Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 18 (1965)

Heft: 1

Artikel: Tableau triangulaire de coefficients intervenant dans divers problèmes de physique mathématique

Autor: Ravatin, Jacques / Mesnard, Guy

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-739166

TABLEAU TRIANGULAIRE DE COEFFICIENTS INTERVENANT DANS DIVERS PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PAR

Jacques RAVATIN et Guy MESNARD

RÉSUMÉ

Le tableau est obtenu en développant le produit $(ab)^{\alpha-1}\, a^p$, α et p étant des entiers positifs et a et b deux opérateurs tels que $ab - ba = x$. On indique un mode de formation de ce tableau à partir de tableaux plus simples.

Dans une précédente publication (1), nous avons étudié la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha p^{n-1}$ (α, entier positif), qui intervient dans la théorie de la croissance des polymères. Nous avons introduit à cette occasion des coefficients V_α^i, qui avaient été considérés aussi par Truesdell (2), ainsi que des coefficients L_α^i. Nous nous proposons de généraliser les L_α^i en envisageant un autre problème et d'étudier le tableau des coefficients obtenus.

Pour cela nous considérons deux opérateurs a et b dont le commutateur $ab - ba$ est égal à x, x appartenant au corps des réels, des complexes ou des quaternions. Nous développons le produit $(ab)^{\alpha-1}\, a^p$ (α et p, entiers > 0) suivant les puissances $a^s\, b^s$ (s, entier positif). On admet la loi d'associativité

$$a^s (a^t\, b^q) = (a^s\, a^t)\, b^q = a^{s+t}\, b^q.$$

On trouve qu'il est possible d'écrire

$$(ab)^{\alpha-1}\, a^p = a^p \left[T_\alpha^1\, a^{\alpha-1}\, b^{\alpha-1} + \ldots + (-1)^{t-1}\, T_\alpha^t\, a^{\alpha-t}\, b^{\alpha-t} + \ldots + (-1)^{\alpha-1}\, T_\alpha^\alpha\right],$$

les T_α^i étant positifs ($i \leq \alpha$), et l'on établit par récurrence la relation:

$$T_\alpha^t = T_{\alpha-1}^{t-1}\,(\alpha - t + p)\, x + T_{\alpha-1}^t\,. \tag{1}$$

A partir de cette relation et en remarquant que

$$T_1^1 = T_2^1 = \ldots = T_a^1 = \ldots = 1\,, \tag{2}$$

on construit le tableau triangulaire suivant, noté ${}^p_x T$:

$\alpha = 1$	1			
$\alpha = 2$	1	px		
$\alpha = 3$	1	$(2p+1)\,x$	p^2x^2	
$\alpha = 4$	1	$3\,(p+1)\,x$	$(3p^2+3p+1)\,x^2$	$p^3\,x^3$
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Pour $p = 1$ et $x = 1$ les T^t_α sont les coefficients L^t_α déjà cités. On a aussi: $T^t_{\alpha+1}$ (pour $p = 0$ et $x = 1$) $= L^t_\alpha$ $(t \leq \alpha)$.

On a donc généralisé les coefficients L^t_α que l'on écrira ${}^1_1 L^t_\alpha$, les T^t_α étant notés ${}^p_x L^t_\alpha$.

On a d'ailleurs

$$ {}^p_x L^t_\alpha = x^{t-1}\, {}^p_1 L^t_\alpha \tag{3} $$

Quelques propriétés tirées de la formule (1):

a) $${}^p_x L^\alpha_\alpha = p^{\alpha-1}\, x^{\alpha-1}$$

b) $${}^p_x L^{\alpha-1}_\alpha = \left[(p+1)^{\alpha-1} - p^{\alpha-1}\right] x^{\alpha-2}$$

c) On montre que

$$ \frac{d}{dp}\left({}^p_x L^{t+1}_{\alpha+1}\right) = \alpha x \left({}^p_x L^t_\alpha\right). \tag{4} $$

et l'on en déduit

$$ {}^p_x L^{t+1}_{\alpha+1} = \alpha x \int_0^p {}^p_x L^t_\alpha \, dp + {}^1_x L^{t+1}_\alpha . \tag{5} $$

Cette relation donne un nouveau mode de construction du tableau des ${}^p_x L^t_\alpha$.

d) On a aussi la formule

$$ {}^p_1 L^{\alpha-1}_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha-1} C^i_{\alpha-1}\, p^{\alpha-i-1} $$

avec

$$ C^i_{\alpha-1} = \frac{(\alpha-1)\,!}{i\,!\,(\alpha-i-1)\,!}\,. $$

Relations avec d'autres tableaux

Dans le cadre d'un formalisme portant sur les tableaux, développé par ailleurs (3), on dira que le tableau ${}^p_xT$ est défini par les relations (1) et (2), la relation (2) donnant la « base » du tableau et la relation (1) le « générateur », ce qui permet de déterminer de proche en proche tous les coefficients. La formule (5) correspond à un autre « générateur ».

On peut en outre présenter le tableau comme résultant d'opérations faites à partir de tableaux triangulaires plus simples.

Partons du tableau

$$Q = \begin{array}{|llll}
0 & & & \\
1 & 0 & & \\
2 & 1 & 0 & \\
3 & 2 & 1 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array},$$

dont l'élément de la α^e ligne et de la $t^{ème}$ colonne est

$$Q^t_\alpha = \alpha - t \; (\alpha \geq t) .$$

En ajoutant p à chaque élément on obtient le tableau

$$P = \begin{array}{|lll}
p & & \\
p+1 & p & \\
p+2 & p+1 & p \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array},$$

d'élément général $P^t_\alpha = p + \alpha - t$.

On passe facilement du tableau P au tableau ${}^p_1T$. On a en effet

$${}^p_1L^t_\alpha = {}^p_1L^{t-1}_{\alpha-1} \, P^t_\alpha + {}^p_1L^t_{\alpha-1} .$$

Enfin on passe au tableau ${}^p_xT$ en utilisant la formule (3).

Les éléments du tableau peuvent être considérés comme fonctions de p. Il est intéressant de faire intervenir un tableau dit dérivé dont chaque élément est la dérivée de l'élément homologue du tableau initial. Ce nouveau tableau est formé aisément grâce à la formule (4).

En utilisant le formalisme signalé ci-dessus (3), on peut écrire les relations entre les tableaux sous forme d'opérations simples faites directement sur les tableaux, telles que la multiplication.

Laboratoire d'Electronique et de Physique du Solide
de l'Université de Lyon.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ravatin, J. et Mesnard, G. *Comptes Rendus*, t. 255, 1962, p. 2098.
2. Truesdell, *Ann. of Math.*, (2), t. 46, 1945, p. 144.
3. Ravatin, J. et Mesnard, G. *Il Nuovo Cimento*, sous presse.

Manuscrit reçu le 13 mars 1964.