

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 16 (1963)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Distribution des vitesses dans un système sphérique quasi permanent  
**Autor:** Bouvier, P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-739348>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# DISTRIBUTION DES VITESSES DANS UN SYSTÈME SPHÉRIQUE QUASI PERMANENT

PAR

**P. BOUVIER**

---

## *Résumé*

Une méthode obtenue antérieurement [1] pour déterminer les distributions de vitesses dans un système à symétrie sphérique est développée ici plus complètement sur le modèle polytropique d'indice 5. La distribution isotrope des vitesses y est comparée à des distributions anisotropes particulières. On discute également (n° 7) des moyens de former la distribution des vitesses la plus générale dans un système sphérique quasi permanent.

## *Abstract*

A method devised formerly [1] to find out the velocity distributions within a spherical steady system is carried out in this paper for the polytropic model of index 5. The isotropic velocity distribution is compared to certain anisotropic distributions of this same model. Possibility is also discussed (No. 7) of constructing the most general velocity distribution in a spherical system.

## 1. INTRODUCTION

Dans un travail antérieur [1] noté I, nous avons considéré un système à symétrie sphérique en état stationnaire caractérisé par une loi de densité  $\rho = \rho(r)$  où  $r$  est la distance au centre. Tant que l'on néglige l'effet des rencontres entre membres du système, ce qui est admissible pour un système très peu dense (non relaxé), chaque membre décrit une orbite spécifiée par 4 intégrales premières du mouvement, à savoir l'énergie totale  $E$  et les trois composantes du moment angulaire  $A$ .

La distribution la plus générale que l'on puisse former dans ces conditions est donc une fonction définie positive de ces 4 intégrales. Cependant, si nous exigeons de celle-ci d'être invariante du groupe des rotations autour du centre, il suffit d'écrire

$$f = f(E, A^2) \quad (1)$$

où  $A$  est le module du moment angulaire.

$f$  conserve la forme (1) à tout instant si le système, tout en évoluant lentement sous l'action des rencontres, est en régime quasi permanent.

Nous avons donné en I une méthode permettant d'obtenir explicitement les diverses distributions de type (1) relatives à la densité  $\rho(r)$  d'un système sphérique stationnaire.

Ce problème avait d'ailleurs déjà été examiné par Lynden-Bell [4] d'une manière qui mettait en jeu des situations physiques très artificielles. Lynden-Bell a également souligné que la condition d'invariance de  $f$  vis-à-vis des rotations n'est pas nécessaire pour que  $\rho$  ne dépende que de  $r$ ; il est notamment possible de concevoir un système sphérique en rotation [5].

Nous reviendrons sur cette question au n° 7.

La méthode exposée en I repose sur le développement de (1) en série entière des puissances de  $A^2$ :

$$f(E, A^2) = f_0(E) + f_1(E) A^2 + f_2(E) A^4 + \dots \quad (2)$$

Cette série converge certainement dans la région centrale du système, que seules traversent les orbites de faible moment angulaire; en outre elle représente une distribution des vitesses en tout point du système où elle possède une somme définie positive. Comme exemples de telles représentations, signalons les deux cas

$$f_n(E) = C e^{-2j^2} \frac{1}{n!} (-2kj^2)^n$$

et

$$f_n(E) = C \frac{v!}{n!(v-n)!} (-k)^n (-E)^{v-n} \quad (C, k, \text{ constants})$$

qui correspondent, le premier à la distribution ellipsoïdale de Schwarzschild

$$f(E, A^2) = C e^{-2j^2(E+kA^2)}$$

et le second au modèle

$$f(E, A^2) = C (-E - kA^2)^v$$

dérivé du polytrophe d'indice  $v + \frac{3}{2}$ . [2].

Une correspondance biunivoque a été mise en évidence dans I entre le développement (2) et celui de la densité  $\rho(r)$  sous la forme

$$\rho(r) = \rho_0(U) + \rho_1(U) r^2 + \rho_2(U) r^4 + \dots \quad (3)$$

Ce développement (3) est purement formel et non univoque; à toute manière d'exprimer  $\rho(r)$  par une série du type (3), où le potentiel  $U = U(r)$  satisfait l'équation

de Poisson, correspond une série (2) qui, dans la région où sa somme est une fonction définie positive de  $E$  et de  $A$  fournira une distribution particulière ou « sous-modèle » du système physique caractérisé par la loi de densité  $\rho = \rho(r)$ .

## 2. POLYTROPE D'INDICE 5

L'application de la méthode a été tentée sur le polytrophe d'indice 5 qui est le seul modèle connu de masse finie dont la densité et le potentiel se présentent sous forme analytique simple. L'indice  $c$  se rapportant aux valeurs centrales, nous avons

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \quad (4)$$

$$U(r) = U_c \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

où  $a$  est le rayon de la sphère contenant, en projection, la moitié de la masse totale  $M$  égale à

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_c = -\frac{a}{G} U_c. \quad (6)$$

Ce modèle a été invoqué autrefois par Schuster puis Plummer pour représenter les amas globulaires, bien qu'il semble que la densité spatiale des régions périphériques décroisse moins vite que d'après une loi en  $r^{-5}$ .

Cependant Kreiken a montré récemment [3] que le modèle polytropique d'indice 5 représentait de façon raisonnable un assez grand nombre de systèmes sphériques, notamment certains amas galactiques ainsi que le sous-système des amas globulaires, ce dernier n'étant d'ailleurs pas autogravitant.

De (4) et (5) nous déduisons immédiatement

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{U}{U_c}\right)^5 \quad (7)$$

et obtenons ainsi la distribution isotrope bien connue

$$f^{(0)}(E) = \frac{64\rho_c}{7\sqrt{2}\pi^2} \frac{(-E)^{7/2}}{(-U_c)^5} \quad (8)$$

où les énergies sont coupées à une valeur finie  $E_e$ , condition nécessaire pour un modèle de masse totale finie; ici  $E_e = 0$ .

Pour trouver d'autres sous-modèles de (4), il faut partir de l'identité

$$\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{n-2}{2}} - \frac{r^2}{a^2} \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

à laquelle satisfait (5) sous la forme

$$\left(\frac{U}{U_c}\right)^n = \left(\frac{U}{U_c}\right)^{n-2} - \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{U}{U_c}\right)^n. \quad (9)$$

On fera ici  $n = 5$  pour être en accord avec (7) et à l'égalité

$$\left(\frac{U}{U_c}\right)^5 = \left(\frac{U}{U_c}\right)^3 - \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{U}{U_c}\right)^5 \quad (10)$$

correspondra le « sous-modèle un » ayant comme fonction de distribution

$$f^{(1)}(E, A^2) = \frac{4\rho_c}{\sqrt{2}\pi^2} \frac{(-E)^{3/2}}{(-U_c)^3} \left(1 + 4 \frac{A^2 E}{a^2 U_c^2}\right). \quad (11)$$

Notons que les trois paramètres  $a$ ,  $\rho_c$ ,  $U_c$  sont liés par la relation (6) et que la fonction (11) n'est définie positive que si  $r < a$  (v. I).

En appliquant (9) pour  $n = 3$ , on peut transformer (10) en

$$\left(\frac{U}{U_c}\right)^5 = \frac{U}{U_c} - \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{U}{U_c}\right)^3 - \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{U}{U_c}\right)^5.$$

En procédant de même avec  $n = 1$ , on fait apparaître les puissances 5, 3, 1,  $-1$  du rapport  $U/U_c$  et ainsi de suite; cependant, les fonctions  $(fE, A^2)$  correspondantes sont toutes définies négatives. Nous ne retiendrons donc que (11) comme sous-modèle possible dans la région centrale  $r < a$  du polytrophe.

### 3. PROPRIÉTÉS DU SOUS-MODÈLE UN.

En tout point distant de  $r$  du centre, nous pouvons repérer la vitesse  $v$  par son module  $v$  et l'angle polaire  $\vartheta$  mesuré depuis la direction radiale  $r$  qui est un axe de symétrie des vitesses. Désignant par  $g(r, v, \zeta)$  la distribution des vitesses, où  $\zeta = \cos \vartheta$ , nous aurons pour la densité de masse

$$\rho(r) = 2\pi \int_0^{\infty} \int_{-1}^{+1} g(r, v, \zeta) v^2 dv d\zeta$$

en rappelant que nous envisageons ici, comme dans I, un système d'objets ayant des masses toutes égales à la masse unité.

Passant des variables  $v, \zeta$  aux variables  $E, A^2$  nous écrirons

$$g(r, v, \zeta) dv d\zeta = f(E, A^2) |\Delta| dE dA^2$$

où le déterminant fonctionnel est égal à

$$\Delta = \frac{\partial(v, \zeta)}{\partial(E, A^2)} = - \frac{1}{2rv^2 \sqrt{A_m^2 - A^2}}.$$

On retrouve bien, en tenant compte de (5), l'expression de la densité (4) du polytrophe après avoir intégré sur  $A^2$  de 0 à  $A_m^2 = 2r^2(E - U)$ , puis sur  $E$  de  $U$  à  $O$ . Par conséquent, certains membres du système, parmi l'ensemble décrit par la fonction (11) en tout point  $r < a$  auront une énergie assez élevée pour que leur trajectoire ne soit pas entièrement comprise dans la sphère de rayon  $a$ .

Quoiqu'il en soit, le caractère négatif du terme en  $A$  de (11) implique une raréfaction des moments angulaires élevés lorsqu'on passe du centre  $r = 0$  à la frontière  $r = a$ .

Dans tout système à symétrie sphérique, les coordonnées de position se réduisent à la distance au centre  $r$ ; quant aux coordonnées de vitesse, nous désignerons par

$P$  la composante radiale (parallèle à  $r$ ) et par

$Q$  la composante tangentielle (perpendiculaire à  $r$ ).

En l'absence de rencontres, toute fonction de distribution  $f(r, P, Q)$  doit satisfaire l'équation fondamentale de Liouville

$$P \frac{\partial f}{\partial r} + \left( \frac{dV}{dr} + \frac{Q^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial P} - \frac{PQ}{r} \frac{\partial f}{\partial Q} = 0. \quad (12)$$

On vérifie que tel est le cas pour (11) après avoir noté

$$U = -V \quad E = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) - V \quad A = rQ.$$

Calculons ensuite les vitesses quadratiques moyennes; nous rencontrerons des intégrales définies du type

$$J_{mn} = \int_U^0 (E - U)^{\frac{2m-1}{2}} (-E)^{\frac{2n-1}{2}} dE = \pi V^{m+n} \frac{(2m-1)!! (2n-1)!!}{(2m+2n)!!}.$$

ayant écrit  $n!!$  pour  $n(n-2)(n-4)\dots$

La moyenne de l'expression  $v^2 = 2(E - U)$  sera donnée par

$$\frac{1}{2} \rho \overline{v^2} = 4\pi \int_U^0 (E - U)^2 dE \int_0^{A_m^2} f^{(1)}(E, A^2) |A| dA^2$$

soit, avec  $f^{(1)}$  de la forme (11) et  $A_m^2 = 2r^2(E - U) = 2r^2(E + V)$ ,

$$\frac{1}{2} \rho \overline{v^2} = \frac{16 \rho_c}{\pi V_c^3} \left( J_{22} - \frac{16 J_{33}}{3} \frac{r^2}{V_c^2 a^2} \right)$$

d'où, en posant  $\frac{r}{a} = \xi$ .

$$\overline{v^2} = \frac{V_c}{12} \left( \frac{10}{\sqrt{1 + \xi^2}} - \sqrt{1 + \xi^2} \right) \quad (13)$$

valeur positive si  $\xi < 3$ .

La composante tangentielle a pour carré moyen

$$\rho \overline{Q^2} = \rho \frac{1}{r^2} \overline{A^2} = \frac{64 \rho_c}{3\pi V_c^3} \left( J_{22} - \frac{32 J_{33}}{S} \frac{\xi^2}{V_c^2} \right)$$

soit

$$\overline{Q^2} = \frac{V_c}{12} \left( \frac{8}{\sqrt{1 + \xi^2}} - 2 \sqrt{1 + \xi^2} \right) \quad (14)$$

valeur positive tant que  $\xi^2 < 3$ .

Enfin pour la composante radiale,

$$\overline{P^2} = \overline{v^2} - \overline{Q^2}$$

donc, par soustraction de (14) d'avec (13)

$$\overline{P^2} = \frac{V_c}{12} \left( \frac{2}{\sqrt{1 + \xi^2}} + \sqrt{1 + \xi^2} \right) \quad (15)$$

valeur toujours positive.

Nous remarquerons qu'au centre  $\xi = 0$  du système sont vérifiées les relations d'isotropie

$$\frac{\overline{P^2}}{\overline{v^2}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\overline{Q^2}}{\overline{v^2}} = \frac{2}{3}$$

tandis qu'en un point quelconque

$$\frac{\overline{P^2}}{\overline{Q^2}} = \frac{3 + \xi^2}{6 - \xi^2} > \frac{1}{2}$$

la direction passant par le centre est une ligne des vertex.

En multipliant les deux membres de (12) par  $PdPQdQ$  et en intégrant sur les deux variables on obtient l'équation du mouvement macroscopique radial

$$\frac{d}{dr} (\rho \overline{P^2}) - \rho \frac{dV}{dr} + \frac{\rho}{r} (2\overline{P^2} - \overline{Q^2}) = 0$$

et l'on peut s'assurer, après quelques calculs, que cette relation est effectivement satisfaite par les expressions (5), (14), (15).

#### 4. SOUS-MODÈLE ZÉRO — UN

En formant une combinaison linéaire des sous-modèles zéro et un :

$$f(E, A^2) = \alpha f^{(0)}(E) + (1 - \alpha) f^{(1)}(E, A^2)$$

où  $\alpha$  est un coefficient indéterminé inférieur à l'unité, on construit un « sous-modèle zéro-un » dont la fonction de distribution

$$f(E, A^2) = \frac{4\rho_c}{\sqrt{2}\pi^2(-U_c)^3} \left\{ \frac{16}{7} \alpha \frac{(-E)^{7/2}}{fU^2} + (1 - \alpha) (-E)^{3/2} \left[ 1 + 4 \frac{A^2 E}{a^2 U_c^2} \right] \right\} \quad (16)$$

sera définie positive pour toute distance au centre supérieure à une valeur finie arbitraire.

Si nous voulons en particulier que (16) soit définie positive pour tout  $A^2$  tel que

$$A^2 \leq A_m^2 = 2r^2(E - U)$$

nous devons exiger  $f(E, A_m) > 0$  ou, posant  $\frac{E}{U_c} = \eta$  et  $\frac{r}{a} = \xi$ ,

$$\left[ 8(1 - \alpha)\xi^2 + \frac{64}{7}\alpha \right] \eta^2 - 8(1 - \alpha) \frac{\xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}} \eta + 1 - \alpha > 0.$$

L'inégalité est vérifiée pour  $\eta = 0$  et  $\eta = 1$ ; elle le sera pour toute valeur intermédiaire si le discriminant du trinôme en  $\eta$  est négatif, c'est-à-dire si l'on a

$$(1 - \alpha)\xi^4 - (1 + 0,14\alpha)\xi^2 - 1,14\alpha < 0$$

condition satisfaite tant que  $\xi^2$  reste inférieur à la racine positive  $\xi_+^2$  de l'équation du second degré en  $\xi^2$

$$(1 - \alpha) \xi^4 - (1 + 0,14\alpha) \xi^2 - 1,14\alpha = 0$$

En particulier  $\xi_+^2 \rightarrow \infty$  quand  $\alpha \rightarrow 1$  ce qui montre que seul le sous-modèle zéro est valable jusqu'à l'infini. Dès que  $\alpha < 1$ ,  $\xi_+^2$  a une valeur finie à laquelle correspondent une distance

$$b = a\xi_+$$

une fraction de masse

$$\frac{M_+}{M} = \left( \frac{\xi_+^2}{1 + \xi_+^2} \right)^{3/2}$$

et une densité

$$\rho_+ = \rho_c (1 + \xi_+^2)^{-5/2}.$$

Le tableau I renferme quelques valeurs numériques à titre d'exemples

TABLEAU I

$\alpha$	$\xi_+$	$M_+/M$	$P_+/P_c$
0	1	0,35	0,177
$1/4$	1,275	0,49	0,089
$1/2$	1,61	0,61	0,041
$2/3$	1,97	0,71	0,019
$3/4$	2,26	0,77	0,011
1	$\infty$	1	0

Comme il a été rappelé plus haut, le modèle polytropique d'indice 5 représente assez correctement un grand nombre de systèmes sphériques [3]. De toute façon, l'ajustement d'un tel modèle d'extension spatiale illimitée à un système réel nécessairement fini comporte un certain degré d'arbitraire; le système sera confiné à la région centrale  $r < b$  du polytrope. Dans l'ignorance des conditions originelles de formation de ce système nous n'avons aucune raison d'admettre que les vitesses y soient

distribuées isotropiquement comme dans le sous-modèle zéro plutôt que d'une manière conforme à l'anisotropie d'un sous-modèle zéro-un.

Soit, pour fixer les idées, un amas stellaire à symétrie sphérique et en état quasi stationnaire. La distance apparente pour laquelle la densité projetée n'est plus que le quart de celle qu'on mesure au centre nous fournit une première approximation de  $a$ ; admettons en outre que l'amas puisse être observé jusqu'à une distance apparente d'environ  $2a$  depuis le centre. Dans ces conditions le polytrophe d'indice 5 qui est censé représenter le système observé aura les 71 % de sa masse totale  $M$  à l'intérieur de la sphère de rayon  $2a$  (tableau I); en d'autres termes la masse totale observée vaudra  $0,71 M$ . Quant au résidu  $0,29 M$ , il concerne des étoiles qui seraient au delà de  $r = 2a$  et qui ne sont donc pas comptées comme étoiles de cet amas.

### 5. VITESSES RADIALES ET MOUVEMENTS PROPRES

Les observables éventuelles dont nous disposons sont les vitesses radiales  $R$  le long de la ligne de vue et les vitesses tangentielles  $T$  (mouvements propres) dans le référentiel lié au centre de masse du système considéré.

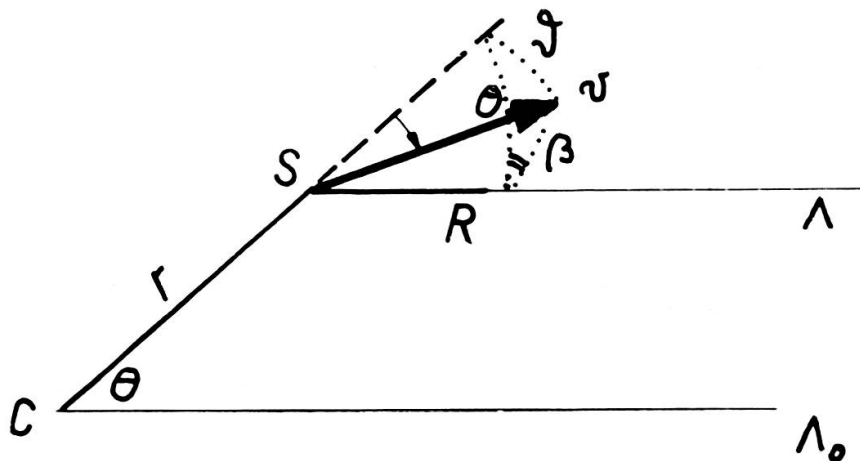


Fig. 1

Si  $A_0$  désigne la ligne de vue du centre  $C$  du système et  $A$  celle d'une étoile  $S$  de ce système,  $A_0$  et  $A$  sont parallèles pour un système dont le diamètre est très inférieur à la distance de l'observateur.

$r = CS$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  étant les coordonnées polaires de  $S$  par rapport à  $C$  (fig. 1), il est utile d'opérer ici en coordonnées cylindriques d'axe  $A_0$  (ou  $A$ ); la position de l'étoile sera déterminée par

$$y = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta, \quad \varphi$$

et sa vitesse particulière  $v$  par  $R, T, \psi$   
où  $\psi$  est l'angle des plans  $(r, A)$  et  $(v, A)$

En désignant par  $\vartheta$  l'angle du vecteur  $v$  avec la droite  $CS$  et par  $\beta$  l'angle de ce même vecteur avec la direction  $A$ , nous aurons pour le moment angulaire de  $S$  autour de  $C$

$$A = rv \sin \vartheta$$

où

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta \cos \psi \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + T^2}} \cos \theta + \frac{T}{\sqrt{R^2 + T^2}} \sin \theta \cos \psi \end{aligned}$$

par suite

$$A^2 = R^2 y^2 + T^2 (z^2 + y^2 \sin^2 \psi) + 2RTyz \cos \psi$$

alors que d'autre part l'énergie totale s'écrit

$$E = \frac{1}{2} (R^2 + T^2) - V$$

Adoptons donc le sous-modèle zéro-un défini par (16); cette distribution deviendra, en termes des coordonnées cylindriques.

$$\begin{aligned} g(y, z, R, T, \psi) &= \frac{4\rho_c \alpha}{7\pi^2 V_c^5} (2V - R^2 - T^2)^{7/2} + \frac{\rho_c (1 - \alpha)}{\pi^2 V_c^3} \\ &\left\{ (2V - R^2 - T^2)^{3/2} - \frac{2}{a^2 V_c^2} (2V - R^2 - T^2)^{5/2} [y^2 R^2 + (y^2 \sin^2 \psi + z^2) T^2 + \right. \\ &\left. + 2yzRT \cos \psi] \right\} \end{aligned}$$

elle nous permet d'évaluer la variance des vitesses radiales au point  $y$

$$\sigma(y) \overline{R^2}(y; \alpha) = 2 \int_{-z_m}^{+z_m} dz \int_0^{R_m} R^2 dR \int_0^{T_m} T dT \int_0^{2\pi} d\psi g(y, z, R, T, \psi)$$

avec

$$T_m^2 = 2V - R^2, \quad R_m^2 = 2V$$

$$\sigma(y) = 2 \int_0^{z_m} \rho(r) dz$$

$$r^2 = y^2 + z^2 \quad \rho(r) = \rho_c \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

Si  $z_m \rightarrow \infty$  . la densité projetée est égale à

$$\sigma(y) = \frac{4}{3} \rho_c \frac{a^5}{(a^2 + y^2)^2}.$$

L'intégration sur  $\psi$  fait tomber le terme en  $\cos \psi$  ; les intégrations sur  $T$  et  $R$  n'offrent pas de difficultés et se ramènent toujours à des quadratures de type connu

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p x \cos^q x dx \quad (p, q \text{ entiers}).$$

Il reste finalement

$$\sigma(y) \overline{R^2}(y; \alpha) = \frac{\alpha \rho_c}{6V_c^5} \int_{-z_m}^{+z_m} V^6 dz + \frac{(1-\alpha) \rho_c}{4V_c^3} \int_{-z_m}^{+z_m} \left( V^4 - \frac{4y^2 V^5}{3a^2 V_c^2} - \frac{2z^2 V^6}{3a^2 V_c^2} \right) dz \quad (17)$$

Un calcul analogue nous fournit

$$\sigma(y) \overline{T^2}(y; \alpha) = \frac{\alpha \rho_c}{3V_c^5} \int_{-z_m}^{+z_m} V^6 dz + \frac{(1-\alpha) \rho_c}{2V_c^3} \int_{-z_m}^{+z_m} \left( V^4 - \frac{y^2 V^5}{a^2 V_c^2} - \frac{4z^2 V^5}{3a^2 V_c^2} \right) dz \quad (18)$$

pour la variance des mouvements propres.

Quant à la limite supérieure des  $z$ , elle s'exprime en termes du rayon  $b$  de l'amas :

$$z_m = \sqrt{b^2 - y^2}$$

de sorte que

$$\sigma(y) = \frac{2}{3} \rho_c \frac{a^5}{(a^2 + y^2)^2} \frac{3a^2 + 2b^2 + y^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \sqrt{b^2 - y^2}$$

L'intégration au second membre de (17) et (18) est élémentaire mais conduit à des expressions compliquées que nous avons calculées pour les valeurs particulières  $\alpha = 2/3$  donc  $b = 2a$  et  $y = 0, a, 2a$ . Le tableau 2 et la fig. 2 montrent l'allure des courbes

$$\overline{R^2}(y; 2/3) \quad \overline{T^2}(y; 2/3)$$

comparées aux courbes du sous-modèle zéro ( $\alpha = 1, b = \infty$ ) données par

$$\overline{R^2}(y; 1) = \frac{3\pi}{64} V_c \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{1}{2} \overline{T^2}(y; 1).$$

TABLEAU 2

$y$	$\overline{R^2}(y; \frac{2}{3})$	$\overline{R^2}(y; 1)$	$\overline{T^2}(y; \frac{2}{3})$	$\overline{T^2}(y; 1)$
0	0,18	0,15	0,33	0,30
$a$	0,11	0,10	0,23	0,20
$2a$	0,03	0,07	0,15	0,14

les carrés de vitesse sont en unités  $V_c$ .

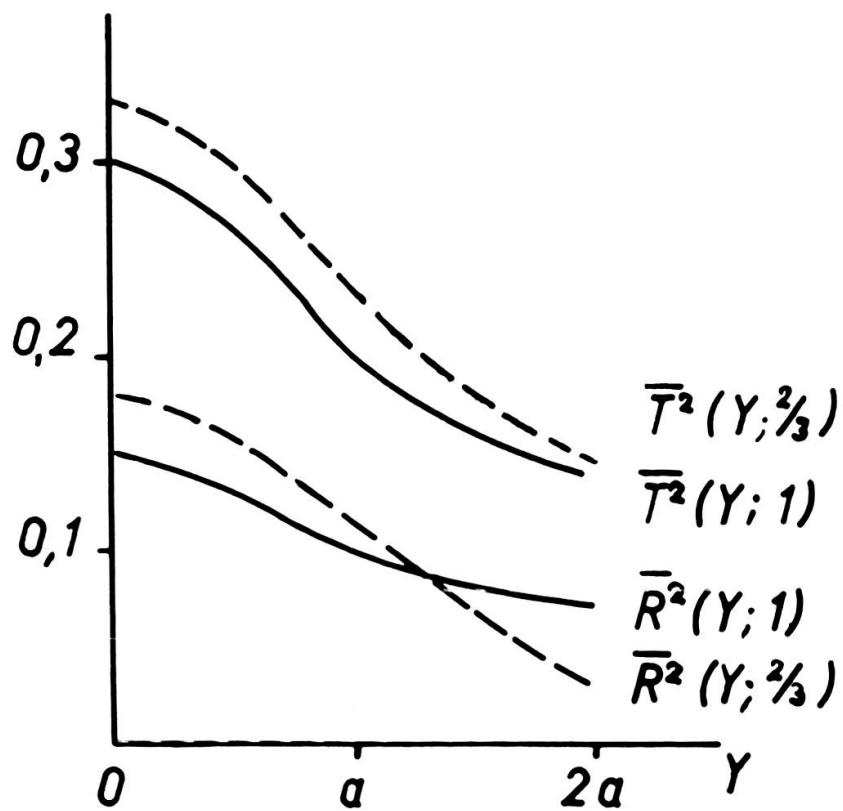


Fig. 2

L'anisotropie affecte peu les mouvements propres mais se manifeste par une décroissance accrue vers le bord  $r = 2a$  des vitesses radiales observées.

## 6. SOUS-MODÈLE DEUX

Nous nous sommes limités jusqu'ici à des distributions de la forme (2) ne comportant que les deux premiers termes. Rien ne nous empêche de construire un « sous-

modèle  $n$  » où sont retenues les puissances de  $A^2$  jusqu'à la  $n$ -ième; il faut seulement s'assurer toujours du caractère défini positif de la fonction ainsi obtenue. Le nombre des possibilités s'accroît notablement avec  $n$ ; cependant, parmi les diverses manières de former, en jouant sur des identités de la forme

$$(1 + \xi^2)^{-\frac{5}{2}} = (1 + \xi^2)^{-\frac{1}{2}} - 2\xi^2 (1 + \xi^2)^{-\frac{3}{2}} - \xi^4 (1 + \xi^2)^{-\frac{5}{2}}$$

un sous-modèle 2 du polytrophe d'indice 5, toutes semblent conduire à des fonctions définies négatives hormis la suivante:

$$f^{(2)}(E, A^2) = \frac{\sqrt{2} \rho_c (-E)^{3/2}}{\pi^2 (-U_c)^3} \left\{ \frac{64}{7} \left( \frac{E}{U_c} \right)^2 - 4 - \frac{5}{U_c^2} \left( \frac{A}{a} \right)^4 \right\} \quad (19)$$

définie positive pour  $A$  assez petit.

Nous remarquons que (19), tout comme (11) décrit une distribution où les moments angulaires élevés se font plus rares lorsqu'on s'éloigne du centre. Ici encore,  $f^{(2)}(E, A)$  sera définie positive à toute distance  $r$  pour laquelle on peut écrire

$$f^{(2)}(E, A_m^2) > 0$$

ce qui exige que le trinôme en  $\eta = E/U_c$  ( $\xi = r/a$ )

$$\left( \xi^4 - \frac{16}{35} \right) \eta^2 - \frac{2\xi^4}{\sqrt{1 + \xi^2}} \eta + \frac{\xi^4}{1 + \xi^2} - \frac{1}{5}$$

soit toujours négatif. Son discriminant doit donc être négatif ainsi que le coefficient de  $\eta^2$ ; tel est le cas tant que  $\xi \leq 0,6$  mais le discriminant devient positif si  $\xi = 0,7$ .

En conclusion, la distribution (19) est définie positive pour  $r < r^*$  où  $r^*$  est compris entre  $0,6a$  et  $0,7a$ .

## 7. DISTRIBUTIONS NON INVARIANTES PAR ROTATION

Dans tout système pour lequel la distribution des vitesses est invariante par le groupe des rotations autour du centre du système et se présente donc sous la forme (1), n'importe quelle direction passant par le centre est un axe de symétrie pour les vitesses. Par conséquent en tout point nous avons

$$f = f(r, v, \vartheta)$$

où  $v$  est le module du vecteur  $v$  et  $\vartheta$  l'angle de  $v$  avec le rayon  $r$ .

Cependant de façon plus générale,  $f$  pourra dépendre encore de l'azimut  $\psi$  compté dans le plan normal à  $r$ , sans que se trouve altérée la symétrie sphérique si

$$\iiint f(r, v, \vartheta, \psi) v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta d\psi = \rho(r) \quad (20)$$

Décomposons  $f$  en série de Fourier selon  $\psi$ , ce qui est possible sous des conditions suffisamment générales:

$$f(r, v, \vartheta, \psi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi) \quad (21)$$

où  $a_0$  et les  $a_k, b_k$  sont fonctions de  $r, v, \vartheta$ .

$a_0$  ne doit pas être identiquement nul, car en substituant (21) dans (20) il reste

$$\rho(r) = \iint a_0(r, v, \vartheta) v^2 dv \sin \vartheta d\vartheta$$

D'autre part si  $b_1 \equiv 0$ , le moment angulaire résultant autour d'une direction  $\Delta$  quelconque est toujours nul. En effet, si  $S$  désigne l'une des étoiles du système stellaire considéré, le moment angulaire de  $S$  autour de  $\Delta$  est égal à

$$A_{\Delta} = rv \sin \theta \sin \vartheta \sin \psi$$

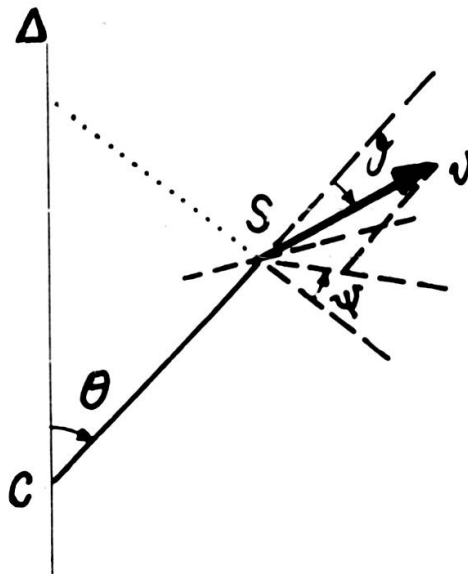


Fig. 3

où le plan contenant  $\Delta$  et  $r$  détermine l'origine des azimuts  $\psi$  (fig. 3).

Le moment angulaire résultant autour de  $\Delta$  vaudra donc

$$\mathcal{A}_{\Delta} = 2\pi \iiint \iiint f(r, v, \vartheta, \psi) r^3 v^3 \sin^2 \theta \sin^2 \vartheta \sin \psi dr d\theta dv d\vartheta d\psi$$

L'intégration sur  $\theta$  conduit à  $\frac{\pi}{2}$  et celle sur  $\psi$  nous redonne le coefficient de Fourier  $b_1(r, v, \vartheta)$  multiplié par  $\pi$ , de sorte que

$$\mathcal{A}_\Delta = \pi^3 \iiint b_1(r, v, \vartheta) r^3 v^3 \sin^2 \vartheta dr dv d\vartheta \quad (22)$$

Tant que  $b_1$  n'est pas identiquement nul, le système possède un moment angulaire résultant net donné par (22).

Si nous considérons  $a_0$  et les  $a_k, b_k$  comme des distributions particulières du système, invariantes par rotation et nécessairement définies positives, nous remarquons que le développement en série (21) nous fournit un moyen de construire la fonction de distribution la plus générale d'un système sphérique à partir d'un nombre quelconque de distributions invariantes.

Si tous les  $a_k, b_k$  sont identiquement nuls à l'exception de  $a_0$  et  $b_1$  et si nous choisissons en outre  $a_0 \equiv b_1$  afin d'avoir  $f \geq 0$ , (21) se réduit à

$$f(r, v, \vartheta, \psi) = a_0(r, v, \vartheta) \cdot (1 + \sin \psi)$$

soit

$$f(r, v, \vartheta, \psi) = a_0(r, v, \vartheta) + \delta f(r, v, \vartheta, \psi)$$

où

$$\delta f(r, v, \vartheta, \psi - \pi) = -\delta f(r, v, \vartheta, \psi) = \delta f(r, v, \vartheta, -\psi)$$

ceci correspond à l'accroissement antisymétrique signalé par Lynden-Bell [4]; la situation est celle qui résulterait du changement de sens de parcours de certaines orbites. (système « démonisé »).

Si chaque orbite est caractérisée par le (pseudo-) vecteur  $\mathbf{A}$  de son moment angulaire, normal au plan orbital, l'intervention d'un « démon » consiste à changer le sens de certains des  $\mathbf{A}$ ; la résultante de ces vecteurs, auparavant nulle cessera de le rester en général et sa direction définira un axe privilégié  $\Delta$ .

Désignons par  $I_\Delta$  le moment d'inertie du système par rapport à  $\Delta$  et envisageons un référentiel en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de l'axe  $\Delta$ ; si  $\omega$  est choisi tel que  $I_\Delta \omega$  soit précisément égal à  $\mathcal{A}_\Delta$  calculé en (22), on aura compensé le moment angulaire résultant  $\mathcal{A}_\Delta$  par une rotation des axes et dans ce sens, on pourra dire qu'un système « démonisé » est comparable à un système en rotation.

Ce travail, à la mise au point duquel a collaboré M. L. Martinet, fait partie d'un programme d'investigations subventionné par le Fonds National de la Recherche Scientifique.

*Observatoire de Genève,  
juin 1963.*

## BIBLIOGRAPHIE

1. BOUVIER P., Pub. Obs. Genève, A **63** (1962).
  2. CAMM, G. L., M.N., R.A.S., **112**, 115 (1952).
  3. KREIKEN, E. A., Ann. d'Ap., **24**, 219 (1961).
  4. LYNDEN-BELL, D., M.N., R.A.S., **120** 204 (1960).
  5. Woolley, R., *The Observatory*, **81**, 180 (1961).
-