Zeitschrift: Études pédagogiques : annuaire de l'instruction publique en Suisse

Band: 42/1951 (1951)

Artikel: Recherches sur l'enseignement des mathématiques

Autor: Ramseyer, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113849

Recherches sur l'enseignement des mathématiques

L'enseignement des fractions.

La présente étude est basée sur les résultats d'un travail pratique exécuté dans le cadre des recherches actuellement en cours à l'Université de Neuchâtel.

Nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance à M. Philippe Muller, professeur de psychologie, d'avoir bien voulu faciliter cette entreprise en nous accordant la collaboration d'un de ses étudiants, M. Serge Mosset, lic. ès sciences. Nous remercions également ce dernier de son intelligente compréhension et de l'intérêt constant qu'il a manifesté au cours de ce travail.

Introduction

But.

Les fractions sont la pierre de touche de l'enseignement des mathématiques élémentaires. Ce chapitre est celui qui cause le plus de difficultés aux élèves et donne le plus de peine aux maîtres.

Tous ceux qui enseignent les mathématiques sont surpris par les fautes qui reviennent avec une constance exaspérante et se retrouvent jusqu'aux examens de maturité. Les professeurs de mathématiques les connaissent bien. Les premières qui viennent à l'esprit sont les fautes de simplification.

Le but de ce travail a été de rechercher l'ensemble de ces erreurs invétérées, de les cataloguer et de découvrir si possible leur origine.

Travail préalable.

Les listes d'épreuves ou « tests » que nous donnons tant pour l'arithmétique que pour l'algèbre ont été élaborées à la suite d'épreuves préalables ou « pré-tests » dont nous ne donnerons pas le détail. Disons simplement que nous avons essayé de ne faire intervenir dans chaque exercice qu'une seule possibilité de faute et de limiter les calculs au strict minimum.

Nous avions posé dans la première épreuve d'arithmétique quelques questions, d'un intérêt général, ne se rapportant pas aux fractions. Nous demandions entre autres choses de calculer: le produit d'une somme par une différence ; la somme d'un produit et d'un quotient, etc. Or, il s'est avéré que très peu d'élèves étaient capables de faire les opérations demandées, la signification de ces termes leur étant inconnue.

Nous aurons l'occasion de revenir sur cette lacune dont les répercussions sont probablement plus graves qu'on ne le pense.

Domaine de l'enquête.

La présente enquête a été faite dans les Ecoles secondaires de la ville de Neuchâtel en ce qui concerne la première partie (fractions ordinaires arithmétiques), au Gymnase de Neuchâtel, à l'Ecole supérieure des jeunes filles de Neuchâtel et au Gymnase mixte de La Chaux-de-Fonds en ce qui concerne la deuxième partie (fractions algébriques). En tout, 18 classes et plus de 400 élèves.

Nous indiquerons chaque fois dans les tableaux le degré scolaire, le sexe, éventuellement la section. Mais nous avons eu soin d'éviter toute querelle de clocher en donnant des résultats globaux provenant de plusieurs classes et de plusieurs collèges.

Valeur de l'enquête.

Nous présentons simplement le résultat d'une consultation faite à l'improviste dans des groupes d'élèves dont la préparation est nécessairement différente lorsqu'on passe d'une école à l'autre, ou même d'une classe à l'autre, bien que le programme soit le même.

Pour obtenir des résultats plus exacts, il faudrait suivre les mêmes élèves pendant deux ou trois ans ; or, nous avons pris simultanément deux volées différentes.

Dans certains cas, le nombre des élèves consultés est relativement faible. N'oublions pas non plus que, dans un même degré, les élèves sont d'âges assez variables et que plusieurs redoublent leur classe. L'homogénéité n'est donc qu'approximative.

Malgré tous ces inconvénients, il est assez remarquable que les mêmes fautes se retrouvent dans toutes les classes de différentes écoles et à divers degrés.

Nous pensons donc que cette enquête, si imparfaite soit-elle, n'en est pas moins un diagnostic assez sérieux.

Nous aurions aimé avoir quelques données d'autres cantons. Un seul collègue a bien voulu nous répondre. Si nous ne publions pas ses résultats, c'est qu'ils sont encore moins bons que ceux de Neuchâtel ; ce qui nous met très à l'aise à l'égard de nos écoles.

Première partie.

Fractions ordinaires.

Voici le test No 1 soumis aux élèves des deux dernières années des écoles secondaires, sections classique et moderne, qui correspondent aux 8e et 9e années scolaires.

Test No 1

Nom : Prénom : Age : Classe :

Résoudre les exercices suivants en écrivant toutes les opérations sur la feuille.

		Résultats
I.	1. Rendre 3 fois plus grand $\frac{4}{5}$	
	2. Rendre 3 fois plus grand $3\frac{5}{7}$	
	3. Rendre 4 fois plus petit $\frac{12}{17}$	
	4. Rendre 4 fois plus petit $\frac{3}{7}$	

II. 5. Ecrire une fraction de même valeur que $\frac{9}{12}$

6. Ecrire une fraction de même valeur que $\frac{3}{5}$

III. On donne deux fractions : $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{7}$

7. Calculer leur produit.
8. Calculer leur somme.

Test N° 1 *(suite)*

IV. Effectuer

9. $\frac{5}{3} - \frac{1}{5} - 1$

10. $\frac{1}{3} + \frac{0}{5}$

11. $\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{2}{15}$

V. Quelle est la plus grande des deux fractions ?

12. $\frac{6}{13}$ ou $\frac{8}{13}$

13. $\frac{5}{8}$ ou $\frac{5}{9}$

VI. 14. Mettre dans l'ordre de valeurs croissantes les trois fractions $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{12}$

VII. 15. Trouver une fraction comprise entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{3}{8}$

VIII. Effectuer

16. $\frac{4}{7} \times 3$

17. $\frac{4}{7} : 3$

18. $3 \times \frac{4}{7}$

19. $3 : \frac{4}{7}$

IX. Calculer

20. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

21. $\frac{7}{13} : \frac{3}{4}$

22. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$

23. $5 : \frac{1}{2}$

X. Calculer

24. $\frac{3}{\frac{1}{6}}$

25. $\frac{\frac{1}{8}}{4}$

Le tableau I donne les résultats bruts de deux volées de garçons, comprenant 10 classes des sections moderne et classique. Deux classes de filles de 9e année (section moderne) ont également subi les épreuves.

Tableau I

Résultats de l'application du Test No 1 dans les deux dernières classes du degré secondaire inférieur (sections classique et moderne).
j. = juste ; f. = faux ; n. = non fait.

Exercices	8e année de scolarité (13 à 14 ans)			9e année de scolarité (14 à 15 ans)					
	Nombre d'élèves 124 garçons			Nombre d'élèves 96 garçons			Nombre d'élèves 55 filles		
	j.	f.	n.	j.	f.	n.	j.	f.	n.
1	113	11	0	94	2	0	54	1	0
2	103	21	0	87	8	1	39	13	3
3	112	11	1	94	2	0	41	13	1
4	108	16	0	86	10	0	40	10	5
5	123	0	1	96	0	0	53	2	0
6	123	0	1	95	0	1	54	1	0
7	97	24	3	86	10	0	23	20	12
8	102	18	4	86	9	1	38	12	5
9	93	26	5	76	20	0	36	14	5
10	99	23	2	74	20	2	37	16	2
11	107	15	2	85	9	2	46	8	1
12	107	17	0	77	19	0	45	10	0
13	117	7	0	93	3	0	48	7	0
14	88	35	1	64	32	0	30	25	0
15	79	33	12	66	25	5	23	27	5
16	109	14	1	89	7	0	48	7	0
17	105	15	4	81	15	0	38	9	8
18	98	18	8	84	12	0	45	10	0
19	61	26	37	58	34	4	25	21	9
20	104	13	7	88	8	0	45	9	1
21	76	10	38	75	18	3	34	7	14
22	83	3	38	79	15	2	35	12	8
23	81	5	38	73	22	1	26	22	7
24	74	10	40	70	19	7	22	21	12
25	84	31	9	68	21	7	25	17	13

De l'observation attentive des travaux, nous avons retenu huit types de fautes caractéristiques, parmi les plus fréquentes. Elles sont relevées dans le tableau II qui appellerait de nombreux commentaires. Nous nous bornerons à quelques-uns.

Tableau II

donnant la proportion des élèves ayant commis certaines erreurs-types.

g = garçons ; f = filles

Fautes commises	8ᵉ année 13-14 ans	9ᵉ année 14-15 ans	
	124 g.	96 g.	55 f.
	%	%	%
1. Amplification au lieu de multiplication. . . . . Ex. : $\frac{a}{b} \times c$ donne $\frac{ac}{bc}$	19	1	20
2. Confusion de la division et de la multiplication . . . . Ex. : $a : \frac{b}{c}$ donne $\frac{ab}{c}$; $\frac{a}{b} : c$ donne $\frac{ac}{b}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ donne $\frac{ac}{bd}$; $a \times \frac{b}{c}$ donne $\frac{b}{ac}$ ou $\frac{ac}{b}$	15	43	56
3. Réduction au même dénominateur pour multiplier deux fractions. . . Ex. : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \times \frac{bc}{bd}$ donne $\frac{adbc}{bd}$	7	2	7
4. Inversion du dividende . . . . . . Ex. : $\frac{a}{b} : c$ donne $\frac{bc}{a}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ donne $\frac{bc}{ad}$ (produits croisés)	16	41	38
5. Erreur de comparaison de deux fractions . . . . Ex. : $\frac{16}{13}$ et $\frac{8}{13}$; $\frac{5}{8}$ et $\frac{5}{9}$	39	43	55
6. Transformations fausses d'entiers en fractions. . . . . Ex. : $\frac{22}{15} - 1$ donne $\frac{21}{15}$ (1 devient $\frac{1}{15}$)	6	3	18
7. Ignorance des propriétés du zéro . Ex. : $\frac{1}{3} + \frac{0}{5}$ donne $\frac{5}{15} + \frac{3}{15}$ ($\frac{0}{5}$ devient $\frac{1}{5}$)	11	21	25
8. Additions fausses.	6	10	16

Il est inquiétant que l'erreur la plus fréquente dans les deux degrés, chez les garçons comme chez les filles, provienne de la comparaison de deux fractions ayant même dénominateur *(faute N° 5)*. Il faut en conclure que la notion même de fraction est mal assimilée.

Ce qui frappe le plus cependant, ce sont les fautes qui, loin de disparaître en 9e année, deviennent au contraire beaucoup plus fréquentes qu'en 8e. Telles sont les *fautes N° 2 et 4* qui se rapportent à la multiplication et à la division des fractions. Elles sont faites par environ le 15 % des élèves en 8e année; mais en 9e, le pourcentage des mêmes fautes augmente dans des proportions incroyables puisqu'il a pratiquement triplé ! On en imagine facilement les raisons. Les élèves de 8e sont soumis à des exercices fréquents, à un véritable « drill » qui leur permet d'acquérir une certaine routine. Une année plus tard, le drill ayant cessé, les élèves ne sont plus capables de résoudre les mêmes exercices, le mécanisme de la multiplication et de la division des fractions leur a échappé. Serait-ce parce qu'ils étaient trop jeunes pour aborder ce chapitre ?

Il en est de même, mais dans une moins forte proportion heureusement, pour l'addition des fractions *(faute N° 8)*, que 10 % des élèves de 9e année ne savent pas faire, alors que ce déchet n'était que de 5 % en 8e année.

Enfin la *faute N° 7*, qui n'est pas du domaine des fractions seulement mais qui concerne l'arithmétique en général, montre que les propriétés élémentaires du zéro sont mal connues.

$$\frac{0}{5} \text{ multiplié par 3 devient } \frac{3}{5}$$

Nous retrouverons cette faute en algèbre.

* * *

En résumé, la notion même de fraction, notamment sa concrétisation ne semble assimilée que par le 60 % des élèves sortant de l'école secondaire, ce qui est nettement insuffisant. Les opérations élémentaires ne le sont guère mieux. Les divisions dans lesquelles interviennent des fractions donnent lieu à de multiples confusions provenant en partie d'une terminologie mal connue. Il faut inverser, mais quoi ?

Les confusions entre l'addition et la multiplication ou la division de deux fractions sont trop nombreuses.

On utilise assez souvent une « recette » dangereuse, celle de la « multiplication en croix », appliquée par de nombreux élèves à l'addition de deux fractions. Elle consiste à multiplier le dénominateur de chaque fraction par le numérateur de l'autre pour les réduire au même dénominateur.

On en trouve une application désastreuse à la multiplication.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \text{ devient } \frac{ad}{bd} \times \frac{bc}{bd} \text{ et donne } \frac{ad \times bc}{bd}$$

C'est le modèle de la mauvaise recette. Elle est la source de nombreuses fautes et ne s'applique déjà plus à l'addition de trois fractions.

Nous reviendrons sur ces conclusions après avoir examiné le test algébrique.

Deuxième partie.

Fractions algébriques. [1]

Les fractions algébriques permettent de se rendre compte d'une manière plus complète et plus précise du degré d'assimilation des fractions.

L'épreuve ci-dessous comprend les principales transformations de fractions algébriques, ainsi qu'un certain nombre d'opérations dans lesquelles interviennent des fractions. Chaque exercice a été conçu de manière à ne renfermer si possible qu'une difficulté, comme nous l'avons déjà fait pour les fractions arithmétiques.

Ces épreuves ont été proposées à des élèves de 15 à 17 ans, sortant de différentes écoles secondaires ayant toutes le même programme. Puis à des élèves de la classe suivante, c'est-à-dire de 16 à 18 ans (à deux ans de leur maturité).

Nous donnons dans trois tableaux les résultats obtenus par des groupes d'élèves aussi homogènes que possible, en séparant chaque fois les jeunes filles des garçons. Cette distinction, qui peut paraître contestable, permettra de voir d'une manière plus précise s'il y a réellement une différence entre les aptitudes mathématiques des garçons et des filles.

Une remarque préalable s'impose : les jeunes gens qui ont été soumis à cette épreuve sont déjà sélectionnés, puisqu'ils sont tous dans le degré secondaire supérieur (gymnases). On pourrait donc attendre d'eux de bonnes connaissances du calcul algébrique élémentaire. Nous verrons que tel n'est pas le cas.

[1] Il s'agit bien entendu de fractions algébriques rationnelles.

Pour simplifier, nous désignerons par Ire et IIe les classes en question.

Voici le test No 2 tel qu'il est présenté aux élèves :

Test No 2

Nom : .... Prénom : ....
Age : .... Classe : .... Date : ....

Indiquer toutes les opérations.

	Résultats
I. Effectuer	
1. $y - \frac{3z - 5}{2x}$	
2. $3c - \frac{a}{3c}$	
II. Simplifier s'il y a lieu	
3. $\frac{a + b}{a}$	
4. $\frac{ax + by}{xy}$	
5. $\frac{ax - ay}{a}$	
6. $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$	
III. Résoudre	
7. $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} = 1$	
8. $\frac{5x}{8} + \frac{7}{12} = 0$	
IV. On donne l'équation $t^2 = \frac{x}{y}$	
9. tirer x	
10. tirer y	
On donne l'équation $t = \frac{abx}{3y}$	
11. tirer x	
12. tirer y	
V. Simplifier s'il y a lieu	
13. $\frac{2ab - 3a^2c - a}{6ab^2 + 9a^2b}$	
14. $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$	
15. $\frac{m^2 - 4mn + 4n^2}{6m^2 - 24n^2}$	

Tableau III

donnant la proportion des élèves n'ayant pas pu faire correctement les exercices proposés.

g = garçons ; f = filles

	Ire année 15 à 17 ans		IIe année 17 à 19 ans	
	23 f.	25 g.	31 f.	30 g.
	%	%	%	%
1. $y - \frac{3z - 5}{2x}$	65	52	84	60
2. $3c - \frac{a}{3c}$	52	16	61	33
3. $\frac{a + b}{a}$	13	0	3	0
4. $\frac{ax + by}{xy}$	4	4	10	3
5. $\frac{ax - ay}{a}$	26	4	3	0
6. $\frac{a^2 + b^2}{a + b}$	61	8	26	10
7. $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} = 1$	48	33	22	30
8. $\frac{5x}{8} + \frac{7}{12} = 0$	43	28	29	31
9. $t^2 = \frac{x}{y}$ tirer x	30	0	10	7
10. $t^2 = \frac{x}{y}$ tirer y	82	12	20	26
11. $t = \frac{abx}{3y}$ tirer x	65	8	26	16
12. $t = \frac{abx}{3y}$ tirer y	82	8	16	30
13. $\frac{2ab - 3a^2c - a}{6ab^2 + 9a^2b}$	65	24	42	40
14. $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$	48	16	29	3
15. $\frac{m^2 - 4mn + 4n^2}{6m^2 - 24n^2}$ . . .	87	56	61	50

Les deux premiers exercices contiennent des transformations de monomes en fractions. L'exercice 1 contient en plus un piège dans lequel sont tombés la majorité des élèves ; il s'agit du signe « moins » placé devant une fraction dont le numérateur est un binome. L'élève oublie généralement de soustraire chaque terme du binome ou de mettre une parenthèse.

Les exercices 3, 4, 6 suggèrent à l'élève des simplifications erronées que font souvent les débutants.

L'exercice 7 est une équation renfermant des expressions fractionnaires dont le deuxième membre est entier; l'élève peut oublier de multiplier le deuxième membre par le dénominateur qu'il a « chassé ».

Dans l'exercice suivant, le zéro du deuxième membre risque fort de se transformer en unité au moment où l'élève « chassera » ses dénominateurs.

Il est intéressant de voir, dans les exercices 9 à 12, comment les élèves transforment ces petites équations qui sont le modèle courant des formules de physique ou d'intérêt. Une aisance absolue est indispensable dans ce genre de transformation.

L'exercice 13 demande la mise en évidence de facteurs communs.

Enfin, les exercices 14 et 15 exigent la connaissance des identités remarquables, mais offrent aussi à l'élève plusieurs tentations de fausse simplification du type de celle de l'exercice 3.

Les résultats de cette épreuve sont consignés dans le tableau III.

On est frappé tout d'abord par la fréquence de la faute N° 1 (voir tabl. IV, lettre *a*) que nous avons déjà signalée. Remarquons d'ailleurs que cette faute augmente avec l'âge, constatation que nous avons déjà faite dans le degré inférieur.

Les simplifications des exercices 3, 4, 5 sont presque satisfaisantes, mais que de fautes chez les jeunes filles dans l'exercice N° 6 ! On confond encore $a^2 + b^2$ avec $(a + b)^2$.

Les équations 9, 10, 11, 12 sont assez mal résolues même par des garçons qui sont à deux ans de leur bachot.

Enfin l'exercice 15, qui demande l'utilisation des identités remarquables, n'a été réussi dans aucun groupe par plus du 50 % des élèves. Sans commentaire !

Notons encore qu'un grand nombre d'élèves abandonnent résolument les dénominateurs des fractions qu'ils doivent additionner (exercices 1 et 2), comme s'il s'agissait d'une équation (voir tabl. IV, lettre *g*).

Il apparaît nettement que les jeunes filles ont plus de peine que les garçons.

Remarquons une fois encore le nombre d'exercices (1, 2, 10, 12, 13, pour ne citer que les principaux) qui sont moins bien réussis par la classe supérieure ; soit par les garçons, soit par les filles, soit par les uns et les autres.

Il est difficile d'expliquer ce phénomène dans le degré supérieur après trois ou quatre années d'algèbre. Les raisons sont-elles vraiment les mêmes que dans le degré inférieur ? Il ne s'agit plus ici d'une question d'âge mais de méthode.

Le tableau III n'indique pas le genre des fautes commises. Or, il est important de savoir exactement quelles sont les fautes caractéristiques rencontrées dans ces épreuves. C'est pourquoi nous les avons cataloguées, en ne les comptant qu'une seule fois par élève. Par exemple, la «simplification» par a de $\frac{a + b}{a}$ peut se rencontrer dans les exercices 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15. Il est normal qu'un même élève la fasse dans tous les cas, c'est pourquoi nous ne la lui compterons qu'une seule fois.

Nous avons résumé les principales de ces fautes-types dans le tableau IV.

On voit réapparaître ici des faits déjà constatés : il y a plus de fautes chez les jeunes filles que chez les garçons.

Certaines fautes qui disparaissaient en 1re se retrouvent en 2^{e} dans des proportions inquiétantes chez les garçons (*b* et *f*). Notons bien que ce ne sont pas les mêmes élèves.

Chez les jeunes filles, d'autres fautes augmentent de fréquence dans le degré supérieur.

D'une manière générale, on sent partout une grande insécurité.

Sondage général.

Grâce à une heureuse coïncidence, nous avons pu atteindre pour quelques épreuves un groupe d'élèves très homogène comprenant ceux des premières classes des trois établissements gymnasiaux du canton de Neuchâtel.

Les élèves de ces trois établissements proviennent de toutes les écoles secondaires du canton. L'épreuve ayant eu lieu au cours du 1er trimestre, elle porte sur l'enseignement du degré inférieur, et non pas sur celui des gymnases.

Tableau IV

donnant la proportion des élèves commettant certaines erreurs-types.

g = garçons ; f = filles

	Ire année		IIe année	
	23 f.	25 g.	31 f.	30 g.
	%	%	%	%
a) Erreur de signe du type : $y - \frac{3z-5}{2x} \rightarrow \frac{2xy-3z-5}{2x}$	27	48	45	40
b) Erreurs diverses de transformation de monomes en fract.	22	—	45	23
c) Simplification du type : $\frac{a+b}{a} \rightarrow b$	43	8	26	13
d) Simplification du type : $\frac{a^2+b^2}{a+b} \rightarrow a+b$	60	8	26	10
e) $\frac{2}{3} - \frac{x}{3} = 1$ devient $2 - x = 1$	22	12	16	7
f) $\frac{5x}{8} + \frac{7}{12} = 0$ devient $15x + 14 = 24$	9	—	22	16
g) Les dénominateurs disparaissent dans l'addition de deux fractions . . . . $y - \frac{3z-5}{2x}$ devient $2xy - 3z + 5$	4	20	10	13

Un seul coup d'œil sur le tableau V montre :

1o que la simplification des fractions algébriques, clef de voûte de l'enseignement des mathématiques, est loin d'être assimilée au sortir de l'école secondaire ;

2o que les filles ont, en général, soit moins d'aptitudes que les garçons, soit un certain retard sur les garçons, soit tous les deux à la fois.

Tableau V

Proportion des élèves de la 1re année du degré secondaire supérieur (15 à 17 ans) qui n'ont pas su simplifier correctement les fractions proposées.

Fractions à simplifier	70 garçons	46 filles
	%	%
$\frac{a+b}{a}$	4	22
$\frac{ax - ay}{xy}$	38	50
$\frac{a^2 + b^2}{a + b}$	50	75
$\frac{x^2 - y^2}{x - y}$	20	52
$\frac{m^2 - 4\,mn + 4\,n^2}{6\,m^2 - 24\,n^2}$	70	89

Conclusions générales.

L'intérêt d'un tel travail ne consiste pas seulement à déceler les erreurs courantes et l'insécurité générale qui règne dans tous les degrés, dès qu'il s'agit de fractions; il doit être aussi un diagnostic permettant de trouver un remède et même, si possible, les causes d'un mal qu'il faut couper à la racine.

Les résultats que nous venons d'exposer permettront, nous l'espérons, d'orienter l'enseignement des fractions vers la correction des fautes mises en évidence.

Il serait utile, pour cela, de savoir à quel moment de l'enseignement ces fautes apparaissent. Ce n'était pas le but premier de notre travail, mais ce doit en être le corollaire. Reprenons pour cela les fautes principales des tableaux II et IV et cherchons l'époque de leur première apparition.

1° Les erreurs de comparaison de deux fractions ayant mêmes dénominateurs ou mêmes numérateurs remontent évidemment au début de l'étude des fractions. Il semble qu'on n'ait pas su faire comprendre ce qu'est réellement une fraction, et, par la suite, qu'on ne soit plus revenu sur la notion de grandeur d'une fraction.

2° La confusion de la division et de la multiplication, de même que l'inversion du dividende dans les divisions, dénote aussi un faux départ. Nous pensons même qu'il s'agit là d'un départ prématuré. On enseigne la multiplication et la division des fractions à un âge auquel l'élève ne peut pas concevoir ces opérations concrètement. Il ne peut les connaître que mécaniquement et il confond les mécanismes. A notre avis, **il ne faudrait pas aborder l'étude de la multiplication et de la division par une fraction avant 13 ans. Rien n'est plus dangereux que d'enseigner des mécanismes à des élèves qui n'en comprennent pas le raisonnement.**

Il y a autre chose : l'ignorance d'une terminologie précise empêche l'expression ou la compréhension de règles précises. Si l'élève confond diviseur et dividende, c'est qu'il ignore la signification de ces deux termes. C'est donc au moment de l'énoncé d'une règle, nous dirons même d'une « recette », parce qu'au début ce sont plutôt des recettes, qu'il faut agir avec crainte et tremblement et **s'efforcer de ne donner que des « recettes » qui soient en tous points conformes au raisonnement mathématique le plus rigoureux.**

3° Les grosses fautes de simplification apparaissent en algèbre avec l'introduction des polynomes dans les fractions. C'est à ce moment qu'il faut reprendre à la base toute la question de la simplification des fractions.

Si ces opérations laissent tant à désirer, c'est, pensons-nous, que les notions de produit, de terme et de facteur sont mal assimilées. Nous retrouvons ici une question de terminologie à mettre au point et surtout à utiliser. Les élèves parlent rarement de somme ou de produit ; ils disent addition, multiplication ; ils confondent généralement terme et facteur. Or, il est bien difficile de faire comprendre la simplification des fractions algébriques sans une terminologie exacte. Les mathématiques sont elles-mêmes un langage si précis que nous n'utiliserons jamais une langue trop précise pour les enseigner. Il faut ensuite, bien entendu, compléter cette partie verbale par de nombreux exercices.

4° C'est avec l'étude des équations à expressions fractionnaires que l'élève prend conscience de deux réalités qu'il croyait ne devoir jamais troubler sa quiétude : le zéro et l'unité. On lui avait pourtant bien appris dans son livret que

3 fois 0 font 0
3 fois 1 font 3

Mais à la première application qu'il trouve généralement aux leçons d'algèbre, 3 fois 0 font 3 et $\frac{a}{a}$ fait zéro. Le zéro devient 1 et 1 devient zéro.

Voici une excellente occasion de parler de « produits » dont un des «facteurs» est nul, et de «quotients» dont les «termes» sont égaux.

Nous n'allons pas continuer cette classification que chacun pourra compléter selon ses propres expériences.

Ce catalogue des fautes courantes, il faut le faire avec les élèves, leur montrer les pièges dans lesquels on sait pertinemment qu'ils risquent de tomber et chaque fois que l'un d'eux s'y laisse prendre, marquer l'événement et y rendre attentifs tous ses camarades. On évitera ainsi, ce qui frappe dans notre enquête, des fautes dont la fréquence augmente après une année d'algèbre et même plus alors qu'elle devrait diminuer. Faisons la part de l'étourderie et de l'oubli, mais ne pensons pas que ces deux facteurs puissent tout expliquer. Ils n'expliquent en tout cas pas que le 43 % des garçons arrivés au terme de l'étude des fractions arithmétiques (15-16 ans) ne puissent pas comparer deux fractions ayant même dénominateur ou même numérateur ; encore moins que le 43 % des mêmes élèves fassent des confusions entre la multiplication et la division des fractions alors que dans la classe précédente, 15 % seulement commettent encore ces erreurs (rappelons qu'il ne s'agit pas des mêmes élèves).

Le facteur « oubli » ne joue pas un rôle aussi grand en mathématiques que dans d'autres disciplines. Ici, le raisonnement l'emporte sur la mémoire. On oublie moins facilement un raisonnement qu'un mécanisme.

Pour terminer, disons que l'enseignement des fractions, celui des mathématiques en général et de plusieurs autres disciplines, doit porter son effort sur deux points essentiels : la compréhension, puis l'automatisation.

Tout enseignement qui passe à l'automatisation ou qui la tolère avant que les choses ne soient bien comprises et bien assimilées, est trompeur. C'est pourquoi le **maître doit contrôler sans cesse le raisonnement des élèves, par des questions précises et par des exercices dans lesquels l'automatisme peut être mis en défaut.**

Demander : pourquoi faites-vous ceci ? Comment justifiez-vous telle ou telle opération ? etc.

Ce qui précède se fait dans le cadre du programme (pour autant qu'il soit adapté à l'âge des élèves). Il ne s'agit pas de répétitions supplémentaires. Un choix judicieux des exercices et des problèmes permet un contrôle constant des notions acquises. Il ne s'agit pas ici d'un chapitre qu'on peut laisser de côté après l'avoir étudié, mais d'un des outils même du mathématicien. On n'abandonne pas les fractions pendant un trimestre ou une année pour les reprendre ensuite. Elles doivent figurer constamment dans les exercices et les problèmes, elles font partie des grandeurs avec lesquelles on calcule journellement.

Il est clair que la situation n'est pas aussi grave qu'on pourrait le croire en se basant sur les résultats de notre enquête. Un bref exercice de répétition diminuerait considérablement le nombre des fautes et ferait disparaître plusieurs d'entre elles. Mais il n'en reste pas moins vrai qu'on ne peut pas faire appel inopinément aux connaissances élémentaires du calcul des fractions, et ceci jusque dans les degrés supérieurs de l'enseignement secondaire.

Si les difficultés sont grandes, il ne faut cependant pas désespérer. Nous pourrions citer des expériences personnelles dans lesquelles des élèves très faibles sont arrivés à une maîtrise absolue du calcul des fractions grâce à l'application rigoureuse de quelques principes que nous nous sommes permis de donner au cours de ces conclusions.

* * *

Nous avons rendu compte objectivement d'un sondage effectué dans quelques écoles. Ces résultats n'ont rien de définitif ; ils demandent à être complétés et suggèrent une recherche que chacun peut faire avec ses propres élèves.

Les deux tests proposés sont susceptibles d'améliorations et pourront peut-être rendre quelques services à ceux qui sont préoccupés par ces questions.

* * *

N. B. Nous avons pris comme champ d'investigation des écoles du canton de Neuchâtel par raison de commodité. Nous sommes *bien persuadés que les résultats ne seraient pas meilleurs dans d'autres cantons. Nous en avons eu la preuve par les quelque cinquante réponses qui nous sont parvenues de l'extérieur.*

Il est d'ailleurs fort intéressant de constater les différences souvent très sensibles entre les classes, les écoles et même les régions du pays. Nous nous garderons bien d'entrer ici dans ces détails !

Pierre RAMSEYER,
directeur des Ecoles secondaires, supérieure et professionnelle de la ville de Neuchâtel.

Problème de médecine infantile et scolaire
Ce que l'on peut attendre du BCG

Depuis deux ans la vaccination contre la tuberculose est introduite dans nos écoles vaudoises, à titre facultatif, au bénéfice des élèves de 12 à 16 ans. Un crédit de 20 000 francs a été mis à la disposition de la LVT afin de permettre le développement de cette action.

Les débuts sont encore modestes : un millier d'élèves lausannois sont actuellement vaccinés, auxquels il faut ajouter quelque 800 élèves du canton. Au Danemark, de 1500, en 1942, le nombre des vaccinations a passé, en 1949, à plus de 180 000 ! Les petits ruisseaux font les grandes rivières. L'opération, grâce aux précautions prises, s'est déroulée sans incident, à l'exception de quelques ulcérations au lieu d'injection qui ont laissé de petites cicatrices.

La grande majorité des médecins scolaires ont suivi un cours pratique dirigé par le Dr Delachaux, qui est le promoteur de la vaccination par le BCG à la Source en 1943, puis à l'Ecole de gardes-malades de l'Hôpital cantonal en 1947. La plupart de nos confrères sont décidés à travailler avec nous et s'ils n'ont