

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 32 (1979)  
**Heft:** 1-3

**Artikel:** Description de systèmes non-conservatifs et non-linéaires  
**Autor:** Enz, Charles P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-739893>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DESCRIPTION DE SYSTÈMES NON-CONSERVATIFS ET NON-LINÉAIRES

Charles P. ENZ <sup>1</sup>

---

## PROLOGUE

La théorie quantique a dominé la physique pendant cinquante ans: L'Hamiltonien symbolise la mécanique conservative et l'espace de Hilbert les mathématiques linéaires. Mais la réalité physique n'est ni conservative ni linéaire. Aujourd'hui, on passe sur l'ordinateur des modèles dynamiques évoquant sur l'écran des métamorphoses Escheriennes: Nous sommes entrés dans l'ère des structures dissipatives où l'interdisciplinarité est écrite en majuscule. Je vais tâcher de retracer en pointillé le chemin parcouru, et je le fais pour Jean Rossel qui a toujours eu dans son enseignement le souci de garder une vue d'ensemble de la physique.

« Harmoniser les objets dans le Temps et dans l'Espace, sans prétendre fixer les conditions qui peuvent régir leur être profond. Etablir dans la Nature une chaîne de succession expérimentale, et non une liaison de causalité 'ontologique'. Voir, autrement dit, — et non expliquer —, tel est, qu'on ne l'oublie pas, le seul but de la présente étude.»

Pierre TEILHARD DE CHARDIN  
dans *Le phénomène humain*

## I. CINQUANTE ANS DE MÉCANIQUE ONDULATOIRE

Chaque étudiant en physique apprend la relation entre la mécanique quantique et la mécanique classique dans la forme Hamiltonienne; l'Hamiltonien  $H(p, q)$  des coordonnées  $q$  et impulsions  $p$  canoniques définit le système. Mais les systèmes qui sont descriptibles dans la forme Hamiltonienne sont soumis à une grave restric-

---

<sup>1</sup> Département de Physique Théorique, Université de Genève, CH-1211 Genève 4.

tion: Ils sont conservatifs, c'est-à-dire non-dissipatifs ce qui est équivalent au fait que ces systèmes possèdent l'invariance sous le renversement du temps,  $t \rightarrow -t$ . Il en résulte la conservation de l'énergie,  $H(p, q) = E = \text{const.}$  qui est le point de départ pour la quantification dans la forme de la mécanique ondulatoire: On écrit selon de Broglie et Schrödinger

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}; \quad E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ , et on laisse agir  $H$  et  $E$  en tant qu'opérateurs sur une fonction d'onde complexe  $\psi(q, t)$ ,

$$i\hbar \dot{\psi} = H\psi \quad (2)$$

En mécanique ondulatoire, le renversement du temps  $t \rightarrow -t$  est représenté par une conjugaison complexe [1]. Cette opération laisse en effet invariante l'équation (2), pourvu que  $H$  soit un opérateur réel. D'autre part, on a le principe de superposition qui s'exprime par la propriété de  $\psi$  d'être un vecteur dans un espace de Hilbert linéaire. Cette linéarité est si importante pour la théorie quantique, au moins dans sa forme originale valable pour un nombre constant de particules, que les étudiants en physique ont souvent l'illusion que toutes les mathématiques essentielles pour eux sont linéaires.

Evidemment, la réalité physique n'est ni conservative ni linéaire. Des interactions du système font que ses états quantiques ont une durée de vie finie et, par conséquent, violent le renversement du temps. Et les phénomènes de production de paires et des réactions entre particules sont essentiellement non-linéaires.

Historiquement, l'interaction électro-magnétique était d'une importance particulière pour le développement de la théorie quantique, car c'est sur elle que se base toute la spectroscopie atomique des années 20. Ce développement était possible grâce au fait que la constante de couplage électro-magnétique, la constante de structure fine  $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137$ , est si petite. Si  $\alpha$  était de l'ordre de grandeur 1, alors les atomes seraient des systèmes quantiques ni conservatifs ni linéaires, dans le sens de l'invariance sous renversement du temps et du principe de superposition. En effet, l'énergie Coulombienne atomique  $e^2/a_B = \alpha^2 mc^2$ , où  $a_B$  est le rayon de Bohr, serait alors de l'ordre de l'énergie au repos de l'électron, de sorte qu'il y aurait instabilité envers création de paires. Et la largeur de raie naturelle serait de l'ordre des écarts des niveaux.

La généralisation de la mécanique ondulatoire, en une théorie non-linéaire, s'effectua très vite, à savoir dans la forme de la théorie des champs quantifiés. Il est aisé de généraliser l'équation de Schrödinger (2) en l'équation de champs

$$\dot{\psi} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \psi^*} = -\frac{i}{\hbar} \left\{ H + \int d^3x' V_2(\vec{x} - \vec{x}') |\psi(\vec{x}')|^2 \right\} \psi(\vec{x}) \quad (3)$$

où

$$\mathcal{H} = \int d^3x \psi^* H \psi + \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3x' |\psi(\vec{x})|^2 V_2(\vec{x} - \vec{x}') |\psi(\vec{x}')|^2 \quad (4)$$

est l'Hamiltonien de la théorie des champs tandis que

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V_1(\vec{x}) \quad (5)$$

est l'Hamiltonien pour une particule de masse  $m$  soumis au potentiel  $V_1$  de l'équation (2). Le second terme dans l'équation (4) donne lieu, après quantification du champ  $\psi$ , à la production de paires. Un exemple relativiste d'une importance historique (voir la figure 1) de l'équation (3) est la « Weltformel » de Heisenberg [2] dans laquelle  $\psi$  est un spineur de Dirac,  $|\psi|^2 = (\psi^* \beta \psi)$ ,  $H = c \vec{\alpha} \cdot \vec{p}$  et  $V_2 = \hbar c l^2 \delta(\vec{x}) \cdot \vec{\alpha}$  et  $\beta$  sont les matrices de Dirac et  $l$  est une constante de couplage à dimension « longueur » (fig. 1).

# DIE WELT

UNABHÄNGIGE TAGESZEITUNG FÜR DEUTSCHLAND

Ausgabe H\*

Hamburg, Mittwoch, 5. März 1958

## Die Formel

**H. Z.** — Am 25. April wird Werner Heisenberg die Formel erläutern, die eine neue Naturkonstante von absoluter Größe in das physikalische Weltbild einführen soll. „Daß ich erkenne, was die Welt im Innersten zusammenhält“, wie es im Faustmonolog heißt.

Die WELT ist in der Lage, diese Formel im Wortlaut abzudrucken. Da sie möglicherweise von bestimmenden Einfluß auf unser Weltbild und vielleicht auch auf unser Weltchicksal sein kann, gebührt ihr die erste Seite. Eine Tageszeitung ist sich das vor der Geschichte schuldig, die später nachprüfen wird, ob und wie man seinerzeit das Neue verzeichnet hat.

Denn bisher ist jede Zeit an den großen bewegenden Ereignissen vorbeigegangen. Sie haben sich unbemerkt und in aller Stille vollzogen. Erst lange danach wurde offenbar, was eigentlich seinerzeit

geschehen ist. Das war bei Kopernikus, Kepler und Galilei nicht anders, wie bei Planck, Einstein und vielleicht Heisenberg.

Wir bringen also diese Formel. Aber sie bleibt uns genauso unverständlich wie dem Leser. Heisenberg hat fünf Jahre an ihr gearbeitet. Es heißt, die Wissenschaft würde ebenso lange dazu brauchen, um sie nachzuprüfen. Obwohl das Neue und möglicherweise Bewegende und Umstürzende sichtbar vor aller Augen liegt, befinden wir uns in der gleichen Lage wie eh und je: wir wissen es zwar, aber es bleibt uns verborgen.

Und wie eh und je manifestiert es sich zunächst im kleinsten Kreise derjenigen, die damit etwas anzufangen wissen, bis es lange danach in veränderter Gestalt auch der breiten Masse sichtbar wird. Hoffentlich übt es dann nicht grimmige Gewalt, wie es immer zu geschehen pflegt, wenn es in unreine Hände fällt.

## Heisenberg erläutert seine Formel

Vortrag des Nobelpreisträgers am 25. April in Berlin

Von unserem Korrespondenten

e. Göttingen, 4. März

Der Göttinger Nobelpreisträger Professor Heisenberg wird seine neue mathematisch formulierte Theorie zur Erklärung des modernen physikalischen Weltbildes am 25. April in Berlin ausführlich und allgemein verständlich erläutern.

Die von Heisenberg aufgestellte Formel lautet:

$$\gamma_r \frac{d}{dx} \gamma \psi + \ell^2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi (\psi^* \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = 0$$

Zunächst war Heisenberg von einer anderen Formel ausgegangen, die folgendermaßen lautete:

$$\gamma_r \frac{d}{dx} \gamma \psi + \ell^2 \psi (\psi^* \psi) = 0$$

Professor Heisenberg hält seinen Vortrag aus Anlaß der mehrtägigen Feiern zum hundertsten Geburtstag von Max Planck, die von der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, dem Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften in der Bundes-

republik und der Physikalischen Gesellschaft der Zone gemeinsam veranstaltet werden.

Der zweite Teil der Formel — die beiden deutschen  $d$ , das  $x$  und das Gamma — bedeutet, daß die Gleichung partiell differenziert wird.

Die endgültige Formel Heisenbergs wird als allgemeine Feldgleichung bezeichnet, die Einstein vergeblich zu finden suchte. Durch die Gleichung soll der Zusammenhang aller physikalischen Felder — elektrisches, magnetisches und Gravitationsfeld — bewiesen werden. Heisenberg sagte, daß die ganze Physik durch drei universelle Konstanten beschreibbar sei:  $c$  = die Lichtgeschwindigkeit,  $\hbar$  = das Plancksche Wirkungsquantum und  $l \approx$  von  $10^{-13}$ , eine Größe, die der Göttinger Nobelpreisträger selbst einführt.

Bestätigt sich die Formel, so ist der Zusammenhang der einzelnen physikalischen Gebiete gegeben, da damit Gravitation, Elementarteilchen und Kräfte geklärt werden können.

Heisenberg begann seine Arbeit vor fünf Jahren unter Mitarbeit von mehreren in- und ausländischen Wissenschaftlern, darunter Professor Pauli (Zürich) und Dr. Schieder vom Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen.

FIG. 1. — Extrait de la première page du quotidien allemand *Die Welt* (Hambourg), du mercredi 5 mars 1958.



Avec des potentiels à une et deux particules  $V_1$  et  $V_2$ , la théorie de champ (3), (4) est bien non-linéaire mais elle est toujours conservative (mis à part des phénomènes d'enclenchement où  $V_1$  dépend asymétriquement du temps). Puisque le renversement du temps est représenté par la conjugaison complexe, on peut imposer la dissipation par le biais de potentiels complexes  $V_1$  et  $V_2$ . Des potentiels complexes à une particule  $V_1$  jouent depuis longtemps un rôle en physique nucléaire dans le cadre de l'équation de Schrödinger (2), (5) originale et sous la forme de potentiels optiques [3] ou d'amortissement nucléaire [4]. Mais ceci mène à des inconsistances telles que des incertitudes plus petites que celles données par le principe de Heisenberg [5]. Une formulation conséquente d'une mécanique ondulatoire dissipative (et non-linéaire en même temps) sera discutée au paragraphe 5. Mais préalablement, nous voulons examiner comment la non-conservativité et la non-linéarité interviennent en dynamique classique. Commençons avec la non-linéarité.

## 2. STATIQUE DÉTERMINISTE NON-LINÉAIRE

En statique, le temps n'intervient pas et, par conséquent, il n'y a pas question de dissipation. Posons  $\dot{\psi} = 0$  dans l'équation (3), admettons un nombre quelconque  $n$  de composantes  $\psi_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) au lieu de 2, posons  $V_1(\vec{x}) = \hbar^2 r / 2m = \text{const.}$  et  $V_2(\vec{x}) = (\hbar^2 u / 2m) \delta(\vec{x})$  et écrivons  $F_{GL} = (m/\hbar^2) \mathcal{H}$ , alors  $F_{GL}$  est l'énergie libre de Ginzburg et Landau [6] et  $\psi$  est le paramètre d'ordre et l'équation (3) devient la condition d'équilibre

$$0 = \delta F_{GL} / \delta \psi_\mu = -\nabla^2 \psi_\mu + r \psi_\mu + u |\psi|^2 \psi_\mu - \phi_\mu \quad (6)$$

Ici, nous avons encore ajouté un champ extérieur  $\phi$  et écrit  $|\psi|^2 = \sum \psi_\mu^2$ .

Considérons tout d'abord le cas homogène dans l'espace, sans terme de diffusion,  $\nabla^2 \psi_\mu = 0$ . Si l'on pose en plus  $r = a(T - T_c)$  où  $T$  est la température, alors l'équation (6) décrit une transition de phase à  $T = T_c$ . Un exemple avec  $n = 3$  est un ferroaimant décrit par l'aimantation  $\vec{M} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ , le champ magnétique  $\vec{H} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  et l'aimantation de saturation  $M_0 = \sqrt{aT_c/u}$ . Alors, (6) devient l'équation d'état

$$\vec{H} = u \{ \vec{M}^2 - M_0^2 (1 - T/T_c) \} \vec{M} \quad (7)$$

qui est représentée dans la figure 2, ensemble avec l'équation d'état de van der Waals

$$(p + a\rho^2) \left( \frac{1}{\rho} - b \right) = RT \quad (8)$$

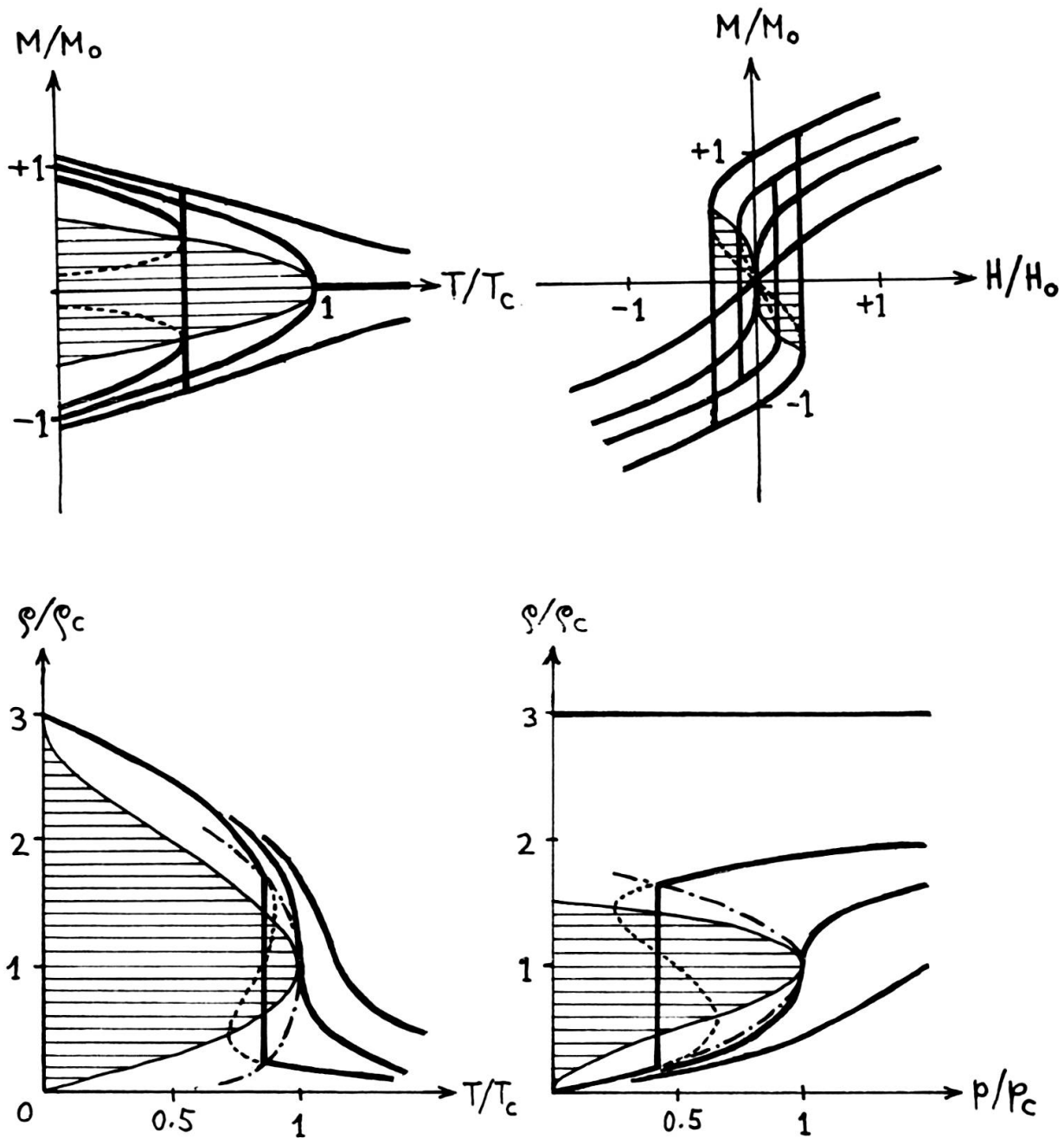


FIG. 2. — Diagrammes de phase pour un ferroaimant et pour le gaz de van der Waals selon les équations d'état (7) et (8).

Ici,  $T$  et  $\vec{H}$ , respectivement  $T$  et la pression  $p$ , sont les « paramètres de contrôle » et  $\vec{M}$ , respectivement la densité  $\rho$  du gaz, sont les « variables de comportement ». Les surfaces hachurées dans la figure 2 sont des domaines instables du système homogène; ce sont des régions de coexistence des deux phases (pour le gaz de van der Waals, la limite de coexistence est donnée par la ligne en traits et points; pour le ferroaimant, elle coïncide avec la limite de stabilité). Comme fonction des

paramètres de contrôle, l'équation d'état décrit la « surface de comportement » ou l'« attracteur ». Cette dernière terminologie exprime le fait que lors d'une petite perturbation, le système est « attiré » par l'équilibre qui est décrit par l'équation d'état.

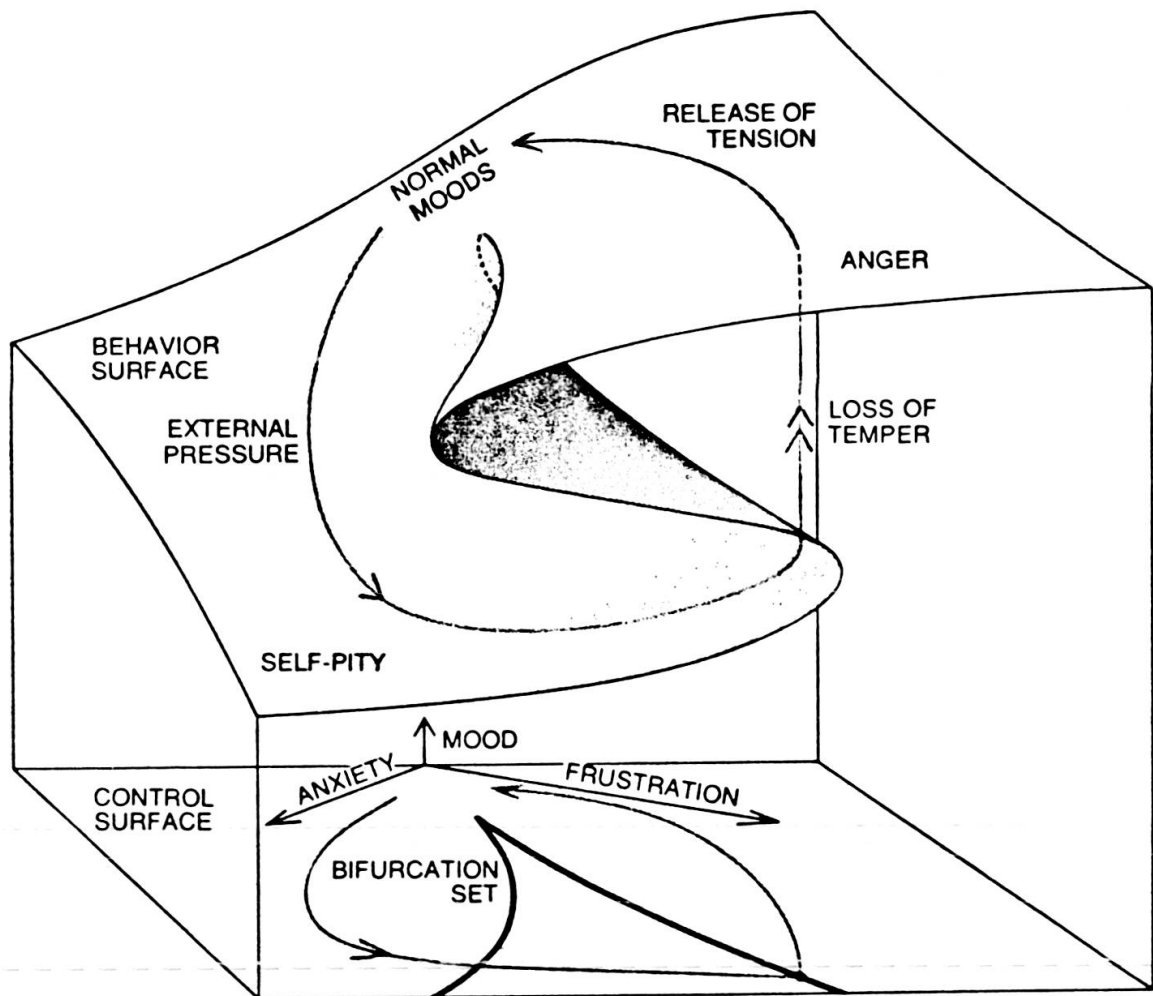


FIG. 3. — La surface de comportement pitié-colère en fonction des paramètres de contrôle anxiété et frustration (reprod. de la réf. 8, "Catastrophe Theory" par E. C. Zeeman. Copyright © 1976 by Scientific American, Inc. Tous droits réservés).

La terminologie introduite ici correspond à la « théorie des catastrophes » de René Thom qui donne une classification des singularités mathématiques possibles (« catastrophes ») [7]. Dans le cas des équations (7) et (8), cette singularité correspond au point critique. Tandis que la classification de Thom est un accomplissement mathématique brillant, Thom et beaucoup de ses disciples enthousiastes ont plutôt nuit à la réputation de la théorie des catastrophes par des excès d'interprétations fantaisistes. Une interprétation psychologique d'une catastrophe du type d'un point critique est représentée dans la figure 3 [8]. La figure 4 donne la classification et la représentation figurative des plus simples catastrophes.

CATASTROPHE	CONTROL DIMENSIONS	BEHAVIOR DIMENSIONS	FUNCTION	FIRST DERIVATIVE
CUSPOIDS	FOLD	1	$\frac{1}{3}x^3 - ax$	$x^2 - a$
	CUSP	2	$\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$	$x^3 - a - bx$
	SWALLOWTAIL	3	$\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$	$x^4 - a - bx - cx^2$
	BUTTERFLY	4	$\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$	$x^5 - a - bx - cx^2 - dx^3$
UMBILICS	HYPERBOLIC	3	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$	$3x^2 + a + cy$ $3y^2 + b + cx$
	ELLIPTIC	3	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$	$3x^2 - y^2 + a + 2cx$ $-2xy + b + 2cy$
	PARABOLIC	4	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$	$2xy + a + 2cx$ $x^2 + 4y^3 + b + 2dy$

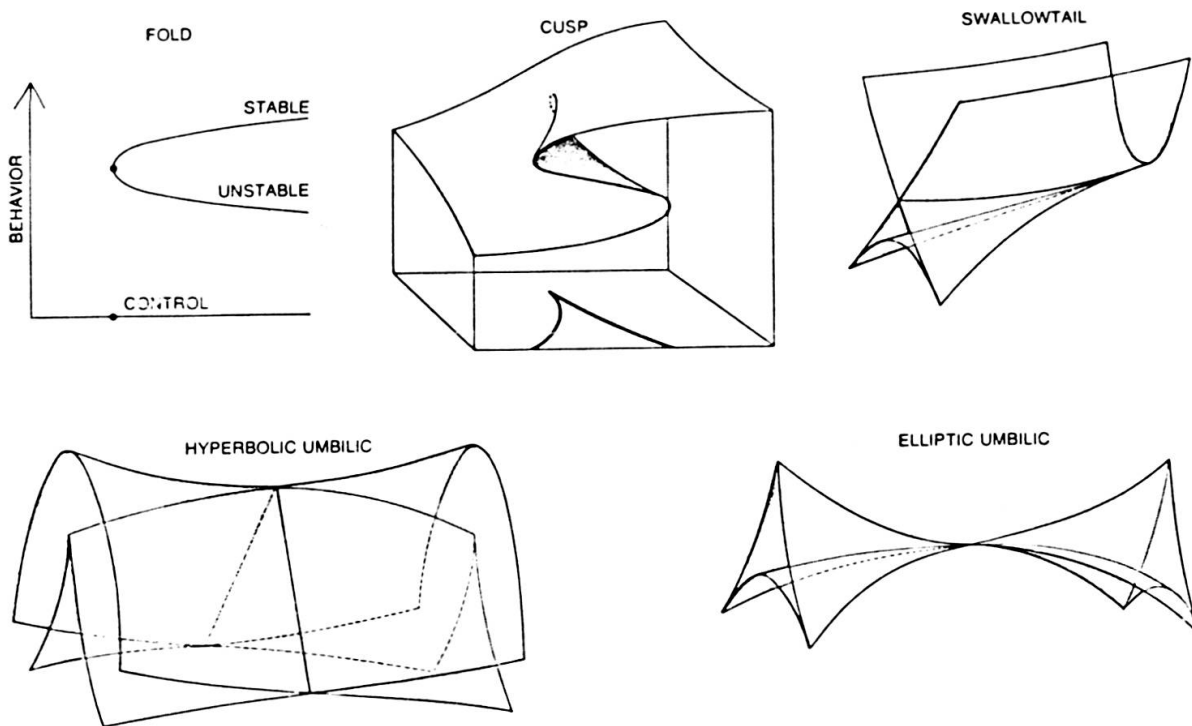


FIG. 4. — Les sept catastrophes élémentaires et leurs images pour un nombre de paramètres de contrôle (a, b, c, d) jusqu'à 4. Les fonctions en dernière colonne s'annulent sur la surface de comportement. (reprod. de la réf. 8, "Catastrophe Theory" par E. C. Zeeman. Copyright © 1976 by Scientific American, Inc. Tous droits réservés).

Admettons maintenant dans l'équation (6) aussi le terme de diffusion  $\nabla^2 \psi_\mu$ , alors cela correspond à un système inhomogène dans l'espace qui est représenté, dans le cas magnétique, par

$$\vec{H} = u \{ \vec{M}^2 - M_0^2 (1 - T/T_c) - \nabla^2 \} \vec{M} \quad (9)$$

au lieu de (7). Une solution de l'équation (9) est

$$\vec{M} = \vec{M}_0 (1 - T/T_c) \tanh(x/\sqrt{2} \xi_{GL}) \quad (10)$$

où  $\vec{M}_0 = (M_0, 0, 0)$  et  $\xi_{GL} = |\vec{r}|^{-1/2}$  est la longueur de cohérence de Ginzburg-Landau. L'équation (10) décrit une « paroi de Bloch » de largeur  $\xi_{GL}$  qui sépare deux domaines d'aimantation opposée.

Une nouvelle classe de phénomènes résulte, par exemple, si l'équation (6) décrit au lieu d'un ferroaimant un supraconducteur de deuxième espèce où  $n = 2$  et  $|\psi|$  est le gap d'énergie. Puisqu'il s'agit d'un système chargé, il y a couplage à un champ électro-magnétique. Ce couplage est décrit par la substitution  $\vec{r} \rightarrow \vec{r} - (ie/\hbar c) \vec{A}(\vec{x})$  dans le terme de diffusion où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur. Dans ce cas, l'équation (6), avec  $\phi = 0$ , donne lieu, dans un champ magnétique  $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$  d'intensité appropriée ( $H_{c1} < H < H_{c2}$ ), à une structure périodique dans l'espace. C'est le célèbre réseau de flux prédit par Abrikosov [9]. C'est un exemple d'un système dont la structure non-linéaire contient le phénomène d'auto-organisation. Une vision artistique d'auto-organisation est représentée dans la figure 5 qui est une gravure de l'artiste hollandais M. C. Escher [10].

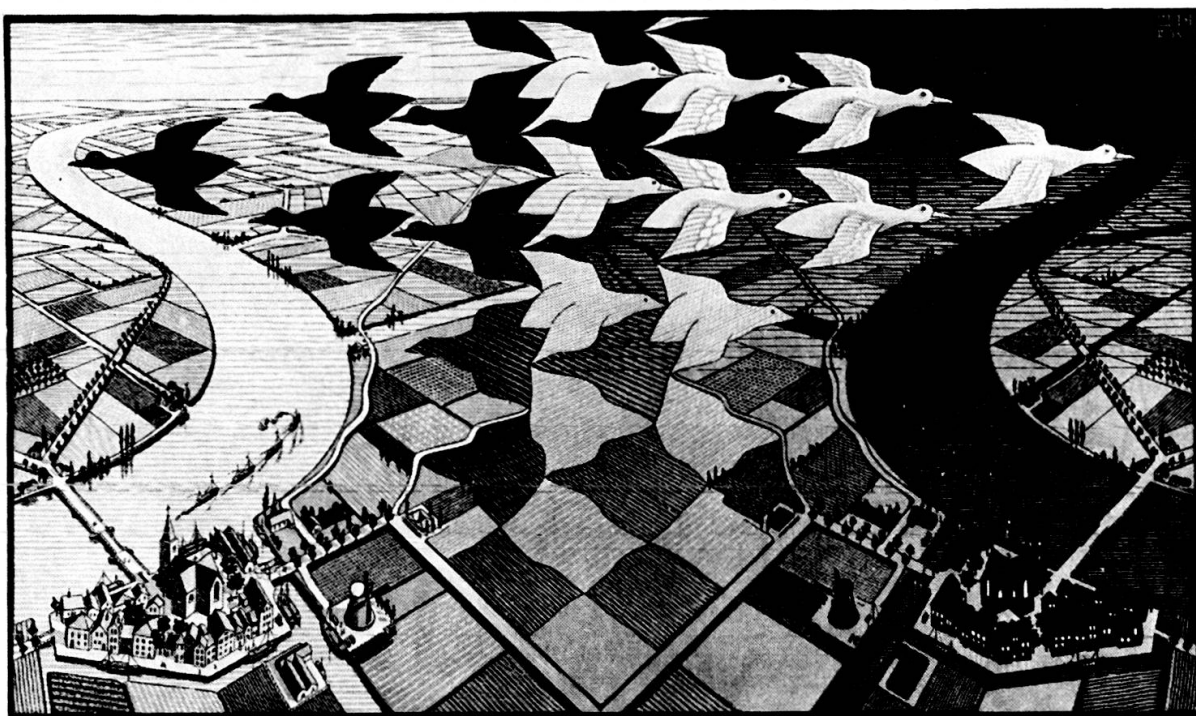


FIG. 5. — « Dag en nacht », gravure de M. C. Escher de 1938 (reprod. de la réf. 10).

### 3. DYNAMIQUE DÉTERMINISTE NON-LINÉAIRE

Dans le cas déterministe, la dissipation s'incorpore très facilement dans l'équation de champ (3) en y remplaçant la constante imaginaire  $i/\hbar$  par un nombre complexe  $\Gamma = i\Gamma^0 + \Gamma^1$ . Ceci exprime en effet une violation du renversement du temps

qui est toujours représenté par conjugaison complexe. Une violation maximale est obtenue en posant  $\Gamma^0 = 0$ . Ceci est encore le cas si nous effectuons, comme dans le paragraphe 2, une généralisation à un paramètre d'ordre à  $n$  composantes. Avec le choix particulier d'avant pour les potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , avec un champ extérieur  $\phi$  et en posant  $\Gamma^1 = \lambda \nabla^{2e}$ , on est amené à l'équation « time-dependent Ginzburg-Landau » (TDGL)

$$\dot{\psi}_\mu = -\lambda \nabla^{2e} \delta F_{GL} / \delta \psi_\mu = -\lambda \nabla^{2e} \{ -\nabla^2 \psi_\mu + r \psi_\mu + u |\psi|^2 \psi_\mu - \phi_\mu \} \quad (11)$$

qui est la généralisation dynamique de l'équation (6) et qui décrit un comportement purement dissipatif. Pour  $\lambda > 0$  et  $e = 0$ , nous avons une équation de diffusion non-linéaire pour un paramètre d'ordre non-conservé ( $d \int d^3x \psi_\mu / dt \neq 0$ ) tandis que  $e = 1$  correspond à un paramètre d'ordre conservé. L'équation (11) a joué un rôle important ces dernières années dans la description de phénomènes critiques dynamiques au voisinage de transitions de phase du second ordre [11].

Une autre généralisation dynamique de l'équation (6) qui a un caractère purement conservatif est, pour  $\phi = 0$ , l'équation de soliton

$$\ddot{\psi}_\mu = -c^2 \{ -\nabla^2 \psi_\mu + r \psi_\mu + u |\psi|^2 \psi_\mu \} \quad (12)$$

qui est une équation d'onde non-linéaire. Une solution de l'équation (12) est le soliton planaire

$$\psi_\mu = \delta_{\mu,0} \sqrt{-\frac{r}{u}} \tanh \frac{x \pm vt}{\sqrt{2} \xi_{GL} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (13)$$

Dans le cas ferromagnétique, l'équation (13) décrit une paroi de Bloch se propageant à vitesse  $\pm v$  [12] et se réduit pour  $v = 0$  et  $n = 3$  de nouveau à l'équation (10). La largeur de la paroi de Bloch subit ici une contraction de Lorentz où la vitesse limite  $c$  est la vitesse des excitations collectives.

Une source quasiment inépuisable d'exemples de dynamique non-linéaire est fournie par les équations de réaction. L'exemple le plus ancien et probablement le plus célèbre est le modèle de Lotka-Volterra [13] qui décrit la dynamique de population entre animaux prédateurs et proies. Soient  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  les populations des proies et prédateurs au temps  $t$ . Dans l'unité de temps  $n_1$  croît de  $a_1 n_1$  à cause du taux de naissance  $a_1 > 0$  et décroît en proportion des deux populations par suite de la consommation des proies de  $a_1 n_1 n_2$ , dans une normalisation appropriée. La population des prédateurs  $n_2$  décroît de  $a_2 n_2$  à cause du taux de mort naturelle  $a_2 > 0$  et croît de  $a_2 n_1 n_2$ , dans une normalisation appropriée, par suite de leur bien-être au dépend des proies. Ceci mène au système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= a_1 n_1 (1 - n_2) \equiv f_1 \\ \dot{n}_2 &= -a_2 n_2 (1 - n_1) \equiv -f_2 \end{aligned} \quad (14)$$



Les orbites  $\vec{n}(t) = (n_1, n_2)$  sont stables et périodiques et encadrent le point stable  $(1, 1)$ . Ceci montre que le système est conservatif. En effet

$$H(\vec{n}) \equiv \sum_{i=1,2} \frac{1}{a_i} (n_i - \ln n_i) \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \quad (15)$$

est une quantité conservée [14, 15]. Evidemment, l'invariance sous renversement du temps est alors aussi satisfaite mais c'est moins évident. La représentation artistique par Escher [10] d'un système prédateur-proie qui anticipe même la périodicité est montrée dans la figure 6.



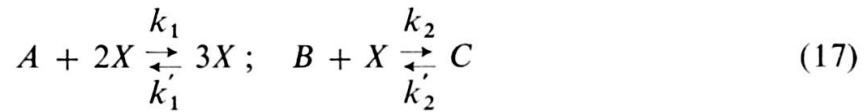
FIG. 6. — « Predestinatie », litho de M. C. Escher de 1951  
(reprod. de la réf. 10).

$H$  dans l'équation (15) doit naturellement faire allusion à un Hamiltonien. Mais les équations (14) n'ont pas la forme canonique puisque  $\delta f_1/\delta n_1 \neq \delta f_2/\delta n_2$ . Elles se laissent pourtant écrire dans une forme pseudo-canonique à l'aide d'une « matrice dynamique »  $D^0$  [16] dépendant de  $\vec{n}$ ,

$$\dot{\vec{n}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{n}} D^0; \quad D^0 = \begin{bmatrix} 0 & +D \\ -D & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

où  $D = a_1 a_2 n_1 n_2$  ( $D^{-1}$  joue le rôle d'un dénominateur intégrand). Par la transformation de variables  $n_i = \exp(a_i x_i)$ , on peut alors même forcer une forme canonique [17] qui est cependant très artificielle. On peut également introduire dans l'équation (14) des termes de diffusion  $D_i \nabla^2 n_i$  et analyser le système inhomogène. Il se montre alors que le seul état stationnaire stable est de la forme  $\vec{n} = (\varepsilon \sin q_0 x, 0)$  où  $q_0 = \sqrt{a_1/D_1}$  et  $\varepsilon \ll 1$  et qui correspond à l'extinction. Comme nous allons encore voir, une telle distribution périodique dans l'espace est caractéristique pour une excitation du type mode mou pour lequel il n'y a pas d'oscillation temporelle.

Des exemples très à la mode sont les chaînes de réactions catalytiques [14]. Un exemple avec un seul catalyseur  $X$  est la chaîne



La substance  $X$  est un catalyseur puisqu'elle disparaît de la réaction résultante  $A + B \rightleftharpoons C$ . Désignons par  $a, b, c, n$  les concentrations (nombres de mûles) de  $A, B, C, X$ , alors les taux de réaction des deux équations (17) sont

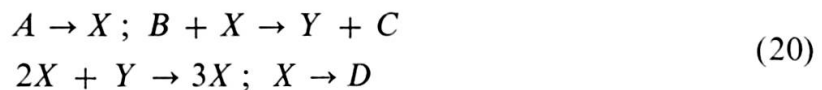
$$\begin{aligned} r_1 &= k_1 a n^2 - k'_1 n^3 \\ r_2 &= -k_2 b n + k'_2 c \end{aligned} \quad (18)$$

où  $k_i$  et  $k'_i$  sont les taux d'écoulement dans les directions indiquées. L'équation de taux  $\dot{n} = r_1 + r_2$  pour le catalyseur s'écrit alors, si nous ajoutons encore un terme de diffusion,

$$\dot{n} = D \nabla^2 n - n^3 + \alpha n^2 - \beta n + \gamma \quad (19)$$

où nous avons posé  $\alpha = k_1 a, \beta = k_2 b, \gamma = k'_2 c$  et  $k'_1 = 1$ . Pour  $\alpha = 0$  c'est l'équation TDGL (11) avec  $e = 0$ .

Afin d'avoir des solutions périodiques (modes durs), il est nécessaire qu'au moins deux équations du type (19) soient couplées, c'est-à-dire il faut au moins deux variables. Un exemple chimique est le « Bruxelateur » qui est une chaîne de réactions fonctionnant avec deux catalyseurs  $X, Y$  et qui a été inventée par l'école de Bruxelles [14]; elle a la forme



De nouveau,  $X$  et  $Y$  disparaissent de la réaction résultante  $A + B \rightarrow C + D$ . Les équations de taux pour les concentrations de  $X$  et  $Y$  ont une forme semblable à (14)

$$\begin{aligned} \dot{n}_1 &= D_1 \nabla^2 n_1 + a - (b+1)n_1 + n_1^2 n_2 \\ \dot{n}_2 &= D_2 \nabla^2 n_2 + b n_1 - n_1^2 n_2 \end{aligned} \quad (21)$$



Mais ce système possède en fonction du paramètre de bifurcation  $b$  des instabilités des deux types, mode mou et mode dur. Celles-ci se prêtent à l'analyse en posant

$$\vec{n} = \vec{n}_0 + \vec{q}(x, \lambda; b) e^{\lambda t} \quad (22)$$

où  $\vec{n}_0 = (a, b/a)$  est l'état stationnaire. La stabilité exige que  $Re \lambda < 0$ , et  $Re \lambda = 0$  signale une instabilité (bifurcation). Pour un mode mou on a en plus  $Im \lambda = 0$  au



FIG. 7. — Ondes spirales d'activité chimique (reprod. de la réf. 19, "Involute Spiral Waves Propagating after Disruption", par K. Harvey. Copyright © 1972 by the American Association for the Advancement of Science. Tous droits réservés).

voisinage de l'instabilité tandis que pour un mode dur  $Im \lambda = \omega \neq 0$ .  $\omega$  est la fréquence du mouvement sur le cycle limite (attracteur) qui est non-amorti.

De tels systèmes sont instables envers la formation de structures spatiales. Ils ont été appelés « structures dissipatives » par Prigogine [14]. Des structures en anneaux concentriques ont été observées pour la première fois dans des réactions chimiques par Zaikin et Zhabotinsky [18]. Harvey a observé des ondes chimiques en forme de spirales avec des fréquences de rotation caractéristiques [19] qui sont reproduites dans la figure 7.

Dans plus de deux variables, il se montre souvent une sensibilité extrême de la solution aux conditions initiales, c'est-à-dire le système se comporte de façon pseudo-stochastique. Ceci est le cas, par exemple pour le modèle de Lorenz [20] qui est une projection des équations de Navier-Stokes sur un minimum de 3 composantes de Fourier, soit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{23}$$

Le mouvement possède deux attracteurs approximatifs, mais la transition entre ces deux cycles n'est pas prévisible. Pour cette raison, on parle d'un « attracteur étrange » [21]. Bien que le modèle de Lorenz soit déterministe, il montre donc déjà des propriétés fluctuantes (stochastiques). Au paragraphe suivant, nous introduirons explicitement des fluctuations.

#### 4. DYNAMIQUE CLASSIQUE FLUCTUANTE ET DISSIPATIVE

Puisque les fluctuations sont par définition dues au hasard, la description déterministe du paragraphe précédent doit être abandonnée en faveur d'un formalisme probabiliste. L'évolution temporelle est alors décrite par une distribution de probabilité  $P$ . Pour des variables discrètes  $N_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ) cette évolution est déterminée par une « équation maîtresse » [15, 22].

$$\begin{aligned}\dot{P}(N, t) &= \sum_{N'} \{ W(N, N') P(N', t) \\ &\quad - W(N', N) P(N, t) \}\end{aligned}\tag{24}$$

où la probabilité de transition  $W(N, N')$  n'est en règle générale non-nulle que pour des processus de naissance ou de décès,  $W(N, N+1)$  ou  $W(N+1, N)$ .

Dans la limite de variables continues  $\psi_\mu$  ( $\mu = 1, 2, \dots, n$ ), les différences des processus de naissance et de décès se transforment en dérivées selon les variables,

$\delta_\mu \equiv \delta/\delta\psi_\mu$ , et l'évolution temporelle est déterminée par l'équation de Fokker-Planck [15, 22]

$$\dot{P}(\psi, t) = F P(\psi, t) = -\partial_\mu J_\mu \quad (25)$$

Ici

$$F = -\partial_\mu (f_\mu - \partial_\mu C_{\mu\nu}) \quad (26)$$

est l'opérateur de Fokker-Planck [16] et  $J_\mu$  est le courant de probabilité (les dérivées agissent sur tous les facteurs à droite et des indices répétés sont sommés).

L'équation de Fokker-Planck (25) correspond à la représentation de Schrödinger (2) de l'évolution temporelle. La représentation de Heisenberg associée est ici donnée par les équations de Langevin [15, 16, 22]

$$\dot{\psi}_\mu = f_\mu + \xi_\mu \quad (27)$$

Ici  $f_\mu$  est la force déterministe ou le flux (drift) introduite dans l'équation (26) et  $\xi_\mu$  la force aléatoire dont les corrélations sont déterminées dans le cas le plus simple par les  $C_{\mu\nu}$  de l'équation (26) dans la forme

$$\langle \xi_\mu(t) \xi_\nu(t') \rangle = 2C_{\mu\nu} \delta(t-t') \quad (28)$$

$C_{\mu\nu}$  s'appelle aussi matrice de diffusion.

Comme avant, le renversement du temps donne lieu à une séparation en une force non-dissipative

$$f_\mu^o = \frac{1}{2} (f_\mu - \tilde{f}_\mu) \quad (29)$$

et une force dissipative

$$f_\mu' = \frac{1}{2} (f_\mu + \tilde{f}_\mu) \quad (30)$$

où  $\tilde{f}_\mu$  est la force renversée dans le temps [16, 22]. Il est intéressant que dans le cas particulier  $f_\mu' = 0$  et  $C_{\mu\nu} = 0$ , on retombe sur un système conservatif et déterministe où  $P(\psi, t)$  a maintenant la signification d'une matrice densité et (25) représente l'équation de Liouville.

Proche de l'équilibre, c'est-à-dire proche de l'état sans courant, le courant stationnaire dissipatif défini par (25), (26),

$$J_\mu^{s'} \equiv (f_\mu' - \partial_\nu C_{\nu\mu}) P^s = 0 \quad (31)$$

( $P^s(\psi)$  est la distribution de probabilité stationnaire) ce qui donne lieu aux « conditions du potentiel » [22]. Nous pouvons alors caractériser un état « loin de l'équilibre » par la condition  $J_\mu^{s'} \neq 0$ , ce qui signifie physiquement qu'un courant est imposé

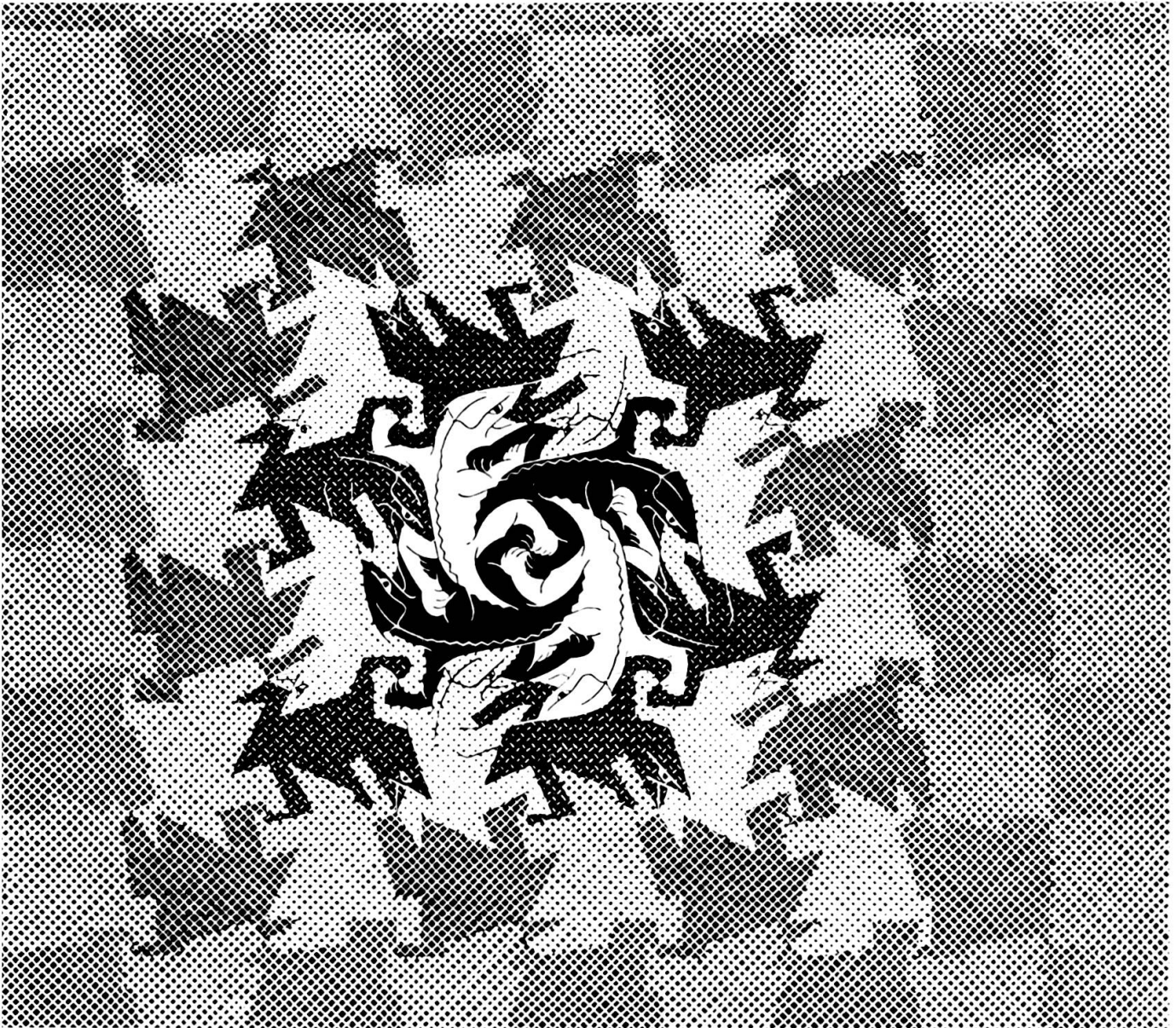


FIG. 8. — « Ontwikkeling I », gravure de M. C. Escher de 1937 (reprod. de la réf. 10).

au système de l'extérieur. Pour un comportement de mode mou, cette situation peut donner lieu à des « structures dissipatives » [14], c'est-à-dire à la formation, dans un système ouvert (parcouru par des courants), des dessins périodiques (patterns) mentionnés au paragraphe précédent. Prigogine a exprimé cette instabilité comme principe de minimum pour l'excès de la production d'entropie [14]. Selon Escher [10], on pourrait s'imaginer une structure dissipative comme dans la figure 8.

Le cas déterministe du paragraphe 3 est retrouvé en posant  $C_{\mu\nu} = 0$ . Si, d'autre part, les  $C_{\mu\nu}$  dépendent des variables  $\psi_\mu$ , alors un nouveau phénomène se présente, à savoir le développement d'une composante non-fluctuante (déterministe)



de la force aléatoire  $\xi_\mu$  qu'on pourrait appeler flux impropre (spurious drift) [23]. Cette composante modifie l'équation de Fokker-Planck (25), (26) et, par conséquent, peut changer totalement le comportement de stabilité du système. Un oscillateur harmonique, par exemple, peut être forcé par une force aléatoire appropriée de l'état au repos sur un cycle limite avec une période finie [24].

Ici se pose la question de l'origine physique des fluctuations. La réponse devient évidente à l'exemple de la particule Brownienne: La force aléatoire est due aux chocs avec les molécules du substrat, c'est-à-dire à l'interaction avec les degrés de liberté microscopiques négligés qui varient beaucoup plus vite que les degrés de liberté macroscopiques considérés. Mais cela signifie qu'un système décrit par des équations de Langevin est toujours ouvert dans le sens d'un contact avec son environnement. Ceci montre maintenant aussi la voie pour introduire de la dissipation dans la mécanique ondulatoire sans se heurter aux inconsistances mentionnées au paragraphe 1.

## 5. MÉCANIQUE ONDULATOIRE FLUCTUANTE ET DISSIPATIVE

Nous sommes maintenant arrivés au point où nous pouvons essayer de clore le cercle en faisant le pas vers une mécanique ondulatoire dans le sens d'une synthèse entre les paragraphes 1 et 4. Ce qui manquait au paragraphe précédent était la possibilité de décrire des interférences, c'est-à-dire l'aspect ondulatoire de la matière. La densité de probabilité  $\rho(\vec{x}, t)$  d'une particule avec coordonnées  $\vec{x}$  qui satisfait à une équation de Fokker-Planck de la forme (25) ne détermine que le module de la fonction d'onde  $\psi(\vec{x}, t)$ , tandis que, de façon générale

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{iS} \quad (32)$$

avec une phase réelle  $S(\vec{x}, t)$ . De la densité de courant de la mécanique ondulatoire  $\rho\vec{v} = (\hbar/2mi) \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$  découle alors la relation

$$\vec{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla S \quad (33)$$

et l'équation de mouvement pour la vitesse  $\vec{v}$  fournit l'aspect ondulatoire quantique manquant.

Comme il a été mentionné à la fin du dernier paragraphe, un traitement consistant de la dissipation exige que nous décrivions la particule en contact avec son environnement, c'est-à-dire comme particule Brownienne. Son équation de mouvement est alors l'équation de Langevin dans sa forme originale [25].

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{1}{m} \nabla V_1(\vec{x}) - \beta\vec{v} + \vec{\zeta} \quad (34)$$

où  $\vec{\zeta}$  est la force aléatoire des fluctuations thermiques et où la dérivée temporelle est encore à définir de façon à ce que l'aspect ondulatoire quantique émerge. Ceci est accompli par la « quantification stochastique » [26], ce qui signifie que l'incertitude quantique entre les variables conjuguées  $x_i$  et  $p_i$  est décrite comme fluctuation  $\xi_i$  dans l'équation

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m} \vec{p}(\vec{x}, t) + \vec{\xi} \quad (35)$$

de sorte que les corrélations (28) aient la valeur quantique

$$C_{ij} = \frac{\hbar}{2m} \delta_{ij} \quad (36)$$

L'équation de Fokker-Planck associée (25), (26) est alors

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{m} \nabla(\rho \vec{p}) + \frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \rho \quad (37)$$

Par une définition appropriée des dérivées temporelles en moyenne, on obtient [27]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v} = \frac{1}{m} \vec{p} - \frac{\hbar}{m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla \sqrt{\rho} \quad (38)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} - \frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} \quad (39)$$

Les équations (34) et (39) fournissent maintenant  $\vec{v}$  et, à l'aide de (33) et après une intégration, aussi  $\dot{S}$ . Les équations (37), (38) et (33) donnent  $\dot{\rho}$ , exprimé en  $\sqrt{\rho}$  et  $S$ . Ceci permet de calculer  $\dot{\psi}$  et le résultat est l'équation d'ondes [27, 28].

$$i\hbar \dot{\psi} = (H + K + \vec{x} \cdot \vec{\zeta}) \psi \quad (40)$$

où  $H$  est l'Hamiltonien conservatif de l'équation (5) et

$$K = \frac{i}{2} \beta \hbar \log \frac{\psi^*}{\psi} \quad (41)$$

est le terme de Kostin [29].  $K$  est dissipatif, car s'il y avait invariance sous renversement du temps,  $\psi$  devrait avoir la propriété de représentation

$$\psi^*(-t) = C \psi(t); |C| = 1 \quad (42)$$

ce qui, inséré dans (41), donne la relation

$$K^*(-t) = -K(t) \quad (43)$$

qui viole cette invariance. L'équation (40) est en plus non-linéaire et contient les fluctuations thermiques  $\vec{\zeta}$  de l'équation (34).

La question se pose maintenant, quelle latitude, on a dans le choix du terme supplémentaire  $K$  dans l'équation (40), c'est-à-dire quelle est la flexibilité dans les définitions (38), (39). A partir de la dérivation de l'équation (40) on gagne l'impression que cette latitude est plutôt étroite; en tout cas, la plupart des termes de la forme  $K(\vec{x}, \vec{p})$  mènent à des contradictions [30]. Par contre, le terme conservatif [31]

$$K = b \log |\psi|^2 \quad (44)$$

ne semble pas donner lieu à des contradictions et en plus a la propriété intéressante de stabiliser des paquets d'onde. Pour tous ces termes, à l'exception de celui de Kostin, une justification plus profonde semble cependant manquer.

La signification de la mécanique ondulatoire fluctuante et dissipative décrite dans ce paragraphe réside évidemment dans son application à des systèmes quantiques en contact avec leur environnement, par exemple la cavité de rayonnement d'un appareil de résonance ou l'appareil de mesure classique d'un effet quantique. D'autres applications s'offrent pour des systèmes quantiques à très grand nombre de degrés de liberté dont seulement quelques-uns intéressent, par exemple des noyaux atomiques, des liquides quantiques ou des étoiles neutroniennes.

Comme il ressort du schéma de la figure 9, cette nouvelle mécanique quantique est une synthèse de toutes les théories dynamiques précédentes. Et ceci aussi bien dans la direction de la description conservative-déterministe vers la description dissipative-fluctuante que dans la direction de l'image classique ponctuelle vers l'image d'interférence de la mécanique ondulatoire. Dans toutes les quatre classes de la figure 9, la dynamique se laisse en plus formuler soit pour les observables (ce qu'on pourrait appeler la « représentation de Hamilton-Heisenberg-Langevin ») soit pour les poids statistiques (en quel cas la désignation « représentation de Liouville-Schrödinger-Fokker-Planck » serait appropriée).

	Conservatif déterministe	Dissipatif fluctuant
Classique (image ponctuelle)	Hamilton Liouville	Langevin Fokker-Planck
Mécanique ondulatoire (image d'interférence)	Heisenberg Schrödinger	Heisenberg-Langevin Schrödinger-Fokker-Planck

FIG. 9. — Schéma des théories dynamiques de la physique.

## LISTE DE LITTÉRATURE

- [1] WIGNER, E. P., *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (Academic, New York-London, 1959).
- [2] HEISENBERG, W., *Rev. Mod. Phys.* 29, 269 (1957).
- [3] BETHE, H. A., *Phys. Rev.* 57, 1125 (1940); H. FESHBACH, C. E. PORTER and V. F. WEISSKOPF, *Phys. Rev.* 96, 448 (1954).
- [4] HASSE, R. W., *Approaches to nuclear friction*, *Rep. Progr. Phys.* 41, 1027 (1978).
- [5] SENITZKY, I. R., *Phys. Rev.* 119, 670 (1960).
- [6] LANDAU, L. D. and V. L. GINZBURG, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 20, 1064 (1950).
- [7] THOM, R., *Stabilité structurelle et morphogénèse* (Benjamin, Reading, Mass., 1972).
- [8] ZEEMAN, E. C., *Scientific American*, April 1976, p. 65.
- [9] ABRIKOSOV, A. A., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 32, 1442 (1957) [engl. transl.: *Soviet Phys. JETP* 5, 1174 (1967)].
- [10] ESCHER, M. C., Escher Foundation — Haags Gemeentemuseum — La Haye, Pays-Bas.
- [11] HOHENBERG P. C. and B. I. HALPERIN, *Rev. Mod. Phys.* 49, 435 (1977).
- [12] ENZ, U., *Helv. Phys. Acta* 37, 245 (1964).
- [13] LOTKA, A. J., *Proc. Nat. Acad. Sci. (Washington)* 6, 410 (1920); V. VOLTERRA, *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie* (Paris, 1931).
- [14] GLANSDORFF P. et I. PRIGOGINE, *Structure, stabilité et fluctuations* (Masson, Paris, 1971).
- [15] HAKEN, H., *Synergetics* (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977).
- [16] ENZ, C. P., *Physica* 89A, 1 (1977).
- [17] Réf. 14, éq. (14.43).
- [18] ZAIKIN, A. and A. M. ZHABOTINSKY, *Nature* 225, 535 (1970).
- [19] HARVEY, K., *Science* 175, Cover., 11 February 1972.
- [20] LORENZ, E. N., *J. Atmospheric Sci.* 20, 130 (1963).
- [21] RUELLE, D. and F. TAKENS, *Commun. Math. Phys.* 20, 167 (1971).
- [22] GRAHAM, R., *Springer Tracts in Modern Physics* (Springer, Berlin-Heidelberg, 1973), vol. 66; H. HAKEN, *Rev. Mod. Phys.* 47, 67 (1975).
- [23] GRAHAM, R. and H. HAKEN, *Z. Phys.* 245, 141 (1971); W. HORSTHEMKE and A. BACH, *Z. Physik B* 22, 189 (1975).
- [24] HONGLER, M.-O. and D. M. RYTER, *Z. Physik B* 31, 333 (1978).
- [25] LANGEVIN, P., *Compte-rendus* 146, 530 (1908).
- [26] GUERRA, F., *J. Physique, Suppl. Colloque* 34, C1-95 (1973).
- [27] YASUE, K., *J. Statist. Phys.* 16, 113 (1977); *Ann. Phys. (N. Y.)* 114, 479 (1978).
- [28] SKAGERSTAM, B., *Phys. Letters* 58 B, 21 (1975); *J. Math. Phys.* 18, 308 (1977).
- [29] KOSTIN, M. D., *J. Chem. Phys.* 57, 3589 (1972); *J. Statist. Phys.* 12, 145 (1975).
- [30] HASSE, R. W., *J. Math. Phys.* 16, 2005 (1975).
- [31] BIALYNICKI-BIRULA, I. and J. MYCIELSKI, *Ann. Phys. (N.Y.)* 100, 62 (1976).



