

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 15 (1962)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Géométrie projective et notions différentielles  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-738661>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# GÉOMÉTRIE PROJECTIVE ET NOTIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

**PAUL ROSSIER**

## I. INTRODUCTION

En géométrie projective, on énonce un théorème relatif à la conservation par collinéation de la tangence de deux courbes et de celle des inflexions. Ainsi, les notions de tangente à une courbe ponctuelle, d'inflexion et corrélativement, celles de point d'une courbe tangentielle et de rebroussement, les notions analogues relatives à l'espace ont un caractère projectif. Or, généralement, on définit ces objets par des procédés métriques. De même, dans la théorie des coniques, le théorème de Pascal fait apparaître la tangente sans recours aux opérations infinitésimales habituelles en ces matières. Le théorème de Brianchon conduit à des conclusions corrélatives sur les coniques tangentielle. Les propriétés des cubiques gauches font apparaître des plans osculateurs.

Nous nous proposons d'exposer un mode purement projectif de définition de ces notions, sans recours à une représentation analytique. Nous ne nous appuierons que sur les axiomes d'appartenance, d'ordre et de continuité de la géométrie projective, tous bien connus.

## 2. SUITE HARMONIQUE D'ÉLÉMENTS

Sur une forme de première espèce, choisissons un élément  $R$  dit de référence. Deux éléments  $A$  et  $B$ , distincts de  $R$ , déterminent un unique segment ne contenant pas  $R$ . Dans la suite, le mot segment sera utilisé dans ce sens, après indication de l'élément de référence choisi.

Construisons le conjugué harmonique  $C_1$  de  $R$  par rapport à  $A$  et  $B$ , puis le conjugué harmonique  $C_2$  de  $R$  par rapport à  $A$  et  $C_1$  et ainsi

de suite, le conjugué harmonique  $C_n$  de  $R$  par rapport à  $A$  et  $C_{n-1}$ . Appelons suite harmonique la suite d'éléments  $C_1, C_2, \dots$ . Les éléments de cette suite appartiennent au segment  $AB$  et  $C_n$  appartient au segment  $AC_{n-1}$ .

Pour alléger le langage, traitons le cas de la ponctuelle et opérons dans un plan. Le point  $C_1$  est obtenu au moyen d'un quadrangle. Cela fait, par  $A$  et  $R$ , menons deux sécantes  $a$  et  $r$ . D'un point  $S$  de  $a$ , projetons  $B$  et  $C_1$  sur  $r$  en  $B'$  et  $C_1'$ ; la droite  $BC_1'$  coupe  $a$  en un point  $T$  et la droite  $TC_1$  coupe  $r$  en  $C_2'$ ; la projection de  $C_2'$  à partir de  $S$  sur  $AB$  est  $C_2$ . La droite  $TC_2$  coupe  $r$  au point  $C_3'$  qui, projeté à partir de  $S$  donne  $C_3$  et ainsi de suite.

Appelons  $D$  l'intersection de  $a$  et  $r$ . La projection sur  $r$  à partir de  $S$  de la suite ordonnée  $AC_1BR$  donne la suite ordonnée  $DC_1'B'R$ ; à partir de  $B$ , projetons ces points sur  $a$ ; nous obtenons la suite ordonnée  $DTSA$ . Ainsi  $D$  et  $S$  sont séparés par  $A$  et  $T$ .

Sur le segment  $AB$ , supposons l'existence d'un point  $X$  distinct de  $A$  tel que tous les points de la suite harmonique appartiennent au segment  $BX$ . Relativement à l'ordre  $AXB$ , les points du segment  $AX$  précèdent ceux de la suite harmonique; ceux du segment  $BC_1$  suivent ceux de la suite harmonique. Nous pouvons donc classer les points du segment  $AB$  en deux catégories: ceux qui, relativement à l'ordre ci-dessus, précèdent tous les points de la suite harmonique et ceux qui sont précédés par au moins un point de la dite suite. L'axiome de continuité affirme l'existence d'un point  $L$  qui sépare les deux catégories de points et  $L$  est distinct de  $A$ . L'existence d'un seul point  $X$  implique donc celle du segment  $AL$  qui ne contient aucun point de la suite harmonique.

A partir de  $S$ , projetons  $L$  en  $L'$  sur  $r$  et, à partir de  $L'$ , projetons la suite ordonnée  $ADTS$  sur  $AB$ ; nous obtenons la suite ordonnée  $ARL''L$ . Donc le point  $L''$ , projection sur  $AB$  de  $L'$  à partir de  $T$  appartient au segment  $LR$  qui contient  $B$  et il n'est pas  $L$ . Ce segment contient la suite harmonique. Dans le segment  $LL''$ , soit  $C_n$  un point de la suite harmonique. Le point  $C_{n+1}$  obtenu par projections successives à partir de  $T$  et de  $S$  appartient au segment  $AL$ . Il y a contradiction. Il n'existe donc pas de point  $X$  distinct de  $A$  tel que le segment  $AX$  ne contienne aucun élément de la suite harmonique. Nous dirons que cette suite converge vers  $A$  ou que  $A$  en est la limite.

Les propriétés précédentes sont faciles à étendre aux faisceaux de droites ou de plans par projection ou en opérant corrélativement.

3. — *Suite convergente d'éléments.*

Soient  $A$  et  $B$  deux éléments d'une forme de première espèce,  $R$  l'élément de référence et une suite harmonique d'éléments  $C_j$  de limite  $A$ . Sur le segment  $AB$  supposons l'existence d'une suite ordonnée d'éléments  $X_k$  telle que, pour tout entier  $N$  arbitraire, on peut trouver deux entiers  $j$  et  $g$  supérieurs à  $N$  tels que la suite  $AC_jX_gR$  soit ordonnée et deux entiers  $l$  et  $m$ , supérieurs à  $N$ , tels que la suite  $AX_mC_lR$  le soit aussi. Nous dirons alors que la suite  $X_k$  a  $A$  pour limite ou qu'elle converge vers  $A$ .

Sur le segment  $AB$  construisons deux suites harmoniques de même limite  $A$  et relatives à deux éléments de référence  $R$  et  $S$  non séparés par  $A$  et  $B$ . En appliquant deux fois la propriété précédente, on constate que la convergence de la suite  $X_j$  est indépendante du choix de l'élément de référence, pourvu qu'il appartienne à celui des deux segments projectifs  $AB$  qui contient le premier d'entre eux.

4. — *Tangente à une courbe ponctuelle plane, point d'une courbe tangentielle plane*

Nous appellerons courbe ordinaire, ponctuelle ou tangentielle des ensembles de points ou de droites sur lesquels réussissent les opérations suivantes, sauf peut-être en un nombre fini d'éléments.

Nous pourrions examiner d'abord le cas le plus usuel, celui de la tangente à une courbe ponctuelle puis dire, comme on le fait souvent, « dans le cas tangentiel, opérer dualistiquement ». Dans ce dernier cas, la figure est un peu plus touffue que pour une courbe ponctuelle; nous croyons donc bien faire de choisir la disposition classique des deux colonnes.

Soit  $A$  un point d'une courbe ponctuelle  $c$ . Par  $A$ , menons deux droites distinctes  $x$  et  $y$  et, sur elles, choisissons deux points  $X$  et  $Y$  qui, sur ces ponctuelles, nous serviront de points de référence

Soit  $U$  un point de la courbe  $c$  distinct de  $A$ . Menons les

Soit  $a$  une tangente à une courbe tangentielle  $c$ . Sur  $a$ , choisissons deux points distincts  $X$  et  $Y$  et, par eux, menons deux droites  $x$  et  $y$  qui, dans les faisceaux de sommets  $X$  et  $Y$ , seront les rayons de référence.

Soit  $u$  une tangente à la courbe  $c$  distincte de  $a$ . Déter-

droites  $XU$  et  $YU$  puis déterminons les intersections  $V$  et  $T$  de  $x$  avec  $YU$  et de  $y$  avec  $XU$ . Déterminons le conjugué harmonique  $V'$  de  $V$  par rapport à  $A$  et  $X$  et celui  $T'$  de  $T$  par rapport à  $A$  et  $Y$ .

Menons les droites  $XT$ ,  $XT'$ ,  $YV$  et  $YV'$ ; elles sont les quatre côtés d'un quadrilatère dont  $X$  et  $Y$  sont deux sommets. Le point  $U$  est un sommet de ce quadrilatère. Appelons  $K$  l'intersection de  $XT'$  avec  $YU$ ,  $L$  celle de  $YV'$  avec  $XT'$  et  $M$  celle de  $XU$  avec  $YV'$ .

Les paires de points  $UK$  et  $LM$  déterminent deux segments projectifs qui ne contiennent pas  $Y$ ; de même, les paires  $UM$  et  $KL$  déterminent deux segments qui ne contiennent pas  $X$ .

Appelons côtés du tétragone <sup>2</sup>  $UKLM$  les segments ci-dessus et points du tétragone  $UKLM$  l'ensemble des points du plan tels que toute droite par eux coupe deux côtés du tétragone en deux points appartenant aux segments précédents.

minons les intersections  $xu$ <sup>1</sup> et  $yu$  des droites  $x$  et  $u$ ,  $y$  et  $u$ , puis traçons les droites  $v$  et  $t$  joignant  $X$  à  $yu$  et  $Y$  à  $xu$ . Déterminons le rayon  $v'$ , conjugué harmonique de  $v$  par rapport à  $a$  et  $x$  et celui  $t'$  de  $t$  par rapport à  $a$  et  $y$ .

Déterminons les points  $xt$ ,  $xt'$ ,  $yv$  et  $yv'$ ; ils sont les sommets d'un quadrangle dont  $x$  et  $y$  sont deux côtés. La droite  $u$  est un côté de ce quadrangle. Appelons  $k$  la droite par  $xt'$  et  $yu$ ,  $l$  celle par  $yv'$  et  $xt'$  et  $m$  celle par  $xu$  et  $yv'$ .

Les paires de droites  $uk$  et  $lm$  déterminent deux segments projectifs qui ne contiennent pas  $y$ ; de même, les paires  $um$  et  $kl$  déterminent deux segments qui ne contiennent pas  $x$ .

Appelons sommets du tétrastigme <sup>2</sup>  $uklm$  les supports des segments précédents et droites du tétrastigme l'ensemble des droites du plan telles que tout point sur elles détermine avec deux des sommets du tétrastigme deux droites appartenant aux segments précédents.

<sup>1</sup> Nous notons  $ab$  le point d'intersection des deux droites  $a$  et  $b$ .

<sup>2</sup> Le quadrilatère  $UKLM$  et les segments utilisés constituent un quadrilatère de la géométrie élémentaire, si la droite  $XY$  est la droite impropre du plan. Afin d'éviter toute confusion avec le quadrilatère complet et le quadrangle complet de la géométrie projective, nous employons le terme tétragone, d'usage peu fréquent et nous nous permettons de créer le mot corrélatif de tétrastigme, d'étymologie évidente.

L'ensemble des points de la courbe  $c$  qui appartiennent au tétragone  $UKLM$  est dit constituer un arc voisin de  $A$ .

Supposons possible le choix de  $U$  de façon qu'il n'existe qu'un unique point  $U'$  de la courbe qui appartienne à un côté du tétragone. Supposons possible le choix des éléments  $x, X, y, Y$ , et  $U$  de telle sorte que, projetant un point variable  $M$  de l'arc voisin de  $A$  à partir de  $Y$  sur  $x$ , la correspondance obtenue est biunivoque.

Nous dirons alors que l'arc voisin de  $A$  est simple.

Sur  $x$ , construisons une suite de points convergeant vers  $A$  et projetons-la sur la courbe à partir de  $Y$ .

Joignons les points obtenus à  $A$ . Nous obtenons une suite de rayons du faisceau de sommet  $A$ . Supposons l'existence d'une droite  $a$  passant par  $A$  vers laquelle converge la suite de rayons ci-dessus.

La droite  $a$  est la tangente à la courbe  $c$  en  $A$ .

En toute rigueur, la tangente (ou le point) ci-dessus dépend des éléments arbitraires  $x, X, y, Y$  et  $U$  (ou  $u$ ). Seuls sont intéressants les cas où la figure obtenue est indépendante de ces éléments.

L'ensemble des tangentes à la courbe  $c$  qui appartiennent au tétrastigme  $uklm$  est dit constituer un arc voisin de  $a$ .

Supposons possible le choix de  $u$  de façon qu'il n'existe qu'une unique tangente à la courbe qui appartienne à un sommet du tétrastigme. Supposons possible le choix des éléments  $X, x, Y, y$  et  $u$  de telle sorte que, coupant une tangente variable  $m$  de l'arc voisin de  $a$  par  $y$  et joignant le point obtenu à  $X$ , la correspondance obtenue est biunivoque.

Nous dirons alors que l'arc voisin de  $a$  est simple.

Parmi les rayons du faisceau de sommet  $X$ , formons une suite convergeant vers  $a$ ; par l'intersection de chacun d'eux avec  $y$ , il passe une tangente à l'arc simple.

Déterminons leurs intersections avec  $a$ . Nous obtenons une suite de points de  $a$ . Supposons l'existence d'un point  $A$  de  $a$  vers lequel converge la suite de points ci-dessus.

Le point  $A$  est le point de contact de la tangente  $a$  avec la courbe tangentielle  $c$ .

Ce qui précède pourrait être complété en distinguant sur l'arc  $UU'$  (ou  $uu'$ ) les deux arcs partiels  $AU$  et  $AU'$  ( $au$  et  $au'$ ); nous obtiendrions ainsi deux demi-tangentes (demi-points) distinctes ou confondues. L'exemple des coniques va nous montrer que dans les cas les plus simples ces deux demi-tangentes sont confondues.

Les points et les tangentes satisfaisant aux conditions précédentes sont dits réguliers ou ordinaires et les autres, singuliers.

### 5. — *Cas des coniques*

Dans le cas des coniques non dégénérées (le seul que nous examinerons), le théorème de Pascal permet de définir et de construire la tangente en un point indépendamment des considérations précédentes ou de toute opération infinitésimale. Si  $A, B, C, D$  et  $E$  sont cinq points d'une conique, les trois intersections suivantes sont alignées: celle de la tangente en  $A$  avec  $CD$ , celle de  $AB$  avec  $DE$  et celle de  $AE$  et  $BC$ . Nous allons montrer que cette tangente pascalienne est confondue avec celle qui résulte des opérations du No 4, tangente que nous qualifierons d'infinitésimale.

Sur une conique  $c$ , choisissons les points  $A, X$  et  $Y$  et menons les deux droites  $x = AX$  et  $y = AY$ . A partir de  $X$  et de  $Y$ , projetons un point variable  $M$  de la courbe sur les droites  $x$  et  $y$ , en  $M_x$  et  $M_y$ . Les deux ponctuelles obtenues sont perspectives, puisque  $A$  est son propre correspondant. Appelons  $L$  et  $L'$  les intersections de la droite  $XY$  avec  $AM$  et avec  $M_xM_y$ . Les deux ponctuelles décrites par  $L$  et  $L'$  sont projectives. Dans cette projectivité, à l'intersection de  $XY$  avec la droite joignant  $A$  au centre de la perspectivité ci-dessus correspond l'intersection de  $XY$  avec la tangente pascalienne en  $A$ . Ce correspondant est unique et est précisément déterminé par la tangente infinitésimale en  $A$ .

La tangente en  $A$  est évidemment indépendante du choix de  $X$  et  $Y$  sur la courbe. L'application de la remarque faite à la fin du No 3 étend cette indépendance au choix de  $X$  et  $Y$  hors de la conique.

La construction de la tangente infinitésimale à une conique est particulièrement brève parce que la courbe n'étant coupée qu'en un point variable par les rayons d'un faisceau ayant son sommet pris sur elle, tout arc de conique est un arc simple.

De l'existence de la tangente dans le cas des coniques, on conclut la possibilité de réalisation des hypothèses faites au No 4.

La tangente à une conique en l'un de ses points n'a aucun autre point commun avec la courbe. On dit alors que ce point est une intersection double de la droite et de la conique ou que toute tangente à une courbe a au moins deux points communs avec celle-ci au point de contact.

Du théorème de Brianchon, on déduit la possibilité de la détermination du point de contact à la Brianchon d'une tangente à une conique tangentielle. Une démonstration corrélatrice de celle faite plus haut montre l'identité de ce point de contact avec celui résultant des opérations projectives infinitésimales.

Par le point de contact d'une tangente à une conique, il ne passe qu'une tangente à la courbe; la tangente est alors considérée comme double et, par un point d'une courbe tangentielle, il passe au moins deux tangentes à la courbe confondues entre elles.

#### 6. — *Cônes*

Par projection à partir d'un point ou par extension des considérations précédentes aux gerbes, les définitions posées plus haut peuvent être étendues aux cônes: existence possible du plan tangent le long d'une génératrice d'un cône lieu de droites et existence de la génératrice de contact d'un plan d'un cône enveloppe d'un système de plans.

#### 7. — *Tangente à une courbe gauche, ponctuelle ou tangentielle*

Les opérations et définitions du N° 4 peuvent être étendues à l'espace (et à l'hyperespace). Traitons avec quelques détails le cas des courbes ponctuelles.

Soit  $A$  un point d'une courbe ponctuelle gauche. Par lui, menons trois droites  $x, y$  et  $z$  non coplanaires et, sur elles choisissons trois points de référence  $X, Y$  et  $Z$ . Soit  $U$  un point de la courbe distinct de  $A$ ; avec  $Y$  et  $Z$ , il détermine un plan qui coupe  $x$  en  $V$ . Soit  $V'$  le conjugué harmonique de  $V$  par rapport à  $A$  et  $X$ . Soient  $T$  et  $T'$ ,  $S$  et  $S'$  les points construits de façon analogue sur  $y$  et  $z$ . Retenons les segments  $VV'$ ,  $TT'$  et  $SS'$  qui ne contiennent pas les points de référence  $X, Y$  ou  $Z$ . Avec  $Y$  et  $Z$ ,  $V$  et  $V'$  déterminent deux plans et, dans le faisceau d'arête  $YZ$  le segment  $VV'$  détermine un segment projectif de plans. Opérons de même sur les droites  $y$  et  $z$ . Nous déterminons ainsi un hexaèdre qui contient un arc de la courbe. Supposons possible le choix de  $x, y, z, X, Y, Z$  et  $U$  de telle sorte que la projection des points de cet arc

à partir de  $Z$  sur le plan  $xy$  engendre une courbe ayant en  $A$  une tangente. Supposons qu'il en est de même en projetant la courbe à partir de  $Y$  sur le plan  $xz$  et en la projetant à partir de  $X$  sur le plan  $yz$ . Nous déterminons ainsi trois tangentes  $t_z$ ,  $t_y$  et  $t_x$ . Supposons enfin que les trois plans  $Zt_z$ ,  $Yt_y$  et  $Xt_x$  appartiennent à un faisceau. Si cette arête est indépendante du choix des points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ , elle est la tangente en  $A$  à la courbe donnée.

Corrélativement, une courbe enveloppe de plans étant donnée, soit  $\alpha$  l'un d'entre eux. La construction corrélatrice de la précédente conduit à trois points du plan  $\alpha$  qui, s'ils sont alignés et indépendants du choix des éléments arbitraires, appartiennent à la tangente à la courbe donnée appartenant au plan  $\alpha$ .

En même temps que nous construisons la tangente en  $A$  à une courbe gauche, projetons la figure sur un plan. A une suite convergente de sécantes issues de  $A$  correspond une suite convergente de sécantes de la projection, à moins que la première suite ne converge vers la projetante du point  $A$ . Donc la projection sur un plan de la tangente à une courbe à partir d'un point n'appartenant pas à cette tangente est la tangente à la projection. L'existence de la première tangente implique celle de la seconde, à la réserve près que le centre de projection ne lui appartienne pas.

#### 8. — *Plan osculateur à une courbe gauche ponctuelle, point d'une courbe gauche tangentiale*

Dans la figure ponctuelle examinée au N° 7, supposons l'existence de la tangente  $a$  en un point  $A$  de la courbe  $c$ . Dans le faisceau de plans ayant  $a$  comme support, supposons l'existence d'un segment projectif tel que les plans de ce segment coupent la courbe considérée sur l'arc simple défini plus haut en un unique point hors de  $A$ . Sur  $x$ , choisissons une suite de points convergeant vers  $A$  et à partir de  $YZ$ , projetons ces points sur la courbe. Supposons possible la détermination d'un plan  $\alpha$  tel que la suite des plans du segment ci-dessus correspondant à celle des points pris sur  $x$  converge vers le plan  $\alpha$ . Ce plan est le plan osculateur à la courbe au point  $A$ .

Corrélativement, on définira le point d'osculuation d'un plan d'une courbe gauche enveloppe de plans, autrement dit, la possibilité d'existence de l'arête de rebroussement d'une surface développable considérée comme enveloppe d'une famille simplement infinie de plans.

9. — *Cas de la cubique gauche*

La cubique gauche est le lieu des intersections de deux rayons correspondants de deux gerbes collinéaires de droites. On démontre les propriétés suivantes de cette courbe gauche: sa projection sur un plan à partir d'un de ses points est une conique; elle est coupée en trois points au maximum par un plan.

Démontrons tout d'abord l'existence de la tangente en un point de la cubique gauche. Pour cela, après avoir choisi un de ses points  $A$ , prenons sur elle les trois points  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Ces quatre points ne sont pas coplanaires, sinon leur plan couperait la courbe en quatre points. La projection de la cubique à partir de  $Z$  sur le plan  $AXY$  est une conique; celle-ci possède une tangente  $t_z$  en  $A$ . Il en est de même sur les plans  $AYZ$  et  $AZX$ . Il reste à prouver que les trois tangentes  $t_z$ ,  $t_y$  et  $t_x$  déterminent avec  $Z$ ,  $Y$  et  $X$  trois plans d'un faisceau. Pour cela, appelons  $t$  l'intersection des plans  $Zt_z$  et  $Yt_y$ . A partir de  $X$ , projetons  $t$  sur le plan  $AYZ$ ; soit  $t'$  la projection obtenue, supposée distincte de  $t_x$ . La droite  $t'$  coupe la conique projection de la cubique sur le plan  $AYZ$  en un point  $M_x$  distinct de  $A$ , projection d'un point  $M$  de la cubique. La tangente  $t_z$  passerait alors par la projection à partir de  $Z$  de  $M$  sur le plan  $AXY$  et la tangente en  $A$  à la conique projection de la cubique sur ce plan couperait la courbe hors de  $A$ . Cela est exclu. Toute cubique gauche possède donc une tangente en chacun de ses points.

La projection de la cubique gauche sur un plan à partir d'un de ses points  $A$  est une conique qui passe par l'intersection  $A'$  du plan de projection avec la tangente  $a$  au centre de projection. Tout plan par la tangente  $a$  coupe le plan de projection suivant une droite qui passe par  $A'$ . Celle-ci ne coupe la conique projection qu'en un unique point hors de  $A'$ . Donc tout plan d'un faisceau ayant pour support une tangente à une cubique gauche coupe la courbe en un unique point hors de celui de contact.

Le plan passant par  $A$  et qui a pour trace sur le plan de projection la tangente en  $A'$  à la conique projection de la cubique est le plan osculateur; il est unique; il ne coupe pas la cubique hors du point  $A$ .

On exprime souvent les propriétés ci-dessus des intersections de plans avec la courbe en disant qu'une tangente a une intersection double avec la courbe et un plan osculateur, une intersection triple.

L'existence de la tangente et du plan osculateur dans le cas de la cubique gauche montre la compatibilité des définitions posées et la possibilité de l'existence de points ordinaires sur les courbes gauches.

Deux points distincts  $A$  et  $B$  de la cubique gauche déterminent une droite  $d$ . Pour tout point  $D$  de celle-ci, la droite  $d$  est une bisécante. Par ce point  $D$ , il n'existe pas d'autre bisécante, sinon le plan de ces deux droites couperait la cubique en quatre points.

A partir de  $D$ , projetons la cubique sur un plan  $\alpha$  et appelons  $E$  l'intersection de la bisécante  $d$  avec ce plan. Dans tout tétragone construit autour de  $E$  figurent des points appartenant à deux arcs simples de la cubique; en  $A$  et  $B$ , la cubique possède deux tangentes dont les projections sont les tangentes en  $E$  à la projection de cette courbe. Ces deux tangentes sont distinctes, sinon les tangentes à la cubique gauche seraient coplanaires. Cela impliquerait que la conique projection de la cubique gauche sur le plan  $\alpha$  à partir de  $A$  aurait en  $E$  une tangente qui passerait par la trace de la tangente en  $B$ ; cette tangente couperait la courbe. La cubique plane projection de la cubique gauche possède donc en  $E$  deux tangentes distinctes. Il peut exister des points singuliers sur des courbes.

En appliquant le théorème de Pascal à la conique projection de la cubique gauche à partir d'un de ses points, on démontre que par un point quelconque, on peut mener au plus trois plans osculateurs à une cubique gauche; autrement dit, la surface développable ayant la cubique gauche comme arête de rebroussement est de classe trois. Corrélativement et réciproquement, le lieu des points d'osculation des plans tangents à une surface développable d'ordre trois est une cubique gauche. Le corrélatif du théorème affirmant que la projection d'une cubique gauche à partir d'un de ses points engendre un cône quadratique est le suivant: l'enveloppe des sections des plans osculateurs à une cubique gauche par l'un d'eux est une conique, ou encore le lieu des intersections des tangentes à une cubique gauche par un des plans osculateurs à la cubique est une conique.

L'application des procédés exposés plus haut à la surface développable de classe trois conduit aux résultats corrélatifs des précédents, notamment à l'existence possible de tangentes doubles à certaines courbes et à celle des singularités tangentielles des courbes.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Rappelons que, pour les courbes algébriques d'ordre supérieur à deux, les formules de Plücker imposent l'existence de singularités ponctuelles ou tangentielles.

10. — *Inflexion, rebroussement*

Soit  $A$  un point d'une courbe ponctuelle plane  $c$  et  $a$  la tangente en ce point. Dans le faisceau de sommet  $A$ , supposons possible la détermination d'un segment projectif dont  $a$  est une extrémité, tel que les rayons de ce segment coupent un arc simple voisin de  $A$  en deux points hors de  $A$ .

Le point  $A$  et la tangente  $a$  sont dits d'inflexion.

Soit  $a$  une tangente à une courbe tangentiale plane  $c$  et  $A$  son point de contact. Sur la tangente  $a$ , supposons possible la détermination d'un segment projectif dont  $A$  est une extrémité et dont les points sont les intersections de deux tangentes appartenant à un arc simple voisin de  $A$ .

La tangente  $a$  et le point  $A$  sont dits de rebroussement.

Ces définitions supposent l'existence de la tangente à la courbe au point considéré de la courbe ponctuelle ou celle du point de contact de la tangente examinée, mais pas nécessairement ailleurs sur l'arc étudié.

Sur une cubique gauche, considérons un point  $A$  et le plan osculateur en ce point. A partir d'un point  $S$  de ce plan, projetons la courbe sur un plan  $\pi$ . Supposons que le centre de projection  $S$  n'appartient pas à la tangente en  $A$ . Soit  $M$  un point quelconque de la cubique; le plan  $AMS$  la coupe en un troisième point  $N$  et, sur le plan  $\pi$ , la sécante qui passe par les projections de  $A$  et de  $M$  passe par celle de  $N$ . Le point  $A$  est une inflexion de la projection. La notion d'inflexion n'est donc pas contradictoire. Les coniques sont des courbes trop simples pour posséder de tels points.

Si le centre de projection  $S$  appartient à la tangente  $a$  à la cubique en  $A$ , menons par  $S$ , dans le plan osculateur  $\alpha$  en  $A$ , une droite quelconque  $d$ ; elle coupe la conique lieu des traces sur le plan  $\alpha$  des tangentes à la cubique gauche en deux points. Sur la projection, en plus de la trace du plan osculateur, par la trace de  $d$ , il passe deux tangentes à la projection de la cubique. La projection  $A'$  de  $A$  est donc un rebroussement. Celui-ci est de première espèce, sinon, aux deux intersections d'une sécante par  $A'$  avec la cubique plane correspondraient, sur la cubique gauche deux intersections par un plan contenant une tangente à la courbe, ce qui est exclu.

11. — *Concavité, convexité*

Soient un arc simple de courbe,  $A$  un de ses points,  $a$  la tangente en ce point,  $X$  un point de  $a$ . Si dans le faisceau de sommet  $X$ , il est possible, quel que soit  $X$ , distinct de  $A$ , de construire un segment projectif de rayons qui coupent l'arc en deux points, les points de ces sécantes qui appartiennent au segment limité par ces deux intersections qui ne contiennent pas  $X$  appartiennent à la concavité de la courbe; les autres points d'un tétragone déterminant l'arc simple et dont  $X$  est l'un des points constructifs appartiennent à la convexité de la courbe.

Ces définitions sont réalisées sur une conique; les points intérieurs de la conique appartiennent à sa concavité et les extérieurs à la convexité.

On peut évidemment étendre la définition précédente au cas tangentiel en construisant, sur une sécante à une courbe par un point  $A$ , un segment de points d'où peuvent être menées deux tangentes à la courbe. Dans le langage habituel, ces points appartiennent à la convexité de la courbe, comme le montre le cas de la conique. Ainsi la notion de concavité et de convexité ne satisfait pas pleinement à la dualité. Nous nous contenterons donc de l'étude du cas ponctuel, le plus fréquemment cité.

La définition donnée ne suppose l'existence de la tangente qu'au point étudié mais pas nécessairement aussi ailleurs sur l'arc étudié.

En une inflexion, il n'y a ni convexité ni concavité. En effet, soit  $S$  une sécante appartenant au segment considéré qui coupe l'arc simple en  $M$  et  $M'$ . Si le point étudié est une inflexion, on peut choisir  $M$  de telle sorte que la droite  $MA$  coupe l'arc en  $M''$ . Traçons  $M' M''$  et choisissons le point  $Y$  d'un tétragone sur cette droite; l'arc n'est pas simple.

12. — *Emploi des coordonnées, Conclusion*

En se basant exclusivement sur les axiomes de la géométrie projective, il est possible d'introduire des coordonnées et d'étudier les questions exposées ici par la méthode analytique. Le procédé est classique et souvent commode. Cependant, les conditions d'analyticité des fonctions généralement posées masquent parfois le caractère géométrique de certaines questions telles que le rôle des théorèmes de Pascal et de Brianchon ou la non-nécessité de certaines existences hors de l'élément étudié. Par contre la méthode analytique fournit des exemples simples de diverses singularités. Citons-en un.

En coordonnées cartésiennes, la courbe d'équation  $y = \int_0^x |x| dx$  présente une inflexion à l'origine; elle se compose de deux demi-paraboles  $y = \frac{x^2}{2}$  pour  $x$  positif et  $y = -\frac{x^2}{2}$  si  $x$  est négatif. A l'origine, la seconde dérivée n'existe pas. Hors de ce point, la première dérivée est constante:  $\pm 1$  selon que  $x$  est positif ou négatif. Nous avons donc ici un cas où la définition fréquemment donnée de l'inflexion, point où change le sens de variation de la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse est en défaut. Au contraire, la définition projective est valable.

Analytiquement, les suites convergentes sur une forme de première espèce seraient remplacées par des nombres infiniment petits. Cette notion de convergence n'exige pas l'emploi de ces nombres.

En résumé, nous avons montré que les notions les plus élémentaires de la géométrie projective permettent de traiter les plus simples des problèmes de la géométrie des courbes.

