

<b>Zeitschrift:</b>	Archives des sciences et compte rendu des séances de la Société
<b>Herausgeber:</b>	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
<b>Band:</b>	35 (1982)
<b>Heft:</b>	3
 <b>Artikel:</b>	Covariance d'échelle et approximations post-newtoniennes dans le cadre de la relativité générale
<b>Autor:</b>	Chopard, Bastien / Bouvier, Pierre
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-740565">https://doi.org/10.5169/seals-740565</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**COVARIANCE D'ÉCHELLE ET APPROXIMATIONS  
POST-NEWTONIENNES  
DANS LE CADRE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE**

PAR

**Bastien CHOPARD<sup>1</sup> et Pierre BOUVIER<sup>2</sup>**

**RÉSUMÉ**

Le schéma d'approximations post-newtoniennes tel qu'on l'applique en théorie de Relativité Générale, par développement en série de puissances de  $v/c$  des potentiels  $g_{\mu\nu}$  et des grandeurs dérivées, est étendu à la théorie de gravitation covariante d'échelle. La présence d'un second paramètre, en plus de  $v/c$ , conduit à des difficultés qu'on surmonte ici à l'aide d'un algorithme de regroupement des termes (Bouvier, 1982) et l'on parvient finalement à un schéma consistant, à condition de choisir le vecteur de jauge inversement proportionnel au temps cosmique.

**1. INTRODUCTION**

Il existe des présomptions pour penser que certaines constantes physiques varient au cours du temps; Dirac, le premier, a signalé la possibilité d'une telle variation lente en formulant son hypothèse des Grands Nombres (1937). Plus récemment, Dirac lui-même (1973), Canuto (1977) puis Maeder et Bouvier (1979) sont revenus sur le problème.

Relativement à chaque type d'interaction de la Physique, on peut définir un système d'unités pour les diverses grandeurs mesurées. Ainsi, l'unité électromagnétique (u.e.m.) de longueur peut être choisie comme  $e^2/(\epsilon_0 mc^2)$  à partir de la charge  $e$  et la masse  $m$  de l'électron,  $\epsilon_0$  étant la constante de perméabilité du vide et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Dans le cas d'un système lié par l'interaction de gravitation, un amas d'étoiles par exemple, l'unité gravitationnelle de longueur se présentera sous la forme  $c/(G\rho)^{1/2}$ , avec  $\rho$  pour densité moyenne de masse du système,  $G$  étant la constante de gravitation. (u.g.)

---

<sup>1</sup> Département de Physique théorique, Université de Genève.

<sup>2</sup> Département d'Astronomie, Université de Genève.

Le présent article est extrait du Travail de Diplôme de l'un des auteurs (B.C.)

A priori, rien ne nous permet d'affirmer que ces deux étalons de longueur vont rester dans un rapport constant, quels que soient l'endroit et l'instant où on les compare. Il est donc naturel d'admettre l'existence d'une fonction  $\beta(\hat{x}, t)$  donnant le rapport des longueurs mesurées en des unités se rapportant à deux interactions différentes. Si  $\beta$  ne se réduit pas à une constante, les lois physiques changeront de forme si l'on change d'unités pour les exprimer, ce qui rend donc ces lois tributaires du système d'unités. Tant que les équations connues des lois physiques sont traduites dans le système d'unités relatif à l'interaction qu'elles décrivent, comme c'est le cas pour les équations de Maxwell (en u.e.m.) ou celles d'Einstein (en u.g.), aucune variation d'unités ne saurait être mise en évidence, puisque le type ou l'appareil de mesure et le phénomène observé sont de même nature.

Or la plupart de nos mesures sont effectuées avec un appareillage de nature électromagnétique et il est donc particulièrement intéressant d'exprimer la Relativité Générale en (u.e.m.), dans lesquelles s'inscriront les vérifications expérimentales.

D'une manière plus générale, nous demanderons aux équations de la physique de satisfaire un principe de *covariance d'échelle*, c'est-à-dire de conserver la même forme dans n'importe quel système d'unités, tout en prenant la forme habituelle lorsqu'elles sont exprimées dans le système d'unités privilégié associé à l'interaction qu'elles décrivent.

## 2. ESPACE DE WEYL ET COVARIANCE D'ÉCHELLE

Le principe de covariance d'échelle venant maintenant s'ajouter au principe de covariance générale de la Relativité Générale usuelle, l'espace-temps de Riemann va devoir être généralisé en celui de Weyl, caractérisé, en plus de l'invariant métrique, par un vecteur de jauge  $\kappa$ , dont les composantes  $\kappa_\mu$  sont aussi celles de la connexion métrique grâce auxquelles la variation  $dl$  de la longueur  $l$  d'un vecteur translaté de  $dx$  sont données par :

$$dl = l(x) \kappa_\mu(x) dx \quad (1)$$

Si  $\kappa_\mu = 0$ , l'espace de Weyl se réduit à celui de Riemann. Après un changement d'échelle (ou d'unités), la longueur  $l$  d'un vecteur devient :

$$l'(x) = \beta(x)l(x) \quad (2)$$

où  $\beta(x)$  est appelé *facteur d'échelle*. Les coordonnées n'ont pas été modifiées par ce changement d'unités, car dans l'élément métrique

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ce sont les  $g_{\mu\nu}$  qui portent les unités d'un carré de longueur, et non les  $x^\mu$  qui sont ici de simples nombres sans dimension, servant à numérotter les mailles de coordonnées.

Après translation de  $dx$ , la variation  $dl'$  de  $l'$  vaudra, selon (2),

$$dl' = \beta dl + l d\beta = l(\kappa_\mu + \partial_\mu \ln \beta) dx$$

d'où la loi de transformation des composantes de la connexion métrique

$$\kappa'_\mu = \kappa_\mu + \partial_\mu \ln \beta \quad (3)$$

Une grandeur  $Y$  qui, sous changement d'unités, se transforme en

$$Y' = \beta^n Y \quad (4)$$

est dite *covariante d'échelle* avec  $n$  appelée *puissance* de  $Y$ ; on notera  $n = \prod(Y)$ . Si  $n = 0$ ,  $Y$  est alors *invariant d'échelle* de (4) résulte que si deux grandeurs covariantes déchelle de même puissance sont égales dans un certain système d'unités, elles le seront aussi dans tout autre. Si, en plus de (4),  $Y$  se transforme comme composante de tenseur lors d'un changement de coordonnées, on dira (Dirac, 1973) que  $Y$  est un co-tenseur d'ordre  $n$  ou plus brièvement (Bouvier et Maeder, 1978) un co-tenseur  $n$ .  $Y$  étant covariant d'échelle, il n'en est généralement plus de même de la dérivée partielle  $\partial_\mu Y$ , mais il est toutefois possible d'introduire un nouvel opérateur  $*\partial_\mu$ , appelée *dérivée covariante d'échelle*, qui préserve la covariance d'échelle. Posons :

$$*\partial_\mu Y = \partial_\mu Y - n\kappa_\mu Y \quad (5)$$

où  $n = \prod(Y)$ , puis changeons d'unités, de sorte que  $Y \rightarrow Y' = \beta^n Y$ ; il est facile de vérifier, en tenant compte de (3), que

$$*\partial_\mu Y' = \partial_\mu(\beta^n Y) - n\kappa'_\mu \beta^n Y = \beta^n *\partial_\mu Y$$

Remarquons encore que si  $\kappa_\mu = 0$ ,  $*\partial_\mu$  se réduit à la dérivée usuelle  $\partial_\mu$ .

### 3. MODIFICATIONS DES ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Pour qu'une équation soit vraie dans tout système d'unités et de coordonnées, il suffit qu'elle exprime l'égalité de deux co-tenseurs de même rang et de même puissance, et qu'elle soit vraie dans un système de coordonnées et d'unités particulier. Par conséquent, pour obtenir une théorie de gravitation correcte dans tout système d'unités, il faut rendre covariantes d'échelle les équations de la R.G. en s'assurant qu'en effectuant les mesures en unités gravitationnelles ( $\kappa_\mu = 0$ ) l'on retrouve celles de la théorie d'Einstein.

Soit d'abord les équations du mouvement d'une particule :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (6)$$

où les  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  sont les composantes de la connexion affine :

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu})$$

Les quantités covariantes d'échelle  $*\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  associées à  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  se construisent aisément grâce à  $*\partial_\mu$ , permettant d'écrire

$$*\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (*\partial_\mu g_{\nu\sigma} + *\partial_\nu g_{\sigma\mu} - *\partial_\sigma g_{\mu\nu}) \quad (7.a)$$

Ces grandeurs sont invariantes d'échelle ; en effet, par sa définition même, le tenseur métrique  $g_{\mu\nu}$  est un co-tenseur 2 ; donc  $g^{\mu\nu}$  est co-tenseur -2 et la puissance de  $*\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  est effectivement nulle. En utilisant (5), dans un système quelconque d'unités, nous retrouvons l'expression

$$*\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g_\mu^\alpha \kappa_\nu - g_\nu^\alpha \kappa_\mu + g_{\mu\nu} \kappa^\alpha \quad (7.b)$$

obtenue par Eddington (1923).

Revenons aux équations de mouvement ; l'opérateur  $d/d\tau$  est déjà covariant d'échelle, puisque  $ds = cd\tau$  et, sous changement d'unités,  $ds$  devient  $ds' = \beta ds$ . Donc on peut dire que  $d/d\tau$  est un opérateur co-scalaire de puissance -1 :

$$\frac{d}{d\tau'} = \beta^{-1} \frac{d}{d\tau}$$

Toutefois,  $d^2/d\tau'^2$  n'est pas covariant d'échelle ; nous trouvons en effet que

$$\frac{d^2}{d\tau'^2} = \beta^{-1} \frac{d}{d\tau} \left( \beta^{-1} \frac{d}{d\tau} \right) = \beta^{-2} \frac{d^2}{d\tau^2} - \beta^{-2} (\partial_\mu \ln \beta) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau}$$

mais comme  $\partial_\mu \ln \beta = \kappa'_\mu - \kappa_\mu$ , nous voyons que

$$\frac{d^2}{d\tau'^2} + \kappa'_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d}{d\tau'} = \beta^{-2} \left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \kappa_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \right)$$

ce qui montre que

$$\frac{*d^2}{d\tau^2} \equiv \frac{d^2}{d\tau^2} + \kappa_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau}$$

est un opérateur co-scalaire -2.

Par conséquent, l'équation (6) de mouvement deviendra, sous sa forme covariante d'échelle,

$$\begin{aligned} & \frac{*d^2}{d\tau^2} x^\alpha + *\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + *\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \kappa_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

et si  $\kappa_v = 0$  (u.g.), on retombe sur (6).

Tournons-nous maintenant vers les équations d'Einstein pour le champ de gravitation, écrites de la façon suivante :

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (9)$$

où  $\Lambda$  est la constante cosmologique,  $R_{\mu\nu}$  le tenseur de Ricci et  $T_{\mu\nu}$  le tenseur d'énergie-impulsion, défini pour un ensemble de  $N$  particules ponctuelles, de positions  $x_n$  et de masse  $m_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) par l'expression (Weinberg, 1972)

$$T^{\mu\nu}(x) = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^N m_n \delta^3(\hat{x}_n - \hat{x}) \frac{dx_n^\mu}{d\tau} \frac{dx_n^\nu}{d\tau}.$$

Du fait que, sous changement d'unités, la « fonction » de Dirac  $\delta^3(\hat{x}_n - \hat{x})$  se transforme comme l'inverse d'un volume, que les composantes  $dx^\mu/d\tau$  sont de puissance  $-1$  et que le produit  $Gm_n$  se transforme comme une longueur, il résulte manifestement que le tenseur  $T_{\mu\nu}$  a une puissance  $-4$  et par suite, que  $GT_{\mu\nu}$  a une puissance nulle. D'autre part,  $\Lambda$  a la puissance du carré d'une longueur, ce qui confirme que tous les termes du second membre de (8) sont invariants d'échelle.

Quant à  $R_{\mu\nu}$ , dont la définition bien connue est :

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \quad (10)$$

ce n'est pas un co-tenseur, mais la construction d'un co-tenseur  $*R_{\mu\nu}$  qui se réduit à (10) en (u.g.) est immédiate, en passant aux symboles astériqués, soit

$$*R = * \partial_\nu * \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - * \partial_\lambda * \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + * \Gamma_{\mu\lambda}^\eta * \Gamma_{\nu\eta}^\lambda - * \Gamma_{\mu\nu}^\eta * \Gamma_{\lambda\eta}^\lambda \quad *(10)$$

En utilisant (7.b) et en notant que  $* \partial_\mu * \Gamma = \partial_\mu * \Gamma$  puisque  $\Pi(*\Gamma) = 0$ , nous trouvons :

$$*R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 3\kappa_{\mu,\nu} + \kappa_{\nu,\mu} - g_{\mu\nu} \kappa_{\lambda,\lambda} + 2g_{\mu\nu} \kappa^\lambda \kappa_\lambda - 2\kappa_\mu \kappa_\nu \quad (11.a)$$

type d'expression déjà contenue dans le formalisme de Dirac (1973) et reprise par Canuto *et al.* (1977) dans l'établissement des équations du champ covariantes d'échelle.

Dans (11.a), l'abréviation ; désigne la dérivation covariante ordinaire. En (u.g.), la R.G. s'exprime dans l'espace de Riemann (ou l'espace de Weyl de jauge nulle :  $\kappa_\mu = 0$ ) passant à d'autres unités, nous avons, selon (3)  $\kappa'_\mu = \partial_\mu \ln \beta$ , donc  $\kappa_{\mu,\nu} = \kappa_{\nu,\mu}$  et (11.a) se simplifie en

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 2\kappa_{\mu,\nu} - g_{\mu\nu} \kappa_{\lambda,\lambda} + 2g_{\mu\nu} \kappa^\lambda \kappa_\lambda - 2\kappa_\mu \kappa_\nu \quad (11.b)$$

permettant d'obtenir les équations covariantes d'échelle du champ.

$$*R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda \right) + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (12)$$

Elles ont ainsi la même forme que (7), où l'on a simplement ajouté au 1<sup>er</sup> membre les termes de jauge et comme  $\kappa_\mu$  est un vecteur, le caractère tensoriel de (12) est assuré, comme il se doit.

#### 4. DÉTERMINATION ET INTERPRÉTATION DU VECTEUR DE JAUGE

Le facteur d'échelle  $\beta$  qui relie entre eux les systèmes d'unités (u.g.) et (u.e.m.) est *a priori* inconnu, mais en supposant ici valable (champ gravifique faible) le Principe Cosmologique, l'on s'aperçoit que  $\beta$  ne doit dépendre que du temps (Maeder et Bouvier, 1979) et il en résulte que  $\kappa = (\kappa_0(x^0), 0, 0, 0)$ .

Bien que l'on ne connaisse pas la forme de la fonction  $\kappa_0(x^0)$ , on s'attend à une relation du type  $\kappa_0 = 1/(ct)$  où  $t$  est le temps cosmique. Avant de préciser ce point, il faut rappeler que dans le présent contexte, le temps et la longueur sont mesurées dans la même unité, toute vitesse étant alors un nombre sans dimension. La variable  $t$ , possédant des unités contrairement à  $x^0$ , nous devons écrire

$$\sqrt{\eta_{00}} x^0 = ct$$

où  $\eta_{00}$  est la composante 00 du tenseur métrique  $\eta_{\mu\nu}$  de Minkowski, avec unités de carré de longueur.

Revenons à la détermination de  $\kappa_0$ ; nous savons que la vitesse de récession d'une galaxie est reliée à la distance  $l$  qui nous en sépare, par la relation

$$V \equiv l = Hl$$

où  $H$  est la constante de Hubble. D'autre part, selon (1), pendant l'intervalle de temps  $dx^0$ , la distance  $l$  varie de

$$dl = l \kappa_0 dx^0 = l \frac{c}{\sqrt{\eta_{00}}} \kappa_0 dt \quad \text{donc} \quad \kappa_0 = \sqrt{\eta_{00}} H/c$$

ce qui donne bien une dépendance en  $1/(ct)$  pour  $\kappa_0$  (Maeder, 1978) puisque  $H$  vaut l'inverse de l'âge de l'Univers.

Nous confirmons donc ici, comme le montrait déjà (1), que  $\kappa_0$  est à regarder comme étant sans dimension, tout en se comportant comme composante de vecteur.

Etant donné que l'espace-temps de Minkowski est le cadre approprié à l'électromagnétisme, il est naturel d'exiger (Maeder et Bouvier, 1979) que la métrique  $\eta_{\mu\nu}$  soit solution des équations (12) en l'absence de matière et d'énergie ( $T^{\mu\nu} = 0$ ). Avec  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  on aura  $R_{\mu\nu} = 0$  et (12) se réduisent aux deux équations

$$3\partial_0 \kappa_0 + \frac{1}{c} = 0, \quad \partial_0 \kappa_0 - 2\kappa_0^2 + \Lambda = 0 \quad (13)$$

Si  $\Lambda = 0$ , la solution est  $\kappa_0 = 0$ , d'où  $\beta = \text{const.}$  puisque  $\kappa_0 = \partial_0 \ln \beta$  si  $\Lambda \neq 0$ , on tire de (13),

$$d\kappa^0/dx^0 = -\kappa_0^2 \quad (14)$$

dont la solution est  $\kappa_0 = \frac{1}{ct - \alpha}$  où  $\alpha$  est une constante relative à l'origine du temps. ( $\alpha = 0$  si  $t$  est temps cosmique). Il s'ensuit que  $\beta = A(ct - \alpha)$  avec  $A = 1/(ct_0 - \alpha)$  afin que  $\beta = 1$  à l'heure actuelle  $t = t_0$ .

De (13), on obtient pour la constante cosmologique:  $\Lambda = \frac{3}{(ct - \alpha)^2}$ , soit — la valeur actuelle  $1.26 \times 10^{-56} \text{ cm}^{-2}$ , avec  $H = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ .

*Remarque:* On interprète parfois  $\Lambda$  comme valeur moyenne de l'énergie du vide par unité de volume.  $\Lambda \neq 0$  implique une brisure de symétrie, traduite ici par un vecteur de jauge non nul, signifiant que les deux systèmes d'unités ont un rapport variable.

## 5. APPROXIMATION POST-NEWTONIENNE

La théorie de Newton est une approximation de la R.G. qui s'applique très bien à la mécanique céleste des mouvements planétaires et à leurs perturbations du premier ordre.

L'approximation post-Newtonienne fera considérer les termes d'ordre supérieur et conduit à d'excellents résultats pour le système solaire (avance du périhélie, déviation de la lumière, etc.). Nous allons nous efforcer ici d'englober l'approximation post-Newtonienne dans le cadre de la théorie covariante d'échelle. Le point de départ de cette approximation réside dans le fait que dans le cas newtonien, le tenseur métrique a pour valeur

$$g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2 \quad (15)$$

où  $\Phi$  est le potentiel newtonien, tandis que les autres  $g_{\mu\nu}$  se réduisent aux valeurs galiléennes  $\eta_{\mu\nu}$  de la métrique de Minkowski. Utilisant le théorème du viriel

$$2\bar{T} + \bar{\Omega} = 0$$

où  $\bar{T}$  et  $\bar{\Omega}$  sont les énergies moyennes respectivement cinétique et potentielle du système considéré; nous obtenons  $2\bar{v}^2 = -2\Phi$  par conséquent

$$g_{00} = 1 - 4 \frac{\bar{v}^2}{c^2}$$

ce qui suggère un développement en puissances de  $v/c$ , où  $v$  est une *vitesse caractéristique* des membres du système cosmique étudié. On ne retient, dans l'approximation envisagée ici, que des vitesses faibles, au sens  $v \ll c$ , soit  $v/c \ll 1$ .

Un autre paramètre important sera l'*échelle de longueur*  $r$  ou le rayon moyen typique du système, permettant d'écrire, à l'aide de la masse totale  $M$ , un potentiel moyen

$$-\Phi = GM/r.$$

Le fait que  $v$  et  $r$  ne sont pas rigoureusement définis n'importe guère ici, car nous avons seulement à comparer des ordres de grandeur; à ce propos, nous noterons que, dans l'esprit du théorème du viriel,

$$v^2 = \frac{1}{2} GM/r. \quad (16)$$

## 6. DÉCOMPOSITION EN PUISSANCES DE $v/c$

En suivant la procédure de Weinberg (1972, chap. 9), nous poserons

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \overset{1}{g}_{\mu\nu} + \overset{2}{g}_{\mu\nu} + \dots$$

où  $\overset{n}{g}_{\mu\nu}$  est le terme d'ordre  $(v/c)^n$ . Pour raisons de symétrie de l'espace-temps, ce développement se réduit, en adoptant la signature  $-2$  plutôt que  $+2$ , à:

$$\begin{aligned} g_{00} &= 1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \dots \\ g_{0i} &= \overset{3}{g}_{0i} + \overset{5}{g}_{0i} + \dots \\ g_{ij} &= -\delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \overset{4}{g}_{ij} + \dots. \end{aligned} \quad (17)$$

De  $g_{\mu\nu}g^{\lambda\mu} = \delta_\mu^\lambda$  l'on déduit  $\overset{2}{g}^{00} = -\overset{2}{g}_{00}$ ,  $\overset{2}{g}_{ij} = -g^{ij}$ ,  $\overset{3}{g}^{0i} = g_{0i}$  et l'on ensuite calculer facilement les composantes  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  de la connexion affine aux différents ordres de grandeur en  $v/c$ . Dans ce but, il faut toutefois remarquer, du point de vue ordre de grandeur, les opérateurs  $\partial_i$  et  $\partial_0$  se comportent respectivement comme un facteur  $1/r$  et  $v/c$ ; en effet, si  $|f|$  est l'ordre de grandeur de  $f$ , alors

$$|\partial_0 f| = \frac{1}{c} |\partial_t f| = \frac{1}{cT} \int_0^T \partial_t f dt = \frac{|f|}{cT}$$

où  $T$  est un temps caractéristique, par exemple celui qu'il faut pour franchir  $r$  à la vitesse  $v$ . On a donc bien

$$|\partial_0 f| = \frac{v}{c} \frac{|f|}{r} \quad \text{et de même pour} \quad |\partial_i f| = \frac{1}{r} |f|$$

$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  se décomposera donc en termes d'ordre  $n$  ou mieux  $(v/c)^n/r$ , qu'on notera  $\overset{n}{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ ; en particulier

$$\overset{2}{\Gamma}_{0i}^0 = \frac{1}{2} \partial_i^2 g_{00}, \quad \overset{2}{\Gamma}_{00}^i = \frac{1}{2} \partial_i^2 g_{00}, \quad \overset{2}{\Gamma}_{00}^0 = \frac{1}{2} \partial_0^2 g_{00} \quad (18)$$

Similairement, nous pourrons décomposer les composantes (10) du tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  et dans ce cas, les termes seront d'ordre  $(v/c)^n/r^2$  et seront notés  $\overset{n}{R}_{\mu\nu}$ . Les expressions trouvées sont assez compliquées, mais elles se simplifient notablement dans les coordonnées dites harmoniques, pour lesquelles nous avons par définition

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0.$$

Il est en effet toujours possible d'imposer quatre conditions sur les coordonnées, car les équations rencontrées sont tensorielles, donc définies à une transformation de coordonnées près. Avec ce choix, les expressions de  $R_{\mu\nu}$  sont :

$$\begin{aligned} \overset{2}{R}_{00} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}, & \overset{3}{R}_{0i} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{0i}, & \overset{2}{R}_{ij} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 g_{ij} \\ \overset{4}{R}_{00} &= -\frac{1}{2} \dot{a}^2 g_{00} + \frac{1}{2} \partial_0^2 g_{00} - \frac{1}{2} g_{kl} \partial_k \partial_l g_{00} + \frac{1}{2} |\nabla g_{00}|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Comme pour les  $g_{\mu\nu}$  et les  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ , on remarquera que, pour une composante donnée, les puissances  $n$  du développement en  $(v/c)^n$  sont de même parité (voir les séries (17)).

Explicitant les termes de jauge de  $*R_{\mu\nu}$  donnée par (11.b), et utilisant (13) et (14) pour substituer  $\Lambda$  et  $\partial_0 \kappa_0$ , on peut écrire les équations du champ (12) sous la forme

$$R_{\mu\nu} + \kappa_0 V_{\mu\nu} + \kappa_0^2 W_{\mu\nu} = -S_{\mu\nu} \quad (20)$$

avec

$$S_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T_{\sigma}^{\sigma} \right) \quad \text{et} \quad W_{\mu\nu} = 3g_{\mu\nu}(g^{00}-1).$$

L'expression des  $V_{\mu\nu}$  est plus compliquée; on trouve

$$\begin{aligned} V_{00} &= g^{00} \partial_0 g_{00} + 2g^{0i} \partial_0 g_{oi} - g^{0i} \partial_i g_{00} + g_{00} U \\ V_{0i} &= g^{00} \partial_i g_{00} + g^{0j} \partial_i g_{0j} - g^{0j} \partial_j g_{0i} + g_{0i} U \\ V_{ij} &= g^{00} (\partial_i g_{j0} + \partial_j g_{0i} - \partial_0 g_{ij}) + g^{0k} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) + g_{ij} U \\ U &= g^{00} \left( \frac{1}{2} g^{00} \partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} g^{0i} \partial_i g_{00} - \frac{1}{2} g^{ij} \partial_0 g_{ij} + g^{i0} \partial_0 g_{i0} + g^{ik} \partial_k g_{0i} \right) \\ &\quad + g_{00} \left( g^{il} g^{0j} \partial_l g_{ij} + g^{0i} g^{0j} \partial_0 g_{ij} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{0j} \partial_j g_{ik} \right) \end{aligned}$$

Développons les  $S$ :

$$\begin{aligned} \overset{0}{S}_{00} &= \frac{4\pi G}{c^2} \overset{0}{T}{}^{00}, & \overset{2}{S}_{00} &= \frac{4\pi G}{c^2} (\overset{2}{T}{}^{00} + 2\overset{2}{g}_{00}\overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{ii}) \\ \overset{1}{S}_{0i} &= -\frac{8\pi G}{c^2} \overset{1}{T}{}^{0i} & \overset{0}{S}_{ij} &= \frac{4\pi G}{c^2} \overset{0}{S}_{ij} \overset{0}{T}{}^{00} \end{aligned}$$

où  $\overset{n}{T}{}^{\mu\nu}$  est de l'ordre de  $(M/r^3)(v/c)^n$  dans le tenseur d'énergie-impulsion, et  $v^2$  est lié à  $M/r$  selon (16), il en résulte que  $S$  est de l'ordre  $(v/c)^{n+2}/r^2$ .

Finalement, nous avons encore:

$$\begin{aligned} \overset{2}{V}_{0i} &= \partial_i g_{00}, & \overset{3}{V}_{00} &= \frac{3}{2} \partial_0 g_{00} + \frac{1}{2} \partial_0 g_{ii} - \partial_i g_{0i} \\ \overset{2}{W}_{00} &= -3g_{00} & \overset{2}{W}_{ij} &= 3\delta_{ij}g_{00} \end{aligned}$$

où  $\overset{n}{W}_{\mu\nu}$  est d'ordre  $(v/c)^n$  et  $\overset{n}{V}_{\mu\nu}$  d'ordre  $(v/c)^n/r$ .

## 7. ALGORITHME DE REGROUPEMENT DES TERMES

Pour que les équations (20) égalent bien des quantités de même ordre  $(v/c)^n/r^2$ , on va chercher à estimer  $\kappa_0$  comme étant d'ordre  $(v/c)^\alpha/r$ ; avec  $\kappa_0 = H/c$ , on pose

$$Hr/c = (v/c)^\alpha$$

ce qui impliquera  $\alpha > 1$ , car  $Hr$  étant la vitesse d'expansion du système astronomique considéré, pour que celui-ci reste lié, il faut qu'elle soit inférieure à  $v$ . Plus  $\alpha$  est grand, plus la correction apportée par les termes de jauge est faible, puisqu'elle n'interviendra que pour des puissances élevées de  $v/c$ . Ainsi, pour le système solaire, avec  $H/c = 2 \times 10^{-10} pc^{-1}$ ,  $v = 100 km/s$ ,  $r = 500 \times 10^6 km$ , on trouve  $\alpha = 4.16$ , ce qui conduit à des effets tout à fait négligeables. Par contre, pour les amas d'étoiles, ouverts aussi bien que globulaires, on obtient le plus souvent  $\alpha \leq 2$  alors qu'un amas de galaxies tel que Coma nous donne  $\alpha = 1.48$ .

Le fait que  $\alpha$  ne soit en général pas entier nous empêche de formuler l'approximation post-newtonienne en égalant directement les termes du même ordre dans les deux membres des équations de champ. Cependant, tenant compte de ce que les composantes temporelles (00), spatiales (ij) ou mixtes (0i) ne font intervenir que les puissances paires ou impaires de  $v/c$ , cela suggère l'algorithme suivant pour regrouper les termes de jauge avec les autres (Bouvier, 1982): on regroupera en une même équation tous les termes dont l'ordre est compris entre  $(v/c)^n/r^2$  et  $(v/c)^{n+2}/r^2$ , la deuxième de ces limites étant non incluse. Ceci s'accorde bien avec les conditions

$$(v/c)/r > \kappa_0 > (v/c)^2/r.$$

### 8. RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU CHAMP

Nous sommes donc amenés à résoudre les équations suivantes :

$$\begin{aligned} {}^2 R_{00} &= -{}^0 S_{00}, \quad {}^2 R_{ij} = -{}^2 S_{ij}, \quad {}^3 R_{0i} + \kappa_0 {}^2 V_{0i} = -{}^2 S_{0i} \\ {}^4 R_{00} + \kappa_0 {}^3 V_{00} + \kappa_0^2 {}^2 W_{00} &= -{}^2 S_{00}. \end{aligned}$$

Ce sont toutes des *équations du type de Poisson*, en vertu de la forme (19) des composantes  $R_{\mu\nu}$  et ces équations s'intègrent immédiatement à condition d'avoir choisi la jauge  $\kappa_0$  déterminée par les relations (13) et (14), car alors tous les termes tendent vers zéro lorsque  $\|\hat{x}\| \rightarrow \infty$ ; Explicitement, nous avons

$$\frac{1}{2} \nabla^2 {}^2 g_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} {}^0 T^{00} \quad (21)_{00}$$

$$\frac{1}{2} \nabla^2 {}^2 g_{ij} = \frac{4\pi G}{c^2} \delta_{ij} {}^0 T^{00} \quad (21)_{ij}$$

$$-\frac{1}{2} \nabla^2 {}^3 g_{0i} = \frac{8\pi G}{c^2} {}^1 T^{0i} - \kappa_0 \partial_i {}^2 g_{00} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \nabla^2 {}^4 g_{00} + \frac{1}{2} \delta_0^2 {}^2 g_{00} - \frac{1}{2} {}^2 g_{ij} (\partial_i \partial_j {}^2 g_{00}) + \frac{1}{2} |\nabla {}^2 g_{00}|^2 &= -\frac{4\pi G}{c^2} ({}^2 T^{00} + 2 {}^2 g_{00} {}^0 T^{00} + {}^2 T^{ii}) \\ -\kappa_0 \frac{3}{2} \left( \partial_0 {}^2 g_{00} + \frac{1}{2} \partial_0 {}^2 g_{ii} - \partial_i {}^3 g_{0i} \right) + 3 \kappa_0^2 {}^2 g_{00} & \end{aligned} \quad (23)$$

(21)<sub>00</sub> est l'équation de Poisson proprement dite, pour le potentiel newtonien, car  ${}^0 T^{00}$  est bien la densité de masse  $\rho$  du système. D'autre part (21)<sub>ij</sub> se rattache directement à (21)<sub>00</sub> et en conséquence, en accord avec (15),

$${}^2 g_{00} = \frac{2\Phi}{c^2} \quad {}^2 g_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\Phi}{c^2}.$$

Afin de résoudre (22), nous introduisons un potentiel vecteur défini par :

$$\xi_i = -\frac{\kappa_0}{\pi} \int \frac{\partial_i \Phi}{|\hat{x} - \hat{x}'|} d^3 x' + 4G \int \frac{{}^2 T^{0i}}{|\hat{x} - \hat{x}'|} d^3 x'$$

et comme la solution d'une équation de type  $\nabla^2 f = g$  est

$$f(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{g(\hat{x}')}{|\hat{x} - \hat{x}'|} d^3 x',$$

il vient simplement  $g_{0i}^3 = \frac{\xi_i}{c^2}$ . Pour (23), il faut utiliser l'identité vectorielle (Weinberg, 1972)

$$2 |\nabla\Phi|^2 + 2\Phi\nabla^2\Phi = \nabla^2\Phi^2$$

et remarquer qu'en vertu de (21)<sub>00</sub>, on a :

$$-\frac{4\pi G}{c^2} \left( \frac{4\Phi}{c^2} T^{00} \right) = -\frac{1}{c^4} 4\phi \nabla^2\Phi$$

permettant d'écrire (23) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}^4 &= \frac{1}{c^4} \nabla^2\Phi^2 + \frac{1}{c^2} \partial_0^2 \Phi + \frac{4\pi G}{c^2} (T^{00} + T^{ii}) \\ &\quad - \kappa_0 \partial_i \xi_i + \frac{1}{c^2} 6\kappa_0 \partial_0 \Phi - \frac{1}{c^2} 6\kappa_0^2 \Phi. \end{aligned}$$

Posant alors  $g_{00}^4 = \frac{2}{c^2} \left( \psi + \frac{\Phi^2}{c^2} \right)$  l'on en déduit

$$\psi(\tilde{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3x'}{|\tilde{x} - \tilde{x}'|} [\partial_0 \Phi + 4\pi G (T^{00} + T^{ii}) - \kappa_0 \partial_j \xi_j + 6\partial_0 (\kappa_0 \Phi)].$$

En conclusion, un schéma d'approximations post-newtoniennes apparaît *compatible* avec les équations covariantes d'échelle pour le champ de gravitation, si l'on choisit  $\kappa_0 = 1/(ct)$ .

## 9. COHÉRENCE AVEC L'ÉQUATION DE MOUVEMENT D'UN ÉLÉMENT FLUIDE

En R.G., on sait que le tenseur d'énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  obéit aux équations de continuité  $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ . En unités quelconques,  $T^{\mu\nu}$  devra vérifier  $T_{*\mu}^{\mu\nu} = 0$ , où  $*\mu$  est la dérivée co-covariante (ou covariante d'échelle) selon  $x^\mu$ . Explicitement,

$$T_{*\mu}^{\mu\nu} = *\partial_\mu T^{\mu\nu} + *\Gamma_{\alpha\mu}^\mu T^{\alpha\nu} + *\Gamma_{\beta\mu}^\nu T^{\mu\beta}$$

et puisque  $T_{*\mu}^{\mu\nu}$  est un co-vecteur nul en u.g. ( $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ ), il l'est aussi dans tout système d'unités.

Si nous désignons par  $m$  la puissance de la masse  $M$ , c'est-à-dire que  $M' = \beta^m M$ , il est aisément de voir que  $\pi(T^{\mu\nu}) = m - 5$  et les relations de continuité s'écrivent alors :

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\beta\mu}^\nu T^{\mu\beta} + \kappa_0 g^{0\nu} g_{\beta\mu} T^{\mu\beta} - (m+1)\kappa_0 T^{0\nu} = 0.$$

Cherchons l'ordre  $M(v/c)/r^4$  pour  $\nu = 0$ , en regroupant les termes comme précédemment :

$$\partial_0^0 T^{00} + \partial_i^1 T^{0i} = m\kappa_0^0 T^{00} \tag{24}$$

De même l'ordre  $M(v/c)^2/r^4$  pour  $v = i$  nous donne, avec  $\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \partial_i g_{00}$  et  $g_{00}^2 = \frac{2\Phi}{c^2}$ ;

$$\partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ij} + \frac{1}{c^2} T^{00} \partial_i \Phi = (m+1) \kappa_0 T^{0i} \quad (25)$$

Envisageons le système cosmique comme schématiquement décrit par une matière fluide sans pression; dans ces conditions :

$$T^{00} = \rho \quad T^{0i} = \rho v^i/c \quad T^{ij} = \rho v^i v^j/c^2$$

et (24) devient

$$\partial_0 \rho + \partial_i (\rho v^i/c) = m \kappa_0 \rho \quad (26)$$

tandis que (25) se développe en

$$v^i [\partial_0 \rho + \partial_j (\rho v^j/c)] + \rho \left[ \partial_0 v^i + v^j \partial_j (v^i/c) + \frac{1}{c} \partial_i \Phi \right] = (m+1) \kappa_0 \rho v^i.$$

Utilisant (26) plus le fait que  $\partial_t = c \partial_0$  et que  $\frac{d}{dt} = \partial_t + v^j \partial_j$ , cette dernière équation s'écrit

$$\frac{dv^i}{dt} + \partial_i \Phi - \kappa_0 c v^i = 0$$

ce qui n'est autre que l'équation du mouvement covariante d'échelle pour une particule ou élément de fluide incohérent, telle qu'on l'obtient (Maeder et Bouvier, 1979) dans l'approximation newtonienne de l'équation (8), et avec un champ stationnaire.

En conclusion, l'algorithme utilisé ici pour insérer  $\kappa_0$  dans le schéma d'approximations post-newtonienne est cohérent avec l'ensemble de la théorie.

## RÉFÉRENCES

- BOUVIER, P. (1982). *Astroph. Space Sci.*, **87**, 105.  
 BOUVIER, P. et A. MAEDER (1978). *Astroph. Space Sci.*, **54**, 497.  
 CANUTO, V., P. J. ADAMS, H. S. HSIEH et G. TSIANG (1977). *Phys. Rev. D* **16**, 1643.  
 DIRAC, P. A. M. (1937). *Nature*, 323.  
 — (1973). *Proc. Roy. Soc. London A* **333**, 403.  
 EDDINGTON, A. S. (1923). *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge U.P. (réimprimé par Chelsea Pub. Co., N.Y.).  
 MAEDER, A. (1978). *Astron. Astroph.* **65**, 337.  
 MAEDER, A. et P. BOUVIER (1979). *Astron. Astroph.* **73**, 82.  
 WEINBERG, S. (1972). *Gravitation and Cosmology*, J. Wiley, N.Y.

