**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens

**Herausgeber:** Association suisse des électriciens

**Band:** 1 (1910)

**Heft:** 8

**Artikel:** Ueber das tafelmässige Rechnen mit gerichteten Zahlen

**Autor:** Herzog, Josef

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-1056609

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN
# BULLETIN
# ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin" betreffenden Zuschriften sind zu richten an die

Redaktion: Ing.-Consulent Dr. W. Kummer, Mythenstrasse 15, Zürich II (Telephon 5806)

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag A.-G., Zürich Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Est publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin parait mensuellement.

Toutes les communications concernant la matière du „Bulletin" sont à adresser à la

Rédaction: Ing.-Conseil Dr. W. Kummer Mythenstrasse 15, Zurich II (Téléphone 5806)

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les insertions sont à adresser à

l'éditeur: Fachschriften-Verlag A.-G., Zurich Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

I. Jahrgang
Ie Année

Bulletin No. 8

August
Août 1910


## Ueber das tafelmässige Rechnen mit gerichteten Zahlen.

Von Dipl.-Ing. *Josef Herzog*, Budapest.

Die Richtungsgrössen werden in der Technik, insbesonders in der Wechselstromtechnik, vielfach benützt. Das Rechnen mit ihnen kann durch Zahlentabellen oder durch graphische Tafeln erleichtert werden. Um die meist genügende Genauigkeit des Endergebnisses in etwa zwei Dezimalstellen zu erreichen, wird man die Einzelrechnungen, aus denen sich die Lösungen der Aufgaben zusammensetzen, auf mindestens drei Stellen vornehmen. Damit würden die Zahlentabellen wenig umfangreich werden und die graphischen Tabellen noch genug übersichtlich bleiben. Wie weit beiden Richtungen nachgegangen wurde, soll hier erörtert werden.

* * *

1. Das bei Springer in Berlin erschienene Hilfsbuch der Elektrotecknik von *K. Strecker* bringt auf Seite 91 der Auflage von 1907 eine Tabelle, welche die Norm $r$ und die Abweichung $\varphi$ der komplexen oder gerichteten Zahl

$$a + bi = r e^{i\varphi}$$

als Funktion des Verhältnisses $d = a : b$ enthält. Es wird also gesetzt: $a + bi = a(1 + di)$ und $r = a\sqrt{1 + d^2}$. In der linken lotrechten Randspalte nachfolgender Tabelle steht $d = \operatorname{tg}\varphi$ auf *eine* Dezimale, während ihre zweite sich in der obersten Randspalte befindet. In den übrigen Tabellenfeldern stecken je zwei Zahlen. Die oberen Zahlen bedeuten die drei Dezimalen des Sekantenwertes $r : a = 1, \ldots$ und die unteren Zahlen sind ihre bezüglichen Abweichungen $\varphi$ in Winkelgraden. Die Tabelle sieht also wie folgt aus:

| | 0 | 1 | 2 | . . . | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 000<br>$0^0$ | 000<br>$0{,}6^0$ | 000<br>$1{,}7^0$ | | 004<br>$5{,}1^0$ |
| . . | . | . | . | . . . | — |
| 0,9 | 345<br>$42{,}0^0$ | 352<br>$42{,}3^0$ | 359<br>$42{,}6^0$ | . . . | 407<br>$44{,}7^0$ |

Die Funktionentafeln mit Formeln und Kurven von *E. Jahnke* und *E. Emde* (bei Teubner in Leipzig 1909 auf Seite 4) enthalten ebenfalls obige Tabelle, jedoch ergänzt um ein Anfangsstück von 0,0 bis 0,09. Für die Hilfswinkel $\varphi$ sind in ihnen nebst den trigonometrischen auch die hyperbolischen Funktionen beigefügt.

In der praktischen Geometrie, der Feldmesskunde, wird der Uebergang von den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks zur Hypotenuse mit ihrem anliegenden Winkel rechnerisch mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln vorgenommen. Man geht im Falle logarithmischer Rechnungsweise am besten auf die Tangente des halben Winkels ein.

Die exponentielle Form der komplexen Zahl $re^{i\varphi}$ gestattet in den Multiplikationen, Divisionen usw. die Verwendung der gewöhnlichen Logarithmentafeln. Der unmittelbare Gebrauch derselben auf die Form $a + bi$ ist jedoch genug zeitraubend. So erheischt das Produkt zweier komplexer Zahlen 14 Einzelrechnungen, wovon 8 Logarithmus oder Numerusaufschlagungen sind. Der Quotient zweier erfordert 24 (bezw. 11) Rechnungsstufen. Die zweite Potenz nimmt 10 (bezw. 6) und die dritte Potenz gar 15 (bezw. 7) solche in Anspruch. Auch die Umwandlung von $a + bi$ in ihre trigonometrische Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ setzt 12 (bezw. 7) Stadien voraus.

* * *

2. *Dr. F. Bennecke* zeigt in seiner Festschrift „Eine konforme Abbildung als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen" (Potsdam, 1907) die direkte Aufsuchung des $lg\,(x + yi)$ d. h. des dekadischen Logarithmus einer komplexen Zahl und des Numerus zu einem komplexen Logarithmus. Mit Hilfe dieser graphischen Zahlentafel werden Multiplikationen, Divisionen usw. einfacherweise wie bei reellen Zahlen ausgeführt.

Diese Tafel stellt eine konforme Abbildung dar. Es wird nämlich durch die Funktion $Z = lg\,z$ punktweise eine Zuordnung zweier Zahlenebenen dermassen vorgenommen, dass für jeden Punkt der $z$-Ebene der entsprechende Wert der $Z$-Ebene gefunden werden kann. Die $z$-Ebene sei durch Parallele zu den Koordonatenaxen in Quadrate von der Seitenlänge Eins eingeteilt; dann entspricht ihnen in der $Z$-Ebene eine Doppelschar einander rechtwinklig kreuzenden Kurven. Da diese auf Koordinatenpapier gezeichnet werden können, so ist es möglich, für jedes $z$ das bezügliche $Z = lg\,z$ unmittelbar zu finden.

Die Form der Kurven erhellt aus folgendem:

Es sei
$$Z = X + Yi = lg\,z = lg\,(x + yi)$$

daher
$$10^{X+Yi} = x + yi = 10^X e^{Yi\,ln\,10} = 10^X [\cos(Y\,ln\,10) + i\sin(Y\,ln\,10)]$$

und ferner
$$\left.\begin{aligned} x &= 10^X \cos(Y\,ln\,10) \\ y &= 10^X \sin(Y\,ln\,10) \end{aligned}\right\}$$

Für konstante Werte von $x$ oder $y$ stellen diese Gleichungen die Kurven der $(Z)$ oder $XY$-Ebene dar.

Setzt man $X = X' - a$, so wird $x\,10^a = 10^{X'}\cos(Y\,ln\,10)$. Die Kurven, die der Parallelenschar $x =$ konstant entsprechen, sind also einander kongruent und gehen durch Verschiebung parallel zur $X$-Axe in einander über. Gleiches gilt für die orthogonale Schar $y = 10^X\left(\cos\frac{\pi}{2} - Y\,ln\,10\right)$.

Die Herstellung der Zeichentafel bedarf aus diesem Grunde nur eines einzigen Kurvenlineals. Bei grossen Werten des $X$ nähert sich für die eine Schar $Y\,ln\,10$ dem Wert $\frac{1}{2}\pi$, für die andere dem Wert Null, d. h. alle Kurven verlaufen zur Geraden $Y = \frac{1}{2}\pi\,lg\,e$ beziehungsweise $Y = 0$ asymptotisch.

Eliminiert man aus obigen Gleichungen nacheinander $Y$ und $X$, so ergibt sich

$$10^X = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad X = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\text{und} \quad \mathrm{tg}\,(Y\,ln\,10) = y : x.$$

Demnach hängt $X$ nur vom absoluten Betrage $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ab und $Y$ nur von der Abweichung $\varphi$. Diese Gleichungen hat Bennecke in seiner graphischen Tafel benützt, um für einen unveränderten Wert von $x = 100$ alle Werte von $X$ und $Y$ zu berechnen, welche verschiedenen Werten von $y$ zugehören. Für $X =$ konstant, ergibt erstere Gleichung $x^2 + y^2 =$ konstant, d. h. in der $z$-Ebene einen Kreis um den Nullpunkt; für $Y =$ konstant ergibt letzterer $y : x =$ konstant, d. h. eine Gerade durch den Nullpunkt. *Ein Kreisring der z-Ebene wird also auf ein Rechteck der Z-Ebene abgebildet.*

Um für jede Zahl den dekadischen Logarithmus zu finden, würde es genügen, einen Kreisring der $z$-Ebene mit den Begrenzungskreisen 100 und 1000 abzubilden. Für alle nicht im Ringe enthaltenen Zahlen findet man den Logarithmus durch Multiplikation oder Division mit Potenzen von 10. So z. B.

$$lg\,(3 + 50\,i) = -1 + lg\,(30 + 500\,i) \text{ oder}$$
$$lg\,(73400 + 8200\,i) = 2 + lg\,(734 + 82\,i).$$

Ferner kann man sich auf einen Quadranten I des Ringes beschränken, d. h. auf Zahlen $a + bi$, worin $a$ und $b$ positiv sind. Die Zahlen der andern drei Quadranten lassen sich wie folgt auf den Quadranten I zurückführen:

$$\text{Quadrant II:} \quad -a + bi = i\,(b + ai)$$
$$\text{„ III:} \quad -a - bi = -(a + bi)$$
$$\text{„ IV:} \quad a - bi = -i\,(b + ai).$$

Da nun $i = e^{\frac{\pi}{2}i + 2\varkappa\pi i} = 10^{\left(\frac{\pi}{2}i + 2\varkappa\pi i\right) lg e}$ oder $lg\,i = \left(\frac{\pi i}{2} + 2\,\varkappa\pi i\right) lg\,e$ ist, so kann man für die Logarithmen der obigen Hilfsfaktoren setzen:

$$lg\,i = 0{,}68219\,i + \varkappa\,2{,}72876\,i$$
$$lg\,(-1) = 1{,}36438\,i + \varkappa\,2{,}72876\,i$$
$$lg\,(-i) = 2{,}04656\,i + \varkappa\,2{,}72876\,i$$

Der abgebildete Bereich der $z$-Ebene ist also ein Viertelkreisring mit den Halbmessern 100 und 1000. Ihm entspricht in der $Z$-Ebene ein Rechteck mit den Gegenpunkten 2 und $3 + 0{,}6822\,i$ (Abb. 1).

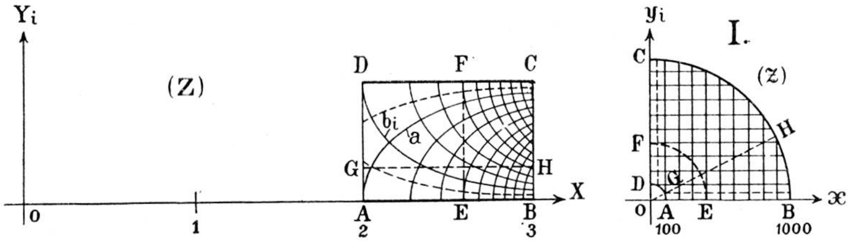


Abbildung 1. Grundlinien für die Tafeln nach Bennecke mit logarithmischer Axe.

Um zu einer komplexen Zahl den Logarithmus zu finden, sucht man in der Benneckeschen Originaltafel den Schnittpunkt der aufsteigenden Kurve (in Abb. 1 mit $a$ bezeichnet) mit der absteigenden (in Abb. 1 mit $b$ bezeichnet) und liest an den *im selben* Plane der $Z$ heller gezeichneten Koordinaten der $z$-Ebene die Koordinaten den Logarithmuswert ab. Umgekehrt wird der Weg beim Auffinden des Numerus befolgt.

Von der Wiedergabe eines solchen Benneckeschen Rechenblattes müssen wir leider aus technischen Gründen hier absehen. Bennecke hat mit diesen Umständen ebenfalls gekämpft und konnte die Schwierigkeiten wegen beschränkten Geldmitteln nicht ganz besiegen. Ein Zweifarbendruck hätte deutlichere Bilder als der gebotene Lichtdruck mit dunkleren und helleren Linien geliefert. Es ist sehr schade, dass diese technische Unvollkommenheit der Verbreitung dieser Arbeit hinderlich sein muss. Der gesunde geistige Inhalt verdient aber alle Aufmerksamkeit und ladet zur technischen Verbesserung ein, worauf wir noch zurückkommen wollen.

Der Gebrauch einer solchen graphischen Tafel wird durch ein Zahlenbeispiel klar:

$$u = \frac{(253{,}4 + 64{,}3\,i)\;(-\,16{,}27 + 10{,}58\,i)}{98 - 2236\,i}.$$

Umgeformt: $$-\,100\,u = \frac{(253{,}4 + 64{,}3\,i)\;(105{,}8 + 162{,}7\,i)}{223{,}6 + 9{,}8\,i}.$$

Die Rechnung mit Hilfe der Tafel führt zum Schema:

$$\begin{array}{rcl}
lg\,(253{,}4 + 64{,}3\,i) & = & 2{,}4174 + 0{,}1077\,i \\
(+)\; lg\,(105{,}8 + 162{,}7\,i) & = & 2{,}2883 + 0{,}4318\,i \\
\hline
lg \text{ Zähler} & = & 4{,}7057 + 0{,}5395\,i \\
(-)\; lg\,(223{,}6 + 9{,}8\,i) & = & 2{,}3499 + 0{,}0191\,i \\
\hline
lg\,(-\,100\,u) & = & 2{,}3558 + 0{,}5204\,i \\
-\,100\,u & = & 82{,}6 + 211{,}3\,i \\
u & = & -\,0{,}826 - 2{,}113\,i
\end{array}$$

* * *

3. Die *Literatur* solcher graphischer Tafelbehelfe greift weit zurück. *Léon Lalanne* hatte in seinem Abacus oder seiner allgemeinen Rechnungstafel, „welche augenblicklich alle arithmetischen, geometrischen und mechanischen Rechnungsresultate giebt“, beide Koordinatenaxen logarithmisch entwickelt. Die französische Originalarbeit erschien schon 1843, sein Büchlein 1845. Eine deutsche Uebersetzung erschien 1846 bei Steinacker in Leipzig. G. Herrmann hat in seinem „graphischen Einmaleins“, Braunschweig 1875, ganz dieselbe Lösung neuerlich wiedererfunden.

Eine Tafel, in der nur *eine* Axe mit einer logarithmischen Skala versehen ist, hat *R. Mehmke* in seinen Additionslogarithmen zur Rechnung mit komplexen Zahlen 1893 empfohlen. Gelegentlich einer Ausstellung mathematischer Modelle stellte er eine solche Tafel aus. Sie wurde von *W. Dyck* im Nachtrag zum Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, München 1893, Seite 21, 44d besprochen. Auch *J. Kleiber* brachte bei derselben Gelegenheit ein Modell „zur Multiplikation mit veränderlichen komplexen Faktoren“ zur Schau, das ebendort im Hauptkatalog auf Seite 325 beschrieben ist. Beide wurden nicht vervielfältigt.

Die Graphostatik, welche *Culman* als eigene Wissenschaft ausgestaltete, hat sich vollkommen eingebürgert. Jener Teil, der sich mit der bildlichen Darstellung von Funktionen als Rechenblätter beschäftigt, hatte nicht den gleichen Erfolg, obzwar sein Ausbau von Vielen glücklich erstrebt wurde. Es seien nur Lalanne, Helmert, Vogler, Kapteyn, Mehmke, Alder und d'Ocagne erwähnt. Letzterer hat in seiner Nomographie eine eingehende Darstellung gegeben. Die Literatur findet man von R. Mehmke in der Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band 1, Heft 7, besprochen und angeführt.

* * *

4. Die Ingenieure sollten aber diesem Teile der graphischen Wissenschaft nicht bloss vom Gesichtspunkte des Rechenwerkzeugs nachgehen, sondern aus jenen Grundlagen auch die wichtige Erkenntnis des Abbildungswesens der Funktionen schöpfen. Die klare Einsicht in dieses Gebiet ist für alle Zweige technischen Wissens geradezu unentbehrlich. *Die Abbildungslehre ist die eigentliche Funktionenlehre des Ingenieurs.* Als geeignetes Buch hiezu sei z. B. auf *Dr. G. Holzmüller,* „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen“, Teubner, Leipzig 1882, hingewiesen.

Um beispielsweise an die von Bennecke bearbeitete kartesianische Tafel mit einer logarithmischen Axe anzuknüpfen, möge darauf hingewiesen werden, dass die grundlegende, vorstehende Abbildung 1 (Seite 5 in Benneckes Arbeit) mit den aufsteigenden und abfallenden Linien *a* und *b* verwandt ist mit den Erwärmungs- und Abkühlungskurven, die der Elektrotechniker fortwährend benötigt beim Fall einer Erwärmung oder Erkaltung eines Kabels oder einer Maschine. Näheres über diese aussetzenden Betriebe findet man unter anderen hierüber nach *Ölschläger,* Elektrotechn. Zeitschr. 1900, Seite 1058, in Herzog-Feldmanns „Handbuch der elektrischen Beleuchtung", Springer 1907, auf Seite 417.

Die Herstellung solcher logarithmischer Tafelbehelfe wird durch die käuflichen Logarithmenpapiere wesentlich gefördert. Die Ingenieure sind bereits an das Millimeterpapier gewöhnt. Der nächste Schritt bringt sie zu den Papieren mit einer oder beiden logarithmischen Axen. In England und Amerika werden solche schon seit längerem, in Deutschland seit kurzem bei der Firma Carl Schleicher & Schüll in Düren ständig geführt. Durch diesen Umstand wird in weiten Kreisen der Ingenieure wieder das Interesse an diesem Gegenstand wachgerufen. So hat Dr. Ing. A. Schreiber eine Abhandlung über Logarithmenpapiere im Centralblatte der Bauverwaltung, 3. November 1909, No. 88, ergehen lassen, auf welche O. Weisshaar in der Elektrotechnischen Zeitschrift zu Berlin, 21. April 1910, die Anwendung solcher Papiere in der Elektrotechnik zur Prüfung der magnetischen Eigenschaften des Eisens empfiehlt.

Im vorliegenden Aufsatz wird nun der zweckdienliche Gebrauch als Rechenknecht im Gebiete der komplexen oder gerichteten Grössen gezeigt und auf den grossen Wert der zugrundeliegenden Abbildungslehren für jeden Zweig der Technik und insbesonders für die Elektrotechnik hingewiesen.

# Ueber Versuche mit Schmelz-Sicherungen bestehend aus zweiteiligen Schraubstöpseln

## Vorgenommen im Laboratorium der Städt. Elektrizitätswerke München im Februar 1910.

Von *Paul H. Perls,* Berlin und *Fr. Gerwer,* Zürich.

Es soll im folgenden über Versuche an zweiteiligen Schraubstöpseln berichtet werden, die durch den Verband Deutscher Elektrotechniker, die Vereinigung der Elektrizitätswerke und den Verband der Elektrotechnischen Installationsfirmen in Deutschland veranlasst und gemäss den seit 1. Juli 1909 in Deutschland geltenden Prüfungs-Vorschriften durchgeführt wurden.

Ausser den Vertretern dieser drei Verbände wohnten den Versuchen bei: Vertreter der Kommission für Installationsmaterial des Verbandes Deutscher Elektrotechniker, der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, der deutschen Prüfämter und der Fabrikationsfirmen. In zuvorkommendster Weise wurde von der Vereinigung der Elektrizitätswerke auch die Materialprüfungsanstalt des S. E. V. eingeladen.

Herr Direktor Zell von den Städt. Elektrizitätswerken in München stellte freundlichst die dortigen mustergültigen Prüfeinrichtungen unter Leitung von Herrn Ober-Ingenieur Paulus zur Verfügung.

Im Juni 1909 hatte die Vereinigung der Elektrizitätswerke, zu welcher ebenfalls eine Anzahl schweizer. Elektrizitätswerke zählen, und deren ausserordentliches Mitglied auch die Technischen Prüfanstalten des S. E. V. sind, an ihrer Jahresversammlung in Nürnberg nach langjährigen Beratungen und Versuchen die zweiteiligen Stöpsel, bestehend aus starkwandiger Zylinderpatrone und Schraubkopf, als das zur Zeit beste Sicherungssystem anerkannt. Als Einheitsspannung wurde 500 Volt angenommen und eine von vorn sichtbare Kennvorrichtung verlangt.