Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 20 (1967)
Heft: 3

Artikel: Étude statistique d'un modèle théorique : destiné à déterminer la forme d'un gisement à l'aide de sondages

Autor: Vuagnat, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739392

ÉTUDE STATISTIQUE D'UN MODÈLE THÉORIQUE DESTINÉ A DÉTERMINER LA FORME D'UN GISEMENT A L'AIDE DE SONDAGES

PAR

Pierre VUAGNAT

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 440

1 Problème dans l'espace E_1 443

1.1 Remarques préliminaires 443

1.2 Cas discontinu 444

1.2.1 Calcul de la probabilité 444

1.2.2 Vérification que la somme des probabilités vaut 1 447

1.2.3 Calcul de la valeur moyenne de $x+y=z$ 450

1.2.4 Calcul de la variance de z 457

1.3 Cas continu 461

1.3.1 Calcul de la fonction de répartition et de la densité de probabilité . 461

1.3.2 Vérification 463

1.3.3 Calcul de la valeur moyenne de $x+y=z$ 464

1.3.4 Calcul de la variance de $x+y=z$ 465

1.4 Passage du cas discontinu au cas continu par passage à la limite sur les formules finales du cas discontinu 467

1.4.1 Calcul pour $E(z)$ 467

1.4.2 Calcul pour $V(z)$ 469

2 Problème dans l'espace E_2 474

2.1 Remarques préliminaires 474

2.2 Etude d'une solution 475

2.3 Vérification pratique des formules théoriques 477

2.4 Considérations sur l'application des formules précédentes 479

Annexe 481

Bibliographie 485

INTRODUCTION

Le problème qui est à l'origine de ce travail est un problème qui se pose dans la recherche minière en particulier: connaissant l'existence d'un gisement, comment déterminer son importance, ou plus exactement, comment déterminer ses frontières? La méthode généralement utilisée consiste à effectuer un certain nombre de sondages à intervalles réguliers, c'est-à-dire à quadriller la région envisagée d'un réseau de sondages plus ou moins dense, suivant la précision avec laquelle on désire délimiter le gisement, d'une part, et le coût de ces sondages, d'autre part.

On peut envisager le cas où, au lieu de faire des sondages à intervalles réguliers, on ferait des sondages au hasard.

Nous laisserons de côté la question de la comparaison de ces deux méthodes et le problème qui consisterait à déterminer, après avoir fait certaines hypothèses notamment sur le coût d'un sondage, quelle est la méthode la plus avantageuse. Nous ne nous occuperons que du problème en soi, problème qui peut paraître simple au premier abord, mais qui, dès qu'on veut le cerner d'un peu plus près, présente certaines difficultés.

La première notion qu'il s'agit de définir, est la notion de sondages au hasard. Qu'entend-on par sondages faits au hasard ? En d'autres termes: comment choisir un point au hasard dans un certain domaine situé dans un plan ?

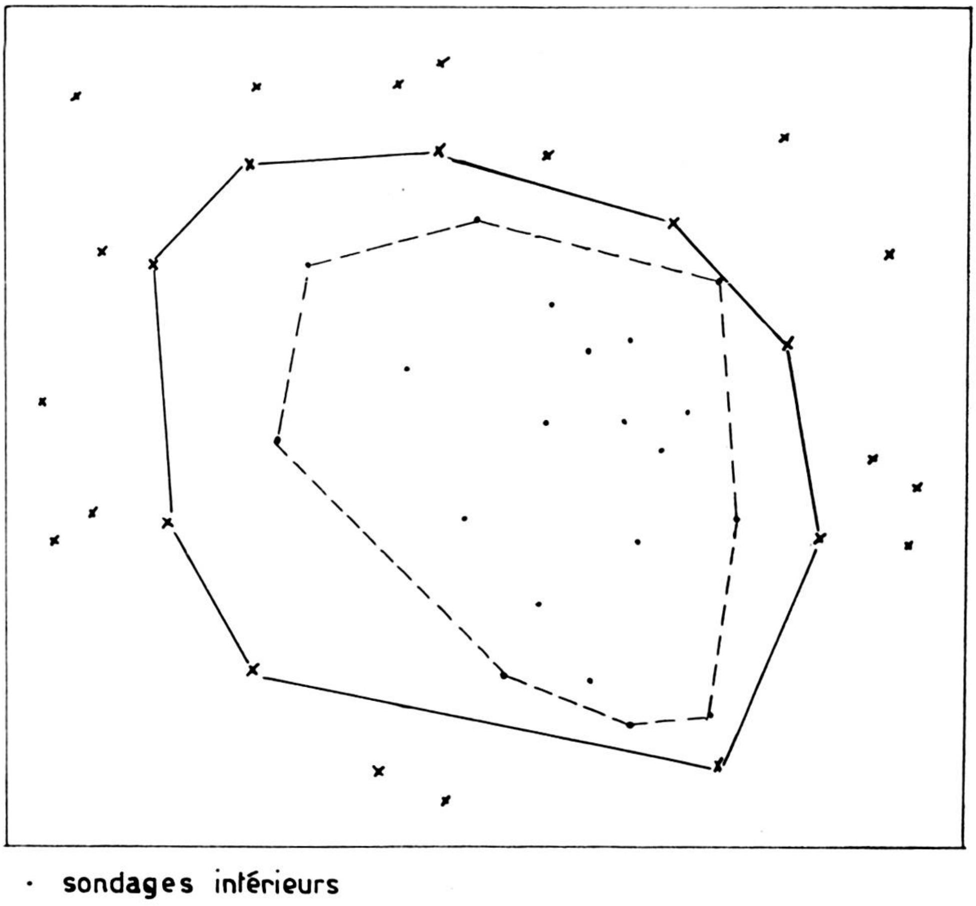
La manière de choisir ayant été définie, il s'agit ensuite de savoir quelles seront les variables aléatoires et les paramètres statistiques que nous envisagerons et qui nous permettront de juger la situation après qu'une série de sondages au hasard aient été effectués.

En effet, supposons qu'une série de sondages aient été effectués au hasard dans une certaine région de prospection que nous supposerons rectangulaire et dont nous supposons qu'elle contient un certain gisement; si la superficie du gisement est suffisamment grande et si le nombre de sondages effectués n'est pas trop petit, il est très probable que certains sondages se trouveront à l'intérieur du gisement et d'autres à l'extérieur.

En supposant, pour simplifier les idées, que le gisement est d'un seul tenant, la frontière du gisement se trouvera entre les sondages situés à l'intérieur du gisement et ceux situés à l'extérieur; elle sera donc à l'intérieur d'une bande délimitée, d'une part, par les sondages intérieurs au gisement les plus périphériques et, d'autre part, par les sondages extérieurs les plus proches du gisement.

Supposons pour l'instant que cette bande est déterminée; il est évident que plus la superficie de cette bande, et en particulier sa largeur, sera petite, meilleure sera la détermination de la forme du gisement. Il apparaît donc comme logique de prendre pour mesure de la précision de la détermination la superficie de cette bande; étant donné que les points sont pris au hasard, la superficie est une variable aléatoire pour laquelle, à défaut de connaître sa fonction de répartition, on tâchera de calculer la valeur moyenne et la variance.

Ces difficultés que nous venons de signaler d'une façon très sommaire, nous ont amené à tâcher de simplifier autant que possible le problème. Pour ce faire, nous nous sommes tout d'abord placé dans le cas très particulier où la région contenant le gisement est un segment de droite. Le choix des sondages au hasard se ramène alors au choix au hasard de points dans le segment envisagé, et la bande, dans laquelle se trouve la frontière du gisement, se réduit à un intervalle; ses extrémités sont les deux points les plus proches dont l'un est à l'intérieur du gisement, l'autre à l'extérieur.



Dans un premier chapitre nous avons établi les formules donnant la valeur moyenne et la variance de la longueur de cet intervalle en considérant successivement le cas où les points pris au hasard prennent des valeurs discrètes et des valeurs continues. Puis nous avons montré que les formules obtenues dans le cas continu peuvent être obtenues si nous faisons un passage à la limite dans les formules du cas discret.

Dans un second chapitre nous avons abordé le problème dans le plan. La généralisation de ce qui a été fait sur la droite conduit à des calculs extrêmement compliqués. Il nous a paru préférable de trouver un procédé permettant d'utiliser les résultats obtenus sur la droite, procédé qui présente le double avantage de permettre l'emploi de formules relativement simples et de supprimer certaines ambiguïtés dont nous avons parlé ci-dessus.

A titre de vérification des formules nous avons donné un exemple et les résultats des tests effectués sur cet exemple.

Pour terminer, nous avons esquissé un procédé plus direct d'envisager le problème dans le plan qui présente plus, nous semble-t-il, un intérêt théorique que pratique et conduit à des formules extrêmement peu maniables.

Chapitre Premier

PROBLÈME DANS L'ESPACE E_1

1.1 *Remarques préliminaires*

Pour aller du plus simple au plus compliqué, nous avons tout d'abord envisagé le problème dans l'espace E_1. On peut l'énoncer de la façon suivante:

Soit $\overline{AB}$ un segment et C un point donné situé entre A et B. Choisissons n points au hasard; appelons D le point le plus proche à gauche, E le point le plus proche à droite de C et désignons par x la distance $\overline{DC}$ et par y la distance $\overline{CE}$ (fig. 1).

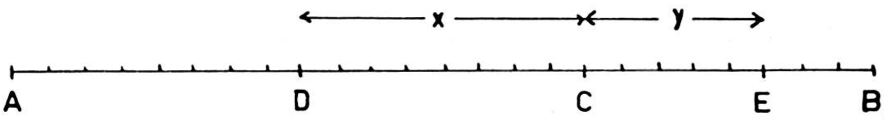


Fig. 1

On peut envisager le problème de deux manières:

1. x et y sont des variables continues.
2. x et y sont des variables discrètes; elles ne prennent qu'un nombre fini de valeurs correspondant aux divisions du segment $\overline{AB}$ en un certain nombre de parties par un nombre fini de points.

La seconde manière correspond mieux à la réalité puisque toute mesure est faite à l'aide de certaines unités, la plus petite étant de grandeur finie; mais il est évident que, lorsque l'unité minima est très petite par rapport au segment $\overline{AB}$ envisagé, le fait de considérer x et y comme des variables continues constitue une bonne approximation. Afin de pouvoir apprécier le degré d'approximation, nous avons établi les formules dans les deux cas et nous avons montré que l'on pouvait passer des formules du cas discret aux formules du cas continu en faisant un passage à la limite sur les formules elles-mêmes.

Faisons pour terminer une remarque d'ordre méthodologique: dans le modèle que nous avons adopté pour l'établissement des formules dans le cas discret, nous avons toujours envisagé qu'un point choisi au hasard pouvait tomber plus d'une fois sur la même division; il est évident que du point de vue pratique un tel modèle n'est pas exempt de critique.

1.2 *Cas discontinu*

Supposons que l'intervalle $\overline{AB}$ soit divisé en $(m-1)$ parties par $(m-2)$ points équidistants. Pour la commodité du raisonnement, nous supposons que le point C, qui partage $\overline{AB}$ en deux, se trouve à une distance infiniment petite à gauche d'un des points de division; en d'autres termes, si nous désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_{m-2}$ les abscisses des $(m-2)$ points de division et par t_{m-1} l'abscisse de B, nous supposons que les abscisses possibles de C sont $t_1 - 0, t_2 - 0, \ldots, t_{m-1} - 0$ (fig. 2).

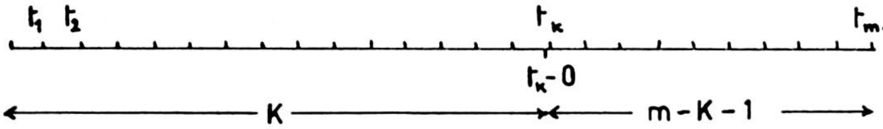


Fig. 2

Il en résulte que la valeur minima de x est 1, tandis que la valeur minima de y est 0. D'autre part, la valeur maxima de x, même s'il ne tombe aucun point à gauche de C, est égale au nombre de divisions, extrémités comprises, à gauche de C; la valeur maxima de y, même s'il ne tombe aucun point à droite de la limite, est égale au nombre de divisions, extrémités non comprises, à droite de C.

1.2.1 *Calcul de la probabilité*

Désignons par $P(X, Y)$ la probabilité pour que $x = X$ et $y = Y$, et soit K la distance de C à l'extrémité gauche A; la distance de cette limite à l'extrémité droite B sera alors $(m-K-1)$. Examinons successivement les différents cas qui peuvent se présenter:

a) $X < K$ *et* $Y < (m-K-1)$

L'événement $E = \{x = X \text{ et } y = Y\}$ peut être envisagé comme un événement composé de deux événements E_1 et E_2:

$E_1 = \{$aucun point ne tombe dans l'intervalle $\overline{DE}\}$

$E_2 = \{$au moins un point tombe à une distance X à gauche et Y à droite$\}$

$P(E) = P(E_1) \cdot P(E_2$ sachant que E_1 est réalisé). On voit facilement que:

$$P(E_1) = \left(\frac{m-X-Y+1}{m}\right)^n.$$

Pour trouver $P(E_2$ sachant que E_1 est réalisé), raisonnons de la façon suivante: désignons par:

$E' = \{$il tombe au moins un point à une distance X à gauche *ou* à une distance Y à droite$\}$

$E'' = \{$il tombe au moins un point à une distance X à gauche$\}$

$E''' = \{$il tombe au moins un point à une distance Y à droite$\}$.

On peut alors écrire:

$$P(E') = P(E'') + P(E''') - P(E_2) \tag{1.2.0}$$

puisque

$E_2 = \{$il tombe au moins un point à une distance X à gauche *et* une distance Y à droite$\}$

D'autre part on voit facilement que:

$$P(E'') = 1 - \left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n$$

$$P(E''') = 1 - \left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n$$

$$P(E') = 1 - \left(\frac{m-X-Y-1}{m-X-Y+1}\right)^n.$$

En remplaçant dans (1.2.0)

$$1 - \left(\frac{m-X-Y-1}{m-X-Y+1}\right)^n = 1 - \left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n + 1 - \left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n - P(E_2)$$

d'où

$$P(E_2) = 1 - 2\left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n + \left(\frac{m-X-Y-1}{m-X-Y+1}\right)^n.$$

Ainsi

$$P(X, Y) = \left(\frac{m-X-Y+1}{m}\right)^n \left[1 - 2\left(\frac{m-X-Y}{m-X-Y+1}\right)^n + \left(\frac{m-X-Y-1}{m-X-Y+1}\right)^n\right]$$

$$P(X, Y) = \frac{1}{m^n}\left[(m-X-Y+1)^n - 2(m-X-Y)^n + (m-X-Y-1)^n\right].$$

b) $X = K$ *et* $Y < m-K-1$ ou $x < K$ *et* $Y = m-K-1$

La probabilité $P(E_1)$ reste la même, soit:

$$P(E_1) = \left(\frac{m-X-Y+1}{m}\right)^n$$

ou plus exactement

$$P(E_1) = \begin{cases} \left(\dfrac{m-K-Y+1}{m}\right)^n & \text{lorsque } X = K \\[2ex] \left(\dfrac{K-X+2}{m}\right)^n & \text{lorsque } Y = m-K-1. \end{cases}$$

Quant à E_2, on peut le définir de la façon suivante:

$E_2 = \{$il tombe au moins un point à une distance Y à droite$\}$ lorsque $X = K$

$E_2 = \{$il tombe au moins un point à une distance X à gauche$\}$ lorsque $Y = m-K-1$.

On trouve facilement que

$$P(E_2) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{m-K-Y}{m-K-Y+1}\right)^n & \text{si } X = K \\[2ex] 1 - \left(\dfrac{K-X+1}{K-X+2}\right)^n & \text{si } Y = m-K-1 . \end{cases}$$

Par conséquent

$$P(E) = \begin{cases} \left(\dfrac{m-K-Y+1}{m}\right)^n \left[1 - \left(\dfrac{m-K-Y}{m-K-Y+1}\right)^n\right] & \text{si } X = K \\[2ex] \left(\dfrac{K-X+2}{m}\right)^n \left[1 - \left(\dfrac{K-X+1}{K-X+2}\right)^n\right] & \text{si } Y = m-K-1 \end{cases}$$

$$P(E) = \begin{cases} \dfrac{1}{m^n}\left[(m-K-Y+1)^n - (m-K-Y)^n\right] & \text{si } X = K \\[2ex] \dfrac{1}{m^n}\left[(K-X+2)^n - (K-X+1)^n\right] & \text{si } Y = m-K-1 . \end{cases}$$

c) $X = K$ *et* $Y = m-K-1$

Il faut que tous les points tombent aux extrémités du segment. On trouve facilement que:

$$P(E) = \left(\frac{2}{m}\right)^n .$$

En résumé, on aura donc :

$$P(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m^n}\Big[(m-X-Y+1)^n - 2(m-X-Y)^n + (m-X-Y-1)^n\Big] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } X < K \text{ et } Y < m-K-1 \\ \dfrac{1}{m^n}\Big[(m-K-Y+1)^n - (m-K-Y)^n\Big] \quad \text{si } X = K \text{ et } Y < m-K-1 \\ \dfrac{1}{m^n}\Big[(K-X+2)^n - (K-X+1)^n\Big] \qquad \text{si } X < K \text{ et } Y = m-K-1 \\ \left(\dfrac{2}{m}\right)^n \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si } X = K \textit{ et } Y = m-K-1 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

1.2.2 *Vérification que la somme des probabilités vaut 1*

Montrons que la somme des $P(X, Y)$ étendue à toutes les valeurs possibles de X et de Y vaut 1; en tenant compte des relations (1.2.1), nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \sum_{Y=0}^{m-k-1}\sum_{X=1}^{K} P(X,Y) = {} & \frac{1}{m^n}\sum_{Y=0}^{m-k-2}\sum_{X=1}^{K-1}\Big[(m-X-Y+1)^n - 2(m-X-Y)^n + \\ & (m-X-Y-1)^n\Big] \\ & + \frac{1}{m^n}\sum_{Y=0}^{m-k-2}\Big[(m-K-Y+1)^n - (m-K-Y)^n\Big] \\ & + \frac{1}{m^n}\sum_{X=1}^{K-1}\Big[(K-X+2)^n - (K-X+1)^n\Big] \\ & + \left(\frac{2}{m}\right)^n . \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Pour éviter d'écrire chaque fois tous les termes constituant le second membre de la relation (1.2.2) nous allons les envisager séparément.

Considérons d'abord la première double somme et posons:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{Y=0}^{m-k-2}\sum_{X=1}^{K-1}\Big[(m-X-Y+1)^n - 2(m-X-Y)^n + (m-X-Y-1)^n\Big] \\ &= \sum_{Y=0}^{m-k-2}\Bigg\{\sum_{X=1}^{K-1}(m-X-Y-1)^n - 2\sum_{X=1}^{K-1}(m-X-Y)^n + \\ &\qquad \sum_{X=1}^{K-1}(m-X-Y-1)^n\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

En faisant le changement de variable $X = X' + 1$ dans la première somme en X et $X = X' - 1$ dans la troisième, on peut éçrire:

$$\sum_{X=1}^{K-1} (m - X - Y + 1)^n = \sum_{X'=0}^{K-2} (m - X' - Y)^n$$

et

$$\sum_{X=1}^{K-1} (m - X - Y - 1)^n = \sum_{X'=2}^{K} (m - X' - Y)^n .$$

En remplaçant dans (1.2.3) on obtient:

$$A = \sum_{Y=0}^{m-K-2} \left\{ \sum_{X=0}^{K-2} (m - X - Y)^n - 2 \sum_{X=1}^{K-1} (m - X - Y)^n + \sum_{X=2}^{K} (m - X - Y)^n \right\}$$

$$= \sum_{Y=0}^{m-K-2} \left\{ (m - Y)^n - (m - Y - 1)^n - (m - Y - K + 1)^n + (m - Y - K)^n \right\}$$

$$A = \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y)^n - \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - 1)^n - \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - K + 1)^n + \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - K)^n . \tag{1.2.4}$$

Comme nous l'avons fait pour X, nous pouvons faire des changements de variables pour Y; dans la deuxième et la quatrième somme posons $Y = Y' - 1$; alors on obtient:

$$\sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - 1)^n = \sum_{Y'=1}^{m-K-1} (m - Y')^n$$

et

$$\sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - K)^n = \sum_{Y'=1}^{m-K-1} (m - Y' - K + 1)^n$$

et en remplaçant dans (1.2.4):

$$A = \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y)^n - \sum_{Y=1}^{m-K-1} (m - Y)^n - \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m - Y - K + 1)^n + \sum_{Y=1}^{m-K-1} (m - Y - K + 1)^n$$

$$= m^n - (m - m + K + 1)^n - (m - K + 1)^n + (m - m + K + 1 - K + 1)^n$$

et après réduction des termes semblables on a finalement:

$$A = m^n - (K + 1)^n - (m - K + 1)^n + 2^n . \tag{1.2.5}$$

Posons ensuite:

$$B = \sum_{Y=0}^{m-K-2} \left[(m-K-Y+1)^n - (m-K-Y)^n \right]$$

$$= \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m-K-Y+1)^n - \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m-K-Y)^n .$$

En faisant la substitution $Y = Y'-1$ dans la seconde somme, on peut écrire:

$$B = \sum_{Y=0}^{m-K-2} (m-Y-K+1)^n - \sum_{Y=1}^{m-K-1} (m-Y-K+1)^n$$

$$= (m-K+1)^n - (m-m+K+1-K+1)^n$$

$$B = (m-K+1)^n - 2^n . \tag{1.2.6}$$

Posons enfin:

$$C = \sum_{X=1}^{K-1} \left[(K-X+2)^n - (K-X+1)^n \right]$$

$$= \sum_{X=1}^{K-1} (K-X+2)^n - \sum_{X=1}^{K-1} (K-X+1)^n .$$

En faisant la substitution $X = X'+1$ dans la première somme, on peut écrire:

$$C = \sum_{X=0}^{K-2} (K-X+1)^n - \sum_{X=1}^{K-1} (K-X+1)^n$$

$$= (K+1)^n - (K-K+1+1)^n$$

$$C = (K+1)^n - 2^n . \tag{1.2.7}$$

En remplaçant dans l'expression initiale (1.2.2) les valeurs trouvées pour A, B et C en (1.2.5), (1.2.6) et (1.2.7) respectivement, on obtient:

$$\sum_{Y=0}^{m-K+1} \sum_{X=1}^{K} P(X, Y) = \frac{1}{m^n} \left[m^n - (K+1)^n - (m-K+1)^n + 2^n \right]$$

$$+ \frac{1}{m^n} \left[(m-K+1)^n - 2^n \right]$$

$$+ \frac{1}{m^n} \left[(K+1)^n - 2^n \right]$$

$$+ \left(\frac{2}{m} \right)^n$$

$$= \frac{m^n}{m^n}$$

$$= 1 .$$

1.2.3 *Calcul de la valeur moyenne de* $x+y = z$

Calculons maintenant la valeur moyenne de $x+y = z$ que nous désignerons par $E(z)$.

Rappelons que si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont les valeurs que peut prendre une variable aléatoire x, la valeur moyenne de x est donnée par:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i X_i$$

p_i étant la probabilité que x soit égale à X_i. Par conséquent il s'agit de déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $x+y = z$ et les probabilités correspondantes.

Supposons pour fixer les idées que:

$$K < m - K - 1 .$$

Pour $Z < K$ il y a Z manières d'obtenir une somme $X+Y$ égale à Z:

$$\begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ . \\ Z \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} Z-1 \\ Z-2 \\ . \\ . \\ 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Par conséquent la valeur moyenne de z, $E(z)$, sera constituée d'un premier terme qui sera le suivant:

$$\sum_{Z=1}^{K-1} \frac{Z^2}{m^n} \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n \right] . \tag{1.2.8}$$

Pour les valeurs de Z telles que

$$K \leqq Z \leqq m - K - 1$$

on peut résumer les différentes manières d'obtenir une somme égale à K, $K+1$, ..., $m-K-1$ par les tableaux suivants:

$$\begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & K-1 \\ 2 & K-2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K-1 & 1 \\ K & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & K \\ 2 & K-1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K-1 & 2 \\ K & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \begin{bmatrix} 1 & m-K-2 \\ 2 & m-K-3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K-1 & m-2K \\ K & m-2K-1 \end{bmatrix}$$

En se reportant aux formules (1.2.1), on voit que dans chacun de ces tableaux les $(K-1)$ premières manières d'obtenir Z ont une probabilité égale à

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Par contre les dernières combinaisons ont une probabilité donnée par:

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right].$$

Par conséquent la valeur moyenne $E(z)$ comprendra encore les deux termes suivants:

$$\frac{1}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-K-1}(K-1)Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$

$$+\frac{1}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-K-1}\left[Z(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]. \tag{1.2.9}$$

Pour les valeurs de Z telles que

$$m-K \leqslant Z \leqslant m-2$$

on peut résumer les différentes manières d'obtenir une somme égale à $m-K$, $m-K-1$, ..., $m-2$ par les tableaux suivants:

$$\begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array} \quad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m-K-1 \\ 2 & m-K-2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & m-2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & m-K-1 \\ 3 & m-K-2 \\ \cdot & \cdot \\ K & m-2K+1 \end{bmatrix} \ldots\ldots \quad \begin{bmatrix} K-1 & m-K-1 \\ K & m-K-2 \end{bmatrix}$$

En considérant ces tableaux et en tenant compte des formules (1.2.1), on voit que le nombre de fois où la probabilité est donnée par

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$

est égal à $(m-Z-2)$;

et celui où la probabilité est donnée par

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

est égal à 2.

Il en résulte que $E(z)$ contiendra encore les deux termes suivants:

$$\frac{1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{m-2}(m-Z-2)\,Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$

$$+\frac{1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{m-2} 2\,Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]. \tag{1.2.10}$$

Enfin $E(z)$ comprendra encore le dernier terme

$$\left(\frac{2}{m}\right)^n(m-1). \tag{1.2.11}$$

En additionnant les expressions (1.2.8), (1.2.9), (1.2.10) et (1.2.11), on obtiendra la valeur moyenne $E(z)$:

$$\begin{aligned}
E(z) = {} & \frac{1}{m^n}\sum_{Z=1}^{K-1} Z^2\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \\
& + \frac{1}{m^n}(K-1)\sum_{Z=K}^{m-K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \\
& + \frac{1}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] \\
& + \frac{1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{m-2}(m-Z-2)\,Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \\
& + \frac{2}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + (m-1)\left(\frac{2}{m}\right)^n.
\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

Considérons séparément les différentes sommes constituant le second membre; posons:

$$A = \sum_{Z=1}^{k-1} Z^2\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Après quelques calculs simples on obtient:

$$A = m^n - K^2(m-K+1)^n + (K-1)^2(m-K)^n + 2\sum_{Z=1}^{K-1}(m-Z)^n . \qquad (1.2.13)$$

Posons ensuite:

$$B = \sum_{Z=K}^{m-K-1} Z\left[m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Quelques manipulations permettent d'obtenir le résultat:

$$B = K(m-K+1)^n - (K-1)(m-K)^n - (m-K)(K+1)^n + (m-K-1)K^n . \qquad (1.2.14)$$

Laissons un instant de côté la troisième somme et considérons la quatrième somme de (1.2.12); en posant

$$C = \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z(m-Z-2)\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$

et en effectuant quelques calculs élémentaires on arrive à une forme plus simple:

$$C = (m-K)(K-2)(K+1)^n - (m-K-1)(K-1)K^n + (m-1)2^n - 2\sum_{Z=m-K}^{m-2}(m-Z)^n . \qquad (1.2.15)$$

Considérons maintenant les deux sommes qui restent, c'est-à-dire la troisième et la cinquième; pour ces deux sommes les termes étant semblables, on peut écrire:

$$\sum_{Z=K}^{m-K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + 2\sum_{Z=m-K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$
$$= \sum_{Z=K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right].$$

Posons alors:

$$D = \sum_{Z=K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

qui se réduit à:

$$D = K(m-K+1)^n - (m-1)2^n + \sum_{Z=K}^{m-2}(m-Z)^n \qquad (1.2.16)$$

et

$$E = \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

qui peut aussi être mis sous la forme:

$$E = (m-K)(K+1)^n - (m-1)\,2^n + \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z)^n . \qquad (1.2.17)$$

En utilisant les notations ci-dessus, on voit facilement que

$$E(z) = \frac{1}{m^n}\Big[A + (K-1)B + C + D + E + (m-1)\,2^n\Big].$$

Remplaçons A, B, C, D et E par les expressions obtenues en (1.2.13), (1.2.14), (1.2.15), (1.2.16) et (1.2.17) respectivement:

$$\begin{aligned} E(z) = \frac{1}{m^n}\Big[& m^n - K^2(m-K+1)^n + (K-1)^2(m-K)^n + K(K-1)(m-K+1)^n \\ & - (K-1)^2(m-K)^n - (K-1)(m-K)(K+1)^n + (K-1)(m-K-1)\,K^n \\ & + (m-K)(K-2)(K+1)^n - (m-K-1)(K-1)\,K^n + (m-1)\,2^n \\ & + K(m-K+1)^n - (m-1)\,2^n + (m-K)(K+1)^n - (m-1)\,2^n \\ & + (m-1)\,2^n + \sum_{Z=1}^{K-1} (m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} (m-Z)^n \Big]. \end{aligned}$$

Après quelques mises en évidence et réduction de termes semblables, on obtient finalement l'expression relativement simple suivante:

$$E(z) = \frac{1}{m^n}\Big[m^n + \sum_{Z=1}^{K-1} (m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} (m-Z)^n\Big]. \qquad (1.2.18)$$

Nous avons établi la formule (1.2.18) en supposant que $K < m-K-1$. Nous ne donnerons pas tous les calculs pour le cas où

$$K > m-K-1$$

mais nous nous contenterons de donner la formule de base analogue à la formule (1.2.12).

Supposons donc que $K > m-K-1$ (fig. 3):

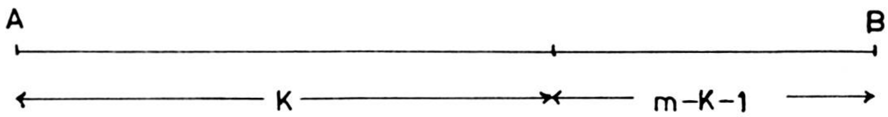


Fig. 3

Pour $Z \leq m-K-1$ les différentes possibilités peuvent se résumer par les tableaux suivants:

$$
\begin{array}{c}\underline{X}\;\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\\ Z=1\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\underline{X}\;\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\\ Z=2\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\underline{X}\;\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\\ Z=3\end{array}
\quad \cdots\cdots \quad
\begin{array}{c}\underline{X}\qquad\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & m-K-3\\ 2 & m-K-4\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ m-K-2 & 0\end{bmatrix}\\ Z=m-K-2\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\underline{X}\qquad\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & m-K-2\\ 2 & m-K-3\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ m-K-1 & 0\end{bmatrix}\\ Z=m-K-1\end{array}
$$

On voit que le nombre de combinaisons dans chaque tableau est égal à Z. Par conséquent $E(z)$ est composé d'un premier terme:

$$\frac{1}{m^n}\sum_{Z=1}^{m-K-1} Z\,.\,Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right];$$

pour $m-K \leqq Z \leqq K-1$ les différentes possibilités sont données par les tableaux ci-dessous:

$$
\begin{array}{c}\underline{X}\qquad\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}1 & m-K-1\\ 2 & m-K-2\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ m-K & 0\end{bmatrix}\\ Z=m-K\end{array}
\quad
\begin{array}{c}\underline{X}\qquad\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}2 & m-K-1\\ 3 & m-K-2\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ m-K+1 & 0\end{bmatrix}\\ Z=m-K+1\end{array}
\quad \cdots\cdots \quad
\begin{array}{c}\underline{X}\qquad\underline{Y}\\ \begin{bmatrix}2K-m & m-K-1\\ 2K-m+1 & m-K-2\\ \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\\ K-1 & 0\end{bmatrix}\\ Z=K-1\end{array}
$$

Dans chaque tableau il y a $(m-K)$ combinaisons donnant le Z correspondant. Mais la probabilité des premières combinaisons de chaque tableau est donnée par:

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

tandis que celles des $(m-K-1)$ autres est donnée par:

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Par conséquent on aura deux autres termes qui sont:

$$\frac{(m-K-1)}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z)^n\right]$$

$$+\quad \frac{1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right].$$

Pour $K \leqq Z \leqq m-2$ les différentes possibilités sont illustrées par les tableaux suivants:

$$\begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \underline{X} & \underline{Y} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2K-m+1 & m-K-1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2K-m+2 & m-K-1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} K-1 & m-K-1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ K & m-K-2 \end{bmatrix}$$

$$Z = K \qquad\qquad Z = K+1 \qquad\qquad Z = m-2$$

Chaque tableau contient $(m-Z)$ combinaisons; pour la première et la dernière de chaque tableau la probabilité est donnée par:

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right];$$

pour les $(m-Z-2)$ autres par

$$\frac{1}{m^n}\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Par conséquent nous aurons les deux nouveaux termes:

$$\frac{1}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-2}(m-Z-2)Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$

$$+\frac{2}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-2}Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right].$$

Pour $Z = m-1$ nous avons:

$$(m-1)\left(\frac{2}{m}\right)^n.$$

La valeur de $E(z)$ sera donc donnée par l'expression:

$$\begin{aligned} E(z) = {} & \frac{1}{m^n}\sum_{Z=1}^{m-K-1} Z^2\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \\ & + \frac{m-K-1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \\ & + \frac{1}{m^n}\sum_{Z=m-K}^{K-1} Z\left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] \\ & + \frac{1}{m^n}\sum_{Z=K}^{m-2} Z(m-Z-2)\left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{m^n} \sum_{Z=K}^{m-2} Z \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n \right]$$

$$+ \frac{1}{m^n} (m-1)\, 2^n \,. \tag{1.2.19}$$

En effectuant des calculs en tous points analogues à ceux que nous avons effectués après avoir établi la formule (1.2.12), on parvient à l'expression suivante de $E(Z)$:

$$E(z) = \frac{1}{m^n} \left[m^n + \sum_{Z=1}^{K-1} (m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} (m-Z)^n \right].$$

Comme on peut le constater, on trouve la même expression que lorsqu'on suppose que $K < m-K-1$.

Passons maintenant au calcul de la variance de z.

1.2.4 *Calcul de la variance de* z

Désignons par V (x) la variance de x. Par définition

$$V(x) = E[x - E(x)]^2 \,.$$

Un résultat classique donne une expression un peu différente de $V(x)$:

$$V(x) = E(x^2) - E^2(x) \,.$$

Nous utiliserons cette dernière relation pour calculer la variance de z.

Comme nous l'avons fait pour le calcul de la valeur moyenne, nous allons traiter séparément les deux cas où K est inférieur et supérieur à $m-K-1$.

Supposons que $K < m-K-1$. Pour avoir $E(z^2)$, il suffit de nous reporter à la relation (1.2.12) et de remplacer dans cette relation Z par Z^2. En procédant ainsi on obtient:

$$E(z^2) = \frac{1}{m^n} \left\{ \sum_{Z=1}^{K-1} Z^3 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n \right] \right.$$

$$+ (K-1) \sum_{Z=1}^{m-K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^2 \right]$$

$$+ \sum_{Z=K}^{m-K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n \right]$$

$$+ \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z-2)\, Z^2 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n \right]$$

$$+ 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n \right]$$

$$\left. + (m-1)^2\, 2^n \right\} . \tag{1.2.20}$$

Comme nous l'avons fait dans le cas de $E(z)$, nous allons envisager séparément les différentes sommes du second membre:

$$A = \sum_{Z=1}^{K-1} Z^3 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Après quelques transformations, cette première expression se réduit à:

$$A = m^n\left[2(K-1)^3 - (K-2)^3 + 6(K-1)\right](m-K+1)^n \tag{1.2.21}$$
$$+ 6 \sum_{Z=1}^{K-1} Z(m-Z)^n + (K-1)^3(m-K)^n .$$

Posons ensuite:

$$B = \sum_{Z=K}^{m-K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^2\right].$$

En effectuant certaines transformations, ce terme devient:

$$B = K^2(m-K+1)^n + \left[(K+1)^2 - 2K^2 - 2\right](m-K)^n$$
$$- \left[2(m-K-1)^2 - (m-K-2)^2 + 2\right](K+1)^n$$
$$+ (m-K-1)^2 K^n + 2 \sum_{Z=K}^{m-K-1} (m-Z)^n . \tag{1.2.22}$$

Laissons un instant de côté la troisième somme et considérons la quatrième:

$$C = \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z-2) Z^2 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right].$$

Elle peut être mise sous la forme suivante:

$$C = (m-K)^2(K-2)(K+1)^n + \left[(m-K+1)^2(K-3) - 2(m-K)^2(K-2)\right.$$
$$\left.+ 4m - 6K + 4\right] K^n + \left[(m-3)^2 + 4m - 8\right] 2^n$$
$$+ 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-3Z-2)(m-Z)^n . \tag{1.2.23}$$

Quant à la troisième et à la cinquième somme, elles portent sur des termes semblables. On peut donc écrire:

$$\sum_{Z=K}^{m-K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] =$$
$$\sum_{Z=K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right].$$

En posant:

$$D = \sum_{Z=K}^{m-K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

et

$$E = \sum_{Z=m-K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$

et en effectuant quelques transformations, on obtient finalement les deux expressions suivantes:

$$D = K^2 (m-K+1)^n - \left[(m-2)^2 + 2m - 3\right] 2^n + \sum_{Z=K}^{m-2} (2Z+1)(m-Z)^n$$

$$E = (m-K)^2 (K+1)^n - \left[(m-2)^2 + 2m - 3\right] 2^n + \sum_{Z=m-K}^{m-2} (2Z+1)(m-Z)^n .$$

En résumé, à l'aide des notations employées ci-dessus, $E(z^2)$ peut s'écrire:

$$E(z^2) = \frac{1}{m^n}\left[A + (K-1)B + C + D + E + (m-1)^2 2^n\right].$$

En remplaçant A, B, C, D, E par leurs valeurs données par (1.2.21), (1.2.22), (1.2.23), (1.2.24) et (.1.2.25) respectivement, on obtient:

$$\begin{aligned}
E(z^2) = \frac{1}{m^n}\Big\{ & m^n - \left[2(K-1)^3 - (K-2)^3 + 6(K-1)\right](m-K+1)^n \\
& + (K-1)^3 (m-K)^n + 6 \sum_{Z=1}^{K-1} Z(m-Z)^n \\
& + K^2 (K-1)(m-K+1)^n + [(K+1)^2 - 2K^2 - 2](K-1)(m-K)^n \\
& - [2(m-K-1)^2 - (m-K-2)^2 + 2](K-1)(K+1)^n \\
& + (K-1)(m-K-1)^2 K^n + 2(K-1) \sum_{Z=K}^{m-K-1} (m-Z)^n \\
& + (m-K)^2 (K-2)(K+1)^n + [(m-K+1)^2 (K-3) - 2(m-K)^2 (K-2) \\
& + 4m - 6K + 4] K^n + [(m-3)^2 + 4m - 8] 2^n + \\
& + 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-3Z-2)(m-Z)^n + K^2 (m-K+1)^n \\
& - \left[(m-2)^2 + 2m - 3\right] 2^n + \sum_{Z=K}^{m-2} (2Z+1)(m-Z)^n
\end{aligned}$$

$$+ (m-K)^2 (K+1)^n - \left[(m-2)^2 + 2m - 3\right] 2^n$$
$$\left. + \sum_{Z=m-K}^{m-2} (2Z+1)(m-Z)^n + (m-1)\, 2^n \right\} .$$

Aprés un certain nombre d'opérations algébriques, dont nous ne donnons pas le détail, on parvient à la forme simple suivante:

$$V(z) = 1 + 6 \sum_{Z=1}^{K-1} Z \left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=K}^{m-K-1} (2K+2Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n$$
$$+ 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z) . \qquad (1.2.26)$$

Passons maintenant au cas où $K \leqq m-K-1$. En se reportant à la formule (1.2.19), on pourra écrire:

$$E(z^2) = \frac{1}{m^n} \left\{ \sum_{Z=1}^{m-K-1} Z^3 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right] \right.$$
$$+ (m-K-1) \sum_{Z=m-K}^{K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$
$$+ \sum_{Z=m-K}^{K-1} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right]$$
$$+ \sum_{Z=K}^{m-2} Z^2 (m-Z-2) \left[(m-Z+1)^n - 2(m-Z)^n + (m-Z-1)^n\right]$$
$$\left. + 2 \sum_{Z-K}^{m-2} Z^2 \left[(m-Z+1)^n - (m-Z)^n\right] + (m-1)^2\, 2^n \right\} .$$

A partir de là, les calculs étant analogues à ceux que nous avons effectués dans le cas où $K < m-K-1$, nous nous dispenserons d'en donner les détails. Donnons seulement la valeur finale de $V(z)$:

$$V(z) = 1 + 6 \sum_{Z=1}^{m-K-1} Z \left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=m-K}^{K-1} (2m-2K+2Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n$$
$$+ 2 \sum_{Z=K}^{m-2} (m-Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z) . \qquad (1.2.27)$$

En comparant (1.2.26) et (1.2.27), on voit que suivant que K est inférieur ou supérieur à $(m-K-1)$, la formule donnant $V(z)$ est différente, ce qui n'était pas le cas pour la valeur moyenne $E(z)$.

Dans ce deuxième paragraphe, nous avons étudié le cas discret; nous avons établi les formules donnant les moments d'ordre 1 et 2, ou plus exactement le moment d'ordre 1 et le moment centré d'ordre 2 de la distribution de z. Il serait évidemment intéressant, si l'on voulait avoir une connaissance plus complète de cette distribution, de calculer les moments d'ordre supérieur. Toutefois, pour l'usage que nous voulons en faire, il nous a paru suffisant de nous limiter à ces calculs.

Les formules, du fait surtout que l'on a affaire à des sommes, sont d'une application assez malaisée. Il nous a paru intéressant de voir ce qu'on obtenait en supposant que les variables envisagées étaient continues. Cette étude fait l'objet du paragraphe qui suit.

1.3 *Cas continu*

Passons maintenant à l'étude du cas continu: nous pouvons poser le problème de la façon suivante: soit $\overline{AB}$ un segment de longueur unité et un point C situé à une distance λ $(0<\lambda<1)$ de l'extrémité gauche de ce segment; on choisit n points au hasard dans $\overline{AB}$. Soit D et E respectivement les points les plus proches à gauche et à droite de C. Posons

$$\overline{DC} = X \qquad \text{et} \qquad \overline{CE} = Y.$$

1.3.1 *Calcul de la fonction de répartition et de la densité de probabilité*

Soit $F(x, y)$ la fonction de répartition de X et Y, c'est-à-dire

$$F(x, y) = \text{Prob}(X<x,\ Y<y)$$

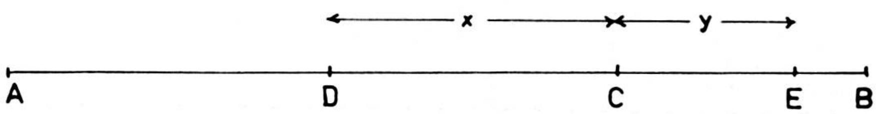


Fig. 4

Considérons les divers événements:

$$E_1 = \{\text{Il tombe au moins un point dans } \overline{DC}\}$$
$$E_2 = \{\text{Il tombe au moins un point dans } \overline{CE}\}$$
$$E_3 = \{\text{Il tombe au moins un point dans } \overline{DC} \textit{ ou } \text{dans } \overline{CE}\}$$
$$E_4 = \{\text{Il tombe au moins un point dans } \overline{DC} \textit{ et } \text{dans } \overline{CE}\}.$$

Il est évident, d'après le théorème des probabilités totales, que:

$$P(E_3) = P(E_1) + P(E_2) - P(E). \tag{1.3.1}$$

On voit facilement que les probabilités de E_1, E_2 et E_3 sont données par:

$$P(E_1) = 1 - (1-x)^n$$

$$P(E_2) = 1 - (1-y)^n$$
$$P(E_3) = 1 - (1-x-y)^n$$

par conséquent, en remplaçant dans (1.3.1)

$$1 - (1-x-y)^n = 1 - (1-x)^n + 1 - (1-y)^n - P(E)\,.$$

D'où

$$P(E) = [1 - (1-x)^n] + [1 - (1-y)^n] - [1 - (1-x-y)^n]$$
$$P(E) = 1 - (1-x)^n - (1-y)^n + (1-x-y)^n\,.$$

$P(E)$ est égale à $F(x, y)$ lorsque $x < \lambda$ et $y < 1-\lambda$.

Examinons les autres cas possibles:

1. $x = \lambda$ et $y = 1-\lambda$;
   il est évident que dans ce cas $F(x, y) = 1$.

2. $x = \lambda$ et $y < 1-\lambda$;

   ce cas peut être envisagé comme composé de deux événements E' et E'':

$$E' = \{\text{Il ne tombe aucun point dans } \overline{AC}\}$$
$$E'' = \{\text{Il tombe au moins un point dans } \overline{CE}\}\,.$$

   En vertu du théorème des probabilités composées, la probabilité P de ce cas est:

$$P = P(E').\,P(E'' \text{ sachant que } E' \text{ est réalisé})\,.$$

   Or il est évident que:

$$P(E') = (1-\lambda)^n$$

   et $P(E''$ sachant que E' est réalisé)

$$= 1 - \left(\frac{1 - \lambda - y}{1 - \lambda}\right)^n$$

   par conséquent:

$$P = (1-\lambda)^n \left[1 - \frac{(1-\lambda-y)^n}{(1-\lambda)^n}\right]$$
$$P = (1-\lambda)^n - (1-\lambda-y)^n\,.$$

3. $x < \lambda$ et $y = 1-\lambda$;

par un raisonnement analogue, on trouve que

$$P = \lambda^n - (\lambda-x)^n\,.$$

La fonction $F(x, y)$ est ainsi entièrement définie. On peut résumer ces différents cas en écrivant:

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \lambda \text{ et } y = 1-\lambda \\ (1-\lambda)^n - (1-\lambda-y)^n & \text{si } x = \lambda \text{ et } y < 1-\lambda \\ \lambda^n - (\lambda-x)^n & \text{si } x < \lambda \text{ et } y = 1-\lambda \\ 1 - (1-x)^n - (1-y)^n + (1-x-y)^n & \text{si } x < \lambda \text{ et } y < 1-\lambda . \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Pour calculer la valeur moyenne de $x+y$, il faut calculer la densité de probabilité $f(x, y)$. On a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 0 && \text{lorsque } x = \lambda \text{ et } y = 1-\lambda \\ f(x, y) &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} && \text{lorsque } x = \lambda \text{ et } y < 1-\lambda \\ f(x, y) &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} && \text{lorsque } x < \lambda \text{ et } y = 1-\lambda \\ f(x, y) &= \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} && \text{lorsque } x < \lambda \text{ et } y < 1-\lambda \end{aligned}$$

par conséquent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} &= n(1-\lambda-y)^{n-1} \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} &= n(\lambda-x)^{n-1} \\ \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x\, \partial y} &= (n-1)(1-x-y)^{n-2} . \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

1.3.2 *Vérification*

Comme nous l'avons fait dans le cas discret, montrons que la somme des probabilités vaut 1; cela revient à montrer que l'intégrale de la densité de probabilité étendue à l'intervalle $\overline{AB}$ vaut 1:

$$\underset{AB}{f}\ (x, y)\, dxdy = 1 .$$

En tenant compte des formules (1.3.3), on peut écrire:

$$\int_{AB} f(x, y)\, dxdy = n(n-1) \int_0^{1-\lambda} \int_0^{\lambda} (1-x-y)^{n-2}\, dxdy + n \int_0^{1-\lambda} (1-\lambda-y)^{n-1}\, dy$$
$$+ n \int_0^{\lambda} (\lambda-x)^{n-1}\, dx .$$

Or

$$\int_0^{1-\lambda}\int_0^{\lambda}(1-x-y)^{n-2}\,dxdy = \int_0^{1-\lambda}\left\{\left[-\frac{(1-x-y)^{n-1}}{n-1}\right]\Bigg|_0^{\lambda}\right\}dy$$

$$= \frac{1}{n-1}\int_0^{1-\lambda}\left\{-(1-\lambda-y)^{n-1}+(1-y)^{n-1}\right\}dy$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\frac{(1-\lambda-y)^n}{n}-\frac{(1-y)^n}{n}\right\}\Bigg|_0^{1-\lambda}$$

$$\int_0^{1-\lambda}\int_0^{\lambda}(1-x-y)^{n-2}\,dxdy = \frac{1}{n(n-1)}\left\{-(1-\lambda)^n-\lambda^n+1\right\}$$

$$\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy = \frac{-(1-\lambda-y)^n}{n}\Bigg|_0^{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)^n}{n}$$

$$\int_0^{1-\lambda}(\lambda-x)^{n-1}\,dx = \frac{-(\lambda-x)^n}{n}\Bigg|_0^{\lambda} = \frac{\lambda^n}{n}.$$

D'où

$$\int_{AB} f(x,y)\,dxdy = -(1-\lambda)^n-\lambda^n+1+(1-\lambda)^n+\lambda^n = 1.$$

1.3.3 *Calcul de la valeur moyenne de* x+y = z

Calculons maintenant l'espérance mathématique de $x+y$ par définition

$$E(z) = \int_{AB}(x+y)\,dF(x,y) = \int_{AB}(x+y)f(x,y)\,dxdy.$$

En considérant les formules (1.3.3), on obtient d'une façon plus explicite:

$$E(z) = n(n-1)\int_0^{1-\lambda}\int_0^{\lambda}(x+y)(1-x-y)^{n-2}\,dxdy + n\int_0^{1-\lambda}(\lambda+y)(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy$$
$$+ n\int_0^{\lambda}(x+1-\lambda)(\lambda-x)^{n-1}\,dx.$$

Envisageons séparément ces diverses intégrales:

$$n(n-1)\int_0^{1-\lambda}\int_0^{\lambda}(x+y)(1-x-y)^{n-2}\,dxdy$$

$$= n(n-1)\int_0^{1-\lambda} \left\{ \int_0^{\lambda} x(1-x-y)^{n-2}\,dx + y\int_0^{\lambda}(1-x-y)^{n-2}\,dx \right\} dy$$

$$= n(n-1)\int_0^{1-\lambda} \left\{ \frac{-x(1-x-y)^{n-1}}{n-1} - \left.\frac{(1-x-y)^n}{n(n-1)}\right|_0^{\lambda} - \left.\frac{y(1-x-y)^{n-1}}{n-1}\right|_0^{\lambda} \right\} dx$$

$$= n(n-1)\int_0^{1-\lambda} \left\{ \frac{-\lambda(1-\lambda-y)^{n-1}}{n-1} - \frac{(1-\lambda-y)^n}{n(n-1)} + \frac{(1-y)^n}{n(n-1)} \right.$$

$$\left. - \frac{y(1-\lambda-y)^{n-1}}{n-1} + \frac{y(1-y)^{n-1}}{n-1} \right\} dx$$

$$= -n\lambda\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy - \int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^n\,dy + \int_0^{1-\lambda}(1-y)^n\,dy$$

$$- n\int_0^{1-\lambda} y(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy + n\int_0^{1-\lambda} y(1-y)^{n-1}\,dy\,.$$

D'où

$$E(z) = -n\lambda\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy - \int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^n\,dy + \int_0^{1-\lambda}(1-y)^n\,dy$$

$$- n\int_0^{1-\lambda} y(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy + n\int_0^{1-\lambda} y(1-y)^{n-1}\,dy$$

$$+ n\lambda\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy + n\int_0^{1-\lambda} y(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy$$

$$+ n\int_0^{\lambda} x(\lambda-x)^{n-1}\,dx + n(1-\lambda)\int_0^{1-\lambda}(\lambda-x)^{n-1}\,dx\,.$$

Un calcul élémentaire de ces intégrales fournit le résultat final suivant:

$$E(z) = \frac{2}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}. \tag{1.3.4}$$

1.3.4 *Calcul de la variance de* x+y = z

Comme nous l'avons déjà signalé au paragraphe 1.2.4, la variance $V(z)$ peut être calculée en utilisant la relation:

$$V(z) = E(z^2) - E^2(z)\,. \tag{1.3.5}$$

En utilisant les formules (1.3.3), on peut écrire:

$$E(z^2) = n(n-1)\int_0^{1-\lambda}\int_0^{\lambda}(x+y)^2(1-x-y)^{n-1}\,dxdy$$
$$+\, n\int_0^{1-\lambda}(\lambda+y)^2(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy + n\int_0^{\lambda}(x+1-\lambda)^2(\lambda-x)^{n-1}\,dx\,.$$

Après réduction de l'intégrale double, on obtient:

$$E(z^2) = -\,n\lambda^2\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy - 2\lambda\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^n\,dy - \frac{2}{n+1}\int_0^{1-\lambda}(1-\lambda-y)^{n+1}\,dy$$
$$+\,\frac{2}{n+1}\int_0^{1-\lambda}(1-y)^{n+1}\,dy - 2n\lambda\int_0^{1-\lambda}y(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy$$
$$-\,2\int_0^{1-\lambda}y(1-\lambda-y)^n\,dy + 2\int_0^{1-\lambda}y(1-y)^n\,dy - n\int_0^{1-\lambda}y^2(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy$$
$$+\int_0^{1-\lambda}y^2(1-y)^{n-1}\,dy + n\int_0^{1-\lambda}(\lambda+y)^2(1-\lambda-y)^{n-1}\,dy$$
$$+\,n\int_0^{\lambda}(x+1-\lambda)^2(\lambda-x)^{n-1}\,dx\,.$$

Après le calcul des intégrales simples on arrive au résultat final:

$$E(z^2) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2(1-\lambda)\,\lambda^{n+1}}{n+1}$$
$$-\,\frac{4\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,. \tag{1.3.6}$$

Et alors, en remplaçant dans (1.3.5), $E(z^2)$ et $E(z)$ par les valeurs fournies par (1.3.) et (1.3.6) on obtient:

$$V(z) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2(1-\lambda)\,\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{4\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$-\,\frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \left[\frac{2}{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1}\right]^2. \tag{1.3.7}$$

Ainsi, comme dans le cas direct, nous avons obtenu les formules donnant la valeur moyenne $E(z)$ et la variance $V(z)$. Les calculs effectués pour les établir ont été beaucoup moins compliqués et la forme finale, comme on peut aisément le voir, est beaucoup plus maniable du fait que les sommes ont disparu.

Nous tenons, pour terminer, à remarquer que la méthode que nous avons envisagée pour établir ces formules aussi bien dans le cas discret que dans le cas continu, n'est pas la seule. Le professeur Kaelin nous a notamment indiqué une méthode qui, par le calcul séparé des espérances de X et Y et un raisonnement indirect, fournit une solution exigeant moins de calcul et, partant, plus élégante du problème.

1.4 *Passage du cas discontinu au cas continu par passage à la limite sur les formules finales du cas discontinu*

1.4.1 *Calcul pour $E(z)$*

Dans le cas discontinu nous avions obtenu (formule 1.2.18):

$$E_1(z) = \frac{1}{m^n}\left\{m^n + \sum_{Z=1}^{K-1}(m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1}(m-Z)^n\right\}$$

et dans le cas continu (formule 1.3.4):

$$E_2(z) = \frac{2}{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[2 - \lambda^{n+1} - (1-\lambda)^{n+1}\right].$$

Montrons que:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ m=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} E_1\left(\frac{z}{m}\right) = E_2(z).$$

Nous pouvons écrire:

$$E_1\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{1}{m}E_1(z) = \frac{1}{m^{n+1}}\left\{m^n + \sum_{Z=1}^{K-1}(m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1}(m-Z)^n\right\}$$

$$= \frac{1}{m} + \sum_{Z=1}^{K-1}\frac{1}{m}\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1}\frac{1}{m}\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n.$$

Déterminons:

$$A = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{Z=1}^{K-1} \frac{1}{m}\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n .$$

Posons

$$\frac{Z}{m} = x ,$$

lorsque

$$Z = 1 \qquad x = \frac{1}{m}$$

$$Z = K - 1 \qquad x = \frac{K-1}{m}$$

d'où

$$A = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{X=\frac{1}{m}}^{\frac{K-1}{m}} (1-x)^n \frac{1}{m} .$$

Par définition de l'intégrale définie pous pouvons écrire:

$$A = \int_0^{\lambda} (1-x)^n \, dx .$$

De même on aura

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{Z=1}^{m-K-1} \frac{1}{m}\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n = \int_0^{1-\lambda} (1-x)^n \, dx \cdot$$

Par conséquent

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} E_1\left(\frac{z}{m}\right) = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \left\{\frac{1}{m} + \sum_{Z=1}^{K-1} \frac{1}{m}\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} \frac{1}{m}\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n\right\}$$

$$= \int_0^{\lambda} (1-x)^n \, dx + \int_0^{1-\lambda} (1-x)^n \, dx$$

$$= -\left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^{\lambda} - \left.\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^{1-\lambda}$$

$$= -\frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{2}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{\lambda^{n+1}}{n+1}$$

$$= E_2(z) .$$

1.4.2 *Calcul pour $V(z)$*

Dans le cas discret nous avions deux formules suivant que K était inférieur ou supérieur à $m-K-1$:

Pour $K < m-K-1$, nous avions obtenu (voir formule 1.2.26):

$$V_1'(z) = 1 + 6 \sum_{Z=1}^{K-1} Z\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} (2K+2Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n$$
$$+ 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z)$$

et pour $K > m-K-1$ (voir formule 1.2.27):

$$V_1''(z) = 1 + 6 \sum_{Z=1}^{m-K-1} Z\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=m-K}^{K-1} (2m-2K+2Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n$$
$$+ 2 \sum_{Z=K}^{m-2} (m-Z-1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z) .$$

Dans le cas continu nous avions (voir formule 1.3.7):

$$V_2(z) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2(1-\lambda)\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{4\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$- \frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - E^2(z) .$$

Montrons tout d'abord que

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1'\left(\frac{z}{m}\right) = V_2(z) .$$

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1'\left(\frac{z}{m}\right) = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{w}=\lambda}} \frac{1}{m^2} V_1'(z)$$

$$= \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \left\{1 + 6 \sum_{Z=1}^{K-1} Z\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n + \sum_{Z=K}^{m-K-1} (2K+2Z-1)\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n\right.$$

$$\left. + 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} (m-Z-1)\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z)\right\} \frac{1}{m^2}$$

$$= \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \left\{\frac{1}{m^2} + 6 \sum_{Z=1}^{K-1} \frac{Z}{m}\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m} + \sum_{Z=K}^{m-K} \left(\frac{2K}{m} + \frac{2Z}{m} - \frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m}\right.$$

$$\left. + 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} \left(1-\frac{Z}{m} - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} E^2(z)\right\} \qquad (1.4.1)$$

Considérons séparément les diverses sommes du second membre. Posons d'abord:

$$A = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} 6 \sum_{Z=1}^{K-1} \frac{Z}{m}\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m}.$$

En faisant la substitution $\frac{Z}{m} = x$, on obtient, lorsque

$$Z = 1 \qquad x = \frac{1}{m}$$

$$Z = K-1 \qquad x = \frac{K-1}{m}.$$

Par conséquent:

$$A = 6 \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{x=\frac{1}{m}}^{\frac{K-1}{m}} x(1-x)^n \cdot \frac{1}{m}$$

$$= 6 \int_0^\lambda x (1-x)^n \, dx \, .$$

En intégrant par parties on obtient:

$$A = - \frac{6\lambda (1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{6 (1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{6}{(n+1)(n+2)} \, . \qquad (1.4.2)$$

Posons ensuite

$$B = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{Z=K}^{m-K} \left(2\frac{K}{m} + 2\frac{Z}{m} - \frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m} \, .$$

En faisant la substitution: $\frac{Z}{m} = x$, on peut écrire:

$$B = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{x=\lambda}^{1-\lambda} \left(2\lambda + 2x - \frac{1}{m}\right)(1-x)^n \cdot \frac{1}{m}$$

$$= 2 \int_\lambda^{1-\lambda} (\lambda + x)(1-x)^n \, dx$$

et après une intégration par parties:

$$B = - \frac{2\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{4\lambda (1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \, . \qquad (1.4.3)$$

Posons enfin

$$C = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} 2 \sum_{Z=m-K}^{m-2} \left(1 - \frac{Z}{m} - \frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{Z}{m}\right)^n \cdot \frac{1}{m}$$

en faisant la substitution $x = \frac{Z}{m}$, on obtient

$$C = \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \sum_{x=1-\lambda}^{1-\frac{2}{m}} \left(1 - x - \frac{1}{m}\right)(1-x)^n \cdot \frac{1}{m}$$

$$= 2\int_{1-\lambda}^{1} (1-x)^{n+1}\, dx$$

$$= + \frac{2\lambda^{n+2}}{n+2}. \tag{1.4.4}$$

Remplaçons les valeurs de A, B, C données par (1.4.2), (1.4.3) et (1.4.4) dans la formule (1.4.1), on obtient:

$$\begin{aligned}\lim V_1'(z) = & - \frac{6\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{6(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{6}{(n+1)(n+2)} \\ & - \frac{2\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{4\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \\ & + \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2\lambda^{n+2}}{n+2} - \lim E^2\left(\frac{z}{m}\right) \\ = & - \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda^{n+1}}{n+1} \\ & - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2\lambda^{n+2}}{n+2} - \lim E^2\left(\frac{z}{m}\right)\end{aligned}$$

et en modifiant l'ordre des termes

$$\begin{aligned}\lim V_1'(z) = & \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{2\lambda^{n+1}}{n+1} \\ & = - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2\lambda^{n+2}}{n+2} - \lim E^2\left(\frac{z}{m}\right).\end{aligned}$$

Pour retrouver la formule (1.3.7) du cas continu, il faut prouver que:

$$- \frac{2\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2\lambda^{n+2}}{n+2} = - \frac{2\lambda^{n+1}(1-\lambda)}{n+1} - \frac{4\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

c'est-à-dire que:

$$\frac{\lambda^{n+1}}{n+1} + \frac{\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{\lambda^{n+2}}{n+2} - \frac{(1-\lambda)\,\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = 0.$$

Or en mettant les différents termes au même dénominateur et en réduisant les termes semblables on obtient successivement:

$$\lambda^{n+1} \cdot \frac{n+2-\lambda-(n+1)\lambda-(n+2)(1-\lambda)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$\lambda^{n+1} \cdot \frac{n + 2 - \lambda - n\lambda - \lambda - n + n\lambda - 2 + 2\lambda}{(n+1)(n+2)} = 0$$

ce qui montre que

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1'\left(\frac{z}{m}\right) = V_2(z) .$$

La démonstration que

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1'' \frac{z}{m} = V_2(z)$$

est toute à fait analogue.

C'est pourquoi nous n'en donnons que les étapes principales:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1''\left(\frac{z}{m}\right) = \frac{1}{m^2} \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1''(z)$$

$$= \frac{1}{m_2} \lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} \left\{ 1 + 6 \sum_{Z=m-K}^{K-1} Z\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n \right.$$

$$+ \sum_{Z=m=K}^{K-1} (2m - 2K - 2Z - 1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n$$

$$\left. + 2 \sum_{Z=m-K}^{K-1} (m - Z - 1)\left(1 - \frac{Z}{m}\right)^n - E^2(z) \right\} .$$

On a donc en définitive:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ K=\infty \\ \frac{K}{m}=\lambda}} V_1''\left(\frac{z}{m}\right) = - \frac{6\lambda^{n+1}(1-\lambda)}{n+1} - \frac{6\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{6}{(n+1)(n+2)}$$

$$- \frac{2(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} + \frac{4(1-\lambda)\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

$$+ \frac{2\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{n+2} - \lim \frac{1}{m^2} E^2(z)$$

$$= \frac{6}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(1-\lambda)\lambda^{n+1}}{n+1} - \frac{4\lambda^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{2(1-\lambda)^{n+1}}{n+1}$$

$$- \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{n+2} - \lim \frac{1}{m^2} E^2(z) .$$

Il reste à montrer que:

$$- \frac{2\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{4(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = - \frac{2(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{2(1-\lambda)^{n+2}}{n+2}$$

c'est-à-dire que:

$$- \frac{\lambda(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-\lambda)^{n+2}}{n+2} = 0 .$$

Or on voit facilement que le premier membre peut s'écrire:

$$\frac{(1-\lambda)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \Big[-(n+2)\lambda - (1-\lambda) + n + 2 - (n+1)(1-\lambda) \Big] =$$

$$= \frac{(1-\lambda)^{n+1}}{(n+1)(n+2)} (-n\lambda - 2\lambda - 1 + \lambda + n + 2 - n + n\lambda - 1 + \lambda) = 0 .$$

ce qui achève la démonstration.

Nous constatons ainsi que lorsqu'on passe à la limite, les deux formules du cas discret donnent le résultat que nous avions obtenu dans le cas continu.

Les résultats obtenus dans les deux derniers paragraphes nous amènent à faire la remarque suivante en guise de conclusion:

Dans la mesure du possible, c'est-à-dire dès que l'imprécision introduite ne sera pas trop grande, on aura avantage à utiliser les formules du cas continu.

Chapitre 2

PROBLÈME DANS L'ESPACE E_2

2.1 *Remarques préliminaires*

Dès que l'on passe au plan, le problème se complique fortement. En effet, alors que sur la droite il ne peut y avoir qu'un point à droite ou à gauche du point donné, il y a dans le plan par rapport à un point donné une infinité non dénombrable de directions. Les difficultés apparaissent d'emblée lorsqu'on veut définir la valeur moyenne de l'aire de la « surface » ne contenant aucun point pris au hasard. Une méthode consisterait à tâcher de généraliser ce que l'on a fait sur la droite; c'est-à-dire à considérer un rectangle ABCD et un point P donné, situé à l'intérieur; on envisagerait alors une partition de $\overline{AB}$ en un certain nombre m de segments égaux, une partition de $\overline{AD}$ en un certain nombre n de segments égaux. En convenant qu'un point « au hasard » serait obtenu en choisissant une abscisse (sur $\overline{AB}$) et une ordonnée (sur $\overline{AD}$) au hasard, on pourrait aussi définir le plus grand rectangle « centré » en P et ne contenant aucun point au hasard comme le rectangle $ABCD$ passant par les points les plus proches de P relativement aux deux directions $\overline{AB}$ et $\overline{AD}$.

En procédant de cette façon qui paraît pourtant assez simple, on arrive très rapidement à des calculs inextricables lorsqu'on veut calculer la valeur moyenne de l'aire du rectangle « centré » sur P.

Nous avons donc essayé de simplifier ce problème en l'envisageant d'une façon différente et sous un angle un peu plus pratique.

2.2 *Etude d'une solution*

Supposons que le contour limitant la portion du plan à laquelle nous nous intéressons, soit une courbe convexe fermée. Soit $ABCD$ un rectangle contenant cette

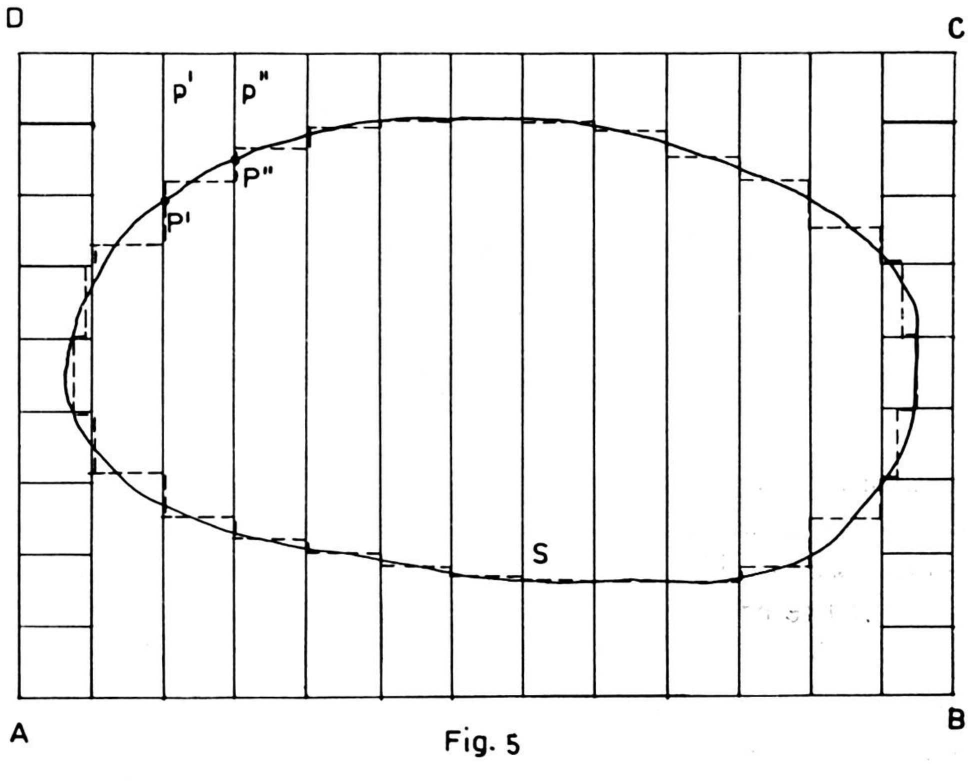


Fig. 5

courbe fermée. Envisageons une partition du segment $\overline{AB}$ en n intervalles égaux et traçons les parallèles à $\overline{AD}$ passant par les différents points de division du segment

$\overline{AB}$. Ces parallèles coupent le contour S. Soient p' et p'' deux parallèles voisines et P' et P'' les points d'intersection voisins de ces parallèles avec le contour S. Traçons le segment parallèle à $\overline{AB}$ situé à mi-distance de P' et P''. En procédant de cette façon pour toute paire d'intersections de parallèles voisines avec S, nous formons un polygone qui est une approximation du contour d'autant meilleure que le nombre n de divisions du côté $\overline{AB}$ est plus grand.

Remarquons toutefois que l'approximation devient mauvaise pour les portions du contour S dont les tangentes tendent à devenir parallèles au côté $\overline{AD}$ du rectangle.

Pour remédier à cet inconvénient, on peut dans ces zones défavorables procéder de la même façon que nous venons de faire, mais à l'aide de droites horizontales (fig. 5).

Le remplacement du contour par un polygone permet d'appliquer les formules que nous avons établies dans le plan. En effet, envisageons une bande et le segment $\overline{BD}$ de droite qui constitue l'approximation du contour dans la dite bande (fig. 6).

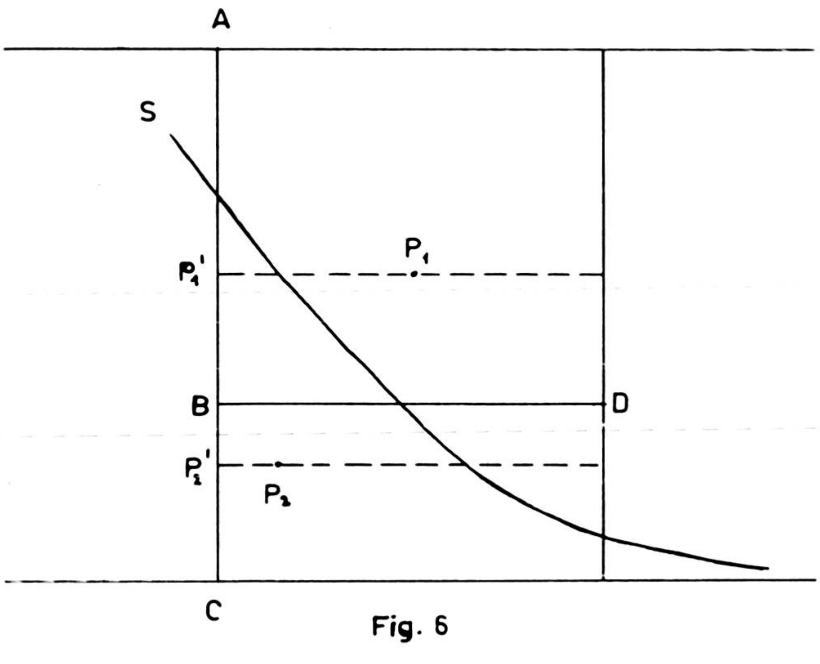


Fig. 6

Choisissons n points au hasard dans cette bande. L'un, que nous appellerons P_1, sera le plus proche du segment en dessus et l'autre, que nous appellerons P_2 le plus proche en dessous. Considérons les projections orthogonales P_1', P_2' et B de P_1, P_2 et du segment $\overline{BD}$ respectivement sur le segment $\overline{AC}$. Nous sommes ainsi ramenés au cas linéaire, B jouant le rôle de point frontière. Nous savons calculer l'espérance mathématique de $\overline{P_1 P_2}$ et sa variance.

Nous prendrons alors comme espérance mathématique de l'aire du plus grand rectangle ne contenant aucun point au hasard l'espérance de $\overline{P_1' P_2'}$ multipliée par la largeur de la bande $\overline{BD}$, et comme variance la variance de $\overline{P_1' P_2'}$ multipliée par la largeur de la bande $\overline{BD}$.

2.3 *Vérification pratique des formules théoriques*

Afin de vérifier si les formules établies à partir d'un raisonnement théorique donnaient des résultats valables, nous avons effectué un certain nombre d'expériences pratiques. Nous avons procédé de la façon suivante: nous avons divisé un carré de 100 unités de côté en 10 bandes de 10 unités de large; dans chacune de ces 10 bandes nous avons choisi 20 points au hasard en prenant les coordonnées de ces points dans une table de nombres au hasard. Ce travail a été répété pour dix carrés analogues qui sont joints en annexe et numérotés de I à X (voir p. 481 et ss). Nous avons utilisé ce « matériel » pour les vérifications suivantes:

Vérification de l'applicabilité des formules donnant les valeurs de E (z) *et* V (z)

Dans ce but nous avons dessiné sur un papier transparent un contour fermé quelconque (voir p. 486). Après avoir posé ce papier sur les carrés susmentionnés, nous avons noté, pour chaque bande coupant le contour, les ordonnées des points les plus proches de la frontière du contour, intérieurement et extérieurement. Nous n'avons considéré que les bandes traversées deux fois par le contour.

Les distances $\overline{P_1' P_2'}$ pour chaque bande ont été calculées par soustraction. Pour la partie supérieure du contour, les distances ont été désignées par $E_H(z)$ et pour la partie inférieure par $E_B(z)$. Nous avons condensé sous forme de deux tableaux les résultats obtenus pour les dix carrés ainsi que les totaux et les moyennes des dix valeurs de $E_B(z)$ et des dix valeurs de $E_H(z)$ pour chacune des bandes.

$E_B(z)$

Carré

Bande	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Totaux	Moyennes
20-30	10	13	2	11	11	9	8	3	12	2	81	8,1
30-40	17	8	14	3	5	11	16	15	16	13	118	11,8
40-50	4	9	3	8	4	9	10	4	28	17	96	9,6
50-60	5	11	8	28	33	15	23	15	3	5	146	14,6
60-70	28	14	8	10	17	19	6	4	8	7	121	12,1
70-80	1	0	11	9	23	12	4	22	17	11	110	11,0

$E_H(z)$

Carré

Bande	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Totaux	Moyennes
20-30	1	6	1	13	16	8	3	19	7	13	87	8,7
30-40	5	12	16	4	14	15	3	8	4	13	94	9,4
40-50	16	15	11	13	4	0	8	11	5	5	88	8,8
50-60	13	12	3	7	12	3	20	10	5	11	96	9,6
60-70	8	9	8	14	11	9	11	11	11	19	111	11,1
70-80	7	2	6	8	9	12	17	14	11	12	98	9,8

La valeur théorique de $E(z)$ que nous avons établie antérieurement est (voir formule 1.2.18):

$$E(z) = \frac{1}{m^n}\left\{ m^n + \sum_{Z=1}^{K-1} (m-Z)^n + \sum_{Z=1}^{m-K-1} (m-Z)^n \right\}.$$

Si l'on se contente d'une précision de 1/10 de l'unité utilisée, on constate que la valeur de $E(z)$ est la même pour les différentes valeurs de K qui interviennent dans cet exemple; elle vaut 9,5.

L'application du test de t pour tester la différence entre cette moyenne théorique et les moyennes calculées a donné les résultats suivants:

	$E_B(z)$		$E_H(z)$		
Bande	Moyennes	t	Moyennes	t	dl
20-30	8,1	1,047	8,7	0,401	9
30-40	11,8	1,479	9,4	0,062	9
40-50	9,6	0,041	8,8	0,422	9
50-60	14,6	1,558	9,6	0,060	9
60-70	12,1	1,109	11,1	1,527	9
70-80	11,0	0,593	9,8	0,220	9

Comme on le voit, toutes les valeurs de t sont inférieures à $t_{0,05}^{(9)} = 2{,}262$ et justifient ainsi l'application de la formule donnant $E(z)$.

On peut faire un calcul analogue pour $V(z)$. Nous donnons ci-dessous sous forme de deux tableaux les valeurs de s^2 et les valeurs correspondantes de $V(z)$ calculées pour des valeurs moyennes $E(z)$ voisines de la frontière du contour envisagé. Dans l'avant-dernière colonne nous avons les valeurs de $\chi^2 = (\mathrm{N}-1)s^2/V(z)$·

Partie supérieure de S

Bande	s^2	$V(z)$	χ^2	dl
20-30	30,79	39,02	9,178	9
30-40	41,12	38,90	9,514	9
40-50	27,51	38,24	6,475	9
50-60	27,60	38,09	6,521	9
60-70	28,18	38,09	6,658	9
70-80	18,62	38,71	4,329	9

Partie inférieure de S

Bande	s^2	$V(z)$	χ^2	dl
20-30	17,88	38,45	4,185	9
30-40	24,18	38,53	5,648	9
40-50	59,38	38,79	13,772	9
50-60	107,26	28,56	25,035	9
60-70	54,99	38,87	12,732	9
70-80	64,00	38,97	14,781	9

Dans ce cas également toutes les valeurs de χ^2 (sauf une) sont inférieures à la valeur 0,05 = 16,919, ce qui nous permet de penser que l'application des formules établies pour $V(z)$ est justifiée.

L'établissement des formules d'une part, la vérification que ces formules sont applicables, d'autre part, pourraient inciter à penser que le problème est entièrement résolu. Malheureusement ce n'est pas le cas. Nous avons tenu à préciser dans le paragraphe suivant, aussi succinctement que possible, les difficultés qui se présentent encore sans pour autant les résoudre d'une façon explicite.

2.4 *Considérations sur l'application des formules précédentes*

En fait, la situation qui se présente lorsqu'on veut déterminer les limites d'un gisement à l'aide de sondages au hasard, n'est pas tout à fait celle que nous avons envisagée théoriquement. En effet, dans ce qui précède, nous avons toujours supposé que la frontière était connue; alors que dans le cas pratique la frontière est inconnue. Le problème est alors de savoir, comment et dans quelle mesure on peut utiliser dans la pratique les formules établies précédemment.

Donnons un procédé et tâchons de déterminer dans quelle mesure ce procédé est valable. Envisageons un carré $ABCD$ représentant la région à sonder. Comme dans le cas théorique, divisons le carré en n bandes. Supposons que nous désirions effectuer au total N sondages. Nous ferons alors N/n sondages dans chacune des *n* bandes. Si nous supposons que la forme du gisement est convexe, la frontière de ce gisement coupera en général une bande en quatre points. Nous aurons ainsi une partie des sondages à l'intérieur du gisement et une partie à l'extérieur.

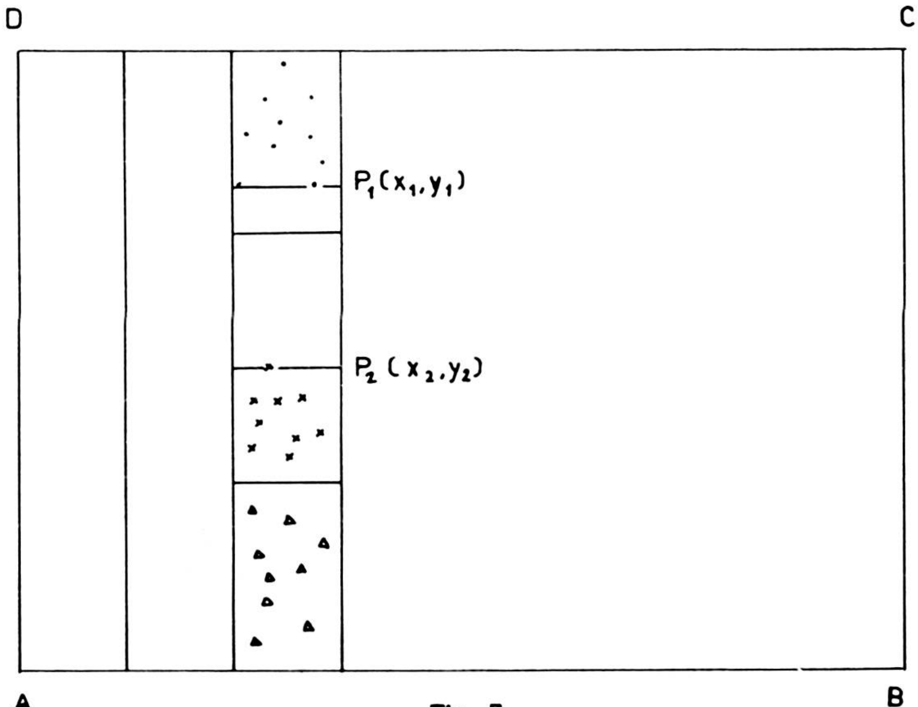


Fig. 7

Désignons par P_1 (x_1, y_1) et P (x_2, y_2) les deux points les plus proches extérieur et intérieur respectivement dans la partie supérieure. Ne connaissant pas la frontière, nous la déterminerons en prenant la moyenne arithmétique des ordonnées y_1 et y_2.

Remarquons qu'en procédant de la sorte, nous avons une double approximation, d'une part à cause du fait que nous remplaçons la frontière par un segment de droite, d'autre part en faisant passer ce segment par le milieu de $\overline{P_1P_2}$.

Il est évident que la première approximation sera d'autant meilleure que la largeur de la bande sera plus petite, c'est-à-dire que le nombre *n* de bandes sera plus grand, et la seconde approximation que le nombre de points par bande sera plus grand.

Comme la position de la frontière par rapport au carré joue un rôle qui devient rapidement négligeable lorsque cette frontière n'est pas trop près des bords du carré, la précision dépend essentiellement du nombre de sondages total et par bande. Supposons que le nombre total *N* d'éléments de sondage est donné (pratiquement c'est souvent le cas du fait que l'on désire en général consacrer une somme déterminée à l'enquête); par conséquent les précisions des deux approximations que nous avons mentionnées ci-dessus sont liées : l'une augmente au détriment de l'autre. En effet, plus le nombre de bandes est élevé, moins grand sera le nombre d'éléments de sondage par bande.

Comment déterminer à priori la meilleure valeur de n et par conséquent le nombre de points par bande ? Cela dépend essentiellement de la forme du gisement qui est inconnue. Il est vraisemblable que la meilleure méthode est d'opérer pas à pas de la façon suivante: choisir tout d'abord un nombre de bandes qui ne soit pas trop élevé, puis, au vu des résultats obtenus, dans ces bandes, effectuer un nouveau partage de certaines bandes.

En conclusion, il nous semble que l'élaboration d'une théorie applicable dans toutes les situations est extrêmement compliquée et aboutirait à des formules d'un usage difficile. Il est préférable, à notre avis, d'étudier chaque situation en particulier et de tâcher d'utiliser, en la complétant si cela est nécessaire, une théorie relativement simple analogue à celle que nous venons d'esquisser.

Annexe

Nous donnons ici les dix carrés dont nous avons parlé à la page 477 ainsi que les mesures faites sur ces dix carrés.

Pour établir ces tableaux, nous avons employé un certain nombre de symboles, dont la signification est la suivante:

I_B = point le plus bas intérieur au contour

I_H = point le plus haut intérieur au contour

E_B = point le plus haut extérieur au contour et en dessous de I_B

E_H = point le plus bas extérieur au contour et en dessus de I_H

$E_B(z)$ = distance entre I_B et $E_B = I_B - E_B$

$E_H(z)$ = distance entre I_H et $E_H = E_H - I_H$.

Carré I

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B(z)$	$E_H(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	47	34	55	50	13	5	40,5	52,5
20-30	41	31	61	60	10	1	36,0	60,5
30-40	52	35	73	68	17	5	43,5	70,5
40-50	33	29	90	74	4	16	31,0	82,0
50-60	30	25	87	74	5	13	27,5	80,5
60-70	53	25	82	74	28	8	39,0	78,0
70-80	38	37	77	70	1	7	37,5	73,5
80-90	47	28	64	58	19	6	37,5	61,0

Carré II

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B\,(z)$	$E_H\,(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	40	35	54	42	5	12	37,5	48,0
20-30	40	27	57	51	13	6	33,5	54,0
30-40	39	31	73	61	8	12	35,0	67,0
40-50	36	27	82	67	9	15	31,5	74,5
50-60	33	22	79	67	11	12	27,5	73,0
60-70	36	22	83	74	14	9	29,0	78,5
70-80	40	40	67	65	0	2	40,0	66,0
80-90	51	35	52	51	16	1	43,0	51,5

Carré III

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B\,(z)$	$E_H\,(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	—	35	57	—				
20-30	36	34	61	60	2	1	35,0	60,5
30-40	38	24	79	63	14	16	31,0	71,0
40-50	33	30	76	65	3	11	31,5	70,5
50-60	33	25	76	73	8	3	29,0	74,5
60-70	32	24	82	74	8	8	28,0	78,0
70-80	39	28	78	72	11	6	33,5	75,0
80-90	47	38	72	63	9	9	42,5	67,5

Carré IV

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B\,(z)$	$E_H\,(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	40	30	46	40	10	6	35,0	43,0
20-30	46	35	65	52	11	13	40,5	57,5
30-40	38	35	63	59	3	4	36,5	61,0
40-50	35	27	88	75	8	13	31,0	81,5
50-60	28	0	78	71	28	7	14,0	74,5
60-70	38	28	89	75	10	14	33,0	82,0
70-80	45	36	78	70	9	8	40,5	74,0
80-90	52	47	67	53	5	14	49,5	60,0

Carré V

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	E_B (z)	E_H (z)	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	—	—	—	—				
20-30	40	29	88	72	11	16	34,5	80,0
30-40	30	25	76	62	5	14	27,5	69,0
40-50	28	24	77	73	4	4	26,0	75,0
50-60	40	7	85	73	33	12	23,5	79,0
60-70	42	25	78	67	17	11	33,5	68,0
70-80	44	21	63	54	23	9	32,5	58,5
80-90	—	—	—	—				

Carré VI

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	E_B (z)	E_H (z)	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	41	27	51	44	14	9	34,0	48,5
20-30	41	34	65	57	9	8	38,5	61,0
30-40	46	35	83	68	11	15	50,5	75,5
40-50	39	30	74	74	9	0	34,5	74,0
50-60	31	16	78	75	15	3	23,5	76,5
60-70	38	19	81	72	19	9	28,5	76,5
70-80	47	35	83	71	12	12	41,0	77,0
80-90	52	48	58	52	4	6	50,0	55,0

Carré VII

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	E_B (z)	E_H (z)	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	43	36	49	44	7	5	39,5	46,5
20-30	42	34	54	51	8	3	38,0	52,5
30-40	42	26	69	66	16	3	34,0	68,0
40-50	36	26	76	68	10	8	31,0	72,0
50-60	45	22	81	61	23	20	33,5	71,0
60-70	34	28	77	66	6	11	31,0	71,5
70-80	37	33	91	74	4	17	35,0	82,5
80-90	—	—	—	—				

Carré VIII

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B(z)$	$E_H(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	—	—	—	—				
20-30	38	35	70	51	3	19	36,5	60,5
30-40	41	26	66	58	15	8	33,5	62,0
40-50	30	26	81	70	4	11	28,0	75,5
50-60	33	18	82	72	15	10	25,5	77,0
60-70	32	28	75	64	4	11	30,0	69,5
70-80	54	32	83	69	22	14	43,0	76,0
80-90	—	—	—	—				

Carré IX

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B(z)$	$E_H(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	43	38	65	48	5	17	40,5	56,5
20-30	38	26	65	58	12	7	32,0	61,5
30-40	42	26	71	67	16	4	34,0	69,0
40-50	36	8	76	71	28	5	22,0	73,5
50-60	29	26	77	72	3	5	27,5	74,5
60-70	29	21	77	66	8	11	25,0	71,5
70-80	47	30	82	71	17	11	33,5	76,5
80-90	45	38	57	47	7	10	41,5	52,5

Carré X

Bande	I_B	E_B	E_H	I_H	$E_B(z)$	$E_H(z)$	$\frac{I_B+E_B}{2}$	$\frac{E_H+I_H}{2}$
10-20	44	35	52	44	9	8	39,5	48,0
20-30	36	34	71	58	2	13	35,0	64,5
30-40	35	22	79	66	13	13	28,5	72,5
40-50	32	15	76	71	17	5	23,5	73,5
50-60	28	23	78	67	5	11	25,5	72,5
60-70	33	26	81	62	7	19	29,5	71,5
70-80	43	32	78	66	11	12	37,5	72,0
80-90	—	—	—	—				

BIBLIOGRAPHIE

GHOSH, M. N. (1949). Expected travel among random points in a region. *Bull. Calcutta Statist. Ass.*, *2*, 83-87.

GNEDENKO, B. V. (1963). *The theory of probability*. 2nd ed., New York, Chelsea Publ. Co.

GRUNDY, P. M., M. J. R. HEALY and D. H. REES (1965). Economic choice of the amount of experimentation. *J. R. Statist. Soc. (B)*, *18*, 32-55.

KRIGE, M. D. G. (1955). L'évaluation des gisements dans les mines d'or sud-africaines. *Annales des Mines*, *144*, 3-49.

LINDER, A. (1964). *Statistische Methoden*. 4. Aufl., Basel, Birkhäuser.

LOÈVE, M. (1960). *Probability theory*. 2nd ed., New York, v. Nostrand.

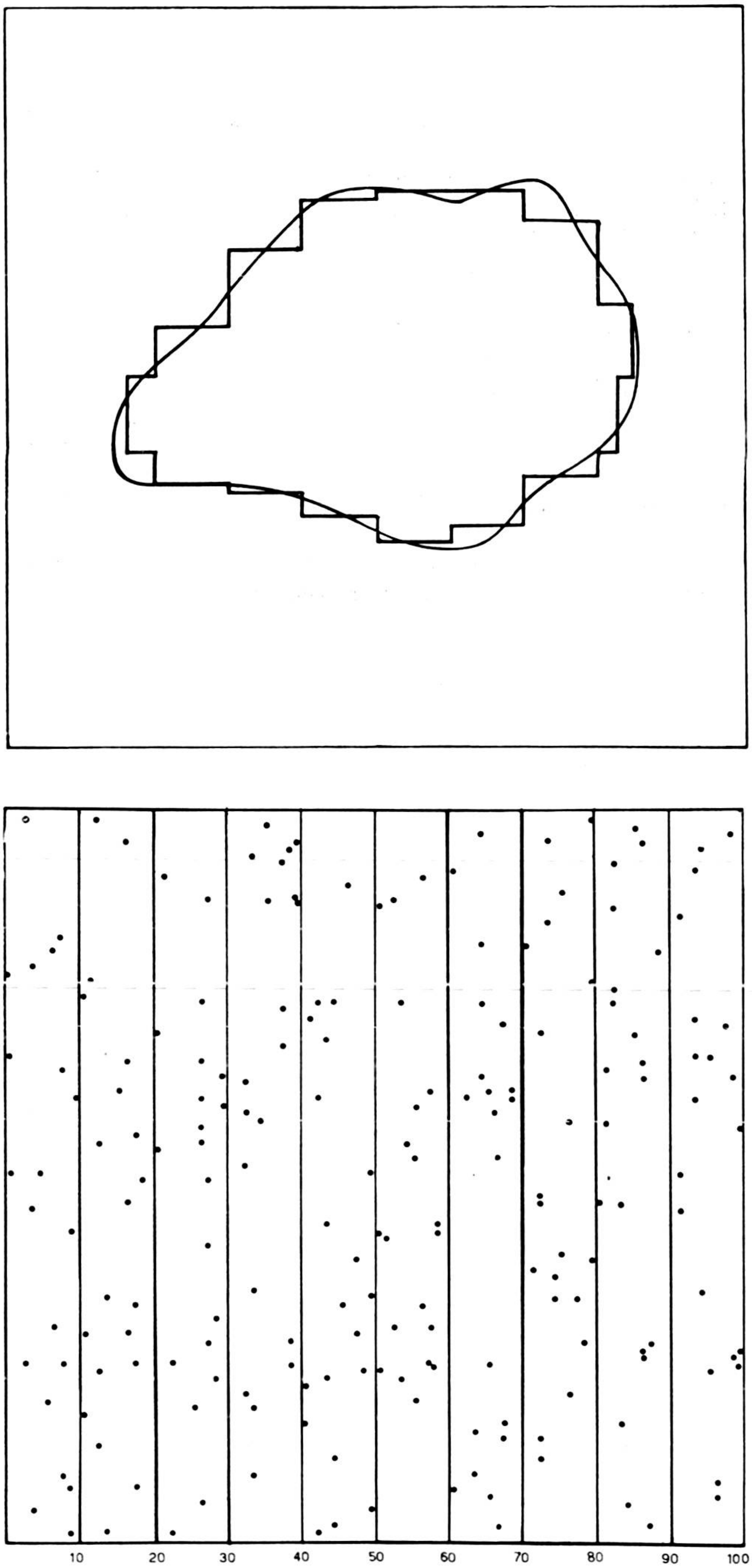
MAHALANOBIS, P. C. (1944). On large-scale sample surveys. *Philosophical Transactions of the Royal Society (B)*, *231*, 329-451.

MARKS, E. S. (1948). A lower bound for the expected travel among m random points. *Ann. Math. Statist.*, *19*, 419-422.

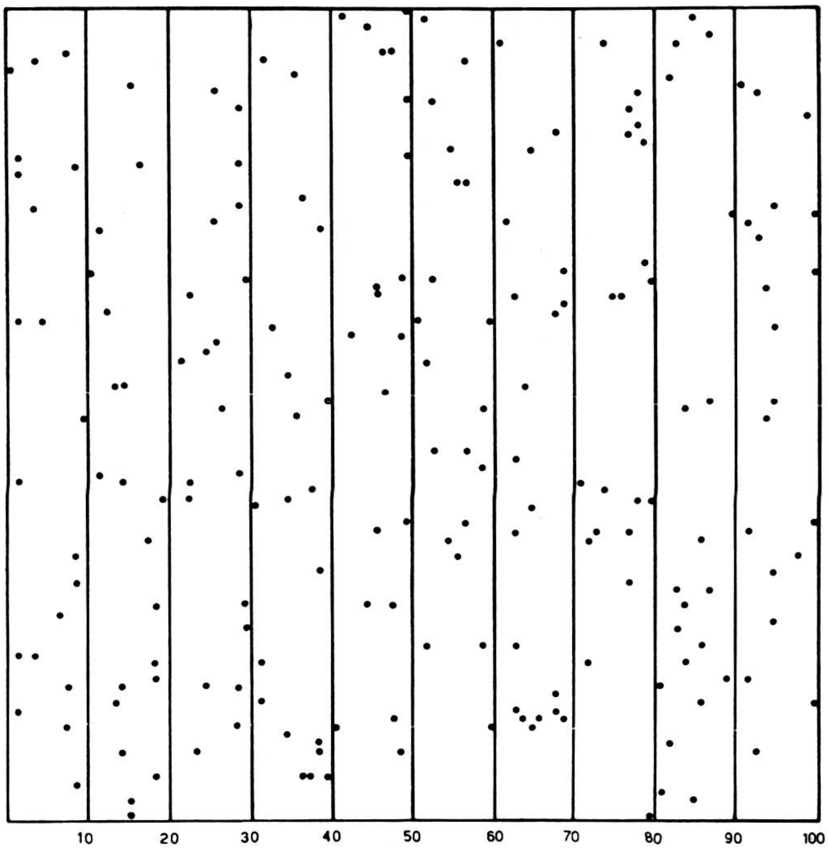
MATÉRN, B. (1960). Spatial variation. *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut*, *49*, No 5, 1-144.

MATHERON, G. (1962). *Traité de géostatistique appliquée*. Tome I, Paris, Technip.

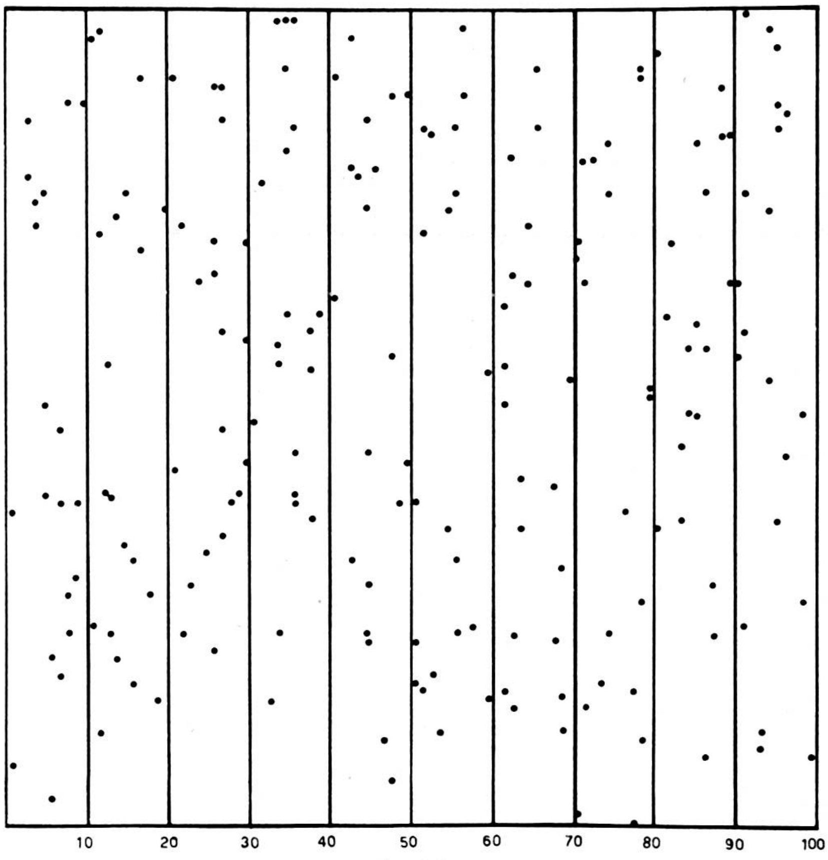
STEVENS, W. L. (1939). Solution to a geometrical problem in probability. *Ann. Eugen.*, *9*, 315-320.



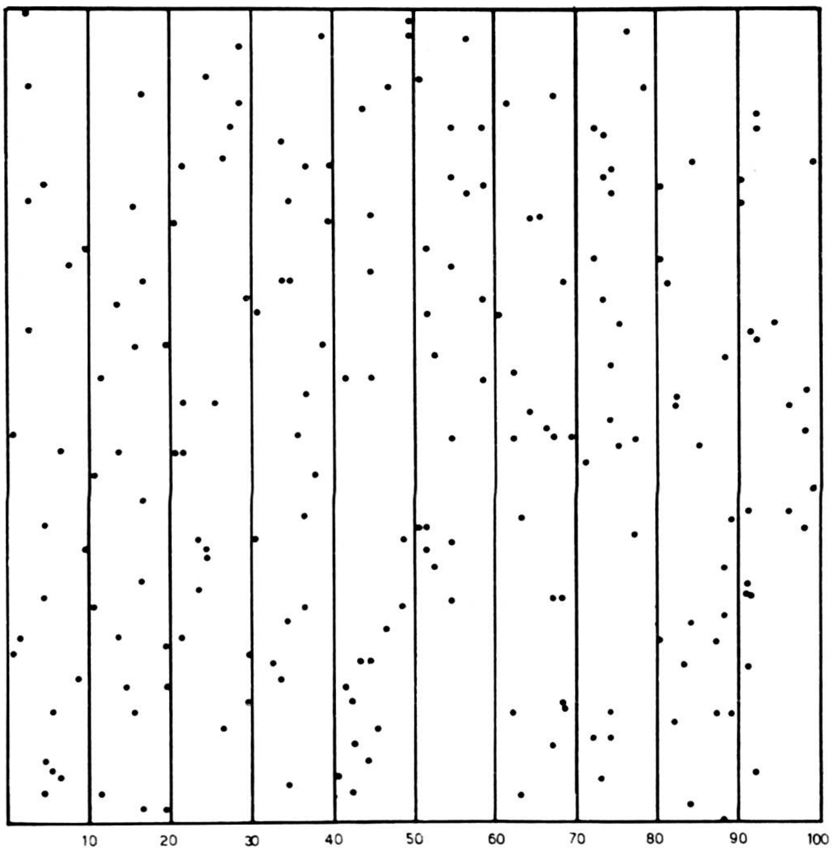
Carré 1.



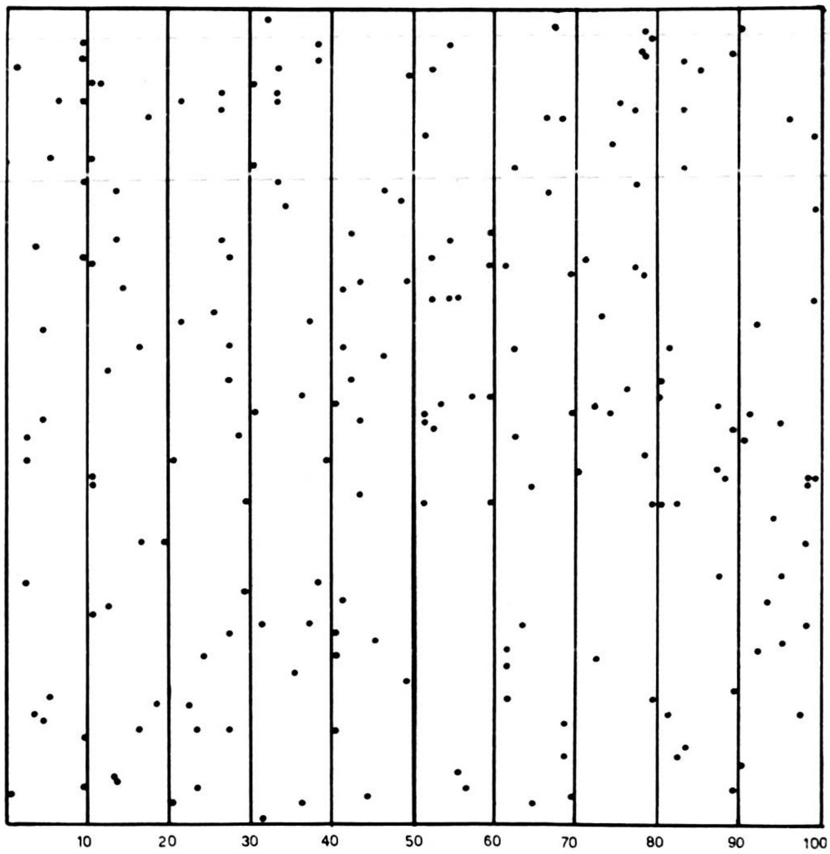
Carré 2.



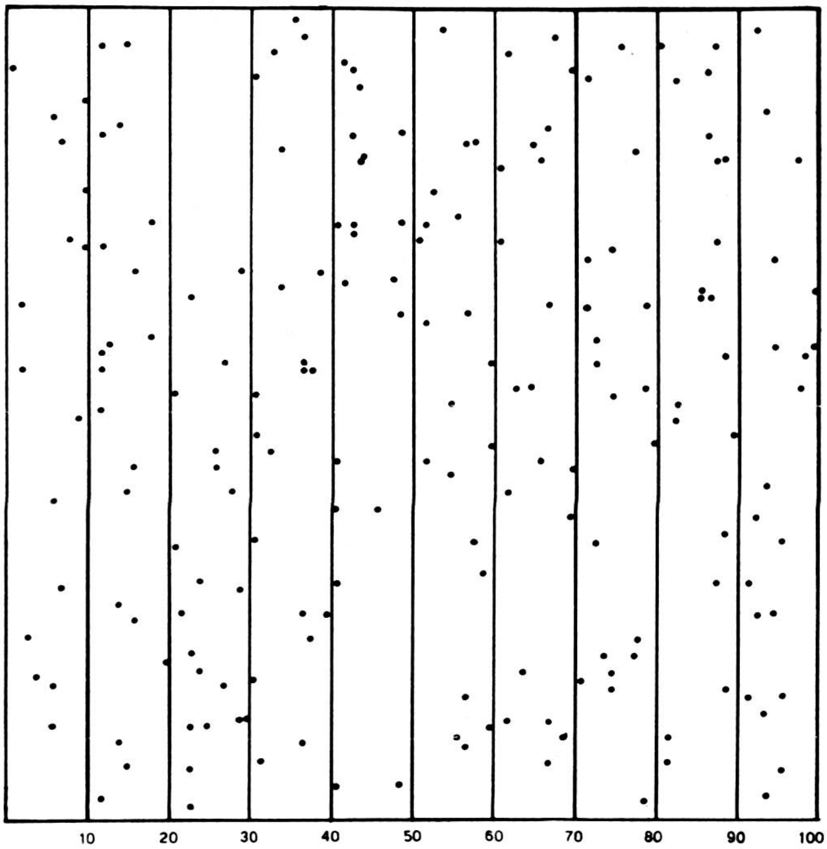
Carré 3.



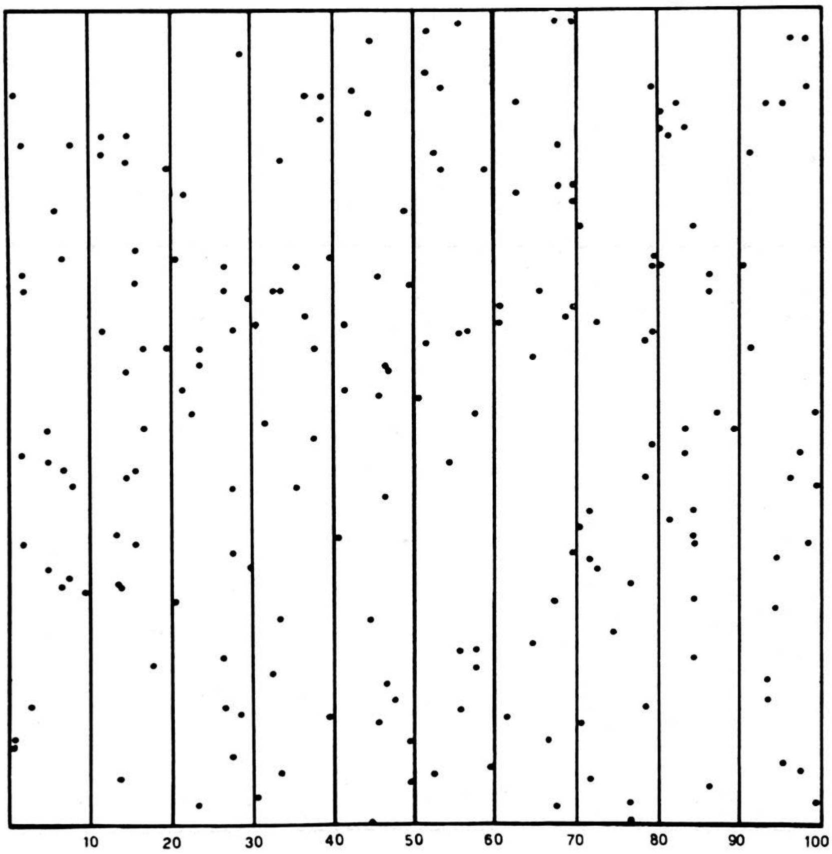
Carré 4.



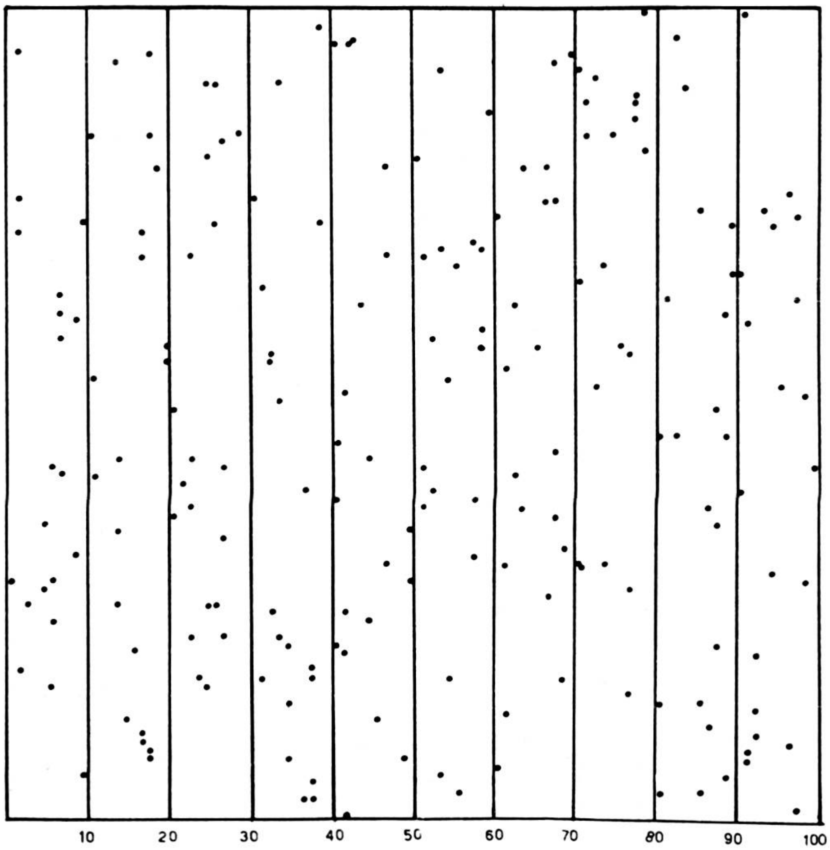
Carré 5.



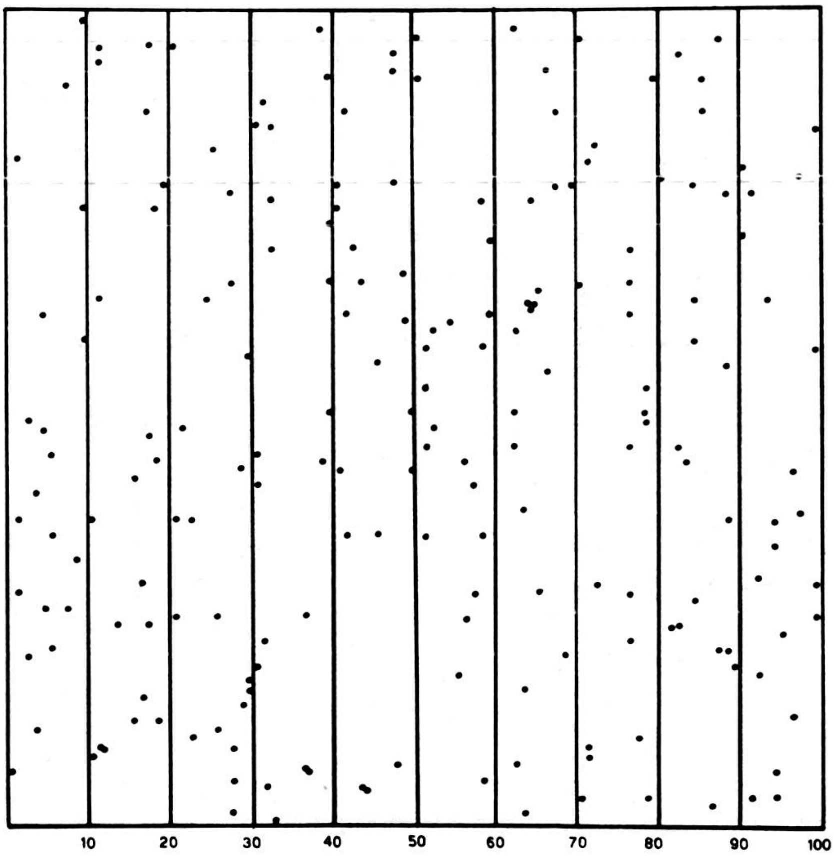
Carré 6.



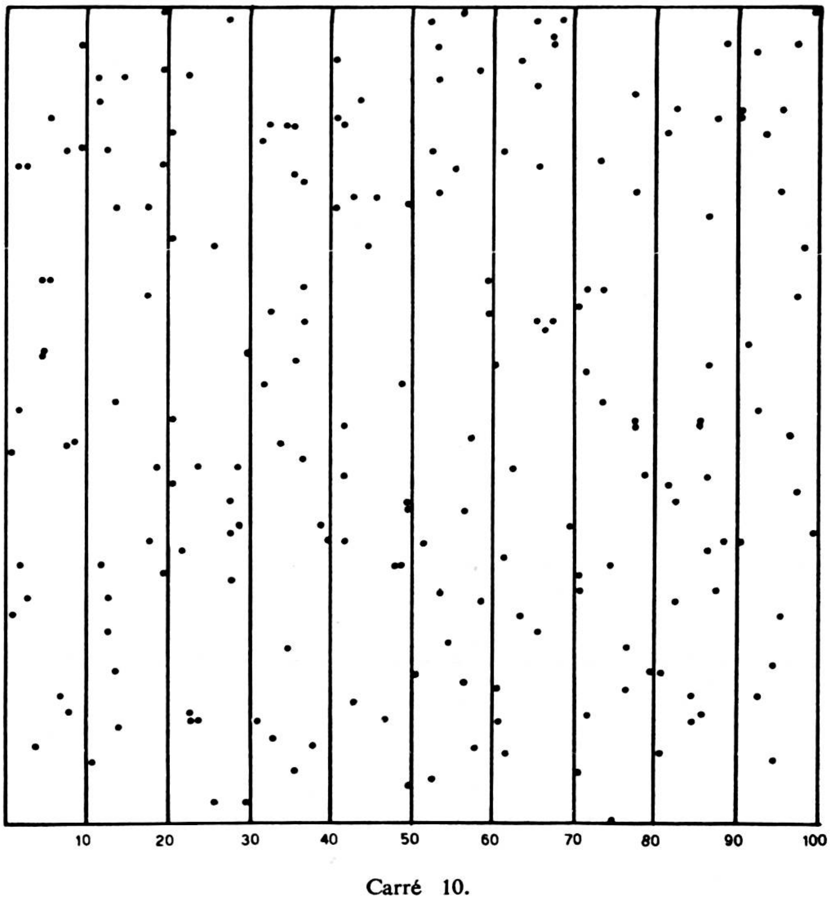
Carré 7.



Carré 8.



Carré 9.



Carré 10.