Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 23 (1970)

Heft: 1

Artikel: Modèles numériques de systèmes autogravitants. II. Masses ponctuelles

Autor: Janin, Guy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739131

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MODÈLES NUMÉRIQUES DE SYSTÈMES AUTOGRAVITANTS II. MASSES PONCTUELLES

PAR

Guy JANIN

Ce modèle se propose de décrire l'évolution de systèmes stellaires à petit nombre de corps ($N \leq 100$). Nos hypothèses sont: corps de dimension propre négligeable (masses ponctuelles), masse des corps invariable au cours du temps, forces gravitationnelles uniquement, pas de champ extérieur (système isolé autogravitant).

Ce modèle s'applique ainsi aux étoiles multiples et aux petits amas.

La méthode est apparemment très simple: pour obtenir les coordonnées des étoiles de l'amas à un instant quelconque, on résoud par un procédé numérique adéquat à partir de conditions initiales données les $6 \times N$ équations différentielles du mouvement.

Deux difficultés vont cependant nous obliger à prendre quelques précautions: 1° la nature divergente de la force gravifique entre deux particules qui tendent l'une vers l'autre; 2° le grand nombre d'opérations nécessaires pour l'estimation de la force exercée par le système sur une particule. Ces faits sont à l'origine de notre limitation sur N et de la mise au point de modèles moins réalistes tels que les systèmes stratifiés (JANIN, 1970).

Choix du schéma d'intégration. — Le problème de la singularité de la force peut être résolu de quatre manières différentes:

1) modifier la loi de force lorsque la distance interparticulaire est faible; par exemple remplacer le terme en $^1/r^2$ de la loi de gravitation universelle par $^1/(r^2+\varepsilon^2)$ (AARSETH, 1963);
2) changer fonctions et variable de manière que la singularité disparaisse dans les nouveaux axes de coordonnées (régularisation de LÉVI-CIVITA, SZEBEHELY, 1968);
3) considérer l'interaction proche entre deux particules comme un problème à deux corps perturbés par le reste de l'amas;
4) méthode d'intégration à pas variable.

La suppression de la singularité par modification de la loi de force est dangereuse car elle éloigne le système de son évolution physique. La conservation de l'énergie totale n'est plus satisfaite car le creux de potentiel des étoiles est partiellement comblé. La formation des binaires proches est impossible.

La régularisation, méthode bien connue pour le problème des trois corps, n'est pas aisée à appliquer dans le cas de $N > 3$, notamment si l'on désire régulariser plus d'un couple à la fois (PETERS, 1968).

La mise au point d'un traitement spécial des binaires, réalisé par AARSETH (1969) sur la base de la formulation de PINES (1961) du problème des deux corps, est délicate et conduit à une programmation lourde où intervient un grand nombre de paramètres empiriques. Les résultats sont cependant intéressants puisque le gain de temps de calcul auquel conduit ce traitement, combiné à une méthode d'intégration à pas variable, a permis à Aarseth d'étudier des systèmes de $N = 250$ corps.

Puisque les artifices ne conduisent pas à des solutions tout-à-fait satisfaisantes, il faut envisager une approche directe du problème, à savoir trouver une méthode d'intégration des équations du mouvement qui conserve sa stabilité face à la divergence de la force.

Méthode de Nordsieck pour la résolution d'un système d'équations différentielles à valeurs initiales. — $\mathbf{x}$ et $\mathbf{f}$ étant des vecteurs, soit

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$$

un système d'équations différentielles à valeurs initiales $\mathbf{x}(t=t_o) = \mathbf{x}_o$. C'est dans le second membre $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ que figurera l'expression de la force. Il convient donc de le calculer le moins souvent possible ce qui exclut d'emblée les méthodes d'intégration à pas séparés du type Runge-Kutta. A l'approche d'une singularité, le pas d'intégration doit être réduit afin que les variations des fonctions ne subissent pas de trop grands écarts. D'autre part l'adoption d'un pas variable ne doit pas ralentir le mouvement des étoiles de l'amas traçant à cet instant des orbites régulières. Le pas doit donc être individuel. Cela sous-entend la possibilité de déterminer à n'importe quel instant les coordonnées de n'importe quelle étoile.

Ainsi que l'avaient déjà remarqué VAN ALBADA (1967) et ALLIONE, BLACKFORD, MENDEZ et WHITTOUCK (1968), la méthode de NORDSIECK (1962) satisfait convenablement à ces conditions.

C'est une méthode à pas liés de type prédiction-correction spécialement adaptée au calcul automatique par ordinateur. Les solutions $\mathbf{x}(t)$ cherchées sont approchées par un polynôme du cinquième degré $\mathbf{P}_5(t)$, ce qui permet de les connaître à n'importe quel instant intermédiaire. Le pas est variable, il est ajusté de telle manière que la stabilité du processus soit conservée et que l'erreur de troncature ne dépasse pas une certaine valeur.

Le polynôme d'approximation $\mathbf{P}_5(t)$ est identique à celui de la méthode d'Adams. Pour démarrer l'intégration, les cœfficients sont posés égaux à zéro. On avance de quatre pas, puis on recule de quatre pas. De retour au point initial, les solutions calculées sont remplacées par les conditions initiales, un test est vérifié, et on recommence. Au bout de trois va-et-viens, les cœfficients des polynômes ont atteint leur valeur correcte et l'intégration proprement dite peut commencer.

Le long d'un pas h, l'intégration se décompose en la suite des opérations suivantes: 1° une première estimation $\mathbf{x}^1(t+h)$ de la solution est calculée (prédiction); 2° cette solution permet de déterminer le second membre au temps $t+h$ et de calculer une meilleure estimation $\mathbf{x}^2(t+h)$ de la solution (première correction); 3° une seconde correction est calculée: $\mathbf{x}^3(t+h)$; 4° le premier test entre en jeu pour vérifier la convergence: si $|x_\alpha^3 - x_\alpha^2| \leq \frac{1}{8}|x_\alpha^2 - x_\alpha^1|$ pour toutes les composantes α des vecteurs $\mathbf{x}$, la solution $\mathbf{x}^3$ sera retenue; dans le cas contraire, le cycle est repris avec un pas $h/2$; 5° un second test contrôle l'erreur de troncature; s'il est satisfait, on adoptera un pas $2h$ pour le cycle suivant, s'il ne l'est pas, on diminue la sévérité du test (et on conservera le pas h pour le cycle suivant); si le test n'est toujours pas satisfait, on recommence le cycle avec un pas $h/2$; 6° on calcule les nouveaux cœfficients du polynôme.

Cette méthode est très prudente. Au moindre danger, le pas est immédiatement réduit de moitié. Si les circonstances sont favorables, on risque une augmentation du pas lors du cycle suivant. Pendant le démarrage de l'intégration, seule la condition de stabilité est vérifiée.

La vérification du test de convergence n'est pas une condition suffisante pour la stabilité (Lewis et Stovall, 1967). Le test complet, soit vérifier que toutes les valeurs propres de la matrice de stabilité $(\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x})$ soient inférieures à une certaine valeur, est pratiquement inexécutable dans notre cas. Les expériences numériques vont effectivement nous montrer que, au bout d'un certain temps d'évolution, une instabilité naît dans le système et conduit l'évolution vers une direction non physique (l'énergie totale n'est plus conservée par exemple).

Application de la méthode de Nordsieck à l'intégration du mouvement d'un système stellaire. — Un cycle s'adresse aux six composantes (x_α^k, v_α^k, $\alpha=1, 2, 3$) des coordonnées du corps k. k est caractérisé par son pas d'intégration h^k et son temps t^k. Six polynômes $P_{5\alpha}^k(t)$ l'accompagnent et permettent de calculer les coordonnées de k à n'importe quel temps t pas trop éloigné de t^k. Le programme d'intégration s'intéresse toujours à l'étoile la plus jeune. Equations du mouvement

$$\frac{dx_\alpha^k}{dt} = v_\alpha^k \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{1}$$

$$\frac{dv_\alpha^k}{dt} = a_\alpha^k \qquad k = 1, \ldots, N$$

où a_α^k est la composante α de l'accélération

$$a_\alpha^k = G \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{N} \frac{m^l (x_\alpha^l - x_\alpha^k)}{\left[\sum_{\beta=1}^{3} (x_\beta^l - x_\beta^k)^2\right]^{3/2}} \tag{2}$$

G est la constante de gravitation universelle, m^l est la masse du corps l.

La quasi-totalité du temps de calcul est consacrée à l'estimation des accélérations a_α^k. En contemplant la formule (2), il faut se rappeler que les x_β^l ne sont pas connus au temps t^k mais au temps t^l, et il convient d'utiliser les polynômes $P_{5\beta}^l(t)$ pour les connaître au temps t^k.

Dans le second test (5e étape du cycle d'intégration) figure un paramètre qui garantit l'exactitude d'un certain nombre donné e de chiffres significatifs à chaque pas pour les solutions. Au bout d'un grand nombre de pas, la solution se dégrade cependant au point qu'aucun chiffre significatif n'est correct. La trajectoire du point représentatif du système dans l'espace de phase à $6 \times N$ dimensions s'écarte complètement (MILLER, 1964) de la trajectoire réelle. Mais le point reste dans le domaine de phase défini par les constantes de mouvement. Notre solution est en quelque sorte une fluctuation statistique de la solution réelle et elle est aussi « valable » que la solution réelle.

Cette remarque ne permet cependant pas de choisir pour e une valeur trop petite. En effet, supposons qu'un corps k se meuve à très grande vitesse dans une zone à forte densité stellaire. La valeur numérique des v_α^k pour ce corps sera beaucoup plus élevée que pour les autres corps et l'effet de la force, qui ne dépend que des positions des corps, sera relativement moins efficace: cette force agira numériquement plutôt sur les chiffres à droite des chiffres significatifs donc son effet sera atténué par rapport à celui qu'elle aurait sur une étoile lente. A la limite, prenons un amas où les vitesses, positions et forces sont numériquement de l'ordre de 1 et étudions-le dans un système de coordonnées se déplaçant à 10e. L'effet des forces sera totalement plongé dans le bruit numérique des vitesses (chiffres significatifs à droite des e premiers) et les étoiles ne subiront plus d'interaction entre elles.

Vérification des constantes de mouvement. — La stabilité de l'intégration n'étant pas garantie, il est indispensable de vérifier que le système reste dans une zone physiquement permise. Notre système étant isolé, il suffit de vérifier la conservation des constantes de mouvement. Nous nous limitons à la vérification de la constance de l'énergie totale E^t et de la quantité de mouvement totale P^t:

$$E^t = \sum_{k=1}^{N} \left(m^k \frac{|\mathbf{v}^k|^2}{2} - G\, m^k \sum_{l=1}^{k-1} \frac{m^l}{r^{kl}} \right)$$

où r^{kl} est la distance entre les étoiles k et l;

$$\mathbf{P}^t = \sum_{k=1}^{N} m^k \mathbf{v}^k .$$

Conditions initiales. — Positions, vitesses et masses sont à fixer initialement. Nous choisissons comme état initial d'un amas une répartition homogène des positions dans une sphère de rayon R et des vitesses dans une sphère de rayon V. Les masses obéissent à une loi en m^{-2} sur un intervalle de 1 à M ($M = 5$ ou 10). R et V sont choisis de manière à satisfaire le théorème du viriel.

Pratiquement on procède comme suit: 1° distribution aléatoire des x_α^k selon une loi en $(r^k)^2$ (le nombre de particules à une distance r du centre est proportionnel à r^2) entre 0 et R; 2° distribution analogue des v_α^k entre 0 et V; 3° distribution aléatoire des masses m^k entre 1 et M; 4° calcul du centre de masse; 5° modification des $x_\alpha{}^k$ de manière à confondre le centre de masse avec le centre de coordonnée; 6° calcul de la quantité de mouvement totale; 7° modification des $v_\alpha{}^k$ de manière à rendre cette quantité de mouvement totale nulle; 8° calcul de l'énergie cinétique totale E^C et de l'énergie potentielle E^p de l'amas; 9° modification des modules des vitesses de manière à satisfaire le théorème du viriel $2\,E^c/E^p = 1$. L'amas est ainsi centré à l'origine du système de coordonnées et globalement immobile par rapport à celui-ci.

Unités. — Pour simplifier les manipulations de constantes, nous choisissons un système d'unité tel que la constante de gravitation G, le rayon initial R et la masse totale μ de l'amas valent numériquement 1. Le temps de chute moyen

$$\tau_c = \sqrt{\frac{R^3}{G\mu}}$$

est égal à l'unité. Si R vaut p parsecs et μ m masses solaires, τ_c correspondra à $14.93\sqrt{p/m}$ millions d'années.

Expérience numérique type. — Des amas de 25 étoiles ont été étudiés sur une durée de l'ordre de 25 τ_c. Une petite coupure ε a été adoptée afin d'émousser les pics des variations de la force: $\varepsilon^2 = 10^{-8}$. Le nombre de chiffres significatifs garantis e a été choisi égal à 6.

De 0 à 10 τ_c, le calcul avance au rythme de 10 mn par τ_c avec l'ordinateur CDC 3800 de l'Etat de Genève. Il se ralentit considérablement par la suite et une instabilité fatale décime le système vers 20 à 25 τ_c au bout de 4 à 6 heures de calcul. Ce sont des binaires serrées qui accaparent le programme d'intégration et l'obligent à travailler avec de très petits pas (10^{-4} à 10^{-5}).

Le programme est rédigé en FORTRAN et une attention toute particulière a été consacrée à l'optimalisation du sous-programme de calcul des forces. Le CDC 3800 utilisant des mots de 48 bits, il n'a pas été nécessaire de faire appel à la double précision. Lors du calcul, les coordonnées sont enregistrées sur bande magnétique tous les temps 0.5.

Applications. — Les applications de cette méthode de dynamique stellaire sont nombreuses et fructueuses. Citons l'étude de l'instabilité des petits systèmes stellaires,

la naissance des étoiles à grande vitesse, la formation des binaires dans les amas stellaires, la détermination du taux d'évasion des étoiles d'amas, l'influence d'un champ gravifique extérieur sur un amas. Nous nous sommes plus particulièrement penché sur le problème de l'influence gravitationnelle des nuages de matière interstellaire se mouvant dans le voisinage d'un amas.

Observatoire de Genève

BIBLIOGRAPHIE

AARSETH, S. J., 1963, *MN* **126**, 223.
AARSETH, S. J., 1969, communication personnelle.
VAN ALBADA, T. S., 1967, B.A. série 3, t. II, 59.
ALLIONE, M. S., A. L. BLACKFORD, J. C. MENDEZ et M. M. WHITTOUCK, 1968, *Guidance, Flight Mechanics and Trajectory Optimization*, vol. iv — *The N-Body Problem and Special Perturbation Techniques*, NASA CR-1005, p. 83.
JANIN, G., 1970, *Publ. Obs. Genève* **77**, à paraître.
LEWIS, H. R. et E. J. STOVALL, 1967, *Math. Comp.* **21**, 157.
MILLER, R. H., 1964, *Ap. J.* **140**, 250.
NORDSIECK, A., 1962, *Math. Comp.* **16**, 22.
PETERS, C. F., 1968, B.A. série 3, t. III, 167.
PINES, S., 1961, *A. J.* **66**, 5.
SZEBEHELY, V., 1968, B.A. série 3, t. III, 33.