

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 13 (1960)
Heft: 3

Artikel: Géométrie affine et géométrie pascalienne
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-738507>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 29.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

GÉOMÉTRIE AFFINE ET GÉOMÉTRIE PASCALIENNE

PAR

Paul ROSSIER

RÉSUMÉ

On peut considérer la géométrie affine comme la science obtenue en ajoutant le parallélisme aux relations de la géométrie projective. Elle constitue une partie de la géométrie métrique classique, pas très étendue, cependant plus qu'il ne le paraît à première vue; plusieurs théorèmes, fréquemment exposés sous forme métrique, sont de nature affine: somme des angles d'un triangle, les propriétés des polygones des vecteurs et funiculaires, théorèmes de Ménélaüs, de Ceva, de Newton, Mac-Laurin et Carnot sur les courbes algébriques.

Grâce à un ensemble de constructions isomorphe au calcul algébrique, il est possible de baser la géométrie affine sur un ensemble d'axiomes ne portant pas sur la notion de continuité. Dans ce domaine, le rôle joué par une proposition de Pascal relative au parallélisme deux à deux des côtés d'un hexagone inscrit dans un angle a fait attribuer le nom de *géométrie pascalienne* à cette discipline.

Nous nous proposons de donner un aperçu d'ensemble de la géométrie affine basé sur la géométrie projective et inspiré des méthodes de Desargues, puis de montrer l'essentiel de la base de départ de la géométrie pascalienne.

I. INTRODUCTION

1. DÉFINITIONS.

Depuis les travaux de Hilbert, l'habitude est de classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes: appartenance (ou incidence), ordre,

congruence, parallélisme et continuité. En ne faisant appel qu'à l'appartenance, l'ordre et la continuité, on constitue la géométrie projective. En modifiant ou supprimant le parallélisme, on est conduit aux deux géométries lobatchevskienne et riemannienne. Que se passe-t-il si, des cinq groupes d'axiomes, on supprime la seule congruence ? La géométrie ainsi obtenue est dite *affine*.

Un exposé de géométrie affine semble pouvoir être réalisé en supprimant, dans un traité de géométrie élémentaire, toutes les propositions pour l'étude desquelles il a été fait usage de la congruence; cette façon d'opérer ne serait correcte que si, dans l'élaboration d'une géométrie élémentaire, les auteurs ne faisaient appel à la notion de congruence qu'en cas d'absolue nécessité. Or, par souci de brièveté, il est fréquent que des théorèmes qui, en toute rigueur, sont de caractère affin soient énoncés ou démontrés (ou tous les deux) en langage de congruence. Un exemple immédiat est le « coefficient angulaire » de la géométrie analytique de la droite; ce nom appelle évidemment la notion d'angle telle qu'elle est liée à la géométrie métrique par la trigonométrie. Or, en géométrie analytique affine, deux droites parallèles sont représentées par deux équations linéaires de même « coefficient angulaire ». Pour bien faire, il faudrait employer une autre expression, rappelant le parallélisme sans allusion à la grandeur d'un angle; on pourrait dire « coefficient directionnel ».

En géométrie projective de l'espace et du plan, la proposition de Desargues sur les triangles perspectifs est un théorème. Si l'on désire construire une géométrie projective plane, cette proposition doit être admise comme un postulat. Autant dire que la géométrie projective est tridimensionnelle et contient la géométrie plane comme cas particulier. Si on considère la géométrie affine comme un cas particulier de la géométrie projective, on lui confère en même temps ce caractère tridimensionnel.

Est-il possible de construire une géométrie affine plane, sans recours à l'espace et quels sont les axiomes nécessaires pour cela ? Les études de Hilbert et de son école ont conduit à un résultat important: la possibilité de construire une géométrie affine plane indépendante de la notion de continuité, à condition de poser comme axiome non pas seulement la proposition de Desargues, mais une autre, due à Pascal dans le cas des coniques: si les sommets d'un hexagone sont alignés trois à trois et si deux paires de côtés opposés sont parallèles,

il en est de même de la troisième paire. Ce résultat est très remarquable, car il conduit à une autre définition de la géométrie affine plane: la science basée sur les axiomes plans d'incidence, deux axiomes de parallélisme et les axiomes de l'ordre, exprimés dans le langage affin, lui-même caractérisé par le parallélisme. La géométrie affine constitue ainsi une discipline indépendante de la géométrie projective puisqu'elle substitue un axiome d'incidence et de parallélisme à l'axiome de continuité.

Dans une première partie de l'exposé qui suit, nous nous proposons de montrer en quoi la géométrie affine se distingue de la géométrie projective, tout en nous appuyant sur elle. Pour la clarté des idées, il sera utile de rappeler quelques propositions de géométrie projective. Par souci de brièveté nous nous limiterons à la géométrie plane.

Dans une seconde partie nous exposerons l'essentiel de l'axiomatique de la géométrie affine plane basée sur la proposition de Pascal, géométrie dite *pascalienne*.

2. RAPPELS DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

La géométrie projective plane étudie les formes de deux espèces: les ponctuelles et les faisceaux de droites sont celles de première, les plans ponctuels et réglés, celles de seconde.

Comme deux points déterminent une droite, deux droites se coupent toujours et leur intersection détermine un point.

Passant par l'espace, les relations d'incidence conduisent au théorème de Desargues relatif aux triangles perspectifs: si les sommets homologues de deux triangles déterminent trois droites concourantes, les côtés homologues se coupent en trois points alignés. Ce théorème conduit à la notion de groupe harmonique de quatre éléments d'une forme de première espèce.

En se basant sur la relation d'ordre, on obtient la notion de segment projectif: sur une forme de première espèce, deux éléments déterminent deux segments.

Les éléments de deux formes de première espèce peuvent être liés par une suite de projections ou de sections en nombre fini; on dit alors qu'il y a projectivité entre ces deux formes. L'axiome de continuité permet de démontrer le théorème fondamental suivant: trois paires d'éléments correspondants déterminent une projectivité

entre deux formes de première espèce. Il est alors possible de construire la théorie des coniques, lieu des éléments correspondants de deux formes projectives de même nature.

La relation de projectivité peut être étendue aux plans: correspondance entre deux plans telle qu'à toute forme de première espèce de l'un correspond une forme de première espèce de l'autre, ces deux formes étant projectives. Deux plans projectifs sont dits collinéaires si la correspondance est ponctuelle; il y a corrélation si aux points de l'un correspondent les droites de l'autre.

En ne faisant usage que de la règle, il est possible de construire un système de coordonnées basé exclusivement sur les axiomes projectifs et cela sur les ponctuelles, les faisceaux et les plans.

En coordonnées projectives homogènes, l'équation d'une droite est linéaire et homogène.

Le birapport des quatre abscisses projectives de quatre éléments d'une forme de première espèce est indépendant du système de coordonnées choisi¹. Le birapport est conservé par projection et section. Le birapport des éléments d'un groupe harmonique est -1 .

La géométrie projective satisfait à la dualité: à toute proposition relative à des points et à des droites correspond une proposition analogue relative à des droites et des points.

Dans la théorie projective des coniques, on démontre le théorème suivant, dit de Pascal: si un hexagone est inscrit dans une conique, les trois intersections des paires de côtés opposés sont alignées. Le théorème subsiste si la conique dégénère en deux droites. En géométrie affine à base projective, cette dernière proposition prend la forme particulière suivante: si les sommets d'un hexagone sont alignés trois à trois et si deux paires de côtés opposés sont parallèles, il en est de même de la troisième paire. Nous avons déjà exposé plus haut le rôle que jouera cette proposition dans l'axiomatique de la géométrie affine plane.

¹ Le birapport des quatre éléments A, B, C et D, d'abscisses projectives a, b, c et d est $(ABCD) = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}$.

Première Partie**GÉOMÉTRIE AFFINE A BASE PROJECTIVE****II. AXIOMES ET NOTIONS FONDAMENTALES****3. CONSIDÉRATIONS INTUITIVES.**

Soient deux droites parallèles de la géométrie élémentaire. Construisons-en les perspectives sur un plan qui les coupe, le tableau; ces deux perspectives convergent en leur point de fuite, intersection du tableau avec la parallèle aux droites données passant par le centre de la perspective. Dans le langage de la géométrie élémentaire, le point de fuite n'est la perspective d'aucun point des droites données. En outre les intersections de ces droites avec le plan (dit évanouissant) parallèle au tableau et passant par le centre de la perspective ne possèdent pas de perspective. Ainsi, la biunivocité entre les points d'une droite et leurs perspectives a des exceptions: sauf le point évanouissant, tout point d'une droite possède une perspective et, sauf le point de fuite, tout point de la perspective d'une droite est la perspective d'un point de celle-ci. Ces exceptions sont très gênantes; elles obligent à une étude longue et souvent peu intéressante de cas particuliers nombreux.

Pour éliminer ces inconvénients, posons que le point de fuite de la perspective d'une droite est la perspective d'un point spécial de celle-ci, appelé point *impropre*. Si nous voulons conserver la biunivocité entre les points d'une droite et leurs perspectives, comme les perspectives de deux droites parallèles ont même point de fuite, il nous faut poser que *deux droites parallèles ont même point impropre*.

L'unicité de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné implique l'unicité du point impropre d'une droite quelconque.

Deux droites coplanaires non parallèles se coupent; leurs points impropres sont donc différents. Ainsi, dans le plan, il existe une infinité de points impropres.

Imposons aux points impropres les propriétés générales des points; deux points impropres distincts A et B déterminent une droite. Cette droite fait exception: elle possède au moins deux points

impropres et elle est simultanément parallèle à au moins deux droites a et b du plan ayant l'une A et l'autre B comme points impropres; enfin, par l'intersection de a et b , il passe deux droites parallèles à AB .

Soit C un point impropre distinct de A et B ; supposons-le extérieur à la droite AB . Traçons la droite joignant C à un point propre quelconque N du plan. Les droites AB et CN se coupent en un point M . Puisque A et C sont impropres et distincts, les droites MA et MC sont distinctes et parallèles à AC ; l'unicité du parallélisme n'existe plus. Ces difficultés disparaissent si nous imposons à C d'appartenir à AB . Cela revient à poser l'hypothèse suivante: *les points impropres du plan appartiennent à une droite, la droite impropre du plan*. La droite impropre a un point commun avec toutes les droites du plan; elle est donc parallèle à chacune d'elles.

Considérons encore la perspective d'un plan et sa droite de fuite, lieu des points de fuite des perspectives des droites de ce plan. Si les points impropres de celui-ci n'étaient pas alignés, ou bien ce lieu ne serait pas une droite ou bien l'intersection de deux plans pourrait ne pas être une droite.

4. AXIOME FONDAMENTAL.

Tout plan possède une droite privilégiée, dite droite impropre, telle que deux droites sont parallèles si leur intersection est un point de la droite impropre.

Rien d'analogue n'est supposé pour les points. Un faisceau ne possède donc pas de rayon privilégié. De ce fait, la dualité est absente de la géométrie affine. Les propriétés affines appartiennent donc à des figures dans lesquelles apparaissent des points impropres.

III. GÉOMÉTRIE AFFINE ÉLÉMENTAIRE

5. CÔTÉS D'UNE DROITE, SEGMENT, DEMI-DROITE, MILIEU D'UN SEGMENT.

En géométrie projective, les axiomes de l'ordre permettent de montrer que deux droites partagent le plan en deux régions. Par conséquent, une droite et la droite impropre déterminent deux régions sur le plan, chacune dite un *demi-plan* ou un *côté* de la droite considérée.

Soient A et B deux points propres. Sur la droite d qui passe par eux, ils déterminent deux segments projectifs; l'un d'eux ne contient pas le point impropre de d ; il est le *segment affin* d'extrémités A et B. Dans la suite, sauf cas de nécessité, nous laisserons tomber l'adjectif affin. Deux points propres déterminent un unique segment.

Soit A un point propre d'une droite d . Avec le point impropre, il détermine deux segments projectifs portés par d . Distinguons l'un d'eux par exemple en en marquant un point quelconque. Un tel segment est appelé une *demi-droite*. Le point A en est l'*origine*.

Le conjugué harmonique du point impropre de la droite support d'un segment par rapport aux extrémités de celui-ci est appelé le *milieu* de ce segment. Tout segment possède un milieu et un seul.

Le milieu d'une demi-droite est le point impropre de son support; sa considération est sans intérêt.

6. CONGRUENCE AFFINE DE SEGMENTS.

Soient AB et CD deux segments de supports parallèles mais distincts. Supposons parallèles les deux droites AC et BD. On dit que les deux segments AB et CD sont *affinement congruents* ou en *congruence affine*.

La congruence affine de deux segments est une relation transitive. En effet, soient AB et EF deux segments respectivement congruents¹ à un segment CD; AC et BD sont parallèles ainsi que CE et DF. Dans les deux triangles ACE et BDF, les sommets homologues A et B, C et D, E et F sont alignés sur le point impropre de la droite AB; ces deux triangles sont perspectifs; l'axe de perspectivité est la droite impropre puisque AC et BD d'une part, CE et DF d'autre part sont parallèles. Le théorème de Desargues montre que AE et BF sont parallèles. Ainsi AB et EF sont congruents.

La congruence de segments de supports différents est évidemment symétrique.

Dans la figure précédente, supposons confondus les supports de AB et EF. La congruence affine et sa symétrie sont ainsi étendues au cas de la superposition des supports. Si les extrémités A et E sont confondues, on obtient la réflexivité de la congruence. Soient K et L

¹ Plus exactement « affinement congruents »; sauf cas de nécessité nous laissons tomber l'adverbe affinement.

les intersections de BD et CE d'une part, de AC et DF d'autre part. L'une des diagonales du quadrangle CDKL est la droite impropre; sur cette diagonale, les points impropres de AC et de CE sont conjugués par rapport à ceux des côtés KL et CD. Projetons sur AB ce groupe harmonique de points à partir de K et L. La projection du point impropre de CD est le point impropre de AB et celle du point impropre de KL, le milieu du segment AF et celui du segment BE. Ainsi, *si deux segments de même support AB et EF sont congruents, ils déterminent deux segments BE et AF, l'un contenu dans l'autre et qui ont même milieu.* Ce théorème est dit parfois du milieu commun.

7. EQUIPOLLENCE.

Dans un segment AB distinguons les deux extrémités en appelant origine la première citée. La figure est appelée le *vecteur* \overrightarrow{AB} , d'origine A, d'extrémité B et de sens AB.

Soit CD un segment congruent à AB et supposons parallèles les droites AC et BD. Les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont dits *équipollents*. Les deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{DC} sont *opposés*.

Les propriétés de la congruence montrent immédiatement que l'équipollence est une relation réflexive, symétrique et transitive, mais pas l'opposition. Deux vecteurs opposés à un troisième sont équipollents.

Un vecteur détermine une demi-droite qui le porte et qui a même origine que lui. Deux demi-droites ainsi déterminées par deux vecteurs équipollents sont dites équipollentes. On définit de même deux demi-droites opposées.

Le théorème du milieu commun peut être mis sous la forme suivante: si deux vecteurs équipollents ont même support, les deux segments déterminés par l'origine de l'un et l'extrémité de l'autre ont même milieu et si deux vecteurs opposés ont même support, les deux segments déterminés par leurs origines et leurs extrémités ont même milieu.

8. TRAPÈZE.

Dans un quadrangle ABCD, supposons parallèles les côtés AB et CD. La figure formée par les quatre segments AB, BC, CD et DA

est le *trapèze* ABCD. Les bases sont AB et CD. Si les segments BC et DA n'ont pas de point commun, le trapèze est convexe; il est concave dans le cas contraire.

Dans le quadrangle ABCD, les sommets du triangle diagonal sont l'intersection K des supports des côtés BC et DA, l'intersection L des diagonales AC et BD du trapèze et le point impropre commun des deux bases. La droite KL est conjuguée de la parallèle aux bases par K. Donc, *dans un trapèze, la droite qui joint l'intersection des diagonales à celle des deux côtés distincts des bases coupe les bases en leurs milieux*. Ce théorème est appelé parfois le *lemme de Steiner*, car ce géomètre lui fait jouer un grand rôle dans sa théorie des constructions géométriques.

9. PARALLÉLOGRAMME.

Dans le trapèze ABCD, de bases AB et CD, supposons parallèles les côtés BC et DA. La figure est le *parallélogramme* ABCD.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont congruents et déterminent une paire de vecteurs équipollents.

L'intersection des deux diagonales d'un parallélogramme en est appelé, le *centre*. Les parallèles aux côtés passant par le centre d'un parallélogramme en sont les *axes*. Le lemme de Steiner montre que les axes d'un parallélogramme en coupent les côtés en leurs milieux (intersections propres). A partir du sommet A, sur la diagonale BD, projetons les points impropres des axes et ceux des deux diagonales du parallélogramme; nous obtenons les deux sommets B et D, le centre et le point impropre de la diagonale BD; donc *le centre d'un parallélogramme est le milieu de chacune de ses diagonales*.

De la proposition précédente résulte le fait que si deux vecteurs sont équipollents, *les segments déterminés par l'origine de l'un et l'extrémité de l'autre ont même milieu*, que les deux vecteurs aient même support ou pas.

10. CONGRUENCE DE TRIANGLES.

Par les trois sommets A, B et C d'un triangle, menons les trois parallèles AA', BB' et CC' et, sur elles, construisons les deux parallélogrammes ABB'C' et BCC'B'. Les droites AC et A'C' sont

parallèles. En effet, les deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont perspectifs et leur axe de perspective est impropre. La figure $ACC'A'$ est donc un parallélogramme et les côtés homologues des deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont congruents; on dit alors que les deux triangles sont *congruents par translation*.

Soit un parallélogramme $ABCD$. La diagonale AC le partage en deux triangles ABC et ACD . Dans ces deux triangles, les côtés AB et CD d'une part, BC et AD d'autre part sont congruents et AC est commun. Construisons un triangle $A'B'C'$ congruent à ABC par translation. Les deux triangles ACD et $A'B'C'$, ne sont pas congruents par translation mais leurs côtés sont congruents deux à deux. Les centres des parallélogrammes $AA'C'C$ et $ADC'B'$ sont tous deux le milieu de AC' et le centre du parallélogramme $CDA'B'$ est le milieu de $B'D$. Donc ces trois parallélogrammes ont même centre.

Par ce centre S , menons la parallèle m à AC ; elle est un axe du parallélogramme $ACC'A'$; elle coupe en leurs milieux les trois segments AA' , CC' et DB' . Les deux triangles ACD et $A'B'C'$ sont dits *symétriques* par rapport à l'axe m . Ces deux triangles sont perspectifs; leurs côtés homologues se coupent donc en trois points alignés. La droite ainsi déterminée est l'axe m . Pour le voir, construisons le parallélogramme $DEB'F$ dont D et B' sont deux sommets et dont les côtés DE et $B'F$ sont parallèles à CD et les côtés DF et $B'E$ parallèles à AD ; ses deux sommets E et F déterminent une diagonale qui passe par le centre S de ce dernier parallélogramme; cette diagonale est l'axe de perspective précédent. L'axe m coupe donc les trois segments AA' , DB' et CC' en leurs milieux.

Par convention, les deux triangles ACD et $A'B'C'$ sont dits *congruents par symétrie* (ou mieux affinement congruents par symétrie). De ce qui précède, il résulte que si deux triangles sont affinement congruents par symétrie, deux de leurs côtés homologues sont parallèles à l'axe de symétrie et les paires de côtés non homologues se coupent sur cet axe; enfin, les sommets homologues déterminent trois segments de même milieu; ce milieu est un point de l'axe. On dit que ces trois sommets sont symétriques par rapport à un centre. Ainsi, la congruence affine par symétrie implique la symétrie des sommets par rapport à un centre et la symétrie des côtés par rapport à un axe parallèle à l'un des côtés.

L'ensemble des trois vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CA} portés par les trois côtés d'un triangle est dit de *résultante nulle*. Tout triangle porte deux systèmes de vecteurs de résultante nulle; on passe de l'un à l'autre par permutation des origines et des extrémités.

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles congruents par translation. Sur deux côtés homologues, construisons deux vecteurs équipollents et, à partir de ces vecteurs, sur chacun des triangles, construisons un système de vecteurs de résultante nulle; les vecteurs homologues des deux triangles sont équipollents.

Soient ACD et $C'A'B'$ deux triangles congruents par symétrie où les paires de sommets homologues sont A et C' , C et A' , D et B' . Le vecteur homologue au vecteur AC est $C'A'$; ils ne sont pas équipollents; il en est de même pour les autres vecteurs. Ainsi la congruence des triangles par symétrie ne conduit pas à des systèmes de vecteurs équipollents. On exprime souvent les deux dernières propriétés en disant que la congruence par translation est directe, qu'elle conserve le sens des figures tandis que la congruence par symétrie est inverse, qu'elle inverse le sens des figures.

11. ANGLES.

La figure formée par deux demi-droites de même origine est appelée un *angle*. Les deux demi-droites en sont les côtés et l'origine commune, le *sommet*.

Joignons deux points appartenant chacun à un côté d'un angle; le segment ainsi déterminé est dit appartenir à l'*intérieur* de l'angle. Cet intérieur est l'ensemble des points par lesquels il est possible de mener un segment intérieur à l'angle. L'intérieur d'un angle est dit constituer un angle *convexe*; le reste du plan appartient à l'angle *concave* correspondant.

Un angle dont les deux côtés sont confondus est dit *nul*¹ ou *complet* suivant qu'on le considère comme convexe ou concave. Un angle dont les deux côtés sont opposés est dit *plat*.

Dans la suite, nous ne considérons que des angles convexes. Deux angles de côtés respectivement équipollents sont dits *congruents* ou *directement congruents*. Deux angles dont les côtés sont opposés

¹ On ne doit voir dans ce mot aucune notion métrique, pas plus qu'un jugement nul n'appelle d'idée de grandeur mesurée.

sont *inversement congruents*. En particulier, sur deux droites qui se coupent, on peut former deux angles opposés par le sommet et cela de deux façons. Deux angles opposés par le sommet sont inversement congruents.

Une droite a et une demi-droite b dont l'origine est un point de a forment deux angles dits *supplémentaires* et *adjacents*. Deux angles tels que deux de leurs côtés sont équipollents et leurs seconds côtés opposés sont *supplémentaires*.

Dans la figure formée par deux parallèles coupées par une sécante, les définitions précédentes montrent la congruence directe des angles correspondants, la congruence inverse des angles alternes-internes et alternes-externes et le fait que les angles internes ou externes situés d'un même côté de la sécante sont supplémentaires.

De même, dans un parallélogramme les angles opposés sont inversement congruents. Les angles homologues de deux triangles directement congruents sont directement congruents et les angles homologues de deux triangles inversement congruents sont inversement congruents.

Comme on passe du segment au vecteur en distinguant un ordre dans les deux extrémités, on est conduit à la notion d'angle dirigé ou ayant un sens en distinguant un premier et un second côté d'un angle.

12. SOMMES D'ANGLES.

Soient $ab, b'c, c'd, \dots, k'l$ n angles tels que le second côté b, c, d, \dots, k des $n - 1$ premiers soit équipollent au premier côté b', c', \dots, k' des $n - 1$ derniers. Construisons un angle ayant pour côtés deux demi-droites a_1 et l_1 équipollentes à a et l . L'angle $a_1 l_1$ ainsi obtenu est la *somme* des angles donnés.

Dans cette définition, chaque angle, sauf le premier, a un précédent et, sauf le dernier, chacun a un suivant. Le système possède un ordre et une propriété commutative n'a de sens qu'en inversant l'ordre de tout le système.

13. SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE.

Par un point, menons la parallèle à un côté d'un triangle et, par un des points de cette parallèle, menons des demi-droites équipol-

lentes aux deux demi-droites déterminées par les deux sommets du triangle pris sur le côté choisi comme origines et qui contiennent le troisième sommet. Ainsi sont formés trois angles dont deux sont directement congruents à deux angles du triangle et le troisième, inversement congruent au troisième angle. La somme de ces trois angles est un angle plat. On exprime souvent cette propriété en disant que *la somme des angles d'un triangle est un angle plat*.

Nous ne nous attarderons pas à étendre le théorème aux polygones par décomposition de ceux-ci en triangles par des diagonales.

Il est bien connu que les géométries métriques qui nient l'unicité de la parallèle, les géométries non-euclidiennes, conduisent à des théorèmes niant la propriété précédente de la somme des angles d'un triangle. Ainsi, ce théorème a un caractère fondamental en géométrie affine.

14. ECHELLE UNIFORME, RAPPORT DE DEUX SEGMENTS.

Construisons une échelle projective en choisissant le point impropre comme point infini. Pour cela, menons deux parallèles k et l au support de l'échelle; sur celle-ci, choisissons les deux points origine (0) et unité (1); joignons-les à un point P de l ; déterminons les intersections $0'$ et $1'$ de k avec PO et $P1$, traçons $10'$ qui coupe l en Q et, à partir de Q , projetons $1'$ en 2 sur l'échelle; menons $P2$ qui coupe k en $2'$ et $Q2'$ qui détermine 3 sur l'échelle et ainsi de suite, dans les deux sens. Ainsi est obtenue l'échelle *uniforme* et entière.

Le quadrangle $PQ0'1'$ montre que 1 est le milieu du segment 02 ; les deux segments 01 et 12 sont donc congruents. En général, le point n de l'échelle est le milieu du segment $(n-1)(n+1)$. et les divers segments $n(n+1)$ sont congruents entre eux.

Des constructions projectives permettent de passer à l'échelle projective uniforme rationnelle par la construction des points qui correspondent à des nombres rationnels. Par exemple, pour construire les points correspondants à $\frac{n}{3}$, où n est un entier, points compris entre les points 1 et 2 de l'échelle, traçons les droites $10'$ et $23'$ et, à partir de leur intersection, projetons les points $1'$ et $2'$ sur l'échelle. Les points obtenus correspondent à $\frac{4}{3}$ et $\frac{5}{3}$. La théorie de l'échelle projective montre que ces points sont indépendants du choix fait de $0'$ et $3'$; on aurait pu prendre k' et $(k+3)'$. Répétant cette

opération avec tous les dénominateurs entiers, on obtient l'échelle uniforme rationnelle. Un passage à la limite montre que tout point du support de l'échelle est lié à un nombre réel, son abscisse et réciproquement, à tout nombre réel correspond un point de l'échelle.

Soient A, B et C trois points d'une droite portant une échelle uniforme et a , b et c leurs abscisses. Formons le birapport de ces trois points et du point impropre :

$$(ABCI) = \frac{a-c}{b-c}.$$

Ce quotient est appelé le *rapport* des deux segments AC et BC; on le note $\frac{AC}{BC}$.

Remplaçons un ou deux de ces segments par des segments congruents. Par convention, le rapport conserve sa valeur. Ainsi deux segments de supports parallèles ou confondus possèdent un rapport.

15. THÉORÈME DE THALÈS.

Coupons la figure formée par deux droites concourantes par deux parallèles; le rapport de deux segments compris entre l'intersection des deux droites et les deux intersections avec les parallèles est le même sur les deux droites et ce rapport est égal à celui des deux segments coupés sur les deux parallèles ¹.

Soient I l'intersection des deux droites m et n , a et b les deux parallèles, A et A' les intersections de a avec m et n , B et B' celles de b . La projection conserve les birapports; en particulier, à partir du point impropre commun de a et b , la projection sur n de I, A, B et du point impropre de m donne

$$\frac{IA}{IB} = \frac{IA'}{IB'}.$$

Pour montrer la seconde partie du théorème, menons la parallèle à n par A; elle coupe BB' en C. Il vient

$$\frac{BA}{BI} = \frac{BC}{BB'}.$$

Mais BB' est égal à la somme de BC et CB', d'où le théorème.

¹ La proposition est dite « de Thalès » par commodité; elle doit probablement être attribuée à l'école pythagoricienne. Cependant, Thalès a fait faire de tels progrès à la théorie de la similitude que le rappel de son nom n'est pas injustifié.

16. TRIANGLES SEMBLABLES.

Deux triangles dont les angles homologues sont congruents sont dits *semblables*. La congruence de deux paires d'angles homologues suffit pour affirmer la similitude car cette congruence, qu'elle soit directe ou inverse, implique le parallélisme des côtés homologues.

D'après le théorème de Desargues, les trois paires de sommets homologues de deux triangles semblables déterminent trois droites concourantes. Ainsi, en géométrie affine, si deux triangles sont semblables, ils sont homologues et l'axe d'homologie est impropre. On exprime cela en disant que les deux triangles sont *homothétiques*.

Le théorème de Thalès montre que le rapport de deux côtés homologues appartenant à deux triangles semblables est indépendant du choix du segment considéré.

17. MÉDIANES D'UN TRIANGLE.

Les droites AA' , BB' et CC' joignant les sommets d'un triangle ABC aux milieux A' , B' et C' des côtés opposés en sont les *médianes*.

Par le milieu A' de BC , menons la parallèle à AB . D'après le théorème de Thalès, elle coupe AC en son milieu B' . La figure $ABA'B'$ est un trapèze dont les deux diagonales sont les médianes AA' et BB' du triangle; le point C est l'intersection de deux côtés non parallèles du trapèze. La droite passant par C et l'intersection G des deux médianes précédentes coupe la base AB en son milieu; elle est donc la médiane issue de C et *les médianes d'un triangle sont concourantes*.

Le théorème de Thalès montre que le rapport de AB à $A'B'$ est 2. Appliquant ce même théorème aux droites AA' et BB' coupées par les parallèles AB et $A'B'$, on voit que *le point de concours des médianes divise chacune d'elles en deux segments dont l'un est le double de l'autre*.

18. THÉORÈMES DE CEVA ET DE MÉNÉLAÛS.

Par les trois sommets d'un triangle, menons trois droites concourantes. Joignons leur point de concours P au point de concours G des médianes. La droite PG coupe les trois côtés BC , CA et AB du triangle en A' , B' et C' . Appliquons à la droite PG la propriété associative du birapport:

$$(A'B'PG) (B'C'PG) (C'A'PG) = 1$$

Appelons M_a , M_b et M_c les milieux des côtés et P_a , P_b et P_c les projections de P à partir des sommets du triangle sur les côtés opposés. Il vient

$$(A'B'PG) = (BAP_cM_c) = -\frac{BP_c}{AP_c}.$$

Les deux autres birapports donnent des expressions analogues et leur produit est

$$\frac{CP_a}{BP_a} \cdot \frac{AP_b}{PC_b} \cdot \frac{BP_c}{AP_c} = -1.$$

*Dans un triangle coupé par trois sécantes concourantes issues des sommets, le produit des rapports des segments obtenus sur les trois côtés est égal à -1 .*¹

Considérons un triangle ABC coupé par une sécante s . Appelons A' , B' et C' les intersections de s avec les côtés BC , CA et AB du triangle. Par les sommets, menons les droites a , b et c parallèles à la sécante s et appelons i la droite impropre. Appliquons la propriété associative du birapport en formant

$$(absi) (bcsi) (casi) = 1.$$

La section du quaterne de rayons $absi$ par le côté AB donne $(absi) = \frac{AC'}{BC'}$. Opérant de même sur les deux autres birapports, il vient

$$\frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BA'}{CA'} \cdot \frac{CB'}{AB'} = 1.$$

*Le produit des rapports des segments coupés sur les trois côtés d'un triangle par une sécante est égal à l'unité*².

On considère parfois les deux théorèmes de Ceva et de Ménélaüs comme plus ou moins corrélatifs l'un de l'autre. La proposition corrélatrice d'un théorème portant sur des segments ne peut pas concerner des segments mais des angles. En réalité, les démonstrations de ces théorèmes sont basées sur deux propriétés corrélatives, le théorème associatif du birapport appliqué une fois à des points alignés, une autre fois à des rayons d'un faisceau.

¹ Souvent, on écrit le théorème sous la forme de l'égalité de deux produits de trois segments portés par les côtés du triangle. Cette notion de produit de segments de supports non parallèles n'est pas affine, mais bien celle du produit de trois rapports de segments de même support.

² La même remarque peut être faite que pour le théorème de Ceva.

19. GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE.

Sous le nom de géométrie du triangle, quelques auteurs ont publié, à la fin du siècle dernier, de nombreuses propriétés nouvelles; d'autres sont de caractère affin. Indiquons-les sommairement.

Soient un triangle ABC et les milieux A', B' et C' des côtés BC, CA et AB. Les deux triangles ABC et A' B' C' sont homothétiques; le centre d'homothétie est le point de concours G des médianes. Dans cette homothétie, construisons le correspondant M' d'un point M du plan du triangle ABC. Le point M' est dit le complémentaire de M et M, l'anticomplémentaire de M'. Appelons M'' l'anticomplémentaire de M et calculons le birapport (M'' GM' M). On constate que les quatre points ci-dessus constituent un groupe harmonique.

Soient un triangle ABC et un point M. Appelons M_a, M_b et M_c les intersections des droites AM, BM et CM avec les côtés du triangle et construisons les conjugués harmoniques N_a, N_b et N_c de ces intersections par rapport aux sommets du triangle. Nous avons trois relations analogues à

$$\frac{M_a B}{M_a C} = - \frac{N_a B}{N_a C}.$$

Appliquons le théorème de Ceva aux rapports figurant au premier membre; il vient

$$\frac{N_a B}{N_a C} \cdot \frac{N_b C}{N_b A} \cdot \frac{N_c A}{N_c B} = 1.$$

D'après le théorème de Ménélaüs, les trois points N_a, N_b et N_c sont alignés. Soit *m* la droite par eux. Les deux triangles ABC et N_a N_b N_c sont homologues. La droite *m* est appelée la polaire trilinéaire de M relativement au triangle ABC; on la dit aussi harmoniquement associée au point M. Ce point est le pôle trilinéaire de *m* relativement au triangle ou harmoniquement associé à *m*. En particulier, le point d'intersection des médianes d'un triangle est le pôle trilinéaire de la droite impropre.

Soient AB et CD deux segments de même support et de même milieu. Les points C et D sont dits isotomiques relativement à A et B.

Dans la figure précédente relative au triangle ABC, construisons les isotomiques P_a, P_b et P_c des points M_a, M_b et M_c. Cela signifie que BM_a = P_a C, CM_a = P_a B et deux paires de relations analogues

sur les deux autres côtés. Appliquons le théorème de Ceva en y remplaçant les segments tels BM_a par leurs valeurs ci-dessus. Il en résulte que les droites AP_a , BP_b et CP_c sont concourantes. Donc les isotomiques des intersections des côtés d'un triangle avec trois droites concourantes déterminent avec les sommets opposés trois droites concourantes.

En appliquant le théorème de Ménélaüs, on obtient de même la proposition suivante: les isotomiques des intersections des côtés d'un triangle avec une transversale sont alignés.

20. CENTRE D'UNE INVOLUTION.

Supposons liés par une involution les points d'une ponctuelle. Le correspondant du point impropre est appelé le *centre* de l'involution. Prenons ce centre comme origine d'une échelle uniforme et exprimons analytiquement l'involution:

$$axx' + b(x + x') + c = 0.$$

A $x = 0$ correspond $x' = \infty$, donc $b = 0$. L'équation de l'involution peut donc être mise sous la forme $xx' = \text{constante}$. Si l'involution est hyperbolique et si l'on prend un de ses points unis comme point unité, il vient $xx' = 1$.

Supposons que l'un des points unis est impropre. Cela implique $a = 0$. Le centre est lui aussi impropre et si l'on choisit le point uni propre comme origine, il vient $x + x' = 0$. Une telle involution est une symétrie.

21. PRODUIT DE SEGMENTS.

Soient un nombre fini n de segments $A_j B_j$ de supports parallèles. Choisissons un segment u de support parallèle aux segments précédents et déterminons le rapport $r_j(u)$ de chacun des segments donnés au segment u . Le produit des nombres $r_j(u)$ est appelé le *produit des segments* donnés relatif à l'unité u .

Remplaçons le segment unité par un autre u' , de même direction, tel que $\lambda u = u'$. Le produit est multiplié par la puissance n^e du rapport λ des unités.

La notion de produit de segments n'a de sens que pour des supports parallèles.

Dans ce qui précède, on pourrait faire intervenir des vecteurs au lieu de segments. Les rapports $r_j(u)$ possèderaient alors un signe.

22. DES AIRES.

Soient deux parallélogrammes de côtés respectivement parallèles. Par définition, le rapport des aires des deux parallélogrammes est égal au produit des rapports des côtés parallèles.

Parallèlement à chacune des deux directions des côtés des parallélogrammes donnés, choisissons un segment unité. Le rapport des aires des deux parallélogrammes donnés est égal au rapport des produits des segments portés par des directions parallèles sur les deux parallélogrammes.

Par définition, deux triangles congruents ont même aire, ainsi que toute paire de figures décomposables en triangles congruents.

Soient deux parallélogrammes ayant un côté commun et dont les côtés parallèles à ce côté commun ont même support. Ils comportent un trapèze commun et deux triangles congruents. Les deux parallélogrammes ont donc même aire. Donc deux parallélogrammes dont deux côtés opposés ont même support et sont congruents ont même aire. Cette égalité d'aire subsiste si l'un des parallélogrammes est remplacé par un autre qui lui est congruent.

Par décomposition en parallélogrammes élémentaires, la notion d'aire peut être étendue à des figures autres que les parallélogrammes en s'appuyant sur le fait que l'aire de deux figures adjacentes est égale à la somme des aires des figures composantes.

23. AFFINITÉS.

Les collinéations dans lesquelles la droite impropre est unie sont appelées des affinités ¹.

L'affinité conserve le rapport des segments alignés. Cela résulte de la conservation du birapport et de caractère impropre des points impropres.

Les propriétés générales des collinéations montrent qu'une affinité a trois points unis ou une infinité. La droite impropre étant unie, elle porte deux points unis ou tous ses points sont unis. Ainsi une

¹ Dans les éléments on appelle parfois affinité le cas particulier que nous rencontrerons dans un instant sous le nom d'affinité perspective.

affinité possède un unique point propre uni ou une infinité. Une affinité qui possède deux points propres unis possède la droite déterminée par eux comme droite de points unis; en effet, cette droite possède en plus des deux points unis donnés un troisième point uni en son point impropre. Ayant trois points unis, tous ses points sont unis. Une telle affinité est dite *perspective*; une affinité perspective possède une *direction*, celle déterminée par le point impropre uni distinct du point impropre de la droite des points unis.

Une affinité dans laquelle la droite impropre est unie point par point possède en général un point uni propre sur lequel sont alignés deux points correspondants. Nous retrouvons l'homothétie examinée plus haut (§ 16).

Une homothétie de centre impropre est une translation.

L'affinité transforme deux parallélogrammes de côtés respectivement parallèles en une paire de parallélogrammes analogues; puisqu'elle conserve les rapports de segments, l'affinité conserve les rapports d'aires.

Dans une affinité perspective, soit r le rapport des segments déterminés sur une parallèle à la direction d'affinité par l'intersection de cette droite avec l'axe et deux points correspondants. Deux parallélogrammes correspondants dont les côtés sont respectivement parallèles à l'axe et à la direction d'affinité ont des aires dans le rapport r^2 . En particulier, si l'intersection avec l'axe est le milieu du segment limité par les points correspondants, ce rapport est l'unité. L'affinité est une symétrie et la symétrie conserve les aires.

De même, le rapport des aires de deux figures homothétiques est égal au carré du rapport des segments déterminés par le centre et deux points correspondants.

IV. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

24. COORDONNÉES AFFINES DANS LE PLAN.

Soient deux droites concourantes x et y , les *axes*. Choisissons un point du plan et projetons-le sur les axes parallèlement à eux en U_x et U_y . Sur chacun des deux axes, construisons une échelle uniforme en choisissant leur intersection O comme origine et les deux points précédents comme points unités.

De même, parallèlement aux axes, projetons sur eux un point quelconque M du plan en M_x et M_y . Les abscisses de ces derniers points sont les *coordonnées affines* dans le système de coordonnées choisi. Elles sont le cas particulier des coordonnées projectives où les points impropres des axes ont été choisis comme points infinis. Comme en coordonnées projectives, l'équation d'une droite est linéaire.

En géométrie affine, on peut souvent exclure la droite impropre des figures étudiées ou ne la considérer qu'en cas de nécessité. Cela diminue l'intérêt des coordonnées homogènes et l'emploi des coordonnées inhomogènes permet souvent d'alléger l'écriture. Mais si la droite impropre intervient dans une figure, les coordonnées homogènes conservent leurs avantages.

Soit $y = mx + b$ l'équation d'une droite; celle de toute droite qui lui est parallèle peut être mise sous la forme $y = mx + b'$. Le coefficient m détermine la direction de la droite; il détermine l'angle de celle-ci avec un axe mais pas la mesure de cet angle puisque cette notion n'a pas de sens ici.

En coordonnées homogènes, les équations d'une collinéation sont $x'_j = \sum a_{jk} x_k$ avec j et $k = 1, 2$ et 3 . En coordonnées affines, dans les équations d'une affinité, x_3 et x'_3 sont simultanément nulles. Cela implique $a_{31} = a_{32} = 0$. Nous retrouvons un fait qui diminue l'intérêt des coordonnées homogènes. Les transformations linéaires non homogènes jouent ainsi un rôle important en géométrie affine.

Les équations précédentes sont aussi celles du changement de système de coordonnées.

25. ASYMPTOTES DES COURBES.

Supposons qu'une branche de courbe soit telle que la différence d'ordonnée entre un de ses points et un point d'une droite a ait une limite nulle lorsque l'abscisse devient infinie; cette droite a est une *asymptote* de la courbe¹. Si la courbe possède des points impropres en lesquels il existe une tangente à la courbe, chacune de ces tangentes est une asymptote.

Une branche de courbe tangente à la droite impropre est dite *parabolique*.

¹ Par un changement de coordonnées on peut toujours éliminer le cas où l'axe des ordonnées est une asymptote.

Soit l'équation homogène d'une courbe algébrique

$$u_n + u_{n-1} z + \dots + u_{n-j} z^j + \dots + u_0 z^n = 0.$$

Les u_j sont des formes d'ordre j en x et y . Supposons égal à l'unité le coefficient de y^n . Les directions des asymptotes sont déterminées par les racines m_j de $u_n = 0$. On a évidemment

$$u_n \equiv \Pi (y - m_j x), \quad (j = 1 \text{ à } n).$$

Soit $y + m_j x + p_j z = 0$ l'équation d'une asymptote. Celle-ci est tangente à la courbe sur la droite impropre. Le système d'équations formé par l'équation de la courbe et celle de la tangente doit avoir une racine double $z = 0$. Cela est réalisé si les p_j sont choisis de façon à mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$\Pi (y - m_j x + p_j z) - z^2 \varphi (x, y, z) = 0.$$

où φ est une forme d'ordre $n - 2$ en x, y et z .

L'équation de la courbe constituée par les asymptotes est obtenue en égalant à zéro le premier terme.

26. CLASSIFICATION AFFINE DES COURBES ALGÈBRIQUES.

La classification affine des courbes repose sur les propriétés de leurs points impropres. Elle est bien connue pour les coniques: l'hyperbole possède deux asymptotes réelles, la parabole est tangente à la droite impropre et l'ellipse ne possède pas de point impropre réel.

Les cubiques avec ou sans point double peuvent présenter les relations suivantes avec la droite impropre:

trois points impropres réels distincts, donc trois asymptotes,
une branche parabolique réelle et une asymptote,
un point d'inflexion impropre,
un seul point impropre réel (et une seule asymptote).

Une cubique à point double peut voir ce point être impropre; elle peut en outre avoir un autre point impropre ou avoir une branche tangente à la droite impropre en son point double. Le point singulier d'une cubique à rebroussement peut être propre ou impropre et dans ce dernier cas, la tangente de rebroussement peut être propre ou impropre.

Cette énumération montre combien est touffue la classification affine des courbes.

27. CENTRE DES MOYENNES DISTANCES.

Sur une droite soient n points d'abscisses affines x_j . On appelle *centre des moyennes distances* de ces points le point dont l'abscisse est la moyenne arithmétique de celles des points donnés.

La distance d'un point quelconque au centre des moyennes distances d'un système de points donnés est égale à la moyenne des distances de ce point aux points du système.

28. DIAMÈTRES DES COURBES ALGÈBRIQUES.

Soit une courbe algébrique et un faisceau de parallèles n'ayant pas pour sommet l'un des points impropres de la courbe. Rapportons la courbe à un système d'axes où l'axe des x est parallèle à la direction choisie et, dans l'équation de la courbe

$$f(x, y) \equiv ax^n + b(y)x^{n-1} + c(x, y) = 0,$$

le coefficient a n'est pas nul, $b(y)$ est une fonction linéaire de y et $c(x, y)$ est d'ordre $n - 2$ en x . Les sections de la courbe avec un parallèle à la direction choisie d'ordonnée m ont pour abscisses les racines de l'équation $f(x, m) = 0$. La somme de ces abscisses est $-\frac{b(m)}{a}$. Cette expression est linéaire en m . Donc *le lieu des centres des moyennes distances des intersections d'une courbe algébrique avec les droites d'un faisceau de parallèles est une droite, le diamètre correspondant à la direction choisie.*

Comparons l'équation de la courbe avec celle de la courbe constituée par les asymptotes de la courbe donnée. Nous avons vu que ces deux équations ont même termes de degrés n et $n - 1$ en x . Donc *le centre des moyennes distances des intersections d'une courbe avec une droite et celui des intersections de cette droite avec les asymptotes de la courbe considérée sont confondus.*

Comme nous venons d'examiner la notion de diamètre, liée aux termes de degrés supérieurs, on peut de même, en faisant intervenir la somme des produits deux à deux des segments pris sur un faisceau de parallèles étudier des coniques diamétrales des courbes algébriques ou encore des courbes diamétrales d'ordre plus élevé.

29. THÉORÈMES DE MAC-LAURIN, DE NEWTON ET DE CARNOT.

Soit une courbe algébrique d'ordre n d'équation

$$f(x, y) \equiv a(x, y) + b(x, y) = 0,$$

où $a(x, y)$ représente l'ensemble des termes d'ordre n en x et y . Choisissons deux points A et B n'appartenant pas à la courbe et de coordonnées x_0 et y_0 pour A, $x_0 + h$ et $y_0 + k$ pour B. Les coordonnées d'un point quelconque M de la droite AB sont $x_0 + \lambda h$ et $y_0 + \lambda k$; le paramètre λ est le rapport $\frac{AM}{AB}$. Les intersections de la droite AB avec la courbe sont caractérisées par les valeurs de λ racines de l'équation obtenue en introduisant les coordonnées de M dans l'équation de la courbe. Le terme connu de cette équation est $f(x_0, y_0)$ et le coefficient de λ^n , $a(h, k)$. Le produit des n racines λ_j est

$$\frac{\Pi AM_j}{AB^n} = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{a(h, k)}.$$

Par A, menons une seconde sécante AC et formons le même quotient que ci-dessus.

$$\frac{\Pi AN_j}{AC^n} = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{a(h_1, k_1)}.$$

Par un point A', menons les deux vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{A'C'}$ équipollents à AB et AC et effectuons les mêmes opérations que ci-dessus. Les produits AB^n et $A'B'^n$ sont égaux. Donc

$$\frac{\Pi AM_j}{\Pi A'M'_j} = \frac{f(x_0, y_0)}{f(x'_0, y'_0)} = \frac{\Pi AN_j}{\Pi A'N'_j}.$$

L'égalité ci-dessus conduit au théorème de Mac-Laurin. *Si par deux points, on mène des parallèles à deux directions et sur elles des segments unités équipollents, le rapport des produits des segments compris entre ces points et les intersections avec une courbe algébrique est indépendant de la direction des sécantes; il dépend du choix des points choisis.*

Dans la proportion entre les quatre produits précédente, permutons les moyens; nous obtenons le théorème de Newton: *le quotient des produits des distances d'un point aux intersections de deux droites*

passant par lui avec une courbe algébrique est indépendant de ce point, si l'on remplace les sécantes par des transversales qui leur sont parallèles.

Sur la figure précédente, traçons un polygone ABC... et sur chaque côté, appliquons le théorème de Mac-Laurin successivement aux deux sommets qu'il porte et formons le rapport des expressions trouvées. Appelons x_A et y_A les coordonnées de A et de même pour les autres sommets, (AB) le produit des segments issus de A et portés par AB et (BA) celui des segments portés par la même droite et issus de B. Il vient

$$\frac{(AB)}{(BA)} = \frac{f(x_A, y_A)}{f(x_B, y_B)}.$$

Opérons de même sur les autres côtés et formons le produit de ces quotients. Au second membre, chaque facteur apparaît au numérateur et au dénominateur. Le produit est égal à 1. Donc *le produit des rapports des segments compris entre les intersections d'une courbe algébrique et un polygone aux sommets de celui-ci est égal à un.*

V. GÉOMÉTRIE VECTORIELLE.

30. INTRODUCTION.

La géométrie vectorielle linéaire est de nature affine; une de ses applications les plus importantes est la statique. Sans insister sur la notion de force, nous allons en exposer l'essentiel.

31. RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME DE VECTEURS DE MÊME ORIGINE.

Par convention la *résultante* ou la *somme* d'un système de vecteurs de même origine est donnée par le *polygone des vecteurs*. Chaque côté de ce polygone est équipollent à un vecteur du système; l'origine du k^{e} côté du polygone est confondue avec l'extrémité du $(k - 1)^{\text{e}}$. Le premier vecteur du polygone est le premier du système et son origine est l'origine de la somme; l'extrémité de la somme est l'extrémité du dernier côté du polygone.

L'unicité du parallélogramme construit sur deux vecteurs donnés conduit à la propriété commutative de la construction de la résultante.

32. SYSTÈMES DE VECTEURS GLISSANTS.

Un vecteur est dit *glissant* si son origine est indéterminée sur le support de ce vecteur.

Soient \vec{a}_j n vecteurs glissants. Leur composition deux à deux conduit généralement à un vecteur glissant, résultante du système. La longueur et la direction de cette résultante peuvent être déterminées en composant le polygone des vecteurs, comme s'il s'agissait de vecteurs de même origine. Supposons construit ce polygone $A_0 A_1, \dots, A_n$, d'origine A_0 et où A_j est l'extrémité du côté équipollent à \vec{a}_j . Choisissons un point P qui n'appartient pas à la droite $A_0 A_n$. Déterminons la résultante des vecteurs $\vec{A_0 P}$, $\vec{PA_1}$, $\vec{A_1 P}$, $\vec{PA_2}$, ... $\vec{A_n P}$ et $\vec{PA_n}$. Cette résultante est celle de $\vec{A_0 P}$ et de $\vec{PA_n}$; elle est identique à celle du polygone des vecteurs. Sur le support de $\vec{a_1}$, choisissons un point S_1 ; par lui, menons les droites u_0 parallèles à $\vec{A_0 P}$ et u_1 parallèle à $\vec{A_1 P}$. Déterminons l'intersection S_2 de u_1 avec le support de $\vec{a_2}$ et continuons de même. Finalement, par S_n , menons la parallèle u_n à $\vec{A_n P}$. Tout vecteur $\vec{a_j}$ est la résultante de deux vecteurs équipollents à $\vec{A_{j-1} P}$ et à $\vec{PA_j}$ et passant tous deux par S_j . La résultante de ce système de vecteurs est équipollente à la résultante des deux vecteurs $\vec{u_0}$, équipollents à $\vec{A_0 P}$ et $\vec{u_n}$ équipollents à $\vec{PA_n}$. Autrement dit, la résultante du système passe par l'intersection des droites u_0 et u_n . Cette figure est appelée un *polygone funiculaire* du système.

Ce qui précède suppose distincts les points A_0 et A_n . S'ils sont confondus, la résultante du système de vecteurs est nulle. Sur le polygone funiculaire, deux cas se présentent alors: les deux droites u_0 et u_n sont distinctes ou elles sont superposées. Si elles sont distinctes, le système est dit constituer un *couple*. La composition des vecteurs en place conduit finalement à deux vecteurs opposés et de supports distincts.

Si enfin les deux droites ci-dessus sont confondues, le système est dit de résultante et de couple résultant nul.

33. CENTRE D'UN SYSTÈME DE VECTEURS LIÉS PARALLÈLES.

On entend par vecteur lié un vecteur invariable.

Un système de vecteurs liés parallèles étant donné, construisons le polygone des vecteurs et le polygone funiculaire. Supposons non nulle la résultante. La construction donne la longueur de la résultante et son support.

Examinons le cas de deux vecteurs; la comparaison du polygone des vecteurs et du polygone funiculaire montre que la résultante coupe la droite passant par les origines des deux vecteurs en un point qui la partage inversement proportionnellement aux longueurs des deux vecteurs.

Par l'origine de chacun des deux vecteurs, menons deux droites parallèles et opérons de même en leurs extrémités mais en choisissant une direction différente de la première; nous construisons ainsi deux triangles semblables dont deux côtés homologues sont les deux vecteurs donnés. Les deux côtés de ces triangles différents des vecteurs donnés mais passant par leur origine déterminent deux nouveaux vecteurs de même origine que les vecteurs proposés. On dit que les deux vecteurs ont subi une *rotation*. La construction indiquée ci-dessus pour le support de la résultante conduit à faire passer celle-ci par le même point de la droite déterminée par les origines. Ainsi *le support de la résultante d'un système de deux vecteurs liés passe par un point fixe lorsque ces vecteurs subissent une rotation*. Ce point est le *centre* du système.

Dans un système de vecteurs parallèles liés, remplaçons les deux premiers vecteurs par leur résultante en choisissant leur centre comme origine. Composons cette résultante avec le troisième vecteur et déterminons le centre et ainsi de suite. On étend ainsi le théorème de l'existence du centre au cas d'un nombre quelconque de vecteurs.

34. COORDONNÉES BARYCENTRIQUES.

Soient A, B et C trois points non alignés du plan. Construisons trois vecteurs parallèles ayant ces points comme origines et de longueurs respectivement proportionnelles à trois nombres a , b et c . Déterminons leur centre M. Ces trois nombres sont les *coordonnées barycentriques* du point M relativement au triangle ABC.

Ces coordonnées sont identiques aux coordonnées projectives si l'on prend comme point unité le point d'intersection des médianes du triangle.

Actuellement, l'intérêt des coordonnées barycentriques est surtout historique car elles furent les premières coordonnées homogènes dont il fut fait usage.

35. MOMENT D'UN VECTEUR.

Soient un vecteur \overrightarrow{AB} et un point P . L'aire du parallélogramme de côtés AB et AP est appelée le *moment* du vecteur \overrightarrow{AB} relatif au centre P .

A la figure, ajoutons un second vecteur \overrightarrow{CD} . A partir de P , projetons le premier vecteur sur le second. Si la projection est de même sens que \overrightarrow{CD} , les moments de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{CD} par rapport à P sont de même sens; sinon, ils sont opposés. Dans la suite, l'expression « somme de moments » doit être comprise comme une somme algébrique.

Le moment d'un vecteur glissant relativement à un point fixe est indépendant de l'origine de ce vecteur.

Soient \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} deux vecteurs de même origine et \overrightarrow{OR} leur résultante et P un point tel que les deux moments de \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} soient de même sens. Construisons les deux parallélogrammes $OPCA$ et $OPDB$. A $OPDB$, faisons subir une translation qui amène O en A et soit $ACER$ le parallélogramme obtenu. Les triangles OAR et PCE sont congruents. On voit ainsi que *la somme des moments de deux vecteurs concourants est égale au moment de leur résultante*.

On étend le théorème au cas où les deux moments sont opposés et, par itération, au cas d'un système quelconque de vecteurs. En particulier, on constate que la somme des moments des deux composantes d'un couple est indépendante du choix du point de référence. Cette somme est appelée le moment du couple.

Seconde Partie**GÉOMÉTRIE PASCALIENNE****VI. AXIOMES****36. INTRODUCTION.**

L'exposé précédent considère la géométrie affine comme un cas particulier de géométrie projective: il repose donc entre autres sur les axiomes d'incidence de l'espace, car le théorème de Desargues sur les triangles perspectifs ne peut pas être démontré en n'ayant recours qu'aux axiomes plans de l'incidence; en outre, la démonstration du théorème fondamental sur la détermination d'une projectivité par trois paires d'éléments correspondants repose sur un axiome de continuité.

Il est possible de construire la géométrie affine plane en renonçant à tout recours à la continuité. Il est alors nécessaire de poser comme axiome une proposition appropriée. On a essayé de choisir la proposition de Desargues; cette base axiomatique est insuffisante pour la démonstration du théorème de Pascal. Ce théorème est le suivant: si un hexagone a ses six sommets alignés trois à trois et si deux paires de sommets opposés sont parallèles, il en est de même pour la troisième paire.

Au contraire, si l'on admet cette proposition comme axiome, il est possible de démontrer le théorème de Desargues et de construire une géométrie affine plane basée sur les relations d'incidence, d'ordre et de parallélisme. C'est l'essentiel de cette élaboration que nous proposons d'exposer en nous limitant aux propriétés fondamentales.

37. ORDRE AFFIN.

En géométrie affine, les axiomes de l'ordre concernent les points d'une droite. Ils sont ceux de la géométrie euclidienne:

Si A , B et C sont trois points d'une droite et si B est entre A et C , il est aussi entre C et A .

Si A et C sont deux points d'une droite, il y a sur celle-ci au moins un point B qui est entre A et C et un point D tel que C est entre A et D .

De trois points d'une droite, un et un seul est entre les deux autres.

La relation d'ordre conduit aux notions de segment, ensemble des points d'une droite situés entre deux points de celle-ci, de vecteur, de demi-droite et de demi-plan. La demi-droite d'origine A et ne contenant pas B est l'ensemble des points de la droite AB pour lesquels A est entre eux et B . Dans un plan contenant la droite d , le demi-plan limité par d qui contient le point A est l'ensemble des points B tels qu'aucun point de d n'est entre A et B .

38. AXIOMES DE PARALLÉLISME.

Par tout point du plan, il passe une unique droite qui ne coupe pas une droite donnée de ce plan; cette non-sécante est appelée la parallèle à la droite donnée passant par le point considéré.

Si les sommets d'un hexagone sont alignés trois à trois sur deux droites et si deux paires de côtés opposés sont parallèles, il en est de même de la troisième paire.

La réciproque est la proposition suivante: si trois sommets d'un hexagone sont alignés et si les trois paires de côtés opposés sont parallèles, les trois derniers sommets sont alignés. On démontre ce théorème par réduction à l'absurde.

Le parallélisme conduit à la notion de parallélogramme.

39. THÉORÈME DE DESARGUES.

Soient A_1 et B_1 , A_2 et B_2 , A_3 et B_3 trois paires de points alignés deux à deux sur un point H et tels que A_1A_2 et A_2A_3 sont respectivement parallèles à B_1B_2 et à B_2B_3 .

Par A_1 , menons la parallèle à A_2B_2 ; elle coupe HA_3 en M et B_1B_3 en L . Traçons LB_2 qui coupe A_1A_2 en N et menons NM et HN .

Dans l'hexagone $NHB_2B_1LA_1$, A_1N et B_1B_2 sont parallèles ainsi que A_1L et HB_2 . Les sommets N , B_2 et L sont alignés ainsi que H , B_1 et A_1 . Donc les droites HN et B_1B_3 sont parallèles ainsi que HN et A_1A_3 .

De même, dans l'hexagone $NHA_2A_3A_1M$, les sommets N , A_1 et A_2 sont alignés ainsi que HA_3 et M . Les parallélismes de HN et A_1A_3

d'une part, de HA_2 et A_1M d'autre part, impliquent celui de NM avec A_2A_3 .

Considérons enfin l'hexagone NHB_2B_3LM ; HN est parallèle à B_3L , HB_2 l'est à LM ; les sommets N , B_2 et L sont alignés ainsi que H , B_3 et M ; donc B_2B_3 est parallèle à MN et à A_2A_3 .

Donc, *si les sommets homologues de deux triangles sont alignés sur un point et si deux paires de côtés homologues sont parallèles, les côtés de la troisième paire le sont aussi.*

Réciproquement, si deux triangles ont leurs côtés homologues parallèles deux à deux, les trois droites déterminées par les paires de sommets homologues sont concourantes ou parallèles. On démontre cette réciproque par l'absurde.

40. HOMOTHÉTIE.

Soient un point H , deux points A et A' alignés sur H et un point B . Menons HB et AB et, par A' , la parallèle à AB ; elle coupe HB en un point B' dit le transformé de B dans l'homothétie de centre H et où A et A' sont deux points correspondants.

Soient C un troisième point et son correspondant C' . Les deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs sommets homologues alignés sur H et deux paires de côtés parallèles; les troisièmes côtés sont aussi parallèles.

L'homothétie transforme donc toute droite en une droite parallèle à la proposée.

VII. CALCUL SEGMENTAIRE

41. COORDONNÉES SEGMENTAIRES.

Soient x et y deux droites, les *axes*, qui se coupent en un point O ; par un point quelconque M , menons les parallèles à ces axes; elles les coupent en deux points M_x et M_y . Les deux segments OM_x et OM_y sont les *coordonnées-segments* x et y de M .

Sur la figure, choisissons une direction non parallèle à un axe; appelons *parallèle-unité* toute parallèle à cette direction. Par un point A_x de l'axe des x , menons la parallèle-unité; elle coupe l'axe

des y en un point A_y . Les deux points A_x et A_y sont dits *associés* ainsi que les deux segments OA_x et OA_y .

42. ADDITION SEGMENTAIRE.

Sur l'axe des x , soient deux segments $OA_x = a$ et $OB_x = b$. Construisons l'associé B_y de B_x et le point P de coordonnées OA_x et OB_y . Par P , menons la parallèle-unité; elle coupe l'axe des x en un point C . Le segment $OC = c$ est dit la *somme* $a + b = c$ de a et b .

Construisons la somme $b + a$ au moyen de l'associé A_y de A_x et du point Q de coordonnées OB_x et OA_y et de la parallèle-unité par Q . Nous allons montrer la propriété commutative de l'opération ci-dessus. Pour cela, construisons les deux points A , de coordonnées OA_x et OA_y et B , de coordonnées OB_x et OB_y . Les deux triangles AA_xA_y et BB_xB_y sont homothétiques, puisque leurs côtés sont parallèles; leur centre d'homothétie est l'origine O ; donc O , A et B sont alignés. Les deux triangles OA_xA_y et BPQ ont leurs sommets homologues alignés sur A ; deux paires de côtés sont respectivement parallèles aux axes; donc les troisièmes côtés sont parallèles entre eux; l'un est une parallèle-unité, l'autre aussi et les parallèles-unités par P et Q sont confondues.

Soient $OA_x = a$, $OB_x = b$ et $OC_x = c$ trois segments. Construisons les points dont les coordonnées sont celles du tableau ci-dessous:

	x	y
D	c	$a + b$
E	$b + c$	a
F	c	a
G	b	c
H	a	b

La somme $(a + b) + c$ est donnée par la parallèle-unité passant par D et la somme $a + (b + c)$ par celle passant par E . Ces deux droites sont confondues. Pour le montrer, remarquons que les segments suivants sont respectivement côtés opposés de parallélogrammes: FE , $C_x(b + c)_x$, C_yG et OB_x d'une part, FD , $A_y(a + b)_y$, A_xH et OB_y . Les deux parallélogrammes $OFDB_y$ et $OFEB_x$ montrent que les trois droites OF , B_xE et B_yD sont parallèles. Ainsi DE est une parallèle unité et $(a + b) + c$ et $a + (b + c)$ sont confondus.

La construction de la somme segmentaire jouit des propriétés de l'addition, d'où le nom d'addition segmentaire qu'on lui donne.

L'opération opposée est la soustraction segmentaire.

43. MULTIPLICATION SEGMENTAIRE.

Sur l'axe des x , choisissons un point 1_x dit point-unité; construisons son associé 1_y . Les segments $O1_x$ et $O1_y$ sont dits les *segments-unités* des axes.

Soient deux segments a et b . Menons la droite A_x1_y et sa parallèle par B_y . L'intersection de cette dernière droite avec l'axe des x détermine le *produit* ab des segments a et b relatif à l'unité choisie.

Dans la construction du produit de deux segments, on peut permuter les rôles des deux axes. Pour le montrer, sur la figure précédente, ajoutons les droites A_y1_x et la parallèle par B_x ; elle coupe l'axe des y en un point M . Appelons A l'intersection de A_y1_x avec A_x1_y et B celle de $B_y(ab)$ avec B_xM . Les deux triangles 1_x1_yA et B_xB_yB ont leurs côtés parallèles deux à deux; deux sommets homologues sont alignés sur l'origine, donc aussi les deux derniers et AB passe par O . Les deux triangles AA_xA_y et $B(ab)M$ ont leurs sommets alignés sur l'origine et deux paires de côtés parallèles. La troisième paire possède une parallèle-unité, donc (ab) et M sont associés.

Soient OA_x , OB_x et OC_x trois segments de l'axe des x . Construisons ab et bc puis le point $D = [(ab)c]$ en menant $1_y(ab)_x$ et sa parallèle par C_y et $E = [a(bc)]_x$ par la parallèle à 1_yA_x passant par $(bc)_y$. Appelons K l'intersection de $1_y(ab)_x$ avec la parallèle-unité par B_x et L celle de C_yD avec la parallèle-unité par $(bc)_x$. Ces deux points sont alignés sur l'origine car ils sont deux sommets homologues de deux triangles ayant leurs côtés parallèles deux à deux. Les deux triangles tracés ayant respectivement K et L comme sommets et les troisièmes côtés portés par $B_y(ab)_x$ et $(bc)_yE$ ont leurs troisièmes côtés parallèles et les deux points correspondants à $a(bc)$ et $(ab)c$ sont confondus. Le produit segmentaire jouit de la propriété associative.

Sur la figure portant les trois segments précédents, formons ac , bc et $(a+b)c$. Cela conduit à mener par C_y les parallèles à trois droites issues de 1_y et passant respectivement par A_x , B_x et $(a+b)_x$. Introduisons une homothétie de centre O dans laquelle au point 1_y correspond C_y ; aux points A_x , B_x et $(a+b)_x$ correspondent $(ac)_x$, $(bc)_x$ et $[(a+b)c]_x$. A la parallèle à l'axe des y passant par A_x , correspond la même parallèle par $(ac)_x$. De même, à la parallèle à l'axe des x par B_y , correspond la parallèle par $(bc)_y$. A la parallèle-unité passant par le point de coordonnées a et b , correspond la parallèle-unité

passant par le point de coordonnées ac et bc ; l'intersection de cette droite avec l'axe des x est le correspondant de $[(ab) c]_x$. Or à ce point correspond aussi le point $ac + bc$. Ainsi, la propriété distributive du produit segmentaire est démontrée dans le cas où le premier facteur est une somme.

Pour montrer la commutativité, nous allons faire usage de l'axiome de Pascal. Deux segments a et b étant donnés, construisons ba en menant $1_y B_x$ et sa parallèle par A_y et le produit ab au moyen de $1_y A_x$ et sa parallèle par B_y . Avec les parallèles-unités relatives à a et b , ces droites constituent un hexagone dont les côtés sont parallèles deux à deux, dont trois sommets appartiennent à l'axe des y et deux à celui des x , donc aussi le dernier. Ainsi, les points $(ab)_x$ et $(ba)_x$ sont identiques.

La commutativité étant démontrée, il est inutile de compléter la propriété distributive au cas où la somme est le second facteur.

44. QUOTIENT SEGMENTAIRE.

Les constructions relatives à la multiplication, effectuées dans un ordre approprié, conduisent à b à partir de a et ab . La division est donc possible.

45. SEGMENTS NUL ET INFINI.

Si un segment a son extrémité confondue avec l'origine, il est dit *nul*. La construction de la somme montre que l'addition du segment nul à un segment ne modifie pas celui-ci: $a + O = a$. Le produit d'un segment par le segment nul donne le segment nul $a \cdot O = 0$. Le segment nul jouit donc des propriétés du zéro de l'arithmétique.

Une demi-droite d'origine O et portée par un axe est dite segment infini (∞). La construction montre que

$$a + \infty = \infty \quad \text{et} \quad a \cdot \infty = \infty$$

Les constructions $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\infty - \infty$ ne possèdent pas de résultat déterminé. Nous les excluons.

46. CALCUL SEGMENTAIRE ET CALCUL ALGÈBRE

Il y a isomorphisme entre les opérations du calcul segmentaire et celles du calcul algébrique des nombres réels. Cependant, l'infini du

calcul segmentaire est un infini actuel qui ne nécessite pas le recours au passage à la limite. Comme cet infini obéit aux mêmes règles que celui de l'algèbre, cette disparité ne trouble pas l'isomorphisme.

Il est remarquable que la distinction entre le commensurable et l'incommensurable qui, en algèbre, impose l'emploi d'un axiome de continuité, n'apparaît pas dans le calcul segmentaire.

47. EQUATION DE LA DROITE.

Soit une droite d passant par l'origine; appelons x et y les coordonnées d'un de ses points. Dans le parallélogramme porté par les axes et dont M est un sommet, d est une diagonale. Le théorème de Desargues montre que la seconde diagonale a une direction fixe. L'une des coordonnées est donc égale au produit de l'autre par une constante; l'équation d'une droite passant par l'origine est linéaire et homogène.

Supposons que d ne passe pas par l'origine. Par son intersection avec l'axe des y , menons la parallèle-unité d' et soient M et M' deux points de d et d' ayant même ordonnée. Appelons x et x' leurs abscisses et p l'ordonnée à l'origine. Nous avons $p = y + x'$. Appelons N et N' les intersections de l'axe des x avec les parallèles à l'axe des y par M et M' et D' celle avec d' . Les deux triangles $MM'P$ et $NN'N'_y$ ont leurs sommets placés deux à deux sur trois parallèles à l'axe des y et deux paires de côtés parallèles; la droite NN'_y est donc parallèle à d et x est le produit de x' par une constante. Ainsi, l'équation d'une droite est toujours linéaire.

48. CONCLUSION.

Le calcul segmentaire nous fournit tous les éléments nécessaires à l'élaboration d'une géométrie où les constructions sont liées par un isomorphisme aux calculs de la géométrie analytique affine. La géométrie pascalienne est donc identique à la géométrie affine plane et il est possible de construire cette géométrie en excluant tout axiome de continuité mais en introduisant deux axiomes de parallélisme.

Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Genève

Pendant le mois de SEPTEMBRE 1960

Extrema de pression: 714,2 mm le 16 et 734,2 mm le 10.
Ecart de la température moyenne du mois avec la moyenne normale: — 1° 58.

Jour du mois	Pression Moyenne 3 obs.	Vent			Température			Fract. satur. Moy. 3 obs.	Nébu- losité Moy. 3 obs.	Durée d'inso- lation h.	Pluie		Observations
		7 h. ½	13 h. ½	21 h. ½	V. moy. km h.	Moy. 4 obs.	Min.	Max.			Haut. en 24 h. mm	Durée h. min.	
1	26.90	S	1 NNE	1 NNW	0	15.00	11.4	18.1	76	10	1.5
2	29.57	NW	0 NNW	2 NNE	1	16.70	9.9	23.1	72	4	10.6
3	26.77	S	1 S	3 S	1	18.78	11.8	25.4	71	4	10.9	6.10
4	23.40	NW	1 S	3 W	1	16.23	14.4	21.4	77	10	2.0	2.10
5	23.60	E	1 NE	1 NE	3	13.57	12.2	17.0	86	10	0.9	3.1
6	28.47	SW	1 W	0 NW	1	13.90	10.4	17.6	67	9	4.8	0.1
7	28.77	S	0 NW	1 SW	0	14.95	11.9	20.5	75	10	1.2	0.20
8	29.73	SW	1 NNE	2 N	3	15.43	13.5	19.9	76	6	9.4	2.30
9	32.57	NNE	3 NNE	1 N	1	14.57	12.2	17.8	70	5	7.6
10	32.93	S	1 N	1 N	0	14.53	9.2	18.9	80	1	11.1
11	31.00	S	1 NNE	2 N	0	15.35	10.4	21.0	80	4	11.1
12	29.97	S	1 N	1 N	1	16.37	10.8	20.6	78	1	10.9
13	29.83	S	1 SE	1 SW	1	15.00	12.8	17.5	89	8	2.6	3.10
14	26.57	SE	1 NE	1 N	1	15.02	11.0	20.8	77	4	7.9
15	20.70	W	1 NNW	0 N	1	14.90	12.8	17.2	88	9	0.8	22.30
16	15.33	S	1 WSW	1 SSW	1	12.85	10.5	16.4	89	10	0.0	17.50
17	22.57	NE	1 N	2 NNE	1	12.43	7.9	15.8	73	3	8.4
18	24.17	E	1 NW	1 WNW	1	12.43	8.7	14.5	85	9	0.2	2.40
19	24.70	N	0 SE	1 SSW	1	14.18	10.3	19.0	78	9	4.6	6.7
20	26.93	S	3 S	4 S	1	9.75	8.0	12.6	77	10	1.1	5.10
21	29.00	SW	1 S	0 E	0	8.90	6.9	11.2	87	10	0.0	0.50
22	30.13	S	1 NNE	3 NNE	1	10.55	5.2	15.7	77	3	10.0
23	32.60	N	1 N	1 NE	1	11.15	6.3	15.3	84	8	6.3
24	32.97	S	0 NNE	1 S	1	12.52	7.1	17.8	84	4	8.4
25	30.80	NE	1 N	1 NNE	1	13.73	12.2	16.4	82	7	4.1
26	27.70	SE	0 N	1 NNE	1	13.08	9.4	17.8	83	6	9.0
27	22.80	SW	0 ENE	1 NNE	1	12.42	10.0	15.9	84	8	2.4	1.20
28	20.93	NE	1 E	1 E	1	13.40	11.4	16.7	90	9	0.8	13.20
29	22.13	W	0 SE	1 NW	1	11.98	11.0	16.0	83	7	2.9	2.20
30	20.97	N	1 NE	2 NNE	1	10.45	9.5	10.9	93	10	0.0	58.3
Mois	26.82				5.15	13.67	10.30	17.63	80	6.9	151.5	192.1	104.40

Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Genève

Pendant le mois d'OCTOBRE 1960

Extrema de pression: 711,4 mm le 29 et 731,4 mm le 18.
Ecart de la température moyenne du mois avec la moyenne normale: 0°,00.

Jour du mois	Pression		Vent			Température			Fract. satur. Moy. 3 obs.	Nébu- losité Moy. 3 obs.	Durée d'inso- lation h.	Pluie		Observations
	Moyenne 3 obs.	mm	7 h. 1/2	13 h. 1/2	21 h. 1/2	V. moy. km h.	Moy. 4 obs.	Min.	Max.			Haut. en 24 h. mm	Durée h. min.	
1	25.63	NNE 1	NW 1	SE 1	SE 1	4.0	12.57	8.1	19.9	71	2	10.7
2	27.00	SE 0	NNE 2	WNW 1	WNW 1	3.7	12.30	8.3	16.5	84	6	8.0	6.10	...
3	24.83	NNE 0	NW 1	NW 1	NW 1	3.0	15.25	11.8	18.7	84	9	5.3
4	20.23	W 1	SW 1	ENE 1	ENE 1	7.4	14.92	12.2	20.5	77	8	2.2	...	brume le matin
5	21.43	S 0	NNE 2	NNE 1	NNE 1	5.8	13.90	9.9	16.9	83	7	6.5	7.00	...
6	20.03	NNE 1	NE 1	S 1	S 1	4.3	12.93	11.2	15.5	90	9	0.3	0.8	1.10
7	22.13	SE 0	SSW 3	ESE 1	ESE 1	6.4	12.52	11.1	15.0	78	8	2.1	2.5	5.10
8	21.60	N 1	SSE 3	N 1	N 1	6.8	13.78	9.9	18.5	68	2	8.9	9.7	4.00
9	19.17	S 2	SE 2	S 2	S 2	11.1	11.00	9.3	13.2	84	10	2.0	10.3	7.00
10	20.93	S 2	S 2	SSW 1	SSW 1	7.8	10.30	8.7	14.5	80	9	0.9	4.6	5.10
11	23.07	S 1	S 2	ESE 1	ESE 1	9.0	8.77	7.8	12.4	80	9	1.9	2.9	4.20
12	24.03	S 1	S 3	W 1	W 1	5.9	7.05	5.7	11.0	73	7	6.4	0.1	0.20
13	24.70	S 0	S 2	NNE 1	NNE 1	3.7	5.20	2.2	9.8	79	2	9.6	...	neige sur le Jura gelée blanche
14	24.63	S 1	NNE 1	NNE 1	NNE 1	8.4	6.53	1.6	9.4	80	10	2.4	0.5	2.00
15	23.10	NNE 3	NE 1	NE 1	NE 1	4.8	5.35	4.0	6.1	92	10	0.0	12.4	22.50
16	26.83	W 1	E 1	ESE 2	ESE 2	3.4	6.20	4.4	9.4	83	10	0.7	0.6	1.10
17	30.23	WSW 1	NNE 1	NNE 1	NNE 1	3.9	7.15	4.9	9.4	73	9	2.6
18	29.27	SE 1	E 0	N 0	N 0	3.2	5.72	2.0	10.0	78	2	7.8	...	gelée blanche
19	23.13	S 1	NNE 1	NW 1	NW 1	4.2	8.65	4.2	12.9	76	8	4.7
20	15.97	S 1	W 1	E 1	E 1	4.4	8.30	6.6	11.1	89	10	0.0	16.6	9.30
21	19.07	W 1	S 3	S 3	S 3	7.3	10.60	6.7	15.0	68	7	6.6	0.1	0.10
22	19.03	SSW 1	NNE 1	WNW 1	WNW 1	3.1	8.38	6.0	9.9	90	10	0.1	7.8	8.40
23	19.57	SE 0	NNE 1	N 1	N 1	3.2	9.67	7.7	10.7	96	10	0.2	10.9	10.00
24	22.43	NE 2	NNE 1	S 1	S 1	3.1	10.08	8.3	12.9	94	9	3.7	10.8	5.10
25	19.60	SE 1	NNW 0	ENE 1	ENE 1	5.6	9.92	8.0	11.4	90	10	0.0	0.6	2.00
26	18.73	S 4	S 3	SSW 3	SSW 3	11.2	11.65	9.3	14.2	70	9	2.4	0.1	0.40
27	21.30	S 1	N 0	N 1	N 1	3.5	10.70	7.5	15.8	73	5	5.0	0.1	0.20
28	19.70	SE 1	N 1	E 1	E 1	3.4	8.80	7.2	10.4	92	10	0.0	2.5	3.50
29	13.90	SSE 1	SSW 1	S 4	S 4	16.2	10.50	6.0	17.4	76	8	6.9	5.5	6.40
30	22.53	NW 1	SW 3	S 1	S 1	21.6	10.05	7.5	13.9	65	8	5.0	5.7	2.00
31	22.97	S 1	S 2	NE 1	NE 1	3.5	11.43	6.5	15.7	71	8	4.7	1.0	2.10
Mois	22.15					6.22	10.01	7.28	13.48	80	7.8	117.6	116.0	117.30

Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Genève

Pendant le mois de NOVEMBRE 1960

Extrema de pression: 715,7 mm le 4 et 737,5 mm le 30.
Ecart de la température moyenne du mois avec la moyenne normale: + 2°,30.

Jour du mois	Pression		Vent			Température		Fract. Satur.	Nébu- losité Moy. 3 obs.	Durée d'inso- lation	Pluie		Observations
	Moyenne 3 obs.	mm	7 h. ½	13 h. ½	21 h. ½	V. moy. km h.	Moy. 4 obs.	Min.	Max.		Haut. en 24 h.	Durée h. min.	
1	19.87	NNW 0	SW	2 SSW	2	10.0	13.50	9.2	15.9	9	8.8	8.10
2	25.57	S 3	S	3 S	1	6.2	11.60	8.4	16.6	5	8.3
3	26.37	N 1	S	3 NE	1	6.9	10.08	5.0	14.8	8	4.4
4	19.60	N 0	S	3 SSW	3	5.3	9.65	7.0	13.3	10	28.1	11.30
5	21.20	NNW 1	W	1 N	1	3.7	6.75	5.5	10.9	7	0.1	0.10
6	23.57	WNW 0	WNW 2	E 1	1	3.6	6.52	3.9	9.9	9
7	24.63	WSW 1	N 1	NE 1	1	5.1	5.70	5.1	7.9	6	2.3	2.20
8	25.77	E 0	W 1	S 1	1	4.0	4.32	1.8	8.9	7
9	24.40	E 0	N 1	S 2	2	4.0	1.93	-0.2	5.5	10	6.8	7.10	gel. blan. le mat., pluie, neige le soir
10	20.70	W 1	SW 1	SSW 3	3	6.0	7.82	1.2	10.2	9	6.7	5.10
11	20.53	NNE 2	NNE 1	SW 1	1	4.0	8.67	6.7	11.1	10	20.0	16.00
12	21.00	NE 1	NNW 2	NE 1	1	4.4	7.58	6.3	9.1	10	22.2	11.00
13	27.60	SE 1	S 1	NNE 1	1	3.2	7.18	5.7	9.5	8
14	29.23	S 1	N 2	W 1	1	3.2	5.87	1.6	9.2	1
15	26.47	W 0	NE 0	S 2	2	6.8	8.32	3.1	11.5	8	4.8	6.50
16	27.50	S 1	SSE 2	ESE 1	1	10.4	8.18	6.2	12.5	6	0.7	1.10
17	24.80	SE 1	NW 1	S 2	2	9.4	8.52	4.2	12.5	9	4.3	8.00	brume le matin, brouill. à 13 h. 30
18	28.07	SW 1	SSE 2	NE 1	1	5.8	9.40	6.8	13.7	7	5.5	6.30
19	25.73	SW 1	SW 3	SE 1	1	9.0	6.53	4.6	9.8	9	6.2	7.20
20	30.07	NNE 1	NNE 1	NE 1	1	4.1	5.62	4.2	8.7	1
21	24.90	S 2	E 0	SW 1	1	3.3	4.87	1.6	7.0	8	brume le matin
22	19.47	SSE 1	S 3	NE 1	1	3.7	7.75	4.3	11.2	10	2.2	5.00
23	24.50	SSE 0	W 0	ENE 1	1	4.6	8.80	6.9	11.8	9
24	25.67	S 1	SW 1	SW 1	1	3.6	6.90	5.1	9.2	6
25	25.77	W 1	SE 1	NE 0	0	3.2	8.98	4.4	10.8	10	0.7	2.20
26	27.50	NE 0	SE 2	SSW 3	3	7.2	12.42	8.7	15.6	5	0.7	0.40
27	24.42	N 0	SW 4	NE 1	1	11.8	9.10	7.3	15.2	7	10.7	7.00
28	24.20	S 1	E 1	SW 1	1	4.9	6.80	5.8	8.7	10	13.8	14.00
29	33.63	NNW 1	N 1	W 1	1	4.4	4.57	2.9	7.0	1	gelée blanche matin et soir
30	36.17	S 0	SE 0	SE 1	1	3.4	2.95	-0.2	9.0	1
Mois	25.30					5.51	7.56	4.77	10.90	78	7.2	79.5	144.6 120.20

