

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 16 (1963)
Heft: 3

Artikel: Convergence de droites dans le triangle en géométrie affine
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739366>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Paul ROSSIER. — Convergence de droites dans le triangle en géométrie affine.

1. Soient un triangle ABC et deux coniques a et b homothétiques entre elles et ayant respectivement BC et AC comme diamètres. Appelons C' leur intersection propre distincte de C . Les droites $C'A$ et $C'C$ sont des cordes supplémentaires de la conique b alors que $C'B$ et $C'C$ le sont relativement à a . Puisque ces deux coniques sont homothétiques, $C'A$ et $C'B$ sont parallèles donc confondues. Les deux coniques a et b se coupent en un point C' de AB .

2. Construisons la conique c de diamètre AB et homothétique à a (et à b). Les coniques a et c se coupent en un point B' du côté AC et les coniques b et c en un point A' de BC .

La conique a et la droite AA' constituent une cubique α et de même, les coniques b et c avec les droites BB' et CC' appartiennent à deux cubiques β et γ .

Ces trois cubiques passent chacune par les huit points suivants :

- les trois sommets du triangle ABC ,
- les trois points A' , B' et C' ,
- les deux points impropres communs aux trois coniques homothétiques a , b et c .

D'après le théorème du neuvième point, ces trois cubiques ont encore un point commun. Ce point ne peut appartenir à deux des coniques a , b , ou c , car toutes leurs intersections figurent dans la liste ci-dessus. Le neuvième point appartient à deux (au moins) des droites AA' , BB' ou CC' . Par raison de symétrie, il appartient aux trois.

Cette convergence peut encore être démontrée comme suit : supposons non concourantes les trois droites AA' , BB' , et CC' . Appelons M l'intersection de AA' et BB' . Par ce point doit passer la cubique γ , donc la conique c . Les droites MA et MB sont des cordes supplémentaires de c ; leurs directions sont conjuguées par rapport aux trois coniques a , b et c . De même, si N est l'intersection de AA' et CC' , les droites NA et NC sont conjuguées; les droites MA et NA sont la droite AA' ; cette droite possède une unique direction conjuguée par rapport au système de coniques. Les droites MB et NC , donc BB' et CC' sont parallèles, ce qui est exclu. Le neuvième point n'est donc pas commun à deux des droites AA' , BB' ou CC' et à une des coniques a , b ou c , mais bien à ces trois droites.

Nous avons donc le théorème suivant :

Si trois coniques homothétiques ont les trois côtés d'un triangle comme diamètres, elles se coupent deux à deux sur les supports de ces côtés et les trois droites joignant ces points d'intersection au sommet opposé du triangle sont concourantes.

3. La démonstration donnée ci-dessus de la seconde partie du théorème repose sur la théorie des cubiques. Pour démontrer une relation entre les droites et des coniques, il est plus élégant de ne faire appel qu'aux propriétés des coniques. Pour cela nous utiliserons le lemme suivant: soient A et B deux intersections de deux coniques c et d et H celle de leurs tangentes communes; il existe une homologie de centre H et d'axe AB qui transforme une de ces coniques en l'autre.

Pour le montrer, appelons C et D les points de contact d'une des tangentes communes à c et à d , issues de H . Il existe une homologie déterminée par le centre H , l'axe AB et les deux points correspondants C et D . Dans cette transformation, la conique c est transformée en une conique c' qui passe par A , B et D , est tangente en D à la droite HD et est tangente à la seconde tangente commune s issue de H . Cette conique c' est une des deux coniques tangentes à s appartenant au faisceau déterminé par A , B , D et la tangente HD . A ce faisceau appartient la conique d . Sur la droite s , ce faisceau engendre une involution dont l'un des points unis est le point de contact S' de s avec d . Le centre d'homologie H est l'intersection de l'axe AB avec s sont deux points correspondants de l'involution; ils séparent S' du second point uni. Cette relation d'ordre oblige c' à passer par S ; la transformée de c est bien d .

4. Revenons au triangle ABC et aux coniques a , b et c . Celles-ci sont homologues deux à deux dans des homologies dont les axes sont les droites AA' , BB' et CC' ; chacune de ces homologies peut être considérée comme résultant des deux autres; dans la combinaison de deux d'entre elles d'axes AA' et BB' par exemple, l'intersection de ces axes est invariable; cette intersection appartient donc à l'axe CC' . Le théorème est démontré.

5. Appelons A'' , B'' et C'' les milieux des côtés BC , CA et AB du triangle. Les coniques de diamètre AB constituent un réseau bidimensionnel. Ce réseau contient une conique c qui passe par A'' et dont la tangente en A est parallèle à CC'' . La droite CC'' est axe de symétrie de la conique et du triangle ABC ; la direction de cette symétrie est AB . Donc la conique c passe par le milieu B'' du côté AC .

La conique a , homothétique à c et de diamètre BC a en B et en C des tangentes de direction conjuguée à celle de BC donc parallèle à AA'' . En application du théorème précédent, cette conique passe par le milieu C'' de AB .

Donc, si une des trois coniques homothétiques entre elles ayant les côtés d'un triangle comme diamètres passe par le milieu d'un côté, toutes les intersections de ces coniques avec les côtés du triangle sont les milieux de ceux-ci. Les trois droites AA' , BB' et CC' sont alors les médianes du triangle ABC et le théorème général contient comme cas particulier celui de la convergence des médianes du triangle.

6. Cette dernière propriété peut encore être obtenue autrement comme corollaire du théorème général. Par le milieu C'' de AB , menons les parallèles a' et b' aux côtés AC et AC' , elles les coupent en leurs milieux. Les paires de droites $a' b'$, a' et AC , b' et BC sont trois coniques homothétiques dégénérées; chacune a au moins

un côté du triangle ABC comme diamètre; le théorème général conduit de nouveau à celui de la convergence des médianes.

7. Si l'une des coniques a , b ou c est un cercle, il en est de même pour les trois et le théorème est celui de la convergence des hauteurs du triangle. A condition de ne considérer que des ellipses, le théorème général peut être déduit par affinité de celui de l'orthocentre.

Il est assez curieux de constater le lien établi par ce qui précède entre la convergence des médianes d'un triangle, propriété appartenant à la géométrie affine et celle des hauteurs, de caractère métrique.
