

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 18 (1965)
Heft: 2

Artikel: Une géométrie à congruence réduite entre segments
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739184>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

UNE GÉOMÉTRIE À CONGRUENCE RÉDUITE ENTRE SEGMENTS

PAR

Paul ROSSIER

1. INTRODUCTION

La congruence des segments est une relation qui jouit d'une double propriété de réflexivité :

$$AB = AB \text{ et } AB = BA.$$

Nous nous proposons de construire un modèle d'une géométrie plane dans laquelle une relation nouvelle, la *pseudo-congruence* des segments satisfait à la première des relations ci-dessus, mais pas à la seconde. Cela nous conduira à montrer que plusieurs propriétés importantes dépendent de cette seconde réflexivité.

Dans le plan euclidien, nous supposons valables les relations classiques d'appartenance, d'ordre, de congruence, de parallélisme et de continuité.

2. DÉFINITIONS FONDAMENTALES

Dans un plan orienté de telle sorte que les angles possèdent un signe, choisissons une demi-droite. La demi-droite issue du point A et équipollente à celle choisie sera appelée la *demi-droite singulière d'origine A* .

Pour l'angle δ de deux demi-droites de même origine O , convenons de choisir celui qui ne contient pas la demi-droite singulière issue de O . Il est soumis à la condition $0 \leq \delta < 2\pi$. L'argument d'une demi-droite est son angle avec une demi-droite singulière.

La demi-droite singulière est prise comme origine des angles. Une rotation est dite *ordinaire* si, amenant une demi-droite tournant autour de son origine de la position a à la position b , la demi-droite mobile n'est jamais singulière.

Pour effectuer le pseudo-report du segment AB sur la demi-droite d issue de A , faisons subir à AB une rotation ordinaire autour de A et décrivons l'arc de spirale logarithmique de centre A qui fait un angle donné α avec le rayon vecteur et qui passe par B . En limitant cet arc à la portion relative à une rotation ordinaire, il coupe d

en un point unique B' . Posons la *pseudo-congruence* des segments AB et AB' . Nous appelons *pseudo-rotation* la construction précédente.

Pour étendre la pseudo-congruence aux segments d'origines distinctes, convenons que deux segments équipollents sont pseudo-congruents.

Posons enfin que, si le segment AB est équipollent à la demi-droite singulière, la rotation a lieu dans le sens positif et qu'elle est négative si d est équipollente à cette demi-droite singulière.

Si l'angle α est $\frac{\pi}{2}$, le pseudo-report d'un segment est identique au report de la géométrie élémentaire. Le report au compas est un cas particulier du pseudo-report. Si l'angle α est nul, tout report d'un segment sur une droite qui ne lui est pas parallèle conduit à un segment nul. Nous excluons ces deux cas et, pour fixer les idées et alléger le langage, nous posons $\alpha = +\frac{\pi}{4}$. Nous appellerons *spirales du report* les spirales logarithmiques précédentes.

La pseudo-congruence des segments satisfait à la première réflexivité, mais pas à la seconde.

$$AB = AB, \quad AB \neq BA.$$

La pseudo-rotation d'un demi-tour de AB autour de A conduit à un segment AB_1 ; le rapport des longueurs de AB et AB_1 est $e^{\pm\pi}$. Effectuée autour de B , la pseudo-rotation conduit au segment BA_1 et au rapport $e^{\pm\pi}$. Le rapport des longueurs des segments AB_1 et BA_1 est $e^{\mp 2\pi}$; ces segments ne sont pas pseudo-congruents.

La pseudo-congruence est symétrique, car l'opération inverse d'une pseudo-rotation ou d'une translation est une transformation de même nature.

La pseudo-congruence est transitive. Il suffit de le montrer pour trois segments de même origine; les trois extrémités libres de trois segments pseudo-congruents de même origine appartiennent à une seule spirale de report.

La pseudo-congruence des segments satisfait à la propriété additive: si AB et BC d'une part, $A'B'$ et $B'C'$ d'autre part sont deux paires de segments de même supports et sans points communs, si AB et $A'B'$ sont pseudo-congruents ainsi que BC et $B'C'$, les segments AC et $A'C'$ le sont aussi.

En effet, le rapport des longueurs de AB et $A'B'$, de BC et $B'C'$ et de AC et $A'C'$ est e^α où α est l'angle des droites AB et $A'B'$.

Ainsi la pseudo-congruence satisfait aux axiomes de congruence des segments tels que les a posés Hilbert¹, à l'exception de la seconde réflexivité.

Pour effectuer graphiquement les constructions précédentes, il suffit de disposer d'un gabarit ayant la forme d'une spirale de report, de centre marqué et pouvant

¹ Grundlagen der Geometrie § 5, axiomes III 1-3.

P. ROSSIER: *Les Fondements de la Géométrie et David Hilbert*. Ouvrage à paraître. Paris, 1966.

tourner autour de ce centre. La rotation autour de ce centre transforme la spirale en une courbe qui lui est homothétique avec conservation du centre car $e^m e^x = e^{m+x}$.

Nous allons voir que la spirale logarithmique est la seule espèce de courbe qui puisse être employée pour le pseudo-report, si nous désirons conserver la continuité et les propriétés habituelles des reports par rotation. Soient trois segments a , b et c de même origine. Le premier tournant de l'angle β atteint b et prend la longueur $mf(\beta)$ où $f(\beta)$ est une certaine fonction à déterminer; tournant de l'angle γ de a et c , il prend la longueur $mf(\gamma)$. Le second tournant de l'angle $\gamma - \beta$ prend la longueur $mf(\beta) - f(\gamma - \beta) = mf(\gamma)$. La fonction $f(\beta)$ satisfait donc à l'équation fonctionnelle

$$f(\beta)f(\gamma - \beta) = f(\gamma),$$

ou, par un changement de notation

$$f(\beta) \cdot f(\alpha) = f(\alpha + \beta).$$

Les seules solutions continues et réelles de cette relation sont

$$f(\alpha) = 1, f(\alpha) = 0 \text{ et } f(\alpha) = e^{k\alpha}.$$

La première correspond au cas élémentaire de la géométrie du compas; le second est celui qui annule les pseudo-longueurs. Le dernier seul constitue une généralisation du report qui jouit du caractère groupal des rotations, exprimé par l'équation fonctionnelle donnée.

Définissons enfin la pseudo-longueur d'un segment AB faisant l'angle α avec la demi-droite singulière. Nous avons

$$AB = ae^{\alpha}.$$

La constante a est la *pseudo-longueur* du segment AB . Deux segments pseudo-congruents ont même pseudo-longueur.

Le point qui partage un segment en deux segments pseudo-congruents en est le *pseudo-milieu*.

3. PSEUDO-CONGRUENCE ET CONGRUENCE AFFINE

Deux segments équipollents sont pseudo-congruents; ils sont congruents selon les conventions de la géométrie affine. De ce fait, les propriétés liées à la congruence affine directe sont valables dans notre géométrie. En particulier, deux polygones directement congruents selon la géométrie affine, sont pseudo-congruents.

Si, comme en géométrie affine, on admet la congruence des angles opposés par le sommet, le théorème de la somme des triangles est valable dans notre géométrie.

La notion de milieu d'un segment est de caractère affin. Dans notre géométrie, la pseudo-congruence des deux segments déterminés par les extrémités d'un segment AB et son milieu M signifie celle de AM et de MB ou celle de BM et de MA , mais pas celle de MA et MB . Le milieu d'un segment n'est pas pseudo-équidistant des extrémités.

Cet exemple montre que les propriétés élémentaires des lieux de points équidistants dépendent de la seconde réflexivité de la congruence des segments.

En géométrie affine, la symétrie centrale a un sens; souvent, on pose la congruence affine de deux figures symétriques. Deux telles figures ne sont pas pseudo-congruentes. Examinons le cas où elles sont liées par une pseudo-rotation ordinaire; l'amplitude de celle-ci est $\pm\pi$; le rapport des pseudo-longueurs homologues est $e^{\mp\pi}$; nos deux figures sont pseudo-semblables.

Soit un triangle ABC ; par chacun des sommets, menons la demi-droite singulière. Une au plus de ces trois demi-droites coupe le côté opposé.

Supposons les deux triangles ABC et $AB'C'$ symétriques par rapport à A et tels que la demi-droite singulière issue de A coupe le côté BC . Il n'existe pas de pseudo-rotation liant les deux triangles. Ils sont cependant pseudo-semblables.

Pour le voir, construisons le symétrique $BA''C''$ de BAC par rapport à B . Les deux triangles $AB'C'$ et $A''BC''$ sont liés par une translation; ils sont pseudo-congruents, tandis que ABC et $A''BC''$ sont pseudo-semblables.

Par décomposition en triangles appropriés, on peut étendre aux polygones la pseudo-similitude des triangles centralement symétriques.

Avec Hilbert¹, appelons équidécomposables deux polygones qui peuvent être découpés en des triangles deux à deux congruents; de même, sont équit complémentaires deux polygones qui, par adjonction de polygones équidécomposables, peuvent être transformés en deux polygones équidécomposables. Dans ce qui suit, la congruence sera affine et directe.

Soit un triangle ABC ; menons une droite d qui passe par A . Construisons deux parallélogrammes $ABEF$ et $ACGH$ dont deux côtés sont portés par les côtés AB et AC du triangle, ayant AB comme côté pour le premier et AC pour le second et dont les sommets E et G appartiennent à la droite d . Faisons subir au parallélogramme $ACGH$ la translation AF ; il vient en $FC'G'H'$. Construisons le parallélogramme $BCG'J$ ayant BC et CG' comme côtés. Ce parallélogramme est équidécomposable à l'hexagone $ABEH'G'C'$.

Pour le voir, il suffit de faire subir au triangle ABC la translation qui conduit en $H'JG'$ et au triangle $CC'G'$ celle qui l'amène en BEJ .

Nous verrons plus bas le lien de ce théorème avec celui de Pythagore (§ 7).

4. PSEUDO-CERCLES

Le lieu des points à pseudo-distance constante d'un point est un arc de spirale de report centré sur ce point. Nous l'appelons un *pseudo-cercle*.

Le postulat d'Euclide imposant l'existence d'un cercle de rayon et de centre donnés s'applique aux pseudo-cercles.

¹ Grundlagen der Geometrie, § 18.

P. ROSSIER: *Les Fondements de la Géométrie et David Hilbert*. Ouvrage à paraître. Paris, 1966.

Un pseudo-cercle est limité par deux points d'arrêt situés sur la demi-droite singulière issue du centre. Celui de ses points qui correspond à l'argument 0 du rayon appartient au pseudo-cercle, mais pas celui d'argument 2π . Appelons le premier l'origine et le second l'extrémité du pseudo-cercle.

L'angle d'un rayon d'un pseudo-cercle avec la tangente au point de contact est $\frac{\pi}{4}$.

Il existe des droites qui passent par un point du segment déterminé par les deux points d'arrêt d'un pseudo-cercle et qui coupent celui-ci en un unique point.

Les tangentes à un pseudo-cercle aux extrémités d'un diamètre sont parallèles. Il existe deux tangentes à un pseudo-cercle parallèles à une direction donnée quelconque.

A un pseudo-cercle menons les tangentes en ses points d'arrêt; elles sont parallèles. Elles coupent un arc sur le pseudo-cercle. Cet arc partage la bande limitée par les deux tangentes en deux régions, celle de la convexité du pseudo-cercle et celle de la concavité. Des points de la dernière, on ne peut mener qu'une tangente au pseudo-cercle. Par tout point de l'arc intercepté, on peut mener deux tangentes au pseudo-cercle; l'une d'elles est tangente en ce point. Il existe donc des tangentes à un pseudo-cercle qui coupent celui-ci hors du point de contact.

Déplaçons une de ces tangentes de façon à lui faire couper le pseudo-cercle: tout pseudo-cercle possède des trisécantes.

Des points de la convexité de la bande précédente et de ceux du plan extérieurs à cette bande, on peut mener deux tangentes au pseudo-cercle considéré.

Soit AB un diamètre de pseudo-cercle de centre O . Supposons l'argument de A inférieur à celui de B . Le point O est le pseudo-milieu du segment AB . Nous allons montrer que le lieu des pseudo-milieux des cordes d'un pseudo-cercle, parallèles entre elles, n'est pas une droite (donc pas un diamètre). Menons la tangente au pseudo-cercle parallèle au diamètre AB , telle que l'argument de son point de contact soit compris entre ceux de A et de B . L'angle BOC est égal à $\frac{\pi}{4}$. Menons la sécante $A'B'$ parallèle à AB et infiniment voisine de ce diamètre; les angles $A'AB$ et $B'BA$ valent $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. Les pseudo-longueurs de AB et $A'B'$ ne diffèrent que d'infiniments petits d'ordre supérieur; le quadrilatère $AA'B'B$ est un parallélogramme. Le pseudo-milieu O' de $A'B'$ détermine avec le centre O une parallèle aux tangentes au pseudo-cercle en A et B . Autrement dit l'angle $O'OA$ est égal à $\frac{\pi}{4}$. Le point O' n'appartient donc pas au diamètre par C ; la tangente en O au lieu des milieux des cordes parallèles coupe perpendiculairement le rayon OC .¹

¹ Cette perpendicularité tient au choix de l'angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (§ 2). De façon plus générale, l'angle du diamètre par C et du lieu est le double de l'angle des spirales de report avec le rayon.

Du centre d'un pseudo-cercle, abaissons la perpendiculaire sur une tangente. Le rayon du pseudo-cercle passant par le pied de la perpendiculaire est plus long que celui du pseudo-cercle donné si l'angle que fait le rayon par le point de contact avec la demi-droite singulière est égal ou supérieur à $\frac{\pi}{4}$. Dans le cas contraire, la pseudo-longueur de la perpendiculaire est inférieure au rayon.

Une conséquence immédiate du premier des deux derniers faits est que dans un triangle, au plus grand angle, n'est pas toujours opposé le côté dont la pseudo-longueur est la plus grande.

Ainsi les théorèmes relatifs au plus grand angle d'un triangle opposé au plus grand côté et à la perpendicularité de la tangente à un cercle sur le rayon de contact dépendent de la seconde réflexivité des segments.

La propriété de la perpendiculaire abaissée du centre d'un pseudo-cercle sur une tangente montre que le théorème de la supériorité sur la perpendiculaire des obliques abaissées d'un point sur une droite doit être abandonné. Si on définit la pseudo-distance d'un point à une droite comme la pseudo-distance minimum du point à un point de la droite, l'angle de la droite qui porte cette pseudo-distance avec la droite donnée est $\frac{\pi}{4}$.

L'angle inscrit dans un demi-cercle est droit; cette propriété est encore valable pour un pseudo-cercle à condition que l'argument du rayon intermédiaire soit la moyenne de ceux des rayons portés par le diamètre limitant le demi-cercle considéré. En effet, dans le cas, la longueur du rayon intermédiaire est la moyenne géométrique des deux rayons portés par le diamètre et le triangle inscrit considéré est rectangle.

Soient ABC le triangle rectangle en B inscrit dans le demi-pseudo-cercle, de diamètre AC ; appelons D la seconde extrémité du diamètre passant par B . Le triangle BCD est aussi rectangle, mais non les triangles ABD et ACD .

Ainsi, le quadrilatère déterminé par les intersections d'un pseudo-cercle avec deux diamètres rectangulaires n'est pas un carré; il est birectangle. On voit facilement que les deux autres angles de ce quadrilatère sont

$$\text{arc tg} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{3\pi}{2}}}{1 - e^{-2\pi}} = 12^\circ 15'$$

et son supplément.

5. TRIANGLES CONGRUENTS, SEMBLABLES, PSEUDO-CONGRUENTS ET PSEUDO-SEMBLABLES

Soient deux figures dont les angles et les segments peuvent être liés deux à deux et tels que les angles homologues soient congruents et les segments homologues pseudo-congruents. Nous les dirons pseudo-congruents. ¹

¹ Cette définition est surabondante. Nous nous en contentons pour faire bref.

D'une façon analogue, nous définissons les figures semblables par la congruence des angles homologues et la proportionnalité des pseudo-longueurs des segments homologues, pris avec conservation du sens.

Nous verrons que l'existence des demi-droites singulières impose quelques restrictions à la pseudo-congruence et à la pseudo-similitude.

Dans la suite, excluons le cas de la congruence affine déjà examiné plus haut (§ 3).

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles directement congruents; sur chacun d'eux il existe au moins deux sommets tels que les demi-droites singulières issues de ces points ne coupent pas leurs triangles; il existe donc au moins une paire de sommets homologues jouissant de cette propriété. Soient A et A' ces points. Par translation amenons le triangle $A'B'C'$ en $AB''C''$. Ces deux triangles sont liés par une rotation de centre A ; soit α son amplitude. Faisons subir à $AB''C''$ la pseudo-rotation de centre A et d'amplitude α . Les côtés homologues issus de A se superposent et les côtés opposés sont parallèles. Donc deux triangles directement congruents sont pseudo-semblables.

De la même façon, on démontre la similitude de deux triangles pseudo-congruents ou pseudo-semblables, la pseudo-similitude de deux triangles directement semblables.

Comme nous allons le voir, il n'existe pas de triangles pseudo-congruents (et à plus forte raison de triangles pseudo-semblables) de sens opposés; il est donc inutile d'ajouter une restriction de sens aux pseudo-congruences ou pseudo-similitudes des théorèmes ci-dessus.

De ce qui précède, il résulte immédiatement que la validité des deux premiers cas de congruence des triangles de même sens s'étend à la pseudo-congruence.

Proposons-nous de retourner un triangle ABC en conservant les supports des côtés AB et AC . Pour cela, sur AB , construisons le point C' et sur AC le point B' tels qu'il y ait pseudo-congruence entre les segments AB et AB' d'une part, AC et AC' d'autre part. Soit α l'angle de la pseudo-rotation amenant AB sur AC . Nous avons

$$AB' = AB e^{\alpha}$$

$$AC' = AC e^{-\alpha}$$

Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ne sont pas semblables; ils ne sauraient donc être pseudo-congruents.

Ainsi la validité de l'axiome de congruence des triangles ¹ est restreinte aux seuls cas de congruence directe des triangles (avec conservation du sens).

La possibilité d'étendre l'axiome de congruence des triangles au cas des triangles de sens opposés exige donc la seconde réversibilité de la congruence des segments ².

¹ Axiome III 5 de Hilbert.

² Hilbert définit le segment de telle sorte que la seconde réversibilité résulte de cette définition. L'axiome III 5 étendu dépend de cette définition. Au contraire, il est possible de distinguer les segments AB et BA ; il faut alors poser axiomatiquement la seconde réversibilité et l'axiome III 5 dépend de cette convention.

6. CAS PARTICULIERS DE TRIANGLES.

Distinguons les triangles *isocèles* (dont deux côtés sont congruents) des triangles *isopodes*, dont deux angles sont congruents¹.

En géométrie élémentaire, tout triangle isopode est isocèle et réciproquement. Nous allons voir que ces deux théorèmes sont de caractères très différents.

Soit ABC un triangle isopode dont les angles B et C sont congruents. Menons la bissectrice de l'angle A du triangle; elle coupe le côté BC en un point D . Dans les deux triangles ABD et ACD , les angles en A sont congruents, ainsi que ceux en B et en C . Les angles ADB et ADC sont congruents donc droits. La parallèle au côté BC passant par A est la seconde bissectrice de l'angle BAC . De ce fait, D est le conjugué harmonique du point impropre de BC par rapport à B et C , soit le milieu de BC . La bissectrice au sommet d'un triangle isopode est identique à la hauteur issue de ce sommet et à la médiatrice de la base.

Dans cette démonstration, il n'est fait aucun usage de propriétés de congruence non-affine de segments. Donc le théorème s'étend au cas des triangles isopodes de toute géométrie admettant une pseudo-congruence quelconque des segments pourvu que celle-ci respecte leur congruence affine.

Le triangle isopode ABC étant donné, la congruence avec elle-même de la hauteur AD et l'application du premier cas de congruence des triangles aux triangles ADB et ADC de sens opposés conduit à l'isocélie. Ce cas de congruence est exclu de notre géométrie. Nous devons donc nous attendre à la non-isocélie des triangles isopodes et à la non-isopodie des triangles isocèles.

Le théorème de l'identité de la hauteur et de la médiatrice de la base d'un triangle isopode conduit à celui de la convergence des médiatrices des côtés d'un triangle quelconque.

Soit un triangle ABC ; par le sommet A menons la demi-droite AA' intérieure au triangle et qui fait avec AB l'angle $\frac{\pi}{2} - C$. L'angle $AA'C$ est égal à $\frac{\pi}{2} - C + B$

et l'angle CAA' à $\pi - C - \left(\frac{\pi}{2} - C + B\right) = \frac{\pi}{2} - B$. En B , reportons de même l'angle $\frac{\pi}{2} - C$, en BM , où M est l'intersection du nouveau côté avec AA' . De M , abaissons

les perpendiculaires MC_1 , MA_1 et MB_1 sur AB , BC et CA . Les angles AMC_1 et BMC_1 sont congruents à C , BMA_1 à A et AMB_1 à B .

Construisons les symétriques C_A et C_B de A par rapport à MB_1 et de B par rapport à MA_1 . Les angles B et A sont reportés deux fois en M et en ce point nous avons une somme d'angles égale à $2(A+B+C) = 2\pi$. Autrement dit, les trois points M , C_A et C_B sont alignés. Construisons les symétriques successifs de C_A par rapport à MB_1 , MC_1 et MA_1 . Ces trois symétries se réduisent à une seule dont AC est l'axe. Donc

¹ Littéralement, isocèle (ou isoscèle) signifie à jambes égales et isopode, à pieds égaux.

les points C_A et C_B sont confondus en C ; les triangles MAB , MBC et MCA sont isopodes; les droites MA' , MB' , et MC' sont les médiatrices des côtés du triangle donné ABC .

En général, on démontre le théorème en faisant usage du fait que la médiatrice d'un segment est le lieu des points équidistants des extrémités. Ce recours à la notion de longueur n'est pas nécessaire. Le théorème de la convergence des médiatrices est indépendant de la seconde réflexivité de la congruence des segments. On sait que ce théorème conduit à la convergence des hauteurs d'un triangle.

En application de nos conventions sur la pseudo-congruence, qualifions de *pseudo-isocèle* un triangle ABC dont deux côtés AB et AC sont liés par une pseudo-rotation de centre A .

Pour abréger, nous excluons le cas où la demi-droite singulière issue du sommet A d'un triangle pseudo-isocèle coupe la base BC . Pour fixer les idées, appelons B le sommet qui devient C par une pseudo-rotation positive. L'angle A peut prendre des valeurs quelconques comprises entre 0 et π ¹. L'angle C est inférieur à l'angle d'un pseudo-cercle avec un de ses rayons² donc à $\frac{\pi}{4}$. L'angle B est inférieur à $\frac{3\pi}{4}$; il décroît lorsque l'angle A augmente. L'angle C varie de la somme algébrique des variations des angles A et B ; il décroît lorsque A augmente.

Pour le voir, appliquons le théorème des sinus au triangle ABC . La longueur du côté AC est ABe^A ; il vient

$$e^A \sin C = \sin(A+C) \text{ ou } \operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{e^A - \cos A}.$$

Le numérateur de la dérivée de $\operatorname{tg} C$ est

$$e^A (\cos A - \sin A) - 1.$$

Pour A supérieur à $\frac{\pi}{4}$, cette expression est négative. Il en est de même pour A petit, comme on le voit par un développement en série entière; le calcul montre que le signe reste invariable pour A positif. Donc C décroît lorsque A augmente. Si A est petit, C et B diffèrent peu de $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

L'angle B à la base du triangle pseudo-isocèle peut être droit. Dans ce cas, $\cos A = e^{-A}$; $A = 1,2923 = 74^\circ 4'$, $C = 15^\circ 56'$. Cela montre de nouveau³ que dans un triangle au plus grand angle n'est pas nécessairement opposé un côté de pseudo-longueur supérieure à celle des autres côtés.

¹ Si l'on admettait le cas où la demi-droite singulière issue de A coupe BC , on serait conduit à distinguer l'angle A de l'angle de la pseudo-rotation liant AB et AC .

² Comme en géométrie élémentaire.

³ V. § 4.

L'existence de triangles pseudo-isocèles dont un angle à la base est droit montre la non-validité du théorème de Pythagore sur l'égalité de la somme des carrés des pseudo-longueurs des cathètes au carré de celle de l'hypoténuse. Selon la nomenclature de Hilbert ¹, notre géométrie est *non-pythagoricienne*. Comme nous le verrons plus bas ² cela ne signifie pas l'absence d'une relation entre les aires des carrés construits sur les côtés.

Il existe des triangles pseudo-isocèles dont un angle à la base est congruent à celui au sommet. Dans ce cas on a

$$e^A = 2 \cos A ;$$

les angles d'un tel triangle sont $A = C = 0,540 = 30^\circ 56'$, $B = 118^\circ 08'$. Ces triangles ne sont pas équiangles ou pseudo-équilatéraux.

Construisons le symétrique B' de B par rapport à A . Nous obtenons le triangle ACB' dans lequel AC et $B'C$ sont pseudo-congruents. De même, soit C' le symétrique de C par rapport à A ; dans le triangle $AC'B$, AB et $C'A$ sont pseudo-congruents. Les triangles ACB' et $AC'B$ peuvent être considérés comme pseudo-isocèles de seconde espèce; leurs propriétés se déduisent de celles des triangles pseudo-isocèles, elles leur sont analogues. L'intérêt de ces triangles est de montrer la variété des notions que contient l'isocélie des triangles dans le cas de la validité de la seconde réflexivité des segments.

La construction élémentaire d'un triangle équilatéral ABC conduit à mener deux arcs de cercles ayant pour centres les extrémités A et B d'un segment et passant chacun par l'autre extrémité. La propriété fondamentale de ces triangles est l'existence du cercle de centre C et passant par A et B . Au fond, la construction précédente est celle d'un triangle bi-isocèle.

Etendue au cas de la pseudo-congruence des segments, la construction d'un triangle bi-pseudo-isocèle est possible. Un tel triangle n'est pas pseudo-équilatéral donc tri-pseudo-isocèle, car ses trois angles devraient être inférieurs à $\frac{\pi}{4}$.

Supposons positive la pseudo-rotation autour de A conduisant B en C et négative celle autour de B amenant A en C . L'application de théorèmes de trigonométrie élémentaire donne le système d'équations

$$e^A \cos A + e^{-B} \cos B = 1$$

$$e^{A+B} \sin A = \sin B .$$

Cela conduit ³ à $A = 0,067 = 3^\circ 50'$, $B = 2,326 = 113^\circ 16'$ et $C = 0,749 = 42^\circ 54'$.

¹ Grundlagen der Geometrie, appendice II.

P. ROSSIER: *Les Fondements de la Géométrie et David Hilbert*. Ouvrage à paraître. Paris, 1966.

² § 7, les aires.

³ Le calcul a été fait à 0,001 radian près; le chiffre des minutes n'est donc pas sûr.

Ainsi la seconde réflexivité de la congruence des segments est nécessaire à l'existence des triangles équilatéraux; elle ne l'est pas pour la similitude entre eux des triangles bi-isocèles. Elle est sans influence sur l'existence des triangles équiangles. La similitude entre eux des triangles bi-isocèles (donc équilatéraux) de la géométrie élémentaire est indépendante de la seconde réflexivité des segments. Aux triangles isocèles de seconde espèce sont liés des triangles bi-isocèles de seconde espèce dont l'étude est analogue à ce qui précède.

Il est bien entendu que l'inexistence des triangles équilatéraux ne change rien à l'existence des triangles équiangles.

Soit un triangle équiangle ABC décrit dans le sens positif. Supposons que les angles des pseudo-rotations superposant les supports de AB et de AC et ceux de BC et CA soient $+\frac{\pi}{3}$; celui de la pseudo-rotation conduisant le support de CA sur celui de CB est $-\frac{\pi}{3}$ ou $2\pi - \frac{\pi}{3}$. Les rapports des pseudo-longueurs des côtés d'un triangle équiangle décrit comme convenu sont donc $e^{\frac{\pi}{3}} = 2,85$, $e^{-\frac{\pi}{3}} = 0,351$ ou $e^{2\pi - \frac{\pi}{3}} = 196$.

Considérons un segment AB porté par une demi-droite singulière et soit M un de ses points. Au segment AM , faisons subir une pseudo-rotation de 2π autour de A et à BM une pseudo-rotation de π autour de B . Cherchons la condition pour que les deux points d'arrêt, distincts de M , des deux arcs de pseudo-cercles décrits soient confondus en X . Posons $AM = x \cdot AB$, donc $MB = (1-x)AB$. Nous sommes conduits à l'équation $x(1 - e^\pi) = 1$ ou $x = 0,0414$.

Choisissons un point N appartenant au segment AM et faisons-lui subir les mêmes pseudo-rotations que celles imposées à M . Les deux pseudo-cercles décrits par N se coupent en un point P . Il existe donc des triangles dont deux côtés reportés sur le troisième le recouvrent sans segment commun.

Comme sommet distinct de P choisissons un point Q , intérieur au triangle ABP . Le report de AQ et de BQ sur AB n'épuise pas AB . Autrement dit, il existe des triangles tels que la somme des pseudo-longueurs de deux des côtés est inférieure à celle du troisième côté.

Revenons au triangle ABP précédent; le report de deux de ses côtés recouvre le troisième; son existence montre la non-validité du troisième cas de congruence des triangles: deux triangles dont les côtés homologues sont congruents ne sont pas nécessairement congruents.

7. LES AIRES

Depuis Hilbert ¹, on distingue deux parties dans la théorie des aires; la première est basée sur l'équicomplémentarité des figures et son cas particulier de l'équidécomposabilité. La seconde exige une définition appropriée de l'aire.

¹ Grundlagen der Geometrie, ch. IV.

P. ROSSIER: *Les Fondements de la Géométrie et David Hilbert*. Ouvrage à paraître. Paris, 1966.

Deux polygones sont pseudo-équidécomposables s'ils peuvent être découpés en un nombre fini de triangles pseudo-congruents deux à deux.

Deux polygones sont pseudo-équicomplémentaires si, après adjonction de deux polygones pseudo-équidécomposables, ils deviennent deux polygones pseudo-équidécomposables.

Deux parallélogrammes qui ont un côté commun et dont les côtés opposés sont portés par la même droite sont équidécomposables si les côtés opposés au côté commun ont au moins un point commun; ils sont équicomplémentaires dans le cas contraire.

Soient deux triangles ayant un côté commun et tels que la droite passant par les sommets opposés soit parallèle au côté commun; ces deux triangles sont équicomplémentaires.

Ces propriétés résultent de congruences affines des triangles; elles s'étendent à la pseudo-équidécomposabilité.

On confond parfois la dernière propriété avec celle de l'équidécomposabilité d'un triangle avec un parallélogramme ayant même base et une hauteur valant la moitié de celle du triangle. Cette propriété n'est pas valable dans notre géométrie car elle fait intervenir la congruence de deux triangles symétriques par rapport à un point, donc non pseudo-congruents.

La seconde partie de la théorie des aires fait intervenir la constance du produit de la longueur de la base d'un parallélogramme par celle de la hauteur. Cette invariabilité ne s'étend pas aux pseudo-longueurs.

Pour abréger, examinons le cas particulier du losange. Soit α un de ses angles convenablement choisi. Le rapport des pseudo-longueurs des côtés et des hauteurs correspondantes est $e^{-\alpha}$ et celui du produit $e^{-2\alpha}$, donc différent de 1.

Ainsi la première partie de la théorie des aires est indépendante de la seconde réflexivité de la congruence des segments, si l'on exige la conservation du sens des figures. La non-validité de la seconde réflexivité exclut la seconde partie de la théorie des aires.

L'un des théorèmes importants de la théorie des aires est l'équidécomposabilité des carrés des cathètes d'un triangle rectangle avec celui de l'hypoténuse, cas particulier du théorème plus général vu au § 3. Cette équidécomposabilité est souvent utilisée pour démontrer le théorème de Pythagore sur la somme des carrés des longueurs des cathètes. Comme ce dernier théorème n'est pas valable dans notre géométrie, sa démonstration au moyen de la théorie des aires fait intervenir un élément étranger; elle n'est pas « causale », ou le théorème de la longueur de l'hypoténuse ne doit être considéré que comme un artifice d'expression d'une propriété des aires. Dans les applications, le théorème intervient presque toujours sous la forme de carrés de longueurs sans intervention des aires; ces applications exigent la seconde réflexivité de la congruence des segments.

Soient un diamètre AB d'un pseudo-cercle de centre O et OC le rayon perpendiculaire à AB d'argument égal à la moyenne de ceux de A et B . Supposons l'argument

de B supérieur (de π) à celui de A . Sur OA et OC d'une part, OC et OB d'autre part, construisons deux pseudo-carrés. Ils sont pseudo-congruents, puisqu'ils sont liés par une pseudo-rotation de π autour de O .

Faisons subir la translation AO au premier pseudo-carré; il ne recouvre pas le second. Ainsi, deux figures contenues l'une dans l'autre peuvent être équidécomposables.

De Zolt a construit une théorie des aires basée sur l'inexistence de deux figures équidécomposables dont l'une est contenue dans l'autre. Cette théorie n'est pas valable dans notre géométrie.

8. LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX POINTS

Soit un segment AB . Supposons les notations choisies de telle sorte que la demi-droite singulière issue de A subisse une pseudo-rotation positive pour atteindre B .

Menons un pseudo-cercle de centre quelconque O et une de ses cordes $A'B'$ parallèle à AB . Le sommet O' du triangle $O'AB$ directement homothétique à $OA'B'$ appartient au lieu des points équidistants de A et B . Ce lieu est une courbe dont la structure dépend de la direction de AB . Le pseudo-milieu de AB appartient au lieu; il correspond au diamètre du pseudo-cercle parallèle à AB .

Il existe deux tangentes au pseudo-cercle parallèle à AB ; il leur correspond deux points à l'infini du lieu; la direction asymptotique correspondante est celle du diamètre du pseudo-cercle passant par les points de contacts des tangentes; son angle avec AB est $\frac{3\pi}{4}$.

Soit M' le milieu de la corde $A'B'$; le point O' peut être construit à partir du milieu M de AB en menant par lui la droite parallèle à OM' . Lorsque la longueur de la corde $A'B'$ tend vers zéro, le point correspondant O' s'éloigne indéfiniment dans la direction du diamètre par les points de tangence. Soit $A''B''$ la corde du pseudo-cercle obtenue par pseudo-rotation de π autour de O . Les milieux de $A'B'$ et de $A''B''$ sont alignés sur O ; donc les deux asymptotes correspondant aux deux points de contact sont superposées et passent par le milieu de AB . Puisque le pseudo-milieu du segment appartient au lieu, celui-ci n'est pas une droite.

La propriété de la tangente en O du lieu du milieu des cordes d'un pseudo-cercle, parallèles à AB conduit à une propriété analogue du lieu cherché; au pseudo-milieu de AB , l'angle de la tangente au lieu avec AB est $\frac{\pi}{4}$ ¹.

Supposons AB parallèle à la tangente au pseudo-cercle en son origine. Les deux tangentes limitent une bande à laquelle appartiennent toutes les cordes du pseudo-

¹ A condition de choisir cette valeur pour α (§ 2).

cercle parallèle à AB . Partons du diamètre; il lui correspond le pseudo-milieu de AB . Parcourant la bande dans les deux sens, la corde conduit à deux branches infinies du lieu qui se raccordent au pseudo-milieu.

Supposons que la parallèle à AB passant par l'extrémité du pseudo-cercle coupe celui-ci en un unique point. L'argument de AB est inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Les parallèles à AB passant par l'origine et l'extrémité du pseudo-cercle déterminent une bande telle que les parallèles à AB qui lui appartiennent ne coupent le pseudo-cercle qu'en un unique point. A ces sécantes ne correspond aucun point du lieu.

Avec les deux tangentes au pseudo-cercle parallèles à AB , les deux parallèles précédentes déterminent deux bandes qui conduisent à deux branches du lieu. Examinons celle relative à la bande ne contenant pas le centre du pseudo-cercle. Elle ne franchit pas le segment AB . Lorsque l'argument de AB augmente, ce point asymptotique s'éloigne et cela indéfiniment si l'argument de AB tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Examinons la seconde branche du lieu. Elle coupe le segment AB en son pseudo-milieu.

A la sécante passant par l'origine du pseudo-cercle correspond un point d'arrêt du lieu, point qui lui appartient et qui est situé du côté de la droite AB où est la première branche du lieu.

Reste à traiter le cas où la parallèle à AB par l'origine du pseudo-cercle coupe celui-ci en deux autres points. L'argument de AB est alors supérieur à $\frac{\pi}{4}$. Cette sécante et les deux tangentes parallèles à AB déterminent deux bandes adjacentes. A celle qui contient le centre du pseudo-cercle correspond une branche analogue à celle obtenue dans le cas précédent. Cette branche coupe le segment en son pseudo-milieu et se prolonge continûment jusqu'à un point d'arrêt qui appartient au lieu. La sécante correspondante a parcouru une fois la bande limitée par les deux tangentes. Aux sécantes de la bande comprises entre la sécante par l'origine du pseudo-cercle et la tangente, bande qui ne contient pas le centre, correspondent deux branches de la courbe.

L'une part d'un point d'arrêt et s'étend à l'infini; elle est relative aux cordes de la longueur indéfiniment décroissante. Les deux dernières des trois intersections de ces sécantes déterminent une troisième branche du lieu limitée par deux points d'arrêt.

La discussion précédente montre l'importance de la seconde réflexivité dans les problèmes de lieu traités. L'existence d'une asymptote du lieu, le fait que celle-ci coupe le segment donné en son milieu sont indépendants de cette réflexivité.

9. QUESTIONS DIVERSES

L'équation de Chasles peut être présentée sous deux formes.

$$AC = AB + BC \text{ et } AB + BC + CA = 0$$

La première seule est indépendante de la seconde réflexivité.

* * *

Soient deux pseudo-cercles concentriques a et b et deux de leurs points A et B alignés sur le centre. Le pseudo-cercle de centre A et qui passe par B est tangent en B à b . Ainsi l'équidistance de deux cercles concentriques ne dépend pas de la seconde réflexivité des segments.

* * *

Soient un pseudo-cercle de centre O et deux demi-droites a et b issues d'un point S . Menons les deux paires de tangentes parallèles aux supports de a et b . Elles déterminent un parallélogramme dont deux côtés sont équipollents à a et b . Soit M le sommet commun à ces deux côtés. La demi-droite issue de S équipollente à la demi-droite d'origine M et qui passe par O est le lieu des points pseudo-équidistants des deux côtés de l'angle ab .

L'alignement des points équidistants des deux côtés d'un angle est donc indépendant de la seconde réflexivité des segments, mais le fait que ce lieu est la bissectrice de l'angle en dépend.

Le lieu des points pseudo-équidistants de deux droites parallèles est une droite parallèle aux droites données. Sur une sécante quelconque de la figure, l'intersection avec le lieu est le pseudo-milieu du segment intercepté par les parallèles. Ainsi l'alignement des points équidistants d'une droite situés d'un côté de celle-ci est indépendant de la seconde réflexivité.

Deux droites concourantes déterminent quatre angles. La construction effectuée plus haut sur les demi-droites peut leur être appliquée; elle conduit à quatre demi-droites non-alignées deux à deux. Ainsi le lieu des points pseudo-équidistants de deux droites concourantes se compose de quatre demi-droites issues de leur point commun et de supports distincts.

* * *

Soient un triangle et un pseudo-cercle; trois des six parallèles aux côtés du triangle tangentes au pseudo-cercle déterminent un triangle directement homothétique au triangle donné; le pseudo-cercle déterminé par cette homothétie est inscrit au triangle initial; il est unique. De même on détermine trois pseudo-cercles ex-inscrits au triangle.

Ainsi le nombre des cercles inscrits et ex-inscrits à un triangle est indépendant de la seconde réflexivité de la congruence des segments.

* * *

Le problème du pseudo-cercle circonscrit à un triangle est plus compliqué, car ce cercle n'existe pas toujours. Examinons en effet le triangle ayant pour sommets l'origine d'un pseudo-cercle, son extrémité et un quelconque de ses points; le pseudo-cercle ne passe pas par les trois sommets.

* * *

Soit A un point d'un pseudo-cercle de centre O . Menons les rayons OA , OB et OC tels que les angles AOB et BOC soient congruents; soit α la valeur de cet angle. Le triangle OBC résulte de OAB par la pseudo-rotation d'angle α . Ces deux triangles sont pseudo-congruents donc aussi les angles homologues.

Menons le pseudo-cercle de centre O et tangent à AB . Dans la pseudo-rotation précédente, il glisse sur lui-même; il est donc tangent à BC .

Reportons l'angle α autant que faire se peut sans franchir la demi-droite singulière d'origine O . La ligne brisée ABC obtenue est pseudo-régulière. Ainsi l'existence des lignes polygonales régulières, celle de leurs cercles circonscrit et inscrit est indépendante de la seconde réflexivité des segments.

* * *

Les théorèmes de géométrie élémentaire qui sont des cas particuliers de propriétés projectives sont assez nombreux. Plusieurs d'entre-eux sont liés au fait que le lieu des points équidistants d'un point est une conique, courbe d'ordre et de classe deux. Or le pseudo-cercle ne possède ni ordre ni classe déterminés. Ces théorèmes dépendent donc de la seconde réflexivité des segments.

* * *

La pseudo-congruence ne satisfait pas à l'axiome de monodromie: il n'existe pas de pseudo-rotation distincte de l'identité qui ramène une figure sur elle-même; lors d'une pseudo-rotation de 2π autour d'une de ses extrémités, un segment ne revient pas sur lui même.

10. RÉSUMÉ

La congruence des deux segments opposés de même support ($AB \equiv BA$) est nécessaire pour que l'on puisse admettre les propriétés suivantes:

1° Les deux premiers cas de congruence des triangles si ceux-ci sont de sens opposés.

- 2° Le troisième cas de congruence des triangles.
- 3° La congruence à la base des triangles isocèles.
- 4° La supériorité sur les autres côtés du côté opposé au plus grand angle d'un triangle.
- 5° La supériorité de la somme de deux côtés d'un triangle sur le troisième.
- 6° Le caractère minimal de la perpendiculaire abaissée d'un point sur une droite.
- 7° L'acuité des angles à la base d'un triangle isocèle.
- 8° La perpendicularité de la tangente au cercle (considéré comme lieu de points équidistants d'un point) sur le rayon par le point de contact.
- 9° Le théorème de Pythagore relatif au carré des longueurs des côtés d'un triangle rectangle.
- 10° L'alignement des points équidistants de deux points et celui des milieux des cordes d'un cercle parallèles entre elles.
- 11° La superposition des bissectrices angulaires et linéaires (lieu des points équidistants des côtés) d'un angle.
- 12° La superposition des supports des bissectrices linéaires de deux angles opposés par le sommet.
- 13° La perpendicularité de ces bissectrices dans le cas de deux angles supplémentaires.
- 14° La partie de la théorie des aires qui fait usage de produits de longueurs.
- 15° L'axiome de de Zolt affirmant la non-équidécomposabilité de deux rectangles dont l'un est intérieur à l'autre.
- 16° L'existence du cercle circonscrit à un triangle.

Les propriétés suivantes sont indépendantes de la seconde réflexivité de la congruence des segments.

- 1° Les deux premiers cas de congruence de triangles de même sens.
- 2° L'identité de la bissectrice et de la hauteur avec la médiatrice de la base dans un triangle où les angles adjacents à la base sont congruents.
- 3° La convergence des médiatrices des côtés d'un triangle et celle des hauteurs.
- 4° La similitude des triangles bi-isocèles.
- 5° La constance de l'angle de la tangente à un cercle et du rayon par le point de contact.
- 6° La constance de la distance radiale de deux cercles.
- 7° L'alignement des points équidistants d'une droite.
- 8° La validité du théorème de Thalès sur les segments coupés par deux parallèles sur deux droites concourantes.
- 9° L'existence de triangles semblables de même sens et la validité de la théorie de la similitude pour ces triangles.
- 10° La validité de la partie de la théorie des aires consacrée à l'équicomplémentarité des figures, en particulier celle du théorème de Pythagore sur l'équidécom-

posabilité du carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle et de ceux construits sur les cathètes, ainsi que de la généralisation affine de ce théorème.

11° L'alignement des points équidistants des deux côtés d'un angle (considérés comme des demi-droites).

12° L'existence d'une borne supérieure pour les angles à la base d'un triangle isocèle.

13° Le passage par le milieu d'un segment de l'asymptote du lieu des points équidistants des extrémités du segment.

14° L'existence d'un unique cercle inscrit à un triangle et de trois cercles ex-inscrits.
