - y_{16}}{2}$	$z_{12} = 0$	$z_2 = \frac{y_2 - y_{22}}{2}$	$z_6 = \frac{y_6 - y_{18}}{2}$	$z_{10} = \frac{y_{10} - y_{14}}{2}$
$k = 1$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 7$	$k = 9$	$k = 11$
$\varphi = 7^1/_2{}^0$	$\varphi = 22^1/_2{}^0$	$\varphi = 37^1/_2{}^2$	$\varphi = 52^1/_2{}^0$	$\varphi = 67^1/_2{}^0$	$\varphi = 82^1/_2{}^0$
$y_1 = y_{7^1/_2{}^0}$	$y_3 = y_{22^1/_2{}^0}$	$y_5 = y_{37^1/_2{}^0}$	$y_7 = y_{52^1/_2{}^0}$	$y_9 = y_{67^1/_2{}^0}$	$y_{11} = y_{82^1/_2{}^0}$
$y_{23} = y_{172^1/_2{}^0}$	$y_{21} = y_{157^1/_2{}^0}$	$y_{19} = y_{142^1/_2{}^0}$	$y_{17} = y_{127^1/_2{}^0}$	$y_{15} = y_{112^1/_2{}^0}$	$y_{13} = y_{97^1/_2{}^0}$
$x_1 = \frac{y_1 + y_{23}}{2}$	$x_3 = \frac{y_3 + y_{21}}{2}$	$x_5 = \frac{y_5 + y_{19}}{2}$	$x_7 = \frac{y_7 + y_{17}}{2}$	$x_9 = \frac{x_9 + y_{15}}{2}$	$x_{11} = \frac{y_{11} + y_{13}}{2}$
$z_1 = \frac{y_1 - y_{23}}{2}$	$z_3 = \frac{y_3 - y_{21}}{2}$	$z_5 = \frac{y_5 - y_{19}}{2}$	$z_7 = \frac{y_7 - y_{17}}{2}$	$z_9 = \frac{y_9 - y_{15}}{2}$	$z_{11} = \frac{y_{11} - y_{13}}{2}$

Tabelle II

$x_{1,3} = x_4$	$x_{2,3} = x_8$	$x_{3,3} = x_{12}$	$x'_{1,3} = \frac{x_2 + x_6}{2}$	$x'_{2,3} = \frac{x_6 + x_{10}}{2}$	$x'_{3,3} = x_{10}$
$\sigma_1 = \frac{2(x_{1,3} + x_{3,3})}{3}$	$\sigma_3 = \frac{2x_{1,3} - x_{3,3}}{3}$	$\sigma_5 = 1{,}155\ x_{2,3}$	$\sigma'_1 = \frac{2(x'_{1,3} + x'_{3,3})}{3}$	$\sigma'_3 = \frac{2x'_{1,3} - x'_{3,3}}{2}$	$\sigma'_5 = 1{,}154\ x'_{2,3}$
$s_1^{(0)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_5}{2}$	$s_3^{(0)} = \sigma_3$	$s_5^{(0)} = \frac{\sigma_1 - \sigma_5}{2}$	$s_1'^{(0)} = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_5}{2}$	$s_3'^{(0)} = \sigma'_3$	$s_5'^{(0)} = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_5}{2}$
$S_1^{(0)} = s_1^{(0)}$	$S_3^{(0)} = s_3^{(0)}$	$S_5^{(0)} = s_5^{(0)}$	$S_1'^{(0)} = 1{,}035\ s_1'^{(0)}$	$S_3'^{(0)} = 1{,}414\ s_3'^{(0)}$	$S_5'^{(0)} = 3{,}864\ s_5'^{(0)}$
$s_1^{(1)} = \frac{S_1'^{(0)} + S_1^{(0)}}{2}$	$s_3^{(1)} = \frac{S_3'^{(0)} + S_3^{(0)}}{2}$	$s_5^{(1)} = \frac{S_5'^{(0)} + S_5^{(0)}}{2}$	$s_7^{(1)} = \frac{S_5'^{(0)} - S_5^{(0)}}{2}$	$s_9^{(1)} = \frac{S_3'^{(0)} - S_3^{(0)}}{2}$	$s_{11}^{(1)} = \frac{S_1'^{(0)} - S_1^{(0)}}{2}$
$S_1^{(1)} = s_1^{(1)}$	$S_3^{(1)} = s_3^{(1)}$	$S_5^{(1)} = s_5^{(1)}$	$S_7^{(1)} = s_7^{(1)}$	$S_9^{(1)} = s_9^{(1)}$	$S_{11}^{(1)} = s_{11}^{(1)}$
$s_1^{(2)} = \frac{S_1'^{(1)} + S_1^{(1)}}{2}$	$s_3^{(2)} = \frac{S_3'^{(1)} + S_3^{(1)}}{2}$	$s_5^{(2)} = \frac{S_5'^{(1)} + S_5^{(1)}}{2}$	$s_7^{(2)} = \frac{S_7'^{(1)} + S_7^{(1)}}{2}$	$s_9^{(2)} = \frac{S_9'^{(2)} + S_9^{(2)}}{2}$	$s_{11}^{(2)} = \frac{S_{11}'^{(2)} + S_{11}^{(2)}}{2}$
$S_1^{(2)} = s_1^{(2)}$	$S_3^{(2)} = s_3^{(2)}$	$S_5^{(2)} = s_5^{(2)}$	$S_7^{(2)} = s_7^{(2)}$	$S_9^{(2)} = s_9^{(2)}$	$S_{11}^{(2)} = s_{11}^{(2)}$

$\overset{''}{x}_{1,3} = \frac{x_3 + x_5}{2}$	$\overset{''}{x}_{2,3} = \frac{x_7 + x_9}{2}$	$\overset{''}{x}_{3,3} = x_{11}$	$\overset{'''}{x}_{1,3} = \frac{x_1 + x_3 + x_5 + x_7}{4}$	$\overset{'''}{x}_{2,3} = \frac{x_5 + x_7 + x_9 + x_{11}}{4}$	$\overset{'''}{x}_{3,3} = \frac{x_9 + x_{11}}{2}$
$\overset{''}{\sigma}_1 = \frac{2(\overset{''}{x}_{1,3} + \overset{''}{x}_{3,3})}{3}$	$\overset{''}{\sigma}_3 = \frac{2\,\overset{''}{x}_{1,3} - \overset{''}{x}_{3,3}}{3}$	$\overset{''}{\sigma}_5 = 1{,}155\ \overset{''}{x}_{2,3}$	$\overset{'''}{\sigma}_1 = \frac{2\,(\overset{'''}{x}_{1,3} + \overset{'''}{x}_{3,3})}{3}$	$\overset{'''}{\sigma}_3 = \frac{2\overset{'''}{x}_{1,3} - \overset{'''}{x}_{3,3}}{3}$	$\overset{'''}{\sigma}_5 = 1{,}155\ \overset{'''}{x}_{2,3}$
$\overset{''}{s}{}^{(0)}_1 = \frac{\overset{''}{\sigma}_1 + \overset{''}{\sigma}_5}{2}$	$\overset{''}{s}{}^{(0)}_3 = \overset{''}{\sigma}_3$	$\overset{''}{s}{}^{(0)}_5 = \frac{\overset{''}{\sigma}_1 - \overset{''}{\sigma}_5}{2}$	$\overset{'''}{s}{}^{(0)}_1 = \frac{\overset{'''}{\sigma}_1 + \overset{'''}{\sigma}_5}{2}$	$\overset{'''}{s}{}^{(0)}_3 = \overset{'''}{\sigma}_3$	$\overset{'''}{s}{}^{(0)}_5 = \frac{\overset{'''}{\sigma}_1 - \overset{'''}{\sigma}_5}{2}$
$\overset{''}{S}{}^{(0)}_1 = \overset{''}{s}{}^{(0)}_1$	$\overset{''}{S}{}^{(0)}_3 = \overset{''}{s}{}^{(0)}_3$	$\overset{''}{S}{}^{(0)}_5 = \overset{''}{s}{}^{(0)}_5$	$\overset{'''}{S}{}^{(0)}_1 = 1{,}035\ \overset{'''}{s}{}^{(0)}_1$	$\overset{'''}{S}{}^{(0)}_3 = 1{,}414\ \overset{'''}{s}{}^{(0)}_3$	$\overset{'''}{S}{}^{(0)}_5 = 3{,}864\ \overset{'''}{s}{}^{(0)}_5$
$\overset{'}{s}{}^{(1)}_1 = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_1 + \overset{''}{S}{}^{(0)}_1}{2}$	$\overset{'}{s}{}^{(1)}_3 = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_3 + \overset{''}{S}{}^{(0)}_3}{2}$	$\overset{'}{s}{}^{(1)}_5 = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_5 + \overset{''}{S}{}^{(0)}_5}{2}$	$\overset{'}{s}{}^{(1)}_7 = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_5 - \overset{''}{S}{}^{(0)}_5}{2}$	$\overset{'}{s}{}^{(1)}_9 = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_3 - \overset{''}{S}{}^{(0)}_3}{2}$	$\overset{'}{s}{}^{(1)}_{11} = \frac{\overset{'''}{S}{}^{(0)}_1 - \overset{''}{S}{}^{(0)}_1}{2}$
$\overset{'}{S}{}^{(1)}_1 = 1{,}0087\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_3$	$\overset{'}{S}{}^{(1)}_3 = 1{,}0824\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_3$	$\overset{'}{S}{}^{(1)}_5 = 1{,}2604\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_5$	$\overset{'}{S}{}^{(1)}_7 = 1{,}6426\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_7$	$\overset{'}{S}{}^{(1)}_9 = 2{,}6130\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_9$	$\overset{'}{S}{}^{(1)}_{11} = 7{,}6628\ \overset{'}{s}{}^{(1)}_{11}$
$s^{(2)}_{13} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_{11} - S^{(1)}_{11}}{2}$	$s^{(2)}_{15} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_9 - S^{(1)}_9}{2}$	$s^{(2)}_{17} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_7 - S^{(1)}_7}{2}$	$s^{(2)}_{19} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_5 - S^{(1)}_5}{2}$	$s^{(2)}_{21} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_3 - S^{(1)}_3}{2}$	$s^{(2)}_{23} = \frac{\overset{'}{S}{}^{(1)}_1 - S^{(1)}_1}{2}$
$S^{(2)}_{13} = s^{(2)}_{13}$	$S^{(2)}_{15} = s^{(2)}_{15}$	$S^{(2)}_{17} = s^{(2)}_{17}$	$S^{(2)}_{19} = s^{(2)}_{19}$	$S^{(2)}_{21} = s^{(2)}_{21}$	$S^{(2)}_{23} = s^{(2)}_{23}$

Tabelle III

$z_{0,3} = 0$	$z_{1,3} = z_4$	$z_{2,3} = z_8$	$z'_{0,3} = z_2$	$z'_{1,3} = \frac{z_2 + z_6}{2}$	$z'_{2,3} = \frac{z_6 + z_{10}}{2}$
$\gamma_1 = \frac{2}{3} z_{2,3}$	$\gamma_3 = \frac{-2}{3} z_{2,3}$	$\gamma_5 = 1{,}155\ z_{1,3}$	$\gamma'_1 = \frac{2}{3}(z'_{2,3} + z'_{0,3})$	$\gamma'_3 = \frac{z'_{0,3} - 2 z'_{2,3}}{3}$	$\gamma'_5 = 1{,}155\ z'_{1,3}$
$c_1^{(0)} = \frac{\gamma_1 + \gamma_5}{2}$	$c_3^{(0)} = \gamma_3$	$c_5^{(0)} = \frac{\gamma_1 - \gamma_5}{2}$	$c'^{(0)}_1 = \frac{\gamma'_1 + \gamma'_5}{2}$	$c'^{(0)}_3 = \gamma'_3$	$c'^{(0)}_5 = \gamma'_1 - \gamma'_5$
$C_1^{(0)} = c_1^{(0)}$	$C_3^{(0)} = c_3^{(0)}$	$C_5^{(0)} = c_5^{(0)}$	$C'^{(0)}_1 = 1{,}035\ c'^{(0)}_1$	$C'^{(0)}_3 = 1{,}414\ c'^{(0)}_3$	$C'^{(0)}_5 = 3{,}864\ c'^{(0)}_5$
$c_1^{(1)} = \frac{C_1^{(0)} + C'^{(0)}_1}{2}$	$c_3^{(1)} = \frac{C_3^{(0)} + C'^{(0)}_3}{2}$	$c_5^{(1)} = \frac{C_5^{(0)} + C'^{(0)}_5}{2}$	$c_7^{(1)} = \frac{C_5^{(0)} - C'^{(0)}_5}{2}$	$c_9^{(1)} = \frac{C_3^{(0)} - C'^{(0)}_3}{2}$	$c_{11}^{(1)} = \frac{C_1^{(0)} - C'^{(0)}_1}{2}$
$C_1^{(1)} = c_1^{(1)}$	$C_3^{(1)} = c_3^{(1)}$	$C_5^{(1)} = c_5^{(1)}$	$C_7^{(1)} = c_7^{(1)}$	$C_9^{(1)} = c_9^{(1)}$	$C_{11}^{(1)} = c_{11}^{(1)}$
$c_1^{(2)} = \frac{C_1^{(1)} + C'^{(1)}_1}{2}$	$c_3^{(2)} = \frac{C_3^{(1)} + C'^{(1)}_3}{2}$	$c_5^{(2)} = \frac{C_5^{(1)} + C'^{(1)}_5}{2}$	$c_7^{(2)} = \frac{C_7^{(1)} + C'^{(1)}_7}{2}$	$c_9^{(2)} = \frac{C_9^{(1)} + C'^{(1)}_9}{2}$	$c_{11}^{(2)} = \frac{C_{11}^{(1)} + C'^{(1)}_{11}}{2}$
$C_1^{(2)} = c_1^{(2)}$	$C_3^{(2)} = c_3^{(2)}$	$C_5^{(2)} = c_5^{(2)}$	$C_7^{(2)} = c_7^{(2)}$	$C_9^{(2)} = c_9^{(2)}$	$C_{11}^{(2)} = c_{11}^{(2)}$

$z''_{0,3} = z_1$	$z''_{1,3} = \frac{z_3 + z_5}{2}$	$z''_{2,3} = \frac{z_7 + z_9}{2}$	$z'''_{0,3} = \frac{z_1 + z_3}{2}$	$z'''_{1,3} = \frac{z_1 + z_3 + z_5 + z_7}{4}$	$z'''_{2,3} = \frac{z_5 + z_7 + z_9 + z_{11}}{4}$
$\gamma''_1 = \frac{2}{3}\left(z''_{0,3} + z''_{2,3}\right)$	$\gamma''_3 = \frac{z''_{0,3} - 2\, z''_{2,3}}{2}$	$\gamma''_5 = 1{,}155\ z''_{1,3}$	$\gamma'''_1 = \frac{2}{3}\left(z'''_{0,3} + z'''_{2,3}\right)$	$\gamma'''_3 = \frac{z'''_{0,3} - 2\, z'''_{2,3}}{3}$	$\gamma'''_5 = 1{,}155\ z'''_{1,3}$
$c''^{(0)}_1 = \frac{\gamma''_1 + \gamma''_5}{2}$	$c''^{(0)}_3 = \gamma''_3$	$c''^{(0)}_5 = \frac{\gamma''_1 - \gamma''_5}{2}$	$c'''^{(0)}_1 = \frac{\gamma'''_1 + \gamma'''_5}{2}$	$c'''^{(0)}_3 = \gamma'''_3$	$c'''^{(0)}_5 = \frac{\gamma'''_1 - \gamma'''_5}{2}$
$C''^{(0)}_1 = c''^{(0)}_1$	$C''^{(0)}_3 = c''^{(0)}_3$	$C''^{(0)}_5 = c''^{(0)}_5$	$C'''^{(0)}_1 = 1{,}035\ c'''^{(0)}_1$	$C'''^{(0)}_3 = 1{,}414\ c'''^{(0)}_3$	$C'''^{(0)}_5 = 3{,}864\ c'''^{(0)}_5$
$c'^{(1)}_1 = \frac{C''^{(0)}_1 + C'''^{(0)}_1}{2}$	$c'^{(1)}_3 = \frac{C''^{(0)}_3 + C'''^{(0)}_3}{2}$	$c'^{(1)}_5 = \frac{C''^{(0)}_5 + C'''^{(0)}_5}{2}$	$c'^{(1)}_7 = \frac{C''^{(0)}_5 - C'''^{(0)}_5}{2}$	$c'^{(1)}_9 = \frac{C''^{(0)}_3 - C'''^{(0)}_3}{2}$	$c'^{(1)}_{11} = \frac{C''^{(0)}_1 - C'''^{(0)}_1}{2}$
$C'^{(1)}_1 = 1{,}0087\ c'^{(1)}_1$	$C'^{(1)}_3 = 1{,}0824\ c'^{(1)}_3$	$C'^{(1)}_5 = 1{,}2604\ c'^{(1)}_5$	$C'^{(1)}_7 = 1{,}6426\ c'^{(1)}_7$	$C'^{(1)}_9 = 2{,}6130\ c'^{(1)}_9$	$C'^{(1)}_{11} = 7{,}6628\ c'^{(1)}_{11}$
$c^{(2)}_{13} = \frac{C^{(1)}_{11} - C'^{(1)}_{11}}{2}$	$c^{(2)}_{15} = \frac{C^{(1)}_9 - C'^{(1)}_9}{2}$	$c^{(2)}_{17} = \frac{C^{(1)}_7 - C'^{(1)}_7}{2}$	$c_{19} = \frac{C^{(1)}_5 - C'^{(1)}_5}{2}$	$c_{21} = \frac{C^{(1)}_3 - C'^{(1)}_3}{2}$	$c_{23} = \frac{C^{(1)}_1 - C'^{(1)}_1}{2}$
$C^{(2)}_{13} = c^{(2)}_{13}$	$C^{(2)}_{15} = c^{(2)}_{15}$	$C^{(2)}_{17} = c^{(2)}_{17}$	$C^{(2)}_{19} = c^{(2)}_{19}$	$C^{(2)}_{21} = c^{(2)}_{21}$	$C^{(2)}_{23} = c^{(2)}_{23}$

Tabelle IV

$V_1 = \sqrt{S_1^2 + C_1^2}$	$V_3 = \sqrt{S_3^2 + C_3^2}$	$V_5 = \sqrt{S_5^2 + C_5^2}$	$V_7 = \sqrt{S_7^2 + C_7^2}$
$\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{C_1}{S_1}$	$\frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_3} = \frac{C_3}{S_3}$	$\frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_5} = \frac{C_5}{S_5}$	$\frac{\sin \alpha_7}{\cos \alpha_7} = \frac{C_7}{S_7}$
$V_9 = \sqrt{S_9^2 + C_9^2}$	$V_{11} = \sqrt{S_{11}^2 + C_{11}^2}$	$V_{13} = \sqrt{S_{13}^2 + C_{13}^2}$	$V_{15} = \sqrt{S_{15}^2 + C_{15}^2}$
$\frac{\sin \alpha_9}{\cos \alpha_9} = \frac{C_9}{S_9}$	$\frac{\sin \alpha_{11}}{\cos \alpha_{11}} = \frac{C_{11}}{S_{11}}$	$\frac{\sin \alpha_{13}}{\cos \alpha_{13}} = \frac{C_{13}}{S_{13}}$	$\frac{\sin \alpha_{15}}{\cos \alpha_{15}} = \frac{C_{15}}{S_{15}}$
$V_{17} = \sqrt{S_{17}^2 + C_{17}^2}$	$V_{19} = \sqrt{S_{19}^2 + C_{19}^2}$	$V_{21} = \sqrt{S_{21}^2 + C_{21}^2}$	$V_{23} = \sqrt{S_{23}^2 + C_{23}^2}$
$\frac{\sin \alpha_{17}}{\cos \alpha_{17}} = \frac{C_{17}}{S_{17}}$	$\frac{\sin \alpha_{19}}{\cos \alpha_{19}} = \frac{C_{19}}{S_{19}}$	$\frac{\sin \alpha_{21}}{\cos \alpha_{21}} = \frac{C_{21}}{S_{21}}$	$\frac{\sin \alpha_{23}}{\cos \alpha_{23}} = \frac{C_{23}}{S_{23}}$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{n} = \frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{\sigma}_{n} + \overset{(r)}{\sigma}_{(2a-n)}\right)_{n=1\ldots a} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{n} = \frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{\gamma}_{n} + \overset{(r)}{\gamma}_{(2a-n)}\right)_{n=1,3\ldots a}$$

$$\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_{(2a-n)} = \frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{\sigma}_{n} - \overset{(r)}{\sigma}_{(2a-n)}\right)_{n=1\ldots(a-2)} \qquad \overset{(r)}{c}{}^{(o)}_{n} = \frac{1}{2}\left(\overset{(r)}{\gamma}_{n} - \overset{(r)}{\gamma}_{(2a-n)}\right)_{n=1,3\ldots(a-2)}$$

Bei der tabellarischen Durchführung dieser Analyse werden zuerst alle $\overset{(r)}{x}_{(\lambda,a)}$ und $\overset{(r)}{z}_{(\lambda,a)}$ notiert, hierauf die $\overset{(r)}{\sigma}_n$ und $\overset{(r)}{\gamma}_n$ berechnet und in die Tabelle eingetragen, aus diesen die $\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n$ bestimmt und ebenfalls eingetragen. Nun beginnt die wiederholte Anwendung der Rekursionsformeln 14, 11 und 12, und zwar werden die Zwischenresultate auch jedesmal tabellarisch aufgeschrieben, um Irrtümer zu vermeiden und der Einfachheit halber.

Wir geben hier die tabellarische Berechnung der Koeffizienten $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ bis zum Gliede $(2m-1) = 23$, also mit $m = 12$ und infolgedessen mit $a = 3$.

Wir benötigen im Ganzen vier Tabellen. In der ersten verschafft man sich die x_k und z_k, in der zweiten berechnet man die $S_n^{(m)}$, in der dritten die $C_n^{(m)}$ und in der letzten die V_n und α_n. In jeder Reihe stehen die analogen Operationen, und zwar sind sie in den folgenden Tabellen ausführlich angegeben, während bei praktischen Beispielen in die Tabellen natürlich nur die entsprechenden Zahlen samt Vorzeichen gesetzt werden.

Tabelle I (Seite 327) weist sechs Reihen auf, deren Bedeutung ohne weiteres ersichtlich ist.

Die Tabellen II u. III (S. 328—331) besitzen acht Reihen. In der ersten Reihe stehen die $\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$ in ihrer Abhängigkeit von x_k und z_k; in der zweiten stehen die $\overset{(r)}{\sigma}_n$ und $\overset{(r)}{\gamma}_n$, wie sie aus den $\overset{(r)}{x}_{\lambda,a}$ und $\overset{(r)}{z}_{\lambda,a}$ gefunden werden. In der dritten Reihe werden die $\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n$ aus den $\overset{(r)}{\sigma}_n$ und $\overset{(r)}{\gamma}_n$ gebildet, hierauf in der vierten Reihe aus den $\overset{(r)}{s}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{c}{}^{(o)}_n$ die entsprechenden $\overset{(r)}{S}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{C}{}^{(o)}_n$. Hiermit hat man diese Koeffizienten viermal bis auf drei Glieder genau bestimmt. Die in den Reihen 5 und 6 notierten Operationen erzeugen aus den $\overset{(r)}{S}{}^{(o)}_n$ und $\overset{(r)}{C}{}^{(o)}_n$ die bis zum sechsten Gliede berechneten Koeffizienten $\overset{(r)}{S}{}^{(1)}_n$ und $\overset{(r)}{C}{}^{(1)}_n$ und zwar in zwei Serien. Aus diesen beiden Serien stellen schliesslich die Reihen 7 und 8 die Koeffizienten $S_n^{(2)}$ und $C_n^{(2)}$ her, welche die Koeffizienten der beim zwölften Gliede von ungerader Ordnung abgebrochenen Reihe bedeuten.

In der Tabelle IV (S. 332) werden die V_n und α_n aus den $S_n^{(m)}$ und $C_n^{(m)}$ bestimmt. Zur Bestimmung der α_n genügt nicht die Kenntnis ihrer Tangenten allein, man muss auch die Quadranten der α_n kennen. Dies ist der Fall, wenn man die Vorzeichen der $\sin \alpha_n$ und $\cos \alpha_n$ zugleich kennt.

Mit Hilfe dieser Tabellen ist es nun möglich, in kürzester Zeit aus den abgemessenen Ordinaten y_k die Amplituden und die Phasenkonstanten der Kurve zu berechnen; denn es handelt sich ja in der Hauptsache um die Bildung von arithmetischen Mitteln. Dabei ist jede Verwirrung und Unklarheit während der Berechnung ausgeschlossen, wenn man sich streng an die gegebenen Tabellen hält und die Rechnung auch tabellarisch durchführt.

Diese Methode der Kurvenanalyse hat den Vorteil, dass man ohne grosse Mühe die Berechnung sofort ausdehnen kann auf die doppelte Anzahl von Gliedern. Hat man z. B. die Analyse gemäss nachstehenden Tabellen durchgeführt bis $m = 12$ und sieht dann, dass die Koeffizienten S_{23} und C_{23} noch so gross sind, dass die höheren Glieder nicht vernachlässigt werden dürfen, so kann man die Tabellen einfach fortsetzen, auf analoge Weise wie die schon bestehenden Teile gebildet sind; es kommen nur die höheren Indices in Betracht.

Dieser Fall wird aber praktisch höchst selten eintreten; im Gegenteil, man wird meistens gar nicht bis zum zwölften Gliede gehen müssen. Dann werden einfach nicht

die ganzen Tabellen benützt, sondern nur die doppelt umrandeten Teile derselben, wenn beispielsweise nur sechs Glieder erforderlich sind.

Überhaupt wird man am vorteilhaftesten verfahren, wenn man zuerst nur bis sechs Koeffizienten berechnet und erst, wenn man dann sieht, dass sechs nicht genügen, wird man weiterfahren, nun die vollständigen Tabellen Seite 327 bis 332 benützend.

Ableitung einer direkten Methode.

Die Beziehungen zwischen den Wechselstromgrössen.

Auf ein direktes Verfahren zur Analyse einer Wechselspannung zwischen zwei Stellen eines Stromnetzes wird man geführt durch Betrachtung des Zusammenhanges zwischen dem effektiven Werte dieser Spannung, respektive dem effektiven Werte des durch sie, in einem an die beiden Netzpunkte angelegten Nebenschlusse, erzeugten Wechselstromes einerseits und den Amplituden der Wechselspannung anderseits.

Es seien gemäss Abbildung 1 A_1 und A_2 zwei Stellen eines Stromnetzes mit den Potentialen P_1 und P_2, deren Differenz gegeben sei durch einen Ausdruck von der Form:

$$P_1 - P_2 = e = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{E}_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

wobei wir noch dahingestellt lassen, ob diese Reihe die geraden Glieder enthalte oder nicht. Zwischen A_1 und A_2 werde eine zu dem gegebenen Stromkreise parallele, vollkommen eisenfreie Zweigleitung eingeschaltet, von dem totalen Ohm'schen Widerstande w und dem totalen Selbstinduktionskoeffizienten L. Die Selbstinduktion werde dabei lokalisiert in einer Induktionsspule; der Stromzweig sei überall kapazitätsfrei bis auf einen eingeschalteten Kondensator von der Kapazität C.

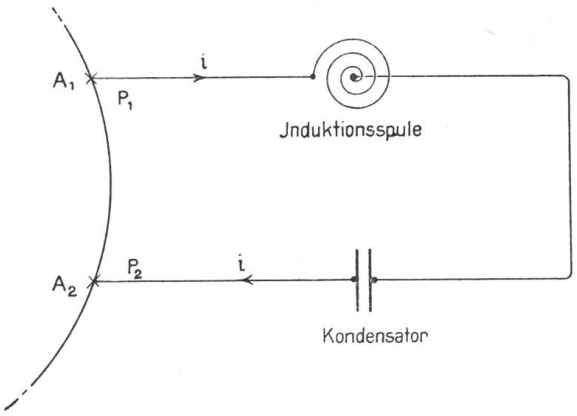

Abbildung 1.

Nun steht die Potentialdifferenz ΔP zwischen den Endpunkten eines ununterbrochenen eisenfreien Leiterstückes mit dem darin herrschenden momentanen Strome in dem Zusammenhange:

$$\Delta P = i\,w + L\,\frac{di}{dt} \qquad (17)$$

entsprechend dem Ohm'schen Gesetze und den Gesetzen der Induktion.

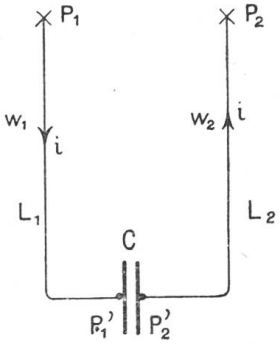

Abbildung 2.

Befindet sich in einer Leitung ein Kondensator, so teilt derselbe die ganze Leitung in zwei ununterbrochene Teilstücke, für welch beide also die Gleichung 17 Geltung hat.

Seien P'_1 und P'_2 die Potentiale der beiden Belegungen des Kondensators gemäss nebenstehender Abbildung 2, so gelten die Beziehungen:

$$P_1 - P'_1 = i\,w_1 + L_1\,\frac{di}{dt}$$

$$P'_2 - P_2 = i\,w_2 + L_2\,\frac{di}{dt}$$

woraus durch Addition sich ergiebt:

$$P_1 - P_2 = (P'_1 - P'_2) + i\,(w_1 + w_2) + L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$

oder mit:

$$w_1 + w_2 = w$$
$$L_1 + L_2 = L$$
$$P_1 - P_2 = e$$

erhalten wir:

$$e = (P'_1 - P'_2) + w\,i + L\frac{di}{dt} \tag{18}$$

Hierbei ist $(P'_1 - P'_2)$ die Potentialdifferenz der beiden Belegungen des Kondensators. Für sie gilt bekanntlich, wenn q die Ladung des Kondensators bedeutet:

$$C \cdot (P'_1 - P'_2) = q \tag{19}$$

wobei diejenige Belegung mit dem höheren Potentiale die positiv geladene ist.

Da somit in obiger Gleichung 19 der Belegung mit dem Potentiale P'_1 die positive Ladung zugesprochen wird, entspricht dem von P_1 nach P'_1 gerichteten Strome i eine Zunahme der Ladung q gemäss der Grundformel:

$$\frac{dq}{dt} = i$$

Zur Elimination der Kondensatorspannung aus der Gleichung 18 ist somit eine einmalige Differentiation nach der Zeit erforderlich. Sie ergiebt:

$$\frac{d}{dt}(P'_1 - P'_1) + w\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} = \frac{de}{dt}$$

Vermittelst:

$$\frac{d(P'_1 - P'_2)}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{i}{C}$$

gelangt man schliesslich zu der Differentialgleichung:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + w\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = \frac{de}{dt} \tag{20}$$

womit der Zusammenhang zwischen den Momentanwerten eines Wechselstromes und denjenigen der ihn erzeugenden Wechselspannung gefunden ist.

Um den Zusammenhang zwischen den effektiven Werten zu erhalten, muss die Differentialgleichung 20 vorerst integriert werden. Sie ist linear, mit konstanten Koeffizienten, weshalb man die Variable i in beliebig viele additive Teile zerlegen darf:

$$i = \sum_{n=1}^{n=\infty} i_n$$

die sich ohne gegenseitige Beeinflussung superponieren.

Zerlegt man auch die bezüglich der Differentialgleichung 20 bekannte Funktion $\frac{de}{dt}$ in eine gleiche Anzahl Teile

$$\frac{de}{dt} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{de_n}{dt}$$

und definiert jeden Teilstrom i_n durch je eine Differentialgleichung:

$$L\frac{d^2 i_n}{dt^2} + w\frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C}i_n = \frac{de_n}{dt} \tag{21}$$

so ist das allgemeine Integral der ursprünglichen Differentialgleichung 20 sicher gleich der Summe der allgemeinen Integrale der analogen Differentialgleichungen 21 für die Teilströme.

Im vorliegenden Falle wird man ohne weiteres auf die durch

$$e_n = \mathcal{E}_n \sin(n\omega t + \alpha_n)$$

definierte Zerlegung der Funktion $\frac{de}{dt}$ geführt.

Auf solche Weise ist dann die Integration der ursprünglichen Differentialgleichung 20 zurückgeführt auf diejenige der Differentialgleichungen:

$$L\frac{d^2 i_n}{dt^2} + w\frac{di_n}{dt} + \frac{1}{C} i_n = n\omega\,\mathcal{E}_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$$

Die allgemeine Integration dieser Differentialgleichung liefert für i_n den Ausdruck:

$$i_n = \Big(a_n \sin(\lambda t) + b_n \cos(\lambda t)\Big) e^{-\varrho t} + \mathcal{J}_n \sin(n\omega t + \beta_n)$$

mit

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - \frac{wC}{4L}}{LC}}, \qquad \varrho = \frac{w}{2L}$$

und

$$\mathcal{J}_n^2 = \frac{\mathcal{E}_n^2}{w^2 + \left(\frac{1}{n\omega C} - n\omega L\right)^2}, \qquad \beta_n = \alpha_n + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\frac{1}{n\omega C} - n\omega L}{w}\right)$$

während a_n und b_n die Integrationskonstanten bedeuten.

Hieraus folgt für den Gesamtstrom der Wert:

$$i = \Big(A_n \sin(\lambda t) + B \cos(\lambda t)\Big) e^{-\varrho t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_n^2 \sin(n\omega t + \beta_n)$$

mit

$$A = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \qquad B = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n$$

als Integrationskonstanten.

Der erzeugte Strom besteht aus einer rein periodischen Funktion und einer gedämpften Schwingung,[1]) welch letztere bei allen praktischen Fällen sehr rasch abklingt. Schon nach ganz kurzer Zeit wird deshalb der erzeugte Strom durch die periodische Funktion allein gegeben sein.

Es ist somit

$$i = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_n \sin(n\omega t + \beta_n)$$

der Zusammenhang zwischen den Momentanwerten des Stromes und den Spannungsamplituden, vermöge der Konstanten w, L und C des Stromzweiges.

Die Ausrechnung der durch die Beziehungen:

$$E^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^2\,dt \qquad I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt$$

[1]) In allen Fällen der Praxis ist eben λ sicher reell, nämlich $1 > \frac{wC}{4L}$.

mit T als der Zeit einer Periode, definierten effektiven Spannung E und effektiven Stromstärke I ergibt:

$$E^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{E}_n^2 \qquad I^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{J}_n^2$$

Die Phasenkonstanten treten in den effektiven Werten nicht auf.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$a_n^2 = \frac{1}{n^2\omega^2C^2w^2 + (1 - n^2\omega^2CL)^2}$$

so ist die effektive Stromstärke auch gegeben durch die Formel:

$$I^2 = \frac{\omega^2C^2}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2\, n^2 E_n^2 \tag{22}$$

womit wir schliesslich den gewünschten Zusammenhang zwischen der effektiven Stromstärke und den Spannungsamplituden gefunden haben.

Das Quadrat der effektiven Stromstärke ist eine lineare Funktion der Quadrate der Spannungsamplituden; die Koeffizienten dieser linearen Funktion sind hierbei eindeutig gegeben durch den Ohm'schen Widerstand, die Selbstinduktion, die Kapazität, d. h. durch die Konstanten w, L und C des Stromzweiges, und durch die Periode der untersuchten Wechselspannung.

Dieser Zusammenhang gilt ganz allgemein für jeden Wechselstrom, ob er ein normaler sei oder nicht, ob er Glieder von gerader Ordnung enthalte oder nicht. Benützt man die Beziehung 22 für technische Wechselströme, so hat man unter die Summe einfach nur die Glieder von ungerader Ordnung zu nehmen.

Prinzip der neuen direkten Methode.

Die Beziehungen:

$$I^2 = \frac{\omega^2C^2}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^2\, n^2 \mathcal{E}_n^2 \tag{23}$$

$$E^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{E}_n^2 \tag{24}$$

ermöglichen auf einfache Weise die Bestimmung der Amplituden von Wechselspannungen, führen uns also auf eine direkte Methode zur Analyse derselben.

Durch eine Wahl von $(m - 1)$ Kombinationen w, L und C und jedesmalige Messung der dabei auftretenden effektiven Stromstärke, erhält man, bei Kenntnis der effektiven Spannung E und der Periode N der untersuchten Wechselspannung, $(m - 1)$ lineare Gleichungen 23 und eine lineare Gleichung 24 zur Berechnung von m Amplituden, vorausgesetzt, dass dieselben genau gleich geblieben sind bei jedweder Kombination. Diese Voraussetzung trifft exakt niemals zu, aus verschiedenen Gründen.

Es erzeugt jede der gewählten Kombinationen einen anderen Strom, welcher durch Rückwirkung auf den Generator [1]) die Form seiner elektromotorischen Kraft ändert. Das Verfahren ist deshalb nur anwendbar, wenn der Generator selber schon derart belastet ist, dass die Belastungsänderungen durch den Meßstrom gegenüber der Hauptbelastung keinen merkbaren Einfluss auf die Form der elektromotorischen Kraft besitzen. Des ferneren ist

[1]) *Adams*: E. T. Z., 1910, S. 344, 407. — *Rüdenberg*: E. T. Z., 1904, S. 252. — *Wangemann*: E. T. Z., 1904, S. 783.

die Spannung selbst Schwankungen unterworfen. Je kleiner die Schwankungen sind, um so genauer darf man Proportionalität annehmen zwischen den Amplituden einerseits und der effektiven Spannung anderseits.

Lassen wir demnach nur ganz kleine Spannungsschwankungen zu, so sind mit genügender Genauigkeit die Verhältnisse

$$\rho_n = \frac{\mathcal{E}_n}{E}$$

als von den Spannungsschwankungen unabhängig zu betrachten.

Es sind dies die auf die Einheit der effektiven Spannung reduzierten Amplituden, und auf diese kommt es eigentlich nur an, will man beispielsweise die Spannungsformen bei verschiedenen effektiven Spannungen mit einander vergleichen.

Für die reduzierten Amplituden gelten die Beziehungen:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \rho_n^2 = 2 = c_1 \tag{25}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a^2 n^2 \rho_n^2 = \frac{2}{\omega^2} \cdot \frac{I^2}{E^2 C^2} = c \tag{26}$$

Zur Bestimmung von m reduzierten Amplituden ρ_n benötigt man ausser der Grundgleichung 25 nur noch $(m - 1)$ Gleichungen 26, wobei man die Amplituden aller höheren Glieder vernachlässigt, d. h. gleich Null setzt. Man muss deshalb m immer so gross wählen, dass der gemachte Fehler in der Berechnung der Amplituden keine Bedeutung hat.

Im Anwendungsfalle hat man zuerst $(m - 1)$ passende Kombinationen von w, L und C zu wählen, hierfür die der gemessenen Periodenzahl entsprechenden Koeffizienten a_n^2 auszuwerten und damit $(m - 1)$ Gleichungen von der Form aufzustellen:

$$\sum_{1,3,5\ldots}^{(2m-1)} a^2_{n,k}\, n^2 \rho_n^2 = c_k \quad k = 2, 3, 4 \ldots m$$

worin nur noch die $(m - 1)$ Grössen c_k zu bestimmen sind. Sie erhält man, indem man nacheinander zwischen die zwei Stellen des Stromnetzes, deren Spannungsunterschied untersucht werden soll, die $(m - 1)$ gewählten Kombinationen von w, L und C einschaltet und jedesmal die zugehörigen effektiven Werte der Spannungsdifferenz, der Stromstärke und zugleich die Periodenzahl misst, aus welchen Werten man die

$$c_k = \frac{2}{\omega_k^2} \cdot \frac{I_k^2}{E_k^2 C_k^2} \tag{27}$$

sofort berechnen kann.

Man ersieht, diese Methode liefert nur die Amplituden, nicht aber auch gleichzeitig die Phasenkonstanten.

Die gegebenen Entwicklungen sind im Prinzipe dieselben, wie sie dem von P. G. Agnew angegebenen Verfahren zu Grunde liegen. Die Verwertung dieser Entwicklungen ist aber derart, dass seine Methode höchst unvollkommen wird. Es ist mit ihr nicht möglich, eine beliebige Anzahl von Amplituden zu bestimmen; sie beschränkt sich auf die Berechnung von nur drei Amplituden, weshalb die Genauigkeit in deren Ermittlung sehr ungenügend ausfällt. Des ferneren gibt uns bei den meisten Spannungsformen die Kenntnis von nur drei Amplituden überhaupt kein rechtes Bild derselben.

Wir werden deshalb darauf bedacht sein, unsere Methode derart auszubauen, dass die Anzahl der zu berechnenden Amplituden unbeschränkt bleibt.

P. G. Agnew gewinnt die drei verschiedenen Kombinationen von w, L und C dadurch, dass er den Grössen w und C einen dominierenden Einfluss erteilt und durch deren pas-

sende Wahl die Koeffizienten a_n^2 verändert. Darin liegt eben der Grund der Beschränkung auf drei Kombinationen; denn solange in

$$a_n^2 = \frac{1}{n^2 \omega^2 C^2 w^2 + (1 - n^2 \omega^2 C L)^2}$$

w eine dominierende Bedeutung hat, ist eine grosse Variation der Grösse a_n^2 nicht möglich, wie man sofort ersieht, wenn man die Art, wie die einzelnen Grössen w, L und C in den Ausdruck für a_n^2 eintreten, näher ins Auge fasst.

In dieser Erkenntnis werden wir unsere Kombinationen stets herstellen durch eine passende Wahl der Grössen L und C, bei einem möglichst kleinen Ohm'schen Widerstande w.

Wahl der Kombinationen w, L und C.

Wir wollen nun die Gesichtspunkte festlegen, unter welchen die Wahl der Grössen w, L und C zu treffen ist, um eine brauchbare Methode zu erhalten.

Zu diesem Zwecke schreiben wir a_n^2 in der Form:

$$a_n^2 = b_n^2 \cdot p^2 \tag{28}$$

mit

$$b_n^2 = \frac{1}{(1 - n^2 \omega^2 C L)^2}$$

und

$$p^2 = \frac{1}{1 + n^2 \omega^2 C^2 b_n^2 w^2}$$

Es darf in Gleichung 28 solange p^2 fortgelassen, d. h. gleich 1 gesetzt werden, als die Bedingung erfüllt ist:

$$(1 - p^2) < \frac{1}{1000}$$

Dies ist sicher der Fall für:

$$(1 - p^2) < \frac{1}{1001}, \text{ also } \frac{1}{p^2} - 1 < \frac{1}{1001\, p^2}$$

oder

$$n^2 \omega^2 C^2 b_n^2 w^2 < \frac{1 + n^2 \omega^2 C^2 b_n^2 w^2}{1001}$$

und

$$1000\, n^2 \omega^2 C^2 b_n^2 w^2 < 1 \tag{29}$$

Wir setzen:

$$\omega = \xi \cdot \omega_0$$

mit

$$\omega_0 = 2 \pi N_0 = 2 \pi 50 = 100 \pi$$

woraus folgt:

$$\omega_0^2 = \sim 10^5$$

Damit wird die Beziehung 29 zu:

$$n^2 b_n^2 C^2 w^2 \xi^2 < 10^{-8}$$

oder schliesslich zu:

$$n^2 b_n^2 (10^6 C)^2 w^2 \xi^2 < 10^4 \tag{30}$$

Solange diese Bedingung erfüllt ist, darf man den Faktor p^2 bei der Berechnung der a_n^2 einfach fortlassen, den Ohm'schen Widerstand also vernachlässigen, da dann der dadurch verursachte Fehler in der Aufstellung der Werte von a_n^2 höchstens einen Tausendstel beträgt. Eine grössere Genauigkeit ist aber nicht erforderlich, hat auch keinen Sinn, indem die gemessenen Grössen, speziell die L, auch nicht genauer bestimmt werden können.

Man wird deshalb bei Ausführung des angegebenen Verfahrens durchwegs nur solche Kombinationen verwenden, d. h. nur solche Widerstände w zulassen, dass dabei die Bedingung 30 erfüllt bleibt. Nicht nur, daß man solchermaßen den genauen Wert des Ohm'schen Widerstandes der Meßleitung gar nicht zu kennen braucht, daß zweitens sich die Berechnung der a_n^2 viel einfacher gestaltet, sondern erst dann ist es überhaupt möglich, eine große Verschiedenheit der Koeffizienten a_n^2, sowohl mit steigendem Index „n", als auch von einer Kombination L und C zur anderen, zu erhalten.

Die Koeffizienten a_n^2 sind dann gleichzusetzen den Grössen:

$$b_n^2 = \frac{1}{(1 - n^2 \omega^2 C L)^2}$$

Um in einfacher Weise und rasch solche Wahlen von L und C vornehmen zu können, welche günstige Werte der b_n^2 zur Folge haben, setzen wir wieder:

$$\omega = 2\pi \cdot 50 \cdot \xi \quad \text{oder} \quad \omega^2 = 0{,}987 \cdot 10^5 \cdot \xi^2$$

und ferner

$$C = 10^{-6} \cdot C_1$$

wobei die C_1 in Mikrofarad zu messen sind. Damit erhält man:

$$b_n^2 = \frac{1}{(1 - \xi^2 \cdot n^2 \cdot 0{,}0987 \cdot C_1 \cdot L)^2} \tag{31}$$

Hierin ist ξ durch Messung gegeben, während die C_1 und L noch gewählt werden können nach Maßgabe der zur Verfügung stehenden Kapazitäten und Selbstinduktionen.

Bezüglich dieser Wahl gelten die folgenden Bemerkungen: Die gewählten b_n^2, respektive die ihnen gleichzusetzenden a_n^2 sind die Koeffizienten von linearen Gleichungen, und sind deshalb derart zu wählen, dass die Auflösung der Gleichungen, trotz der nicht exakten Kenntnis dieser Koeffizienten selber, besonders der konstanten Glieder c_k, ein genügend genaues Resultat ergibt.

Vom Standpunkte des numerischen Rechnens aus ist aber, bei nicht genau bekannten Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems, eine entsprechend genaue Auflösung desselben nur möglich, wenn erstens die entsprechenden Koeffizienten von einer Gleichung zur anderen und zweitens auch die einzelnen Koeffizienten ein und derselben Gleichung sehr stark von einander verschieden sind.

Im Übrigen müssen die Koeffizienten mit grösser werdendem „n" rasch abnehmen, damit diejenigen der vernachlässigten Glieder höherer Ordnung keinen merkbaren Einfluss auf die Werte der c_k besitzen.

Es empfiehlt sich deshalb, die Koeffizienten a_n^2 derart zu wählen, dass in jeder Gleichung nur einer derselben einen sehr grossen Wert annimmt, und zwar in allen Gleichungen Koeffizienten von verschiedener Ordnung, während die folgenden Koeffizienten sehr rasch abnehmen mit steigendem Index „n".

Da es in Gleichung 31 nur auf das Produkt $(L \cdot C_1)$ ankommt, ist es sehr einfach, bei auch nur ungefähr bekannten ξ^2, rasch eine passende Wahl der L und C_1 zu treffen. Man sucht zu diesem Zwecke diejenigen Werte des Produktes $(L \cdot C_1)$ auf, welche b_n^2 am grössten machen, d. h. Resonanz erzielen, für die verschiedenen Werte von n. Ist ξ^2 nicht stark verschieden von der Einheit, so findet Resonanz statt, wenn

$$L \cdot C_1 = \frac{10}{n^2} \cdot \frac{1}{0{,}987}$$

wird.

Man berechnet sich nun für eine Anzahl Werte von n den Ausdruck $\frac{10}{n^2}$ und hat hierauf diejenigen Kombinationen der zur Verfügung stehenden Kapazitäten und Selbstinduk-

tionen zu suchen, für welche die Produkte $(L\,C_1)$ am nächsten den einzelnen Werten von $\frac{10}{n^2}$ kommen, doch immerhin nicht derart nahe, dass Resonanz tatsächlich eintritt, indem sonst die Bedingungsgleichung 30 nicht erfüllt werden könnte.

Auflösung der Berechnungsgleichungen.

Zur Auflösung der die Amplituden liefernden Gleichungen schreiben wir dieselben in der allgemeinen Form hin:

$$\sum_{i=1,2,3\ldots}^{i=m} \alpha_{k\,i} \cdot x_i = c_k \tag{32}$$

mit

$$x_i = x_{\frac{n+1}{2}} = n^2\,\rho_n^2$$

und

$$\alpha_{1,\,i} = \alpha_{1,\,\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{n^2}\,, \qquad \alpha_{k\,i} = \alpha_{k,\,\frac{n+1}{2}} = a_{n,k}^2$$

$$k = 2, 3, 4 \ldots m$$

während $c_1 = 2$ und die c_k für $k = 2, 3, 4 \ldots m$ die durch die Gleichung 27 definierten Grössen bedeuten.

Die Auflösung aller m Gleichungen 32 nach den m Unbekannten ist sehr zeitraubend, besonders bei unbestimmt gelassenen c_k.

Es empfiehlt sich deshalb das folgende Verfahren:

Die drei ersten Gleichungen werden in der Form geschrieben:

$$\alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3 = c_1 - \sum_{i=4}^{i=m} \alpha_{1i}\;x_i = c'_1$$

$$\alpha_{21}\,x_1 + \alpha_{22}\,x_{23} + \alpha_2\,x_3 = c_2 - \sum_{i=4}^{i=\mathrm{m}} \alpha_{2i}\;x_i = c'_2$$

$$\alpha_{31}\,x_1 + \alpha_{32}\,x_2 + \alpha_{33}\,x_3 = c_3 - \sum_{i=4}^{i=m} \alpha_{3\,i}\;x_i = c'_3$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen liefert die x_i als lineare Funktionen der c'_k.

Sie seien gegeben durch:

$$x_1 = \beta_{11}\,c'_1 + \beta_{12}\,c'_2 + \beta_{13}\,c'_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{1\,k}\,c_k - \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{1\,k}\;\alpha_{k\,i} \right)$$

$$x_2 = \beta_{21}\,c'_1 + \beta_{22}\,c'_2 + \beta_{23}\,c'_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{2\,k}\,c_k - \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{2\,k}\;\alpha_{k\,i} \right)$$

$$x_3 = \beta_{31}\,c'_1 + \beta_{32}\,c'_2 + \beta_{33}\,c'_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{3\,k}\,c_k - \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{3\,k}\;\alpha_{k\,i} \right)$$

Solchermassen sind die

$$x'_1 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{1k}\, c_k \qquad x'_2 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{2k}\, c_k \qquad x'_3 = \sum_{k=1}^{k=3} \beta_{3k}\, c_k$$

die in erster Annäherung berechneten drei ersten Unbekannten bezüglich der drei ersten Gleichungen, unter Vernachlässigung aller übrigen Unbekannten.

Die

$$y_1 = \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_{k\,i}\, \beta_{1k} \right) = \sum_{i=4}^{i=m} x_i\, \gamma_{1i}$$

$$y_2 = \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_{k\,i}\, \beta_{2k} \right) = \sum_{i=4}^{i=m} x_i\, \gamma_{2i}$$

$$y_3 = \sum_{i=4}^{i=m} \left(x_i \sum_{k=1}^{k=3} \alpha_{k\,i}\, \beta_{3k} \right) = \sum_{i=4}^{i=m} x_i\, \gamma_{3i}$$

sind die an den x'_i anzubringenden Korrektionen, gemäss

$$x_1 = x'_1 - y_1 \qquad x_2 = x'_2 - y_2 \qquad x_3 = x'_3 - y_3$$

In ihnen sind die $\gamma_{k\,i}$ bekannt, berechenbar aus den $\alpha_{k\,i}$; die x_i sind die übrigen Unbekannten. Man findet dieselben folgenderweise:

In die noch nicht benützten Gleichungen 32 setzen wir die gefundenen ersten drei Unbekannten ein und erhalten $(m - 3)$ Gleichungen von der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{k\,i}\, x'_i - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{k\,i}\, y_i + \sum_{i=4}^{i=m} \alpha_{k\,i}\, y_i = c_k$$

oder:

$$\sum_{i=4}^{i=m} x_i \left(\alpha_{k\,i} - \alpha_{k1}\, \lambda_{1\,i} - \alpha_{k2}\, \gamma_{2\,i} - \alpha_{k3}\, \gamma_{3\,i} \right) = c_k - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{k\,i}\, x'_i$$

Setzen wir

$$\left(\alpha_{k\,i} - \alpha_{k1}\, \gamma_{1\,i} - \alpha_{k\,2}\, \gamma_{2\,i} - \alpha_{k\,3}\, \gamma_{3\,i} \right) = \varepsilon_{k\,i}$$

$$c_k - \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{k\,i}\, x'_i = g_k$$

so bleiben zur Bestimmung der übrigen $(m - 3)$ Unbekannten die $(m - 3)$ Gleichungen:

$$\sum_{i=4}^{i=m} \varepsilon_{k\,i}\, x_i = g_k$$

$$k = 4, 5, 6, 7 \ldots m$$

auf welche man natürlich dasselbe Verfahren weiter anwenden kann.

Auf solche Weise wird die Auflösung von m-Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zurückgeführt auf diejenige mehrerer Systeme von nur drei Gleichungen mit drei Unbekannten, was natürlich eine Vereinfachung bedeutet.

Wir hätten die Auflösung selbstverständlich auch zurückführen können auf die Lösung von Systemen mit je zwei, vier oder noch mehr Gleichungen. Ist beispielsweise $m = 8$, so ist eine Zurückführung nur auf Systeme mit drei Gleichungen gar nicht möglich, wohl aber auf zwei Systeme mit je drei Gleichungen und auf ein System mit zwei Gleichungen.

Von besonderem Vorteile ist das angegebene Verfahren der successiven Auflösung dann, wenn die Koeffizienten a_{ki} derart beschaffen sind, dass die Koeffizienten γ_{ki} der Korrektionen y_i sehr klein werden. Denn dann sind die ε_{ki} fast gleich den entsprechenden a_{ki}, so dass die ε_{ki} oft gar nicht berechnet werden müssen, sondern einfach gleich den a_{ki} gesetzt werden dürfen.

Dies ist der Fall bei den Gleichungen, wie wir sie zur Berechnung der Amplituden erhalten, wenn wir uns streng an die am Schlusse des vorigen Paragraphen gegebenen Vorschriften bei ihrer Aufstellung halten.

Diesem Umstande entspringt ein weiterer Vorteil unserer Methode, der in der folgenden Regel besteht:

Soll eine gegebene Wechselspannung untersucht werden, so misst man vorerst nur für zwei Meßschaltungen die entsprechenden c_k und berechnet hieraus sofort die drei ersten x'_i. Muss man dann vermuten, dass die weiteren Unbekannten nicht zu vernachlässigen sind, dann erst stellt man drei weitere Meßschaltungen her und bestimmt hierfür die Grössen c_k durch Messung. Lässt die Grössenordnung der hieraus berechneten drei weiteren Amplituden darauf schliessen, dass auch die übrigen Unbekannten nicht fortgelassen werden dürfen, erst dann fährt man mit der Messung der c_k für weitere Meßschaltungen fort, in Serien zu zwei, drei, vier oder mehr, bis man eine genügende Anzahl Amplituden glaubt gefunden zu haben.

In diesem Sinne können wir unsere Methode als eine direkte Methode der succesiven Analyse von Wechselspannungen bezeichnen.

Allgemeine Bemerkungen über die zu verwendenden Apparate.

Mit dem nunmehr erläuterten Verfahren zur Ermittlung der Spannungsamplituden haben wir tatsächlich eine Methode gefunden, welche keine speziellen Vorrichtungen und Apparate benötigt und dabei doch exakte Resultate liefert.

An Instrumenten erfordert dasselbe nur solche, wie sie in jedem Laboratorium leicht zu beschaffen sind. Während aber bezüglich des zur Messung der effektiven Spannung verwendeten Voltmeters und des zur Bestimmung der Periode benuzten Frequenzmessers keine Bemerkungen zu machen sind, ist die Wahl der übrigen Instrumente in erster Linie an die Bedingung geknüpft, dass dieselben nur einen kleinen in der Rechnung zu vernachlässigenden Gesamtwiderstand der Meßschaltung zur Folge haben, deren Ohm'scher Widerstand infolgedessen nur der Grössenordnung nach bekannt sein muss.

Hingegen ist die genaue Kenntnis sowohl der Kapazität als auch des Selbstinduktionskoeffizienten der Meßleitung ein Haupterfordernis.

Zu diesem Zwecke wird man dieselbe nicht nur derart ausführen, dass sie bis auf den Kondensator als kapazitätsfrei angesehen werden darf, sondern dass sie auch überall induktionslos ist bis auf eine eingeschaltete, vollkommen eisenfreie Spule. Der Selbstinduktionskoeffizient dieser Spule ist dann zugleich derjenige der ganzen Leitung und muss durch Messung genau bestimmt werden.

Um aber verschiedene Selbstinduktionen der Meßleitung herstellen zu können, müssen entweder mehrere Spulen zur Verfügung stehen, oder aber eine einzige in mehreren Abteilungen gewickelte Spule. Eine solche ermöglicht, durch Kombination der einzelnen Abteilungen miteinander, die verschiedensten Selbstinduktionen zu erzeugen, welche alle einzeln durch Messung ermittelt werden müssen.

Im Uebrigen darf die Induktionsspule natürlich nur einen kleinen Ohm'schen Widerstand besitzen, weshalb nur Spulen in Betracht fallen mit recht dicken Drähten und dem

zufolge mit mehreren Lagen. Da aber die Selbstinduktionskoeffizienten solcher Rollen infolge der Wirkung der einzelnen Lagen aufeinander von der Periodenzahl des durchgehenden Wechselstromes nicht unabhängig sind [1]), ist jede Spule, respektive jede Kombination der einzelnen Abteilungen einer Spule, vor ihrer Benützung, daraufhin zu untersuchen, ob die Veränderlichkeit ihres Selbstinduktionskoeffizienten mit der Periodenzahl vernachlässigt werden darf oder nicht.

Die betreffende Spule ist dann nur im ersteren Falle brauchbar, da sonst die Induktionskoeffizienten für alle Periodenzahlen bis zu hohen Werten derselben einzeln bestimmt werden müssten, indem ja zur Berechnung eines jeden Koeffizienten a_n^2 der dieser Periode, gegeben durch $(n \cdot \omega)$, entsprechende Wert von L benützt werden muss.

Anders verhält es sich mit dem zu verwendenden Kondensator. Da derselbe keinen merkbaren Ohm'schen Widerstand besitzt, kann jeder Normalkondensator benützt werden, der eine genügende Anzahl verschiedener Kapazitäten einzuschalten erlaubt. Streng genommen ist zwar auch die Kapazität eines Kondensators von der Periode des durchgehenden Wechselstromes abhängig [2]), doch ist diese Veränderlichkeit der Kapazität bei den Normalkondensatoren und den auftretenden Wechselzahlen $(n \cdot N \sim 23 \cdot 50 = 1150)$ so klein, dass sie ganz ausser Betracht fällt.

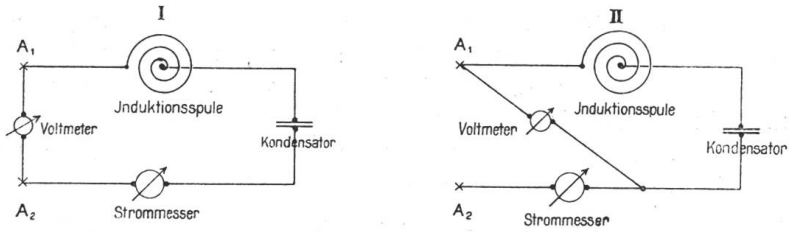

Abbildung 3.

Bezüglich der Messung des effektiven Wertes kommen zwei Schaltungen in Frage, die in Abbildung 3 veranschaulicht sind.

Bei Verwendung eines elektrostatischen Voltmeters sind beide Schaltungen zulässig, denn ein solches Instrument verbraucht keinen praktisch meßbaren Strom. Andernfalls ist nur die erste Schaltung verwendbar.

Des ferneren muss das Strommeßinstrument bei beiden Schaltungen vollkommen induktionslos sein; bei der ersten Schaltung darf es überdies nur einen sehr kleinen Ohm'schen Widerstand besitzen, während derselbe bei der zweiten Schaltung beliebig sein darf. Jedenfalls muss ein Instrument verwendet werden zur Messung ganz kleiner Wechselströme. Denn das Verfahren ist ja überhaupt nur dann brauchbar, wenn die gewählten Kombinationen von L und C nur sehr kleine, gegenüber der Hauptbelastung des Generators ausser Betracht fallende Meßströme auftreten lassen.

Dabei ist unbedingt eine grosse Genauigkeit des Instrumentes erforderlich, indem die Genauigkeit dieser Strommessung zugleich diejenige der Methode überhaupt bedeutet.

Die Meßschaltung, deren Instrumente und die Ergebnisse vorgenommener Messungen.

Beschreibung des Strommeßinstrumentes.

Zur Prüfung der Verwendbarkeit und Genauigkeit der im vorigen Abschnitte angegebenen direkten Analyse, wurden vermittelst derselben einige Wechselspannungen untersucht. Die bezüglichen Messungen wurden im physikalischen Institut der eidgen. Technischen Hochschule, unter der Leitung des seither verstorbenen Prof. Dr. H. F. Weber ausgeführt.

Dabei wurde besonderes Gewicht gelegt auf die Benutzung eines sehr empfindlichen und genauen Instrumentes zur Messung der effektiven Stromstärken.

---

[1]) *Dolezalek:* Drud. Ann. **12**, S. 1142. — *Rusch:* „Das Wechselfeld in Drahtrollen". Diss. 08. *Strasser:* Drud. Ann. **17**, S. 763. — Handbuch der Physik von Winkelmann: Bd. VII S. 608.

[2]) *Hanauer:* Wied. Ann. **65**, S. 789.

Zu einer sehr exakten Bestimmung der Intensität sehr kleiner Wechselströme gelangt man durch thermoelektrische Messung der Temperatur eines im Vakuum liegenden, von diesem Strome durchflossenen Drahtes. Hiervon ausgehend wurde zur Strommessung ein „Vakuum-Thermo-Instrument" nach *Dr. W. Voege* benutzt [1]), ein Instrument, das sich durch grosse Handlichkeit und Empfindlichkeit auszeichnet und von dem Abbildung 4 eine schematische Darstellung gibt. In einer kleinen evakuierten Glaskugel von 4 Zentimeter Durchmesser befindet sich ein etwa 2 Zentimeter langer sehr dünner Platindraht, der sogenannte Heizdraht, durch welchen der zu messende Strom geschickt wird. Quer dazu wird ein zweiter dünner Draht gespannt, zur einen Hälfte aus Konstantan, zur anderen aus Eisen bestehend und zwar derart, dass die Lötstelle beider Teildrähte gleichzeitig auf den Heizdraht aufgelötet wird.

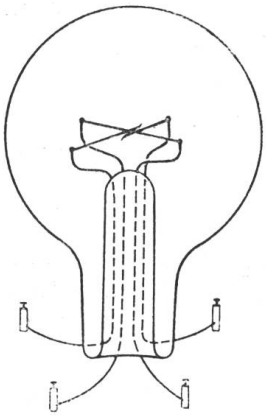
Abbildung 4.

Die Enden der zwei Drähte führen zu vier Klemmen, von denen zwei eben den zu messenden Strom aufnehmen, während den zwei anderen Klemmen der entstehende Thermostrom entnommen wird. Die Glaskugel ist dabei von einer die Wärme isolierenden Hülle zu umgeben. Verwendet wurde als solche ein kupferner Doppelhohlcylinder, dessen Zwischenraum überdies mit Baumwolle angefüllt war.

Infolge des den Heizdraht durchfliessenden Stromes steigt die Drahttemperatur T, bis die vom Strome in der Zeiteinheit entwickelte Wärme

$$Q = W\, i^2_{mittel} = W \cdot I^2$$

wenn W den Widerstand des Heizdrahtes bedeutet, gleich geworden ist der von diesem Drahte ausgestrahlten Wärme in der gleichen Zeit. Diese Wärmemenge ist aber proportional dem Temperaturunterschiede des Heizdrahtes gegenüber der Umgebung der Glaskugel, welcher Unterschied zugleich auch die Zunahme der Temperatur des Heizdrahtes ist, sofern diejenige der Umgebung als konstant angesehen werden kann. Dies ist in der Tat zulässig, denn der Kupfermantel schützt den Innenraum vor den Temperaturschwankungen des Meßraumes, während die im Heizdrahte entwickelte Wärmemenge so klein ist, dass sie die Temperatur der Umgebung innerhalb der zur Messung benötigten Zeiten nicht merklich zu ändern vermag.

Für die Temperaturzunahme gilt demnach die Beziehung:

$$\Delta T = \varkappa \cdot Q = \varkappa \cdot W \cdot I^2 = a \cdot I^2$$

Die Temperatur nimmt proportional mit dem Quadrate der effektiven Stromstärke zu. In der Messung dieser Temperaturerhöhung haben wir somit ein Mittel gefunden zur Bestimmung sowohl von Gleichströmen als auch von Wechselströmen.

Die Temperaturerhöhung des Heizdrahtes wird bestimmt durch Messung der durch sie in der Lötstelle des quergespannten Thermodrahtes erzeugten Zunahme e der thermoelektromotorischen Kraft. Zu diesem Zwecke verbindet man die dem Thermodrahte entsprechenden Klemmen des Instrumentes mit einem empfindlichen Galvanometer unter Zwischenschaltung eines Regulierwiderstandes. Sei w der gesamte Widerstand des Thermokreises, bestehend aus Thermoinstrument, Galvanometer, Regulierwiderstand und Zuleitungen, so gilt für den darin fliessenden Strom das Ohm'sche Gesetz:

$$w \cdot i = E + \Sigma E' \qquad (33)$$

wenn E die thermoelektromotorische Kraft bedeutet bei eingeschaltetem Heizstrome und E' die sämtlichen übrigen elektromotorischen Kräfte des Thermokreises. Es sind dies nur die thermoelektromotorischen Kräfte derjenigen Stellen, an welchen zwei verschiedene Metalle sich berühren. Sorgt man dafür, dass alle Verbindungsstellen im Thermokreise von Temperaturschwankungen möglichst geschützt sind, so kann man während der kleinen

[1]) *W. Voege*, E.T.Z. 1906, S. 467, 780. — *A. Schwarze*: E.T.Z. 1906, S. 780. — *D. König*: E.T.Z. 1906 S. 1103.

nötigen Meßzeiten die Grösse $\Sigma E'$ als konstant ansehen. Sie lässt sich dann sehr einfach eliminieren.

Mißt man den Ausschlagswinkel α des Galvanometers nach der Methode der Poggendorf'schen Spiegelablesung, so stellt man einfach die Skala auf die Ruhelage erst nach Schliessung des Thermokreises ein, aber vor Einschaltung des zu messenden Heizstromes.

Es wird damit ein Fehler in der Fixierung der Ruhelage gemacht, der gerade demjenigen Thermostrome

$$w \cdot i_0 = E_0 + \Sigma E' \tag{34}$$

entspricht, welcher im Thermokreise herrscht, so lange der zu messende Strom noch nicht eingeschaltet ist.

Aus der Differenz der Gleichungen 33 und 34 ergibt sich die Zunahme der thermoelektromotorischen Kraft in der Lötstelle des Thermodrahtes, zufolge deren Temperaturerhöhung, zu:

$$e = E - E_0 = w\,(i - i_0)$$

wodurch also die Grösse $\Sigma E'$ eliminiert wird. Wir haben zu diesem Zwecke die Differenz der beiden Ströme i und i_0 zu messen: dies geschieht eben durch die angegebene Einstellung der Ruhelage. Ist α_0 der dem Strome i_0 entsprechende Ablenkungswinkel des Galvanometers, α_1 der dem Strome i entsprechende, so wird nach Einschalten des Heizstromes am Galvanometer bei der obigen Fixierung der Ruhelage ein Winkel α konstatiert gleich der Differenz der beiden Ausschlagswinkel α_1 und α_0, also:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$$

Wird ein Galvanometer benutzt, welches Proportionalität aufweist zwischen dem durchgehenden Strome und der Tangente des Ausschlagswinkels, so ist also zu setzen:

$$i = b \cdot tg\,(\alpha + \alpha_0) = \frac{b\,tg\alpha + b\,tg\alpha_0}{1 - tg\alpha\,tg\alpha_0}$$

Nun ist der Strom i_0 jedenfalls äusserst gering, so dass $(tg\alpha\ tg\alpha_0)$ gegenüber 1 zu vernachlässigen ist und einfach:

$$i = b \cdot tg\alpha + b \cdot tg\alpha_0 = b \cdot tg\alpha + i_0$$

gesetzt werden darf.

Hiermit wird

$$e = w \cdot b \cdot tg\alpha = w i'$$

wobei i' nicht der wirkliche Thermostrom ist, sondern nur der scheinbare, der durch Messung zufolge der eigentlich unrichtigen Einstellung der Ruhelage gefundene Wert desselben. Dieser scheinbare, gemessene Wert des Thermostromes entspricht aber gerade demjenigen des durch die Zunahme e der thermoelektromotorischen Kraft im Thermodrahte erzeugten Teiles des Thermostromes.

Wir sind somit imstande, durch die angegebene Messung des Galvanometerstromes, sofern als solcher nur der Thermostrom auftritt, die durch die Temperaturerhöhung ΔT bedingte thermoelektromotorische Kraft e zu bestimmen.

Sie ist eine eindeutige Funktion der Temperaturzunahme und deshalb auch des Quadrates der effektiven Stromstärke I des zu messenden Stromes. In der Form geschrieben:

$$e = f_{(I^2)} \cdot I^2 = \frac{1}{g}\,I^2$$

benötigen wir noch die Kenntnis des Proportionalitätsfaktors g in Funktion von I^2, um hierauf das Instrument zur Messung des primären Stromes gebrauchen zu können.

Aichung des Thermo-Instrumentes.

Zur Messung der Thermoströme wurde ein astatisches aperiodisches Galvanometer nach Wiedemann mit 4 Spulen benutzt. Durch äussere Astasierung wurde dessen Empfind-

lichkeit derart erhöht, dass bei einem Skalenabstande von 2300 Millimeter einem Ausschlage von 1 Millimeter ein Strom von nur 10^{-8} Ampère entsprach. Die Ablesung geschah immer nach der Poggendorf'schen Methode mit Spiegel, Fernrohr und Skala. Der Widerstand des Galvanometers samt Zuleitungen betrug $8{,}6^{\Omega}$

Die Astasierung und die Kupferdämpfung waren so gross, dass der definitive Ausschlag erst nach drei Minuten erreicht wurde. Da bei diesem Galvanometer die Ströme proportional der Tangente des Ausschlagswinkels sind, muss am Ausschlage s an der Skala selbst, um Proportionalität herzustellen, eine Korrektion angebracht werden, gemäss:

$$tg\alpha = \frac{s - \Delta s}{2D} = \frac{s_{corr.}}{2D} = \frac{z}{2D}$$

mit

$$\Delta s = \frac{s^3}{4D^2} - \frac{s^5}{8D^4} + \frac{5s^7}{64D^6} - \ldots$$

wobei D den Skalenabstand bedeutet.

Dann gilt für einen Strom i im Galvanometerkreise:

$$i = b \cdot tg\alpha = \frac{b}{2D} \cdot z = A \cdot z$$

Die Konstante A wird mit grosser Genauigkeit und Raschheit gefunden, wenn man auf das Galvanometer eine bekannte elektromotorische Kraft bei bekanntem, sehr grossen vorgeschaltetem Widerstande wirken lässt. Die Konstante muss bei Benutzung des Galvanometers des öfteren bestimmt werden, da dieselbe mit der Zeit, wenn auch sehr wenig, doch veränderlich ist.

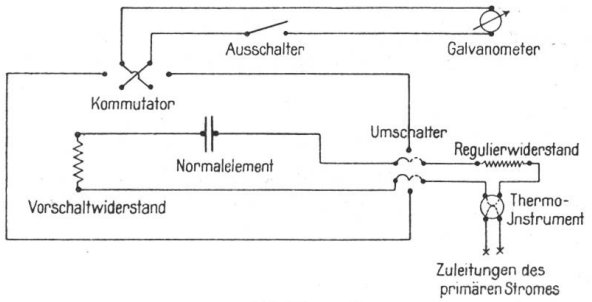

Abbildung 5.

Zur Aichung des Thermoinstrumentes musste deshalb die in Abbildung 5 dargestellte Schaltung angewendet werden. Der Kommutator ist in den Galvanometerkreis eingeschaltet worden, um jeden Strom in beiden Richtungen durch das Galvanometer senden zu können.

Die jeweilige Aichung geschah mit einem Normalelemente nach Weston ($EMK = 1{,}0185^{V}$) und einem Kurbelrheostaten der bis zu einem Megohm einzuschalten erlaubte. Vor dem Thermo-Instrumente befand sich ein Stöpselrheostat zur Aenderung des Widerstandes im Galvanometerkreise. Die sämtlichen Klemmen, Aus- und Umschalter waren gehörig in Watte eingehüllt, um die störenden thermo-elektromotorischen Kräfte möglichst zu eliminieren oder doch wenigstens konstant zu halten.

Stellt man nun die Ruhelage der Skala erst nach Schliessung des Galvanometerkreises ein, aber vor Einschaltung des primären Stromes, so wird nach dem vorigen Paragraphen die im Thermo-Instrumente wirkende thermoelektromotorische Kraft e also direkt gemessen werden können durch den korrigierten Ausschlag des Galvanometers

$$e = w \cdot A \cdot z$$

sofern im Galvanometerkreise kein anderer Strom fliesst.

Infolge der nicht punktförmigen Berührung von Heizdraht und Thermodraht wird aber immer ein Bruchteil des Heizstromes in den Thermokreis übertreten und, je nach seiner Richtung, sich zu dem Thermostrome addieren oder von ihm subtrahieren.

Ist q der Widerstand des gemeinsamen Berührungsstückes beider Drähte, so erzeugt an seinen Enden der primäre Strom in jedem Momente eine Potentialdifferenz von

$$\Delta P = q \cdot i_{primär}$$

wobei ΔP die Richtung von $i_{primär}$ hat. Der Strom im Galvanometerkreise hat somit die Grösse:

$$i = \frac{e \pm \Delta P}{w} = \frac{e \pm q\, i_{prim.}}{w}$$

woraus folgt:

$$e = A \cdot w \cdot z \pm q \cdot i_{prim.}$$

Ist der primäre Strom ein Gleichstrom, so findet man deshalb e einfach durch Kommutieren des primären Stromes, indem man beidemal den korrigierten Ausschlag, z_1 und z_2 bestimmt und das Mittel nimmt:

$$e = A \cdot w \cdot \frac{|\, z_1 + z_2 \,|}{2}$$

Ausschläge nach verschiedenen Seiten der Ruhelage sind dabei mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung zu bringen. Des ferneren liefert die Differenz beider Ausschläge den Widerstand des Berührungsstückes zu:

$$q = \frac{w \cdot A \cdot}{i_{prim.}} \frac{|\, z_1 - z_2 \,|}{2}$$

Ist der primäre Strom dagegen ein Wechselstrom, so kann das Galvanometer den schnellen Wechseln der durch die Potentialdifferenz $\Delta P = q \cdot i_{prim.}$ im Galvanometerkreise hervorgerufenen Ströme nicht folgen, weshalb in diesem Falle tatsächlich durch den reduzierten Galvanometerausschlag die thermoelektromotorische Kraft direkt gemessen wird. In die Gleichungen 35 und 36 hat man eben eigentlich den Mittelwert des primären Stromes zu setzen und der ist bei den technischen Wechselströmen gleich Null. Das Instrument eignet sich deshalb besonders zur Messung von Wechselströmen.

Die Aichung des Thermo-Instrumentes wurde vorgenommen, einmal mit Gleichstrom und dann mit Wechselstrom. Der primäre Gleichstrom wurde gemessen mit einem Präzisions-Milliampèremeter von Siemens & Halske, der primäre Wechselstrom mit einem Milli-Thermoammeter Patent Duddell [1]).

Zur Aichung des Galvanometers wurden Vorschaltwiderstände von 500 000 Ω und 250 000 Ω genommen, was bei einem Skalenabstande von 2300 Millimeter Ausschlägen von etwa 200 mm und 400 mm entsprach. Der Widerstand des Thermodrahtes wurde zu 11,1 Ω gefunden, weshalb im Regulierwiderstande des Thermokreises jeweilen

$$w - w_{galv.} - w_{Thermodraht} = w - 8{,}6^{\Omega} - 11{,}1^{\Omega} = (w - 19{,}7)^{\Omega}$$

gestöpselt werden mussten.

Sowohl die Aichung mit Gleichstrom als auch diejenige mit Wechselstrom ergibt eine Konstanz der Grösse g, im Mittel

$$\frac{1}{g} = 19{,}90$$

in weiten Grenzen bis etwa $I_{prim.} = 0{,}016$ Ampère, während für höhere Werte der primären Stromstärke die Proportionalität zwischen der thermoelektromotorischen Kraft und dem Quadrate des Heizstromes aufhört.

Bis 0,016 Amp. kann also mit dem Thermo-Instrumente ein Strom gemessen werden gemäss der einfachen Formel:

$$I^2 = g \cdot w \cdot A \cdot z = 0{,}05025 \cdot w \cdot A \cdot z$$

Ueber $I = 0{,}03^{Amp.}$ darf überhaupt das Instrument gar nicht belastet werden, da es höhere Beanspruchungen nicht aushält, die dünnen Drähte würden bei einer Mehrbelastung durchbrennen.

Zur Messung grösserer Ströme muss daher dem induktionslosen Thermo-Instrumente ein ebenfalls induktionsloser Nebenschlusswiderstand beigegeben werden.

---

[1]) Die Instrumente werden hergestellt von der „Cambridge Scientific Instrument Co. Ld."

Die Induktionsspule.

Zur Verwendung gelangte eine in drei Abteilungen gewickelte Induktionsspule. Die Drahtdicke betrug 4 *mm*, die übrigen Dimensionen waren:

Wickelungshöhe = 450 *mm*
Aeusserer Radius = 200 *mm*
Innerer Radius = 70 *mm*

Die Widerstandsbestimmung der einzelnen Abteilungen ergab für die

Abteilung I mit 722 Windungen: $w_{I} = 0{,}556^{\Omega}$
Abteilung II mit 899 Windungen: $w_{II} = 0{,}994^{\Omega}$
Abteilung III mit 895 Windungen: $w_{III} = 1{,}334^{\Omega}$

woraus für die ganze Spule folgt:

$$w_{I+II+III} = 2{,}884^{\Omega}$$

Abteilung I ist dabei die innerste Lage der Windungen, Abteilung III die äusserste.

Sind L_1, L_2 und L_3 die Selbstinduktionskoeffizienten der einzelnen Abteilungen, M_{12}, M_{23} und M_{31} die Koeffizienten ihrer gegenseitigen Induktion, so lassen die drei Abteilungen die folgenden 13 Kombinationen zu:

$$L_{I} = L_1\,,\; L_{I+II} = L_1 + L_2 + 2M_{12}\,,\; L_{I-II} = L_1 + L_2 - 2\,M_{12}$$
$$L_{II} = L_2\,,\; L_{II+III} = L_2 + L_3 + 2M_{23}\,,\; L_{II-III} = L_2 + L_3 - 2\,M_{23}$$
$$L_{III} = L_3\,,\; L_{III+I} = L_3 + L_1 + 2M_{31}\,,\; L_{III-I} = L_3 + L_1 - 2\,M_{31}$$

$$L_{I+II+III} = L_1 + L_2 + L_3 + 2\,(M_{12} + M_{23} + M_{31},)$$
$$L_{I+II-III} = L_1 + L_2 + L_3 + 2\,(M_{12} - M_{23} - M_{31}),$$

$$L_{I-II+III} = L_1 + L_2 + L_3 + 2\,(-M_{12} - M_{23} + M_{31}),$$
$$L_{-I+II+III} = L_1 + L_2 + L_3 + 2\,(-M_{12} + M_{23} - M_{31})$$

Durch sechs derselben sind alle übrigen bestimmt; werden also mehr als sechs Kombinationen durch Messung einzeln ermittelt, so kann man damit umgekehrt die Genauigkeit der Bestimmung auf das Schärfste prüfen.

Die experimentelle Bestimmung der einzelnen Selbstinduktionskoeffizienten geschieht am einfachsten durch Messung der Spannung und der Stromstärke eines hindurchgehenden Wechselstromes von bekannter Form, entsprechend der Beziehung:

$$I^2 = \frac{1}{2}\sum_{1,3\ldots}^{\infty}\frac{\mathcal{E}^2{}_n}{w^2 + (n\omega L)^2} = \frac{E^2}{w^2 + (\omega L)^2}\cdot f^2$$

mit

$$f^2 = \frac{1}{2}\sum_{1,3\ldots}^{\infty}\frac{\rho^2{}_n}{n^2}\left(\frac{1 + \left(\frac{w}{\omega L}\right)^2}{1 + \left(\frac{w}{n\,\omega L}\right)^2}\right)$$

woraus folgt:

$$L = \frac{E}{I\omega}\cdot\sqrt{f^2 - \frac{I^2\cdot w^2}{E^2}}$$

Die Wurzel bedeutet nur eine Korrektion, da erstens auch bei stark von der Sinusform abweichenden Wechselströmen die Grösse f^2 doch von 1 wenig verschieden sein wird und zweitens die Widerstände w der Spulenabteilungen sehr klein sind gegenüber der Selbstinduktion. Im ungünstigsten Falle ist, wie wir noch sehen werden,

$$\frac{w}{L} \sim 5$$

also bei $\omega = 2\pi\cdot 50$

$$\frac{w}{\omega L} \sim \frac{1}{60}$$

Damit wird:

$$2\,f^2 = \rho_1{}^2 + 1{,}00025\,\frac{\rho_3{}^2}{9} + 1{,}00026\,\frac{\rho_5{}^2}{25} + 1{,}00027\,\frac{\rho^2{}_7}{49} + \ldots$$

Es wurde zu den Messungen der Selbstinduktionskoeffizienten der Strom einer Siemens'schen Wechselstrommaschine mit eisenfreier Armatur verwendet, die bei allen Belastungen einen von der Sinusform sehr wenig abweichenden Strom lieferte.

Spätere Messungen ergeben bei einer induktionsfreien Belastung von 1 Ampère für die ρ_n^2 die Werte:

$$\rho_1 = 1{,}413,\ \rho_3 = 0{,}0301,\ \rho_5 = 0{,}0213,\ \rho_7 = 0{,}0095\ldots$$

was einem Korrektionsfaktor f^2 entspricht von der Grösse:

$$f^2 = 0{,}9993$$

Es darf somit f^2 mit genügender Genauigkeit gleich 1 gesetzt werden.

Die Spannung E wurde gemessen durch ein mit Gleichstrom geaichtes Thermoammeter, Patent Duddell, unter Vorschaltung eines grossen bekannten Normalwiderstandes; der Strom I wurde gemessen durch das in den vorigen Paragraphen beschriebene Thermo-Instrument. Auf solche Weise wurde eine sehr grosse Genauigkeit in der Bestimmung der Verhältnisse E/I erzielt.

Wiederholte Messungen ergaben bei $N = 50$ für die folgenden Kombinationen die angegebenen Selbstinduktionskoeffizienten:

$$L_{\mathrm{II+III}} = 0{,}4185^{Henry} \qquad L_{\mathrm{III}} = 0{,}1520^{Henry}$$
$$L_{\mathrm{III+I}} = 0{,}2480^{Henry} \qquad L_{\mathrm{III-I}} = 0{,}1128^{Henry}$$
$$L_{\mathrm{I+II}} = 0{,}1932^{Henry} \qquad L_{\mathrm{II-III}} = 0{,}0594^{Henry}$$

und

$$L_{\mathrm{I+II+III}} = 0{,}5908^{Henry} \qquad L_{-\mathrm{I+II+III}} = 0{,}3020$$

Die Berechnung der zwei letzten Koeffizienten aus den sechs ersten ergibt:

$$L_{\mathrm{I+II+III}} = 0{,}5913^{Henry} \qquad L_{-\mathrm{I+II+III}} = 0{,}3005$$

Die überaus gute Übereinstimmung der berechneten Werte mit den gemessenen zeigt, dass die einzelnen Koeffizienten durch die obigen Werte mit ausreichender Genauigkeit gegeben sind.

Es bleibt nur noch übrig, die Selbstinduktionskoeffizienten auf ihre Veränderlichkeit mit der Periodenzahl zu untersuchen. Hierzu wurden die drei Kombinationen: L_{III}, $L_{\mathrm{II+III}}$ und $L_{\mathrm{I+II+III}}$, auf gleiche Weise wie bei $N = 50$, auch noch gemessen bei $N = 33{,}3$ und bei $N = 98{,}1$ mit einem durch die gleiche Maschine gelieferten Strome. Die dabei gefundenen Werte sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

N	L_{III}	$L_{\mathrm{II+III}}$	$L_{\mathrm{I+II+III}}$
33,3	0,1534	0,4212	0,5937
50,0	0,1520	0,4185	0,5908
98,1	0,1512	0,4160	0,5884

Es ist also tatsächlich eine Abnahme der Selbstinduktionskoeffizienten mit zunehmender Periodenzahl zu konstatieren. Doch ist dieselbe sehr gering, von 50 bis 100 Perioden nur etwa 6 ‰, und bleibt auch gering, da die Abnahme mit steigender Periodenzahl sich nicht gleich bleibt, sondern selber kleiner wird.

Es dürfen daher, ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit der Methode überhaupt, der Berechnung der a_n^2 die bei $N = 50$ gefundenen Werte der Induktionen, bei allen „n", zu Grunde gelegt werden; die untersuchte Spule ist für unsere direkte Analyse brauchbar.

Die Meßschaltung und der Gang der Messungen.

Zur Erhöhung des Meßbereiches des Thermo-Instrumentes muss, wie schon erwähnt, demselben ein vollkommen induktionsloser Widerstand parallel geschaltet werden. Sei r_0 der Widerstand des Heizdrahtes samt Zuleitungen, r der parallel geschaltete Widerstand, ist i' der momentane Strom im Heizdrahte, i aber der totale, zu messende Momentanstrom, so gilt bekanntlich:

$$i = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) i' = h \cdot i'$$

also:

$$I^2 = i^2_{\text{Mittel}} = h^2 \cdot g \cdot w \cdot A \cdot z$$

oder

$$I^2 = k \cdot z$$

mit

$$k = h^2 \cdot g \cdot w \cdot A$$

Jede Strommessung erfordert eine vorausgegangene genaue Bestimmung des zusammengesetzten Proportionalitätsfaktors k. Anstatt denselben jedesmal aus seinen Faktoren zusammenzusetzen, das heisst durch Aichung des Galvanometers bei Kenntnis der Widerstände w und r und mit der Voraussetzung absoluter Konstanz von g und r_0, ist es viel einfacher, ihn als Ganzes direkt zu bestimmen. Man schickt durch den Heizdraht gerade den zu untersuchenden Wechselstrom mit Zwischenschaltung eines bekannten grossen induktionslosen Widerstandes R, misst die effektive Spannung E_0 und den Ausschlag s_0 an der Skala. Unabhängig von der Kurvenform besteht ja dann die Beziehung:

$$k = \frac{E_0^2}{Z_0 R^2}$$

Der Ausführung unserer direkten successiven Analyse legen wir demzufolge die in Abbildung 6 dargestellte Schaltung zu Grunde:

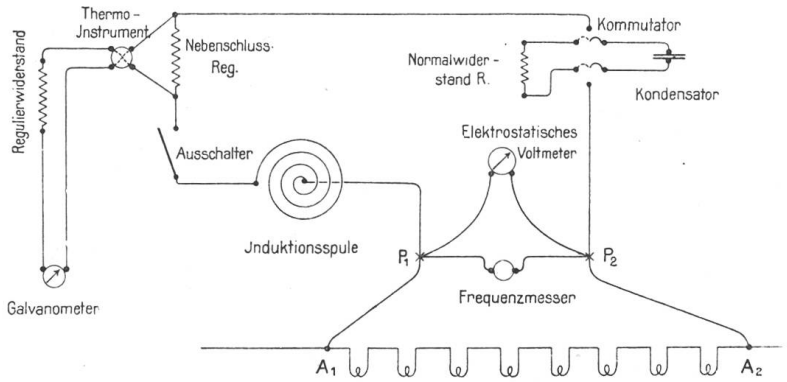

Abbildung 6.

Es seien A_1 und A_2 die Punkte, deren Spannungsunterschied untersucht werden soll. Zwischen die Punkte P_1 und P_2 schalten wir einen Frequenzmesser, ein elektrostatisches Voltmeter und die Meßleitung. Diese enthält die Induktionsspule, einen Ausschalter, das Thermo-Instrument samt Nebenschluss und einen Kommutator, der den Meßstrom sowohl über den Kondensator als auch über den induktionslosen Widerstand R zu leiten erlaubt. Die Induktionsspule muss dabei derart in die Meßleitung eingeschaltet sein, dass auf einfache Weise sowohl die sämtlichen Kombinationen der drei Abteilungen hergestellt werden können, als auch dass die Spule kurzgeschlossen werden kann.

Der Gang der Messungen ist nun der folgende:

Bei noch offenem Ausschalter wird die angegebene Schaltung hergestellt, so dass also das Voltmeter und der Frequenzmesser dauernd eingeschaltet sind. Dann wird die gewünschte Kombination von L und C hergerichtet und im Nebenschlusse ein Widerstand r genommen, der bei Schliessung der Meßleitung einen genügend grossen Ausschlag des Galvanometers bedingt. Der Kommutator ist dabei so zu stellen, dass der Meßstrom durch den Kondensator geht.

Nun wird abgelesen, gleichzeitig am Fernrohre der Ausschlag s, am Voltmeter die zugehörige Spannung E und am Frequenzmesser die Periodenzahl N. Das Mittel aus mehreren Ablesungen wird in einem Protokolle niedergelegt und hierauf wird geaicht.

Dazu hat man einfach den Kommutator zu wenden und die Induktionsspule abzuschalten. Im Rheostaten ist ein solcher Widerstand R zu wählen, dass der nunmehrige Ausschlag des Galvanometers nur sehr wenig abweicht von dem vorigen. Auch die zusammengehörigen Werte s_0, E_0 und R werden im Protokolle notiert und dann sind die nötigen Messungen beendet zur Bestimmung eines der gesuchten Werte

$$c = \frac{2}{\omega^2} \cdot \frac{I^2}{E^2 C^2}$$

So wird weitergefahren bis alle erforderlichen c bestimmt sind, die jeweilen im Protokolle selber berechnet werden. Das Protokoll wird demnach die folgenden Kolonnen aufzuweisen haben:

r	R	Ablesung am Voltmeter	E_0	s_0	$\frac{E_0^2}{s_0}$	k	w	$10^6\,C$	L	$2\,N$	Ablesung am Voltmeter	E	s	$\frac{s}{E^2}$	$\frac{s}{E^2 C^2}$	$\frac{2}{\omega^2}$	c
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Die Meßleitung muss nur abgeschaltet werden, wenn der Nebenschluss des Thermo-Instrumentes geändert wird, wobei jedesmal nebenbei die Nullage zu kontrollieren und frisch einzustellen ist.

Der Umstand, dass nach jeder Messung zusammengehöriger Werte von s, E und N von neuem geaicht wird und dass der Ausschlag s_0 der Aichung, von s nur ganz wenig verschieden gemacht wird, eliminiert mancherlei Fehler und erhöht demgemäss die Genauigkeit der Messung bedeutend. In erster Linie ist auf solche Weise weder die Kenntnis der einzelnen Grössen r, w, r_0, g und A selber, noch die Voraussetzung absoluter Konstanz von r_0 und g erforderlich; und auch die Aichung ist viel schneller durchgeführt als bei Aichung des Galvanometers selber, wodurch der Einfluss der Schwankungen der Konstanten A vollständig eliminiert ist.

Des ferneren wird, wegen der geringen Verschiedenheit der Ausschläge s und s_0, bezw. der korrigierten Ausschläge z und z_0, da dieselben nur mit ihrem Verhältnisse in die Rechnung eintreten, gemäss:

$$c = \frac{2}{\omega^2} \cdot \frac{z}{E^2 C^2} \cdot \frac{E_0^2}{R^2\, z_0}$$

das Resultat von den auftretenden kleinen Schwankungen der Ruhelage praktisch gar nicht beeinflusst, ebenso nicht durch Ungenauigkeit in der Korrektion der Ausschläge s und s_0.

Es ist sogar nicht einmal nötig, die Ausschläge zu korrigieren, wenn man sich an die gegebenen Vorschriften hält, insbesondere durch Erzeugung sehr grosser Ausschläge. Denn dann dürfen, bei kleinen Unterschieden der Ausschläge, die Verhältnisse z/z_0 einfach gleich den Verhältnissen s/s_0 gesetzt werden.

Bei einem Ausschlage $s = 510\ mm$, bezw. $s_0 = 500\ mm$, erhält man mit $D = 2300\ mm$ beispielsweise:

$$\frac{z}{z_0} = 0{,}9994\,\frac{s}{s_0}$$

Die Berechnungsgleichungen für die vorgenommenen Messungen.

Mit den im vorigen Abschnitt angegebenen Instrumenten und Apparaten bleibt der Ohm'sche Widerstand der Meßleitung tatsächlich so klein, dass er bei der Berechnung der a_n^2 fortgelassen werden darf. Als Widerstand des Heizdrahtes wurde gefunden:

$$r_0 = 7{,}817^{\Omega}$$

Dies gibt einen Widerstand der Meßleitung von:

$$w_{total} = w_{zuleitungen} + w_{spule} + \frac{r \cdot r_0}{r + r_0}$$

oder mit beispielsweise $r = 1^{\Omega}$

$$w_{total} = w_{zul.} + w_{spule} + 0{,}886^{\Omega}$$

Es ist dabei w_{spule} höchstens $2{,}884^{\Omega}$ und $w_{zul.}$ sicher so klein, dass

$$w_{total} = w_{zul.} + 3{,}77^{\Omega}$$

nie 4^{Ω} merklich übersteigen kann, bei den meisten Kombinationen L und C aber noch kleiner bleibt und demgemäss nicht berücksichtigt zu werden braucht.

Zur Verfügung standen zwei Normalkondensatoren von je 0,1 bis 1,0 Mikrofarad. Durch Hintereinander- und Parallelschaltung derselben konnten also die verschiedensten Kapazitäten hergestellt werden, im Maximum 2,0 *Mf.*

Die Wahl der Kapazitäten und der Selbstinduktionskoeffizienten geschah nach den gegebenen Vorschriften. Sie werden erfüllt durch die Kombinationen:

$L = 0{,}5908$	$C_1 = 1{,}5$	$(C_1L)_2 = 0{,}8862$
$L = 0{,}5908$	$C_1 = 0{,}8$	$(C_1L)_3 = 0{,}4726$
$L = 0{,}1932$	$C_1 = 1{,}2$	$(C_1L)_4 = 0{,}2318$
$L = 0{,}1932$	$C_1 = 0{,}6$	$(C_1L)_5 = 0{,}1159$
$L = 0{,}1520$	$C_1 = 0{,}5$	$(C_1L)_6 = 0{,}0760$
$L = 0{,}1932$	$C_1 = 0{,}3$	$(C_1L)_7 = 0{,}0579$
$L = 0{,}2480$	$C_1 = 0{,}2$	$(C_1L)_8 = 0{,}0496$
$L = 0{,}4185$	$C_1 = 0{,}09$	$(C_1L)_9 = 0{,}0377$
$L = 0{,}1520$	$C_1 = 0{,}2$	$(C_1L)_{10} = 0{,}0304$
$L = 0{,}2480$	$C_1 = 0{,}1$	$(C_1L)_{11} = 0{,}0248$

Die Kapazität 0,09 *Mf.* wurde hergestellt durch Hintereinanderschaltung der Kapazitäten 0,1 *Mf.* und 0,9 *Mf.*

Diese Kombinationen erfüllen die Bedingung:

$$n^2 b_n^2 C_1^2 \xi^2 w^2 < 10^4$$

weshalb die Koeffizienten a_n^2 der Berechnungsgleichungen den b_n^2 gleich gesetzt werden dürfen. Zu ihrer Berechnung ist die Kenntnis der ξ^2 erforderlich. Da dieselben gemessene Grössen bedeuten, können die Berechnungsgleichungen eigentlich erst aufgestellt werden nach Ausführung der Messungen. Im Allgemeinen werden Wechselströme zu untersuchen sein, deren Periodenzahl wenig abweicht von $N = 50$. Wir geben deshalb untenstehend die den obigen Kombinationen bei $N = 50$, also $\xi^2 = 1$, entsprechenden Berechnungsgleichungen, mit Voranstellung der Grundgleichung

$$\sum_{1,3,5..}^{2m-1} \frac{1}{n^2} = c_1 = 2$$

$$1{,}000\, x_1 + 0{,}111\, x_2 + 0{,}040\, x_3 + 0{,}0204\, x_4 + 0{,}0123\, x_5 + 0{,}0083\, x_6 + 0{,}0059\, x_7 + 0{,}0045\, x_8 + 0{,}0035\, x_9 + 0{,}0028\, x_{10} + 0{,}0023\, x_{11} = 2$$

$$1{,}200\, x_1 + 22{,}13\, x_2 + 0{,}708\, x_3 + 0{,}0933\, x_4 + 0{,}0270\, x_5 + 0{,}0109\, x_6 + 0{,}0053\, x_7 + 0{,}0028\, x_8 + 0{,}0017\, x_9 + 0{,}0011\, x_{10} + 0{,}0007\, x_{11} = c_2$$

$$1{,}100\, x_1 + 2{,}982\, x_2 + 35{,}44\, x_3 + 0{,}610\, x_4 + 0{,}129\, x_5 + 0{,}0314\, x_6 + 0{,}0161\, x_7 + 0{,}0091\, x_8 + 0{,}0055\, x_9 + 0{,}0040\, x_{10} + 0{,}0026\, x_{11} = c_3$$

$$1{,}050\, x_1 + 1{,}590\, x_2 + 5{,}48\, x_3 + 69{,}5\, x_4 + 1{,}38\, x_5 + 0{,}320\, x_6 + 0{,}122\, x_7 + 0{,}0581\, x_8 + 0{,}0277\, x_9 + 0{,}0192\, x_{10} + 0{,}0122\, x_{11} = c_4$$

$$1{,}025\,x_1 + 1{,}25\,x_2 + 1{,}96\,x_3 + 5{,}17\,x_4 + 190{,}0\,x_5 + 6{,}85\,x_6 + 1{,}160\,x_7 + 0{,}405\,x_8 + 0{,}159\,x_9 + 0{,}103\,x_{10} + 0{,}0615\,x_{11} = c_5$$

$$1{,}018\,x_1 + 1{,}15\,x_2 + 1{,}51\,x_3 + 2{,}48\,x_4 + 6{,}35\,x_5 + 116{,}8\,x_6 + 13{,}92\,x_7 + 2{,}13\,x_8 + 0{,}735\,x_9 + 0{,}345\,x_{10} + 0{,}189\,x_{11} = c_6$$

$$1{,}015\,x_1 + 1{,}11\,x_2 + 1{,}36\,x_3 + 1{,}93\,x_4 + 3{,}48\,x_5 + 10{,}55\,x_6 + 865{,}0\,x_7 + 12{,}15\,x_8 + 1{,}75\,x_9 + 0{,}840\,x_{10} + 0{,}435\,x_{11} = c_7$$

$$1{,}010\,x_1 + 1{,}10\,x_2 + 1{,}30\,x_3 + 1{,}74\,x_4 + 2{,}75\,x_5 + 6{,}00\,x_6 + 33{,}5\,x_7 + 96{,}0\,x_8 + 5{,}80\,x_9 + 1{,}70\,x_{10} + 0{,}743\,x_{11} = c_8$$

$$1{,}008\,x_1 + 1{,}07\,x_2 + 1{,}21\,x_3 + 1{,}50\,x_4 + 2{,}05\,x_5 + 3{,}30\,x_6 + 7{,}23\,x_7 + 36{,}4\,x_8 + 184{,}0\,x_9 + 8{,}58\,x_{10} + 2{,}45\,x_{11} = c_9$$

$$1{,}006\,x_1 + 1{,}06\,x_2 + 1{,}17\,x_3 + 1{,}37\,x_4 + 1{,}74\,x_5 + 2{,}47\,x_6 + 4{,}10\,x_7 + 9{,}45\,x_8 + 56{,}5\,x_9 + 145{,}2\,x_{10} + 27{,}6\,x_{11} = c_{10}$$

$$1{,}005\,x_1 + 1{,}05\,x_2 + 1{,}14\,x_3 + 1{,}29\,x_4 + 1{,}56\,x_5 + 2{,}02\,x_6 + 2{,}92\,x_7 + 4{,}96\,x_8 + 11{,}7\,x_9 + 74{,}2\,x_{10} + 158{,}1\,x_{11} = c_{11}$$

Jeder anderen Periodenzahl entspricht auch ein anderes Gleichungssystem.

Auf die angegebenen Gleichungen werde die Methode der successiven Auflösung angewendet.

Die drei ersten Gleichungen ergeben, mit:

$$x_i = x'_i - y_i$$

$$\begin{aligned}
x'_1 &= 2 - 0{,}00492\,(c_2 - 2{,}4) - 0{,}00104\,(c_3 - 2{,}2)\\
x'_2 &= 0{,}0456\,(c_2 - 2{,}4) - 0{,}00085\,(c_3 - 2{,}2)\\
x'_3 &= - 0{,}00368\,(c_2 - 2{,}4) + 0{,}0283\,(c_3 - 2{,}2)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y_1 &= - 0{,}00621\,x_4 - 0{,}00018\,x_5 - 0{,}00004\,x_6 - \ldots\ldots\\
y_2 &= 0{,}0025\,x_4 + 0{,}00046\,x_5 + 0{,}00003\,x_6 + \ldots\ldots\\
y_3 &= 0{,}0164\,x_4 + 0{,}00323\,x_5 + 0{,}00063\,x_6 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der drei ersten Gleichungen sind für $n > 5$ hier so klein, dass durch Einsetzen der x_1, x_2 und x_3 in die übrigen Gleichungen und durch Ordnen nach den Unbekannten x_4 bis x_{11}, die Koeffizienten der nunmehrigen Gleichungen von den entsprechenden der ursprünglichen sich so wenig unterscheiden, dass sie denselben ohne weiteres gleichgesetzt werden dürfen.

Mit:

$$\begin{aligned}
c_4 - \{1{,}050\,x'_1 + 1{,}59\,x'_2 + 5{,}48\,x'_3\} &= g_4\\
c_5 - \{1{,}025\,x'_1 + 1{,}25\,x'_2 + 1{,}96\,x'_3\} &= g_5\\
c_6 - \{1{,}018\,x'_1 + 1{,}15\,x'_2 + 1{,}51\,x'_3\} &= g_6
\end{aligned}$$

erhält man deshalb aus den drei weiteren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x'_4 &= 0{,}0144\,g_4 - 0{,}00010\,g_5 - 0{,}00003\,g_6\\
x'_5 &= - 0{,}00038\,g_4 + 0{,}00528\,g_5 - 0{,}00030\,g_6\\
x'_6 &= - 0{,}00028\,g_4 - 0{,}00028\,g_5 + 0{,}00857\,g_6
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
y_4 &= 0{,}00109\,x_7 + 0{,}00072\,x_8 + 0{,}00036\,x_9 + 0{,}00025\,x_{10} + 0{,}00016\,x_{11}\\
y_5 &= 0{,}00183\,x_7 + 0{,}00146\,x_8 + 0{,}00061\,x_9 + 0{,}00043\,x_{10} + 0{,}00026\,x_{11}\\
y_6 &= 0{,}1187\,x_7 + 0{,}01804\,x_8 + 0{,}00625\,x_9 + 0{,}00293\,x_{10} + 0{,}00160\,x_{11}
\end{aligned}$$

Wieder werden durch Einsetzen der x_4, x_5 und x_6 in die übrigen fünf Gleichungen deren Koeffizienten so wenig geändert, dass mit:

$$c_7 - \{1{,}015\ x'_1 + 1{,}11\ x'_2 + 1{,}36\ x'_3 + 1{,}93\ x'_4 + 3{,}48\ x'_5 + 10{,}55\ x'_6\} = g_7$$
$$c_8 - \{1{,}010\ x'_1 + 1{,}10\ x'_2 + 1{,}30\ x'_3 + 1{,}74\ x'_4 + 2{,}75\ x'_5 + 6{,}00\ x'_6\} = g_8$$
$$c_9 - \{1{,}008\ x'_1 + 1{,}07\ x'_2 + 1{,}21\ x'_3 + 1{,}50\ x'_4 + 2{,}05\ x'_5 + 3{,}30\ x'_6\} = g_9$$

aus der dritten Serie von je drei Gleichungen für die drei nächsten Unbekannten sich ergiebt:

$$x'_7 = +\ 0{,}001161\ g_7 - 0{,}000145\ g_8 - 0{,}000006\ g_9$$
$$x'_8 = -\ 0{,}000408\ g_7 + 0{,}010600\ g_8 - 0{,}000330\ g_9$$
$$x'_9 = +\ 0{,}000035\ g_7 - 0{,}002090\ g_8 + 0{,}005500\ g_9$$

und

$$y_7 = 0{,}0008\ x_{10} + 0{,}0004\ x_{11}$$
$$y_8 = 0{,}0150\ x_{10} + 0{,}0079\ x_{11}$$
$$y_9 = 0{,}0437\ x_{10} + 0{,}0120\ x_{11}$$

Gleicherweise wie bisher findet man mit:

$$c_{10} - \{1006\ x'_1 + 1{,}06\ x'_2 + 1{,}17\ x'_3 + 1{,}37\ x'_4 + 1{,}74\ x'_5 + 2{,}47\ x'_6 + 4{,}10\ x'_7 + 9{,}45\ x'_8 + 56{,}5\ x'_9\} = g_{10}$$
$$c_{11} - \{1005\ x'_1 + 1{,}05\ x'_2 + 1{,}14\ x'_3 + 1{,}29\ x'_4 + 1{,}56\ x'_5 + 2{,}02\ x'_6 + 2{,}92\ x'_7 + 4{,}96\ x'_8 + 11{,}74\ x'_9\} = g_{11}$$

aus den letzten zwei Gleichungen:

$$x_{10} = +\ 0{,}00756\ g_{10} - 0{,}00132\ g_{11}$$
$$x_{11} = -\ 0{,}00355\ g_{10} + 0{,}00694\ g_{11}$$

Hiermit sind nun die den Quadraten der Amplituden proportionalen Grössen x_i gefunden, direkt als Funktionen der gemessenen Grössen c_k für Wechselspannungen mit $N = 50$. Sie ermöglichen in der Tat eine successive Analyse, denn die x_i selber sind immer klein, meistens kleiner als 1, so dass die Korrektionen y_i gewöhnlich fortgelassen werden dürfen. Es sind demgemäss zur Berechnung der drei ersten Amplituden nur zwei Messungen erforderlich, zur Berechnung der sechs ersten Amplituden nur fünf Messungen und so fort.

Die Resultate der vorgenommenen Messungen.

Analysiert wurden Spannungen, wie sie von einigen Generatoren des Maschinenlaboratoriums im eidgenössischen Physikgebäude bei Belastung derselben mit Glühlampen geliefert wurden. Die Periodenzahl der erzeugten Ströme wurde konstant gehalten auf $N = 50$, die Belastung wurde variiert und jedesmal gemessen.

So konnte festgestellt werden, in welchem Masse sich die reduzierten Amplituden mit der induktionslosen Belastung ändern. Es wurden zehn Spannungsformen untersucht, sieben Spannungsformen eines Einphasengenerators von Ganz & Cº, Budapest, zwei Spannungsformen einer Siemens'schen Wechselstrommaschine mit eisenfreier Armatur, jedesmal bei einer anderen Belastung, und eine Spannungsform eines Drehstromgenerators der Maschinenfabrik Oerlikon.

Die Amplituden der Einphasengeneratoren nehmen so schnell ab, dass nur die ersten sechs bestimmt werden mussten, während beim Drehstromgenerator noch die elfte Amplitude bemerkbar ist.

Die Messungen wurden ausgeführt gemäss den gegebenen Vorschriften und in Protokollen niedergelegt, wie an gleicher Stelle beschrieben.

Diesen Protokollen wollen wir, der Kürze halber, hier nur die darin berechneten Grössen c entnehmen und in den Tabellen auf Seite 356 anführen:

Wechselstrommaschine von Ganz & Co.

Belastung	$c_2 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 1{,}5 \end{cases}$	$c_3 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 0{,}8 \end{cases}$	$c_4 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 1{,}2 \end{cases}$	$c_5 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 0{,}6 \end{cases}$	$c_6 \begin{cases} L = 0{,}1520 \\ C_1 = 0{,}5 \end{cases}$
100 V. 8 Amp.	4,468	2,694	3,610	3,415	2,567
100 V. 6 Amp.	5,280	2,904	3,664	3,539	2,624
100 V. 4 Amp.	7,370	3,438	3,745	3,760	2,784
100 V. 2 Amp.	14,00	5,087	4,342	4,270	3,275
100 V. 1 Amp.	27,12	7,776	5,638	5,387	4,268
130 V. 1 Amp.	39,88	9,418	6,818	6,214	5,168
70 V. 1 Amp.	17,54	5,040	4,638	4,588	3,529

Wechselstrommaschine von Siemens.

Belastung	$c_2 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 1{,}5 \end{cases}$	$c_3 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 0{,}8 \end{cases}$	$c_4 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 1{,}2 \end{cases}$	$c_5 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 0{,}6 \end{cases}$	$c_6 \begin{cases} L = 0{,}1520 \\ C_1 = 0{,}5 \end{cases}$
100 V. 4,5 Amp.	2,904	2,476	2,187	2,107	2,083
100 V. 1 Amp.	2,587	2,626	2,481	2,136	2,079

Drehstromgenerator der Maschinenfabrik Örlikon. Belastung: 100 V., 9 Amp.

$c_2 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 1{,}5 \end{cases}$	$c_3 \begin{cases} L = 0{,}5908 \\ C_1 = 0{,}8 \end{cases}$	$c_4 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 1{,}2 \end{cases}$	$c_5 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 0{,}6 \end{cases}$	$c_6 \begin{cases} L = 0{,}1520 \\ C_1 = 0{,}5 \end{cases}$	$c_7 \begin{cases} L = 0{,}1932 \\ C_1 = 0{,}3 \end{cases}$
34,65	15,78	28,33	31,00	47,83	38,00

$c_8 \begin{cases} L = 0{,}2480 \\ C_1 = 0{,}2 \end{cases}$	$c_9 \begin{cases} L = 0{,}4185 \\ C_1 = 0{,}09 \end{cases}$	$c_{10} \begin{cases} L = 0{,}1520 \\ C_1 = 0{,}2 \end{cases}$	$c_{11} \begin{cases} L = 0{,}2480 \\ C_1 = 0{,}1 \end{cases}$
17,62	13,68	12,19	9,82

Die Periodenzahl war stets genau $N = 50$, weshalb zur Berechnung der reduzierten Amplituden die Auflösungen des vorigen Paragraphen benutzt werden können.

Man erhält in erster Linie für die x_i die Werte:

Wechselstrommaschine von Ganz & Co.

Belastung	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
100 V. 8 Amp.	1,988	0,1028	0,00533	0,0190	0,00590	0,00284
100 V. 6 Amp.	1,985	0,1306	0,00902	0,0189	0,00633	0,00302
100 V. 4 Amp.	1,974	0,2253	0,01650	0,0174	0,00688	0,00345
100 V. 2 Amp.	1,939	0,5275	0,0387	0,0178	0,00747	0,00465
100 V. 1 Amp.	1,872	1,122	0,0657	0,0217	0,00936	0,00736
130 V. 1 Amp.	1,807	1,704	0,0656	0,0263	0,01004	0,01035
70 V. 1 Amp.	1,922	0,688	0,0244	0,0212	0,00825	0,00644

Wechselstrommaschine von Siemens.

Belastung	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
100 V. 4,5 Amp.	1,997	0,0237	0,00597	0,000234	0,000041	0,000118
100 V. 1 Amp.	1,998	0,0082	0,01136	0,004422	0,000262	0,000005

Drehstromgenerator der Maschinenfabrik Örlikon.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1,816	1,458	0,2614	0,2987	0,1192	0,3581	0,03248	0,09930	0,02189	0,02945	0,01130

Aus den x_i findet man sofort die reduzierten Amplituden ρ_n, zufolge der Beziehung:

$$\rho_n = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{x_{n+1}}{2}}$$

In den folgenden Tabellen seien dieselben, mit 100 multipliziert, zusammengestellt:

Wechselstrommaschine von Ganz & Co.

Belastung	$100\varrho_1$	$100\varrho_3$	$100\varrho_5$	$100\varrho_7$	$100\varrho_9$	$100\varrho_{11}$
$100^{V.}$ 8 Amp.	141,00	10,65	1,46	1,97	0,85	0,50
$100^{V.}$ 6 Amp.	140,87	12,05	1,90	1,96	0,88	0,50
$100^{V.}$ 4 Amp.	140,49	15,82	2,57	1,88	0,68	0,53
$100^{V.}$ 2 Amp.	139,30	24,20	3,94	1,91	0,96	0,62
$100^{V.}$ 1 Amp.	136,80	35,30	5,12	2,20	1,07	0,77
$130^{V.}$ 1 Amp.	134,40	43,50	5,13	2,32	1,11	0,93
$70^{V.}$ 1 Amp.	138,90	27,65	3,13	2,08	1,01	0,73

Wechselstrommaschine von Siemens.

Belastung	$100\varrho_1$	$100\varrho_3$	$100\varrho_5$	$100\varrho_7$	$100\varrho_9$	$100\varrho_{11}$
$100^{V.}$ 4,5 Amp.	141,3	5,10	1,54	0,22	0,07	0,10
$100^{V.}$ 1 Amp.	141,3	3,01	2,13	0,95	0,18	0,02

Drehstromgenerator der Maschinenfabrik Örlikon.

$100\varrho_1$	$100\varrho_3$	$100\varrho_5$	$100\varrho_7$	$100\varrho_9$	$100\varrho_{11}$	$100\varrho_{13}$	$100\varrho_{15}$	$100\varrho_{17}$	$100\varrho_{19}$	$100\varrho_{21}$
134,76	40,25	10,22	7,80	3,84	3,44	1,38	2,10	0,87	0,90	0,51

Man ersieht, dass bei den Einphasengeneratoren die höheren Glieder gar nicht in Betracht fallen, dass durch sechs Glieder die Spannungsformen genügend genau gegeben sind. Der grosse Einfluss der Belastung auf die Form der Spannung zeigt sich deutlich in obiger Zusammenstellung; bei der Ganzmaschine nehmen die Amplituden mit steigender Stromstärke rasch ab, hingegen merkbar zu mit grösser werdender Spannung.

Bei der Siemensmaschine nehmen mit zunehmender Stromstärke einige Amplituden auch zu, andere aber nehmen ab.

Die Zunahme der Amplitude der ersten Oberwelle bei einer Steigerung der Spannung um 1 Volt und einer Belastung von 1 Amp. beträgt bei der Ganzmaschine 7,4‰. Es ist also zur Verwendbarkeit unserer Methode tatsächlich besonders darauf zu achten, dass nur kleine Spannungsschwankungen auftreten.

Die neue Methode ist naturgemäss besonders geeignet zur Analyse von Spannungsformen, bei welchen nur die ersten Oberwellen bemerkbar sind, da sie in diesem Falle mit sehr wenigen Messungen und mit kurzer Rechnung auskommt. Aber auch zur Analyse von Spannungen mit stark entwickelten höheren Gliedern ist die Methode sehr gut brauchbar, wie die Analyse des einen Zweiges eines Drehstromgenerators ergab.

Prüfung und Diskussion der Meßresultate.

Die Prüfung einer Methode hat in zweierlei Hinsichten zu geschehen, einmal bezüglich ihrer Genauigkeit, und dann in Bezug auf ihre Verwendbarkeit.

Die Genauigkeit der entwickelten Methode ist eine sehr grosse, indem ja ein Fehler in der Bestimmung der Werte c nur einen halb so grossen Fehler in der Bestimmung der Amplituden zur Folge hat, sofern man sich bei der Wahl der Meßschaltungen streng an die Vorschriften der Paragraphen 6 und 12 hält.

Bei einem so grossen Ausschlage des Galvanometers, wie benutzt wurde, und bei jedesmaliger Aichung mit einem gleich grossen Ausschlage ist aber ein Fehler von einem Prozente in der Bestimmung der c so gut wie ausgeschlossen. So ergeben sich also die Amplituden bis auf einige Tausendstel genau, wenn nicht andere Fehlerquellen vorhanden sind. Als solche kommen in Betracht: Die Veränderlichkeit der Selbstinduktion und der Kapazität mit der Periodenzahl, was eine Ungenauigkeit der Koeffizienten a_n^2 zur Folge hat, und ferner der Einfluss des Meßstromes auf die vom Generator erzeugte elektromotorische Kraft.

Es gibt nun ein sehr einfaches Mittel, die Genauigkeit der gefundenen Amplituden und damit den Einfluss obiger Fehlerquellen zu erproben.

Bei irgend einer neuen passenden Kombination von L und C wird wieder die Grösse c ermittelt und hierauf dieselbe Grösse c aus den früher gefundenen Amplituden berechnet. Der Grad der Uebereinstimmung des berechneten Wertes mit dem gemessenen ist ein exaktes Mass für die Genauigkeit der gefundenen Resultate.

Es wurde als Kontrollkombination

$$L = 0{,}5908 \qquad C_1 = 1{,}0 \qquad (L \cdot C_1) = 0{,}5908$$

gewählt. Ihr entspricht bei $N = 50$ die Beziehung:

$$c = 1{,}13\, x_1 + 4{,}43\, x_2 + 4{,}75\, x_3 + 0{,}292\, x_4 + 0{,}072\, x_5 + 0{,}027\, x_6 + \ldots.$$

Die Messung und Berechnung der dieser Kombination entsprechenden c ergab die in der Tabelle Seite 360 verzeichneten Resultate.

Für grosse Belastungen ist die Uebereinstimmung ausgezeichnet; für kleine hingegen liegt der Unterschied nicht mehr innerhalb der Genauigkeitsgrenze der Messung.

Da der Einfluss der Veränderlichkeit der Selbstinduktion und der Kapazität mit der Periodenzahl natürlich von der Belastung unabhängig ist und er bei grosser Belastung laut der Tabelle unmerklich ist in Bezug auf die Genauigkeit der Resultate, fällt diese Veränderlichkeit als Fehlerquelle überhaupt dahin.

Unsere Methode kann deshalb im Bereiche ihrer Verwendbarkeit als überaus exakt bezeichnet werden, nämlich dann, wenn der Meßstrom gegenüber dem Hauptstrome in keiner Weise in Betracht fällt.

Dazu genügt es aber nicht, wenn der totale Meßstrom verschwindend klein ist gegenüber dem Hauptstrome, es muss dies auch der Fall sein mit jeder einzelnen Welle des

	Belastung	c gemessen	c berechnet
Einphasengenerator von Ganz	$100^{V.}$ $8^{Amp.}$	2,725	2,729
	$100^{V.}$ $6^{Amp.}$	2,871	2,867
	$100^{V.}$ $4^{Amp.}$	3,286	3,311
	$100^{V.}$ $2^{Amp.}$	4,738	4,716
	$100^{V.}$ $1^{Amp.}$	7,513	7,400
	$130^{V.}$ $1^{Amp.}$	9,463	9,910
	$70^{V.}$ $1^{Amp.}$	5,431	5,330
Siemens-maschine	$100^{V.}$ $4{,}5^{Amp.}$	2,389	2,390
	$100^{V.}$ $1^{Amp.}$	2,370	2,359
Drehstromgenerator	$100^{V.}$ $9^{Amp.}$	9,790	9,830

Meßstromes gegenüber der entsprechenden Welle des Hauptstromes. Diese Bedingung ist eben, trotz durchwegs sehr kleinem Meßstrome, nicht erfüllt bei unseren Messungen mit den kleinen Belastungsströmen, wie beispielsweise mit einem Hauptstrome von nur $1^{Amp.}$

Ihm entspricht bei $100^{V.}$ ein Widerstand von 100^{Ω}. Die Kombination $L = 0{,}5908$, $C_1 = 1{,}5$ bedingt aber eine erste Oberwelle des Meßstromes von der Grösse:

$$I_3 = n a_3 \frac{\omega C}{2} \mathcal{E}_3^2$$

während die entsprechende Oberwelle des Hauptstromes gegeben ist durch:

$$I'_3 = \frac{\mathcal{J}_3}{100}$$

Das Verhältnis beider ist:

$$\frac{I'}{I} = \frac{1}{100 \cdot 3 \cdot \sqrt{22} \cdot \pi \cdot 50 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}} = 3{,}0$$

Die erste Oberwelle des Hauptstromes ist bei der Belastung mit $1^{Amp.}$ und $100^{V.}$ nur dreimal so gross wie die entsprechende Oberwelle des Meßstromes bei $L = 0{,}5908$ und $C_1 = 1{,}5$, weshalb der Meßstrom sicher einen Einfluss auf die elektromotorische Kraft des

Generators hat, der nicht zu vernachlässigen ist, und eben in den Unterschieden der berechneten und gemessenen Werte von *c* in der letzten Tabelle seinen Ausdruck findet.

Da aber bei jeder Meßschaltung eigentlich eine andere Spannungsform vorliegt, bedeutet der Fehler in der Bestimmung der Amplituden, bei nicht genügend grossen Belastungen, nicht eine Ungenauigkeit der Methode selbst, sondern nur, dass die gemessenen Amplituden bei der betreffenden Belastung nicht den gesuchten entsprechen. Jedenfalls bedeuten aber auch dann die gemessenen Amplituden eine so starke Annäherung an die gesuchten, wie sie in der Praxis meistens genügt.

Das Maß der Vollkommenheit der Uebereinstimmung der gesuchten Amplituden mit den gemessenen wird geliefert durch die angegebene Kontrolle. Diese muss also nach jeder Analyse auch noch durchgeführt werden.

Zum Vergleiche der neuen direkten Analyse mit den indirekten, wurden die Amplituden einiger Spannungsformen der Ganzmaschine auch noch bestimmt durch Aufnahme der Spannungskurven mit der Joubert'schen Scheibe, vermittelst der zu Anfang dieser Abhandlung gegebenen Berechnungstabellen. Die Aufnahme geschah punktweise durch Laden und Entladen eines Kondensators durch ein ballistisches Galvanometer [1]), welches die genaueste Methode der Kurvenaufnahme bedeutet.[2])

Aufgenommen wurden die Spannungskurven bei ausgeschalteter Meßleitung für die Belastungen: 0, 1, 2 und 8 Ampère, hierauf bei eingeschalteter Meßleitung und einer Belastung von 1 Amp. (Kurven Abb. 7 und 8).

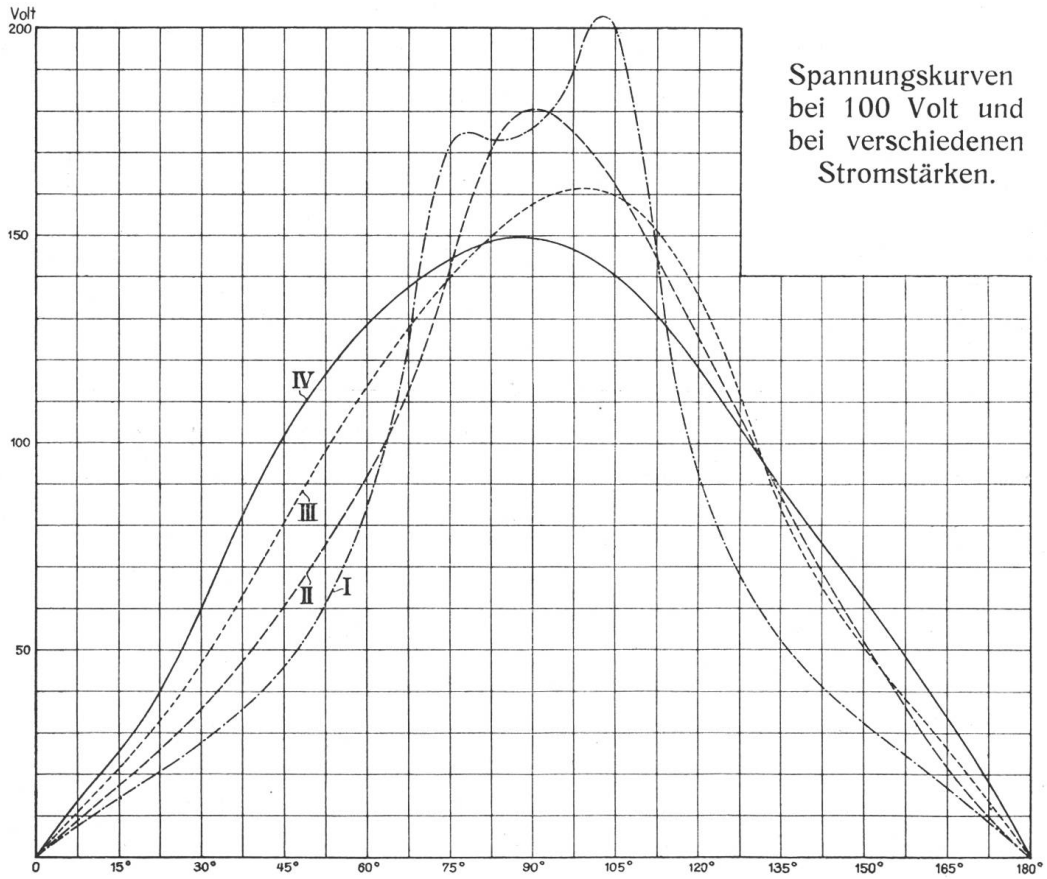

Abbildung 7.

I = Kurve bei 100 Volt und 0 Ampère.
II = Kurve bei 100 Volt und 1 Ampère.
III = Kurve bei 100 Volt und 2 Ampère.
IV = Kurve bei 100 Volt und 8 Ampère.

[1]) *Orlich:* „Analyse und Aufnahme von Wechselstromkurven".
[2]) *Niethammer:* E. T. Z., 1910, S. 309.

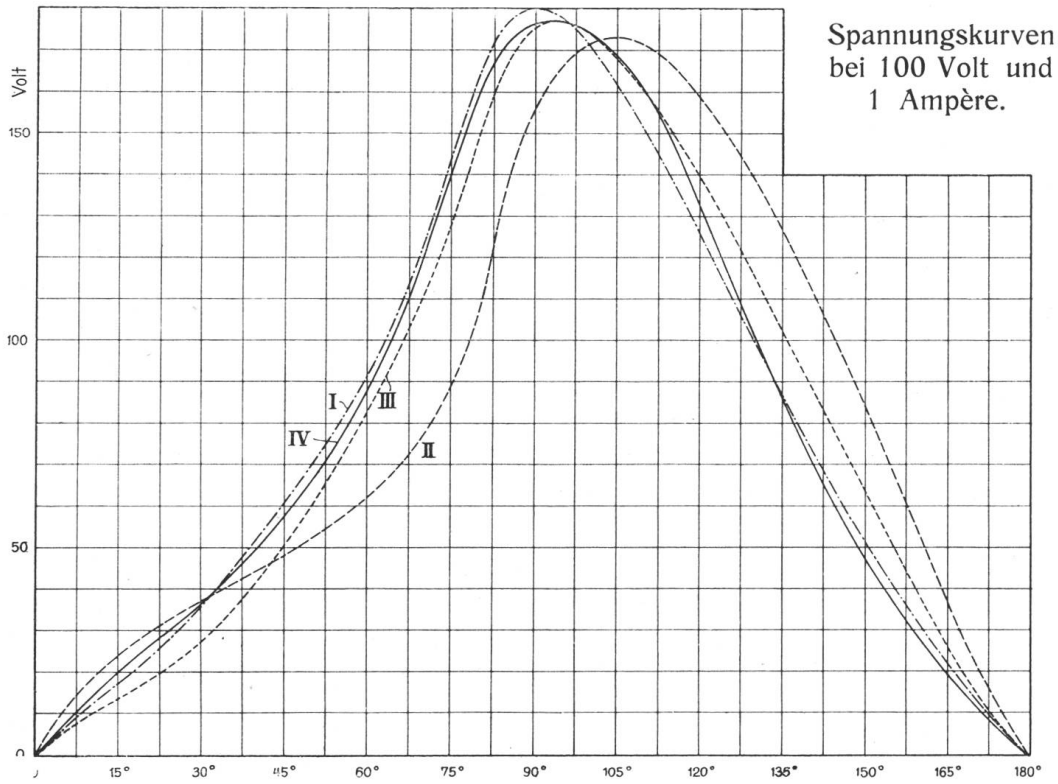

Abbildung 8.

I = Kurve ohne Meßstrom.
II = Kurve bei $L = 0{,}5908$; $C = 1{,}5 \times 10^{-6}$
III = Kurve bei $L = 0{,}5908$; $C = 0{,}8 \times 10^{-6}$
IV = Kurve bei $L = 0{,}1932$; $C = 1{,}2 \times 10^{-6}$

In den Kurven sind die Ordinaten in Volt angegeben. Man ersieht einesteils wieder den grossen Einfluss der Belastung, dann aber auch bei der Belastung von 1 Amp. den deutlichen Einfluss des Meßstromes. Die Berechnung der Amplituden aus den Kurven ergab für die verschiedenen Belastungen die nachstehenden Werte:

Belastung	$100\,\varrho_1$	$100\,\varrho_3$	$100\,\varrho_5$	$100\,\varrho_7$	$100\,\varrho_9$	$100\,\varrho_{11}$
100 V. 0 Amp.	131,87	46,6	17,10	2,87	6,30	6,74
100 V. 1 Amp.	137,6	31,1	8,10	4,06	2,20	1,15
100 V. 2 Amp.	139,8	20,6	3,76	3,00	0,61	0,29
100 V. 8 Amp.	141,0	10,4	1,27	2,20	1,20	0,26

Die Übereinstimmung dieser Werte der Amplituden mit den entsprechenden früher gefundenen wird mit zunehmender Belastung, wie zu erwarten war, immer besser. Doch auch bei einem Hauptstrome von 8 Amp. zeigen sich noch Unterschiede bis 2,5% für die erste Oberwelle, was aber nur als Ungenauigkeit der indirekten Analyse auszulegen ist, wegen der durch die Kontrolle erwiesenen Exaktheit der direkten Analyse bei dieser Belastung.

Die Amplituden für die Belastung mit 1 Amp. und gleichzeitigen verschiedenen Meßschaltungen berechnen sich aus den entsprechenden Kurven zu:

Art der Meßschaltung	$100\,\varrho_1$	$100\,\varrho_3$	$100\,\varrho_5$	$100\,\varrho_7$	$100\,\varrho_9$	$100\,\varrho_{11}$
ohne Meßschaltung	137,6	31,1	8,10	4,06	2,20	1,15
$L = 0{,}5908$ $C_1 = 1{,}5$	136,7	35,0	7,26	4,60	2,42	1,80
$L = 0{,}5908$ $C_1 = 0{,}8$	137,7	31,4	5,83	3,76	2,15	1,62
$L = 0{,}1932$ $C_1 = 1{,}2$	137,2	33,9	7,98	1,79	0,73	0,75

Diese Tabelle zeigt nicht nur deutlich die Beeinflussung der Amplituden durch den Meßtrom, sie bezeugt gleichzeitig, dass die scheinbare Ungenauigkeit unserer direkten Methode tatsächlich nur darin begründet liegt, dass eben andere Amplituden gemessen werden als gesucht sind, dass hingegen die gemessenen Werte an Genauigkeit nichts zu wünschen übrig lassen. Denn die aus den obigen Amplituden berechneten c stimmen sehr gut überein mit den gemessenen c, wie die folgende Tabelle zeigt:

Kombination	c gemessen	c berechnet
$L = 0{,}5908$, $C_1 = 1{,}5$	27,12	26,84
$L = 0{,}5908$, $C_1 = 0{,}8$	7,78	7,79
$L = 0{,}1932$, $C_1 = 1{,}2$	5,64	5,62

Unsere Untersuchungen ergeben also die folgende *Zusammenfassung:*

Die neue direkte Methode zur Analyse von Wechselspannungen liefert, sofern man sich an die gegebenen Vorschriften hält, und ein sehr empfindliches und exaktes Strommeßinstrument verwendet, einfach und rasch die Werte der Amplituden, solange der die Spannung liefernde Generator genügend belastet ist. Ist die Belastung nicht genügend gross, so entsprechen die gemessenen Amplituden den gesuchten immerhin mit praktisch meist genügender Annäherung.

Die neue Methode ist einfacher und genauer als alle indirekten Methoden und kommt überdies aus mit den üblichen Instrumenten, wie sie in jedem Laboratorium leicht zu beschaffen sind. In ihrer Eigenschaft als successive Analyse bis zu beliebig vielen Amplituden darf sie demnach den bisherigen direkten und indirekten Methoden als überlegen bezeichnet werden.