

<b>Zeitschrift:</b>	Archives des sciences [1948-1980]
<b>Herausgeber:</b>	Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
<b>Band:</b>	12 (1959)
<b>Heft:</b>	4
 <b>Artikel:</b>	Forme des opérateurs de la mécanique quantique dans les espaces courbes
<b>Autor:</b>	Di Fazio, Mauro
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-739084">https://doi.org/10.5169/seals-739084</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 29.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

argiles vertes et rouges marquant la transgression tertiaire inférieure.

*Résumé et conclusions.*

Les poches décrites à Mornex sont formées de grès marin à Bryozoaires et d'argile résiduelle dans un karst de l'Urgonien. Leur composition n'est pas celle de poches karstiques comblées de sables éocènes sidéolithiques ni de filons clastiques et karstiques barrémiens décrites à Saint-Maurice par R. MURAT. Ce sont des dépôts qui s'apparentent aux grès verts du Petit-Salève et qui leur sont probablement contemporains (Paléocène inférieur), marquant la transgression tertiaire, prélude des dépôts molassiques.

BIBLIOGRAPHIE

- GIGNOUX, M., 1944, Phénomènes de karstification et d'injection naturelle d'argiles et de sables dans l'Urgonien des environs de Bellegarde (Ain). *C.R.S.G.F.*, 74.
- GIGNOUX, M. et J. MATHIAN, 1952, Enseignements géologiques du Grand Barrage de Génissiat sur le Rhône (Ain, Haute-Savoie): karstification éocène de l'Urgonien. *Travaux Labor. Géol. Grenoble*, XXIX, pp. 121-162.
- PARÉJAS, E. et A. CAROZZI, 1953, Une algue marine du genre *Broeckella* dans les grès verts du Petit-Salève (Haute-Savoie). *Arch. Sciences Genève*, vol. 6, fasc. 3, pp. 165-171.

*Université de Genève.  
Laboratoire de Géologie.*

**Mauro di Fazio.** — *Forme des opérateurs de la mécanique quantique dans les espaces courbes* \*.

Nous nous proposons dans cet article d'étendre aux espaces courbes la formulation des opérateurs de la mécanique quantique; c'est-à-dire d'étudier leur aspect quand on introduit une métrique généralisée du type  $g(q, t)$ . Nous supposerons qu'une

\* Ce travail a été effectué grâce aux subsides du Fonds national suisse de la Recherche scientifique.

métrique naturelle est définie dans l'espace des  $q$  et choisissons la normalisation des  $| q', t >$  selon la forme:

$$\langle q'', t | q', t \rangle = \delta (q'', q', t) \quad (1)$$

où:

$$\int \delta (q'', q', t) f (q') d_t q' = f (q'') \quad (2)$$

pour une fonction arbitraire  $f (q')$ ;  $d_t q'$  est l'élément invariant de volume. Cette notation exprime le fait que la métrique, et donc la normalisation, peut varier avec le temps.

La forme explicite de  $d_t q'$  est:

$$d_t q' = g^{\frac{1}{2}} (q', t) dq'^1 \dots dq''^n \quad (3)$$

où  $g (q', t)$  est le déterminant du tenseur métrique.

Cette formulation a déjà été utilisée par DeWitt [1] afin d'étendre la théorie dynamique aux espaces courbes. Nous reprendrons le sujet, cherchant à montrer que les opérateurs de la mécanique quantique peuvent être mis sous une forme particulièrement intéressante, en analogie avec la forme de dérivation tensorielle.

Par ailleurs, nous avons:

$$\delta (q'', q', t) = g^{-\frac{1}{2}} (q'', t) \delta (q'' - q') = \quad (4. A)$$

$$= g^{-\frac{1}{2}} (q', t) \delta (q'' - q') \quad (4. B)$$

$\delta (q'' - q')$  étant la fonction ordinaire à  $n$  dimensions. De (4) nous avons:

$$(q''^i - q'^i) \delta (q'', q', t) = 0 \quad (5)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q''^i} \delta (q'', q', t) &= - \frac{\partial}{\partial q'^i} \delta (q'', q', t) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q'^i} [\text{L}ng (q', t)] \delta (q'', q', t) . \end{aligned} \quad (6)$$

En tenant compte de (5) nous aurons enfin:

$$\begin{aligned} (q''^i - q'^i) \frac{\partial}{\partial q''^j} \delta (q'', q', t) &= - (q''^i - q'^i) \frac{\partial}{\partial q'^j} \delta (q'', q', t) = \\ &= - \delta_j^i \delta (q'', q', t)^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

<sup>1</sup>  $\delta_j^i$  est le tenseur de Kronecker.

ou l'élément de matrice de l'opérateur  $q^i$ :

$$\langle q'', t | q^i | q', t \rangle = q''^i \delta(q'', q', t) - q'^i \delta(q'', q', t) . \quad (8)$$

Si nous prenons l'élément de matrice de

$$[q^i, p_j] = i \hbar \delta_j^i$$

nous avons:

$$i \hbar \delta_j^i \delta(q'', q', t) = (q''^i - q'^i) \langle q'', t | p_i | q', t \rangle \quad (9)$$

et pour (5) et (7)

$$\begin{aligned} \langle q'', t | p_j | q', t \rangle = & -i \hbar \frac{\partial}{\partial q''^j} \delta(q'', q', t) + \\ & + F_j(q'', t) \delta(q'', q', t) \end{aligned} \quad (10)$$

où les  $F(q'', t)$  sont des fonctions de  $q^i$  et  $t$ . L'addition de cette fonction est justifiée par (5).

Une autre forme de (10) est:

$$\begin{aligned} \langle q'', t | p_j | q', t \rangle = & \\ = & g^{-\frac{1}{2}}(q'', t) \left[ -i \hbar \frac{\partial}{\partial q''^j} + G_j(q'', t) \right] \delta(q'' - q') = \quad (11. A) \end{aligned}$$

$$= g^{-\frac{1}{2}}(q'', t) \left[ i \hbar \frac{\partial}{\partial q'^j} + G_j(q', t) \right] \delta(q'' - q') \quad (11. B)$$

avec

$$G_j = F_j + \frac{1}{2} i \hbar \left( \frac{\partial}{\partial q^j} \ln g \right) . \quad (12)$$

Une restriction finale sur  $F$  est imposée par la condition hermitienne sur  $p$ ; et par les relations de commutation. En prenant l'élément de matrice

$$[p_i, p_j] = 0$$

et en utilisant (11) nous avons:

$$\begin{aligned} 0 = & \int (\langle q'', t | p_i | q''', t \rangle \langle q''', t | p_j | q', t \rangle - \\ & - \langle q'', t | p_j | q''', t \rangle \langle q''', t | p_i | q', t \rangle) d_t q''' = \\ = & -i \hbar \left[ \frac{\partial}{\partial q''^i} F_j(q'', t) - \frac{\partial}{\partial q'''^j} F_i(q'', t) \right] \delta(q'', q', t) \quad (13) \end{aligned}$$

done:

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial q^i} \quad (13)$$

pour une certaine fonction  $F$  de  $q^i$  et  $t$ .

Nous devons avoir:

$$\langle q'', t | p_i | q', t \rangle^* = \langle q', t | p_i | q'', t \rangle. \quad (14)$$

En introduisant (10) dans (14) et en utilisant (6) nous obtenons la condition

$$F^+ = F + \frac{1}{2} i \hbar Lng. \quad (15)$$

La condition (15) nous dit que  $F$  a la forme:

$$F = -\Phi - \frac{1}{4} i \hbar Lng \quad (16)$$

où  $\Phi$  est une certaine fonction réelle des  $q$  et de  $t$ .

L'élément de matrice (1) peut être lié à la transformation unitaire de phase:

$$\bar{p}_i = e^{-(i/\hbar)\Phi} p_i e^{(i/\hbar)\Phi} = p_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q^i} \quad (17)$$

ou en définissant les vecteurs de base selon:

$$| \bar{q}', \bar{t} \rangle = e^{(i/\hbar)\Phi} | q', t \rangle \quad (18)$$

considérons l'élément de matrice des  $p_i$ :

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}'', \bar{t} | \bar{p}_i | \bar{q}', \bar{t} \rangle &= -i \hbar \langle q'', t | \frac{\partial}{\partial q^i} + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial q^i} [Lng(q, t)] | q', t \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

et enfin:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}'', \bar{t} | \bar{p}_i | q', t \rangle &= - \\ &= -i \hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial q''^i} + \left[ \frac{\partial}{\partial q''^i} Lng(q'', t) \right] \right\} \delta(q'', q', t). \end{aligned} \quad (20)$$

La transformation (19) change seulement la phase du vecteur  $q', t$ ; mais cette phase est arbitraire et alors nous pouvons écrire l'élément de matrice de  $p_i$  sous la forme:

$$\begin{aligned} < q'', t | p_i | q', t > &= - \\ &= -i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial q''^i} + \frac{1}{4} \left[ \frac{\partial}{\partial q''^i} \text{L}ng(q'', t) \right] \delta(q'', q', t) \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

Considérons, maintenant, les représentations suivantes:

$$\Psi(q', t) = < q', t | \Psi > \quad (22)$$

pour un état arbitraire  $|\Psi\rangle$ . Pour un opérateur  $F(t)$  nous aurons:

$$F_{q'}(t') \Psi(q', t) = < q', t' | F(t') | \Psi > \quad (23)$$

et en particulier:

$$\begin{aligned} q_{q'}^i &= q'^i \\ p_{iq'} &= -i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial q'^i} + \frac{1}{4} (\text{L}ng'), i \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Par une transformation ponctuelle, le déterminant du tenseur métrique se transforme selon:

$$\bar{g} = \left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|^2 g \quad (25)$$

où  $\left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|$  représente le jacobien de  $q$  par rapport à  $\bar{q}$ .

Nous aurions, enfin, pour  $(\text{L}ng)_i$

$$\frac{1}{2} (\text{L}ng)_i = \left( \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \right)_{,j} + \left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{\partial q^j}{\partial \bar{q}^i} \quad (26)$$

où le  $\left\{ \begin{matrix} i \\ ji \end{matrix} \right\}$  dénote le symbole de Christoffel de second ordre.

D'autre part, en appliquant l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial q}$  à n'importe quel opérateur  $\bar{A}$  (lorsque celui-ci se transforme selon  $A = A \left| \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right|$ ) et en prenant une moyenne symétrisée, nous aurons:

$$\begin{aligned} -i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{q}^i} \bar{A} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ ij \end{matrix} \right\} \bar{A} \right] &= -\frac{1}{2} -i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} A^i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^i} A^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} j \\ ji \end{matrix} \right\} \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} A^i \right] = \left( p_i, \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \right) A^i \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial q^i}. \end{aligned}$$

Nous pouvons, alors, décrire la loi de transformation pour les moments:

$$\bar{p}_j = \frac{1}{2} \left( p_i, \frac{\partial q^i}{\partial \bar{q}^j} \right) \quad (27)$$

où la notation ( ) représente l'anticommuteur. Grâce à (27), le caractère hermitien est conservé.

Maintenant, une transformation ponctuelle infinitésimale est donnée par la formule suivante:

$$U_1 = 1 - \frac{1}{2} i \hbar^{-1} (p_i, \delta q^i) \quad (28)$$

et si  $\delta q^i$ ,  $\delta' q^k$  sont deux systèmes de différentielles, nous aurons pour un opérateur  $U_2$

$$U_2 = 1 - \frac{1}{2} i \hbar^{-1} (p_k, \delta q^k) \quad (29)$$

La différence  $d U_1 - d U_2$  nous donne:

$$\begin{aligned} d U_1 - d U_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \{^j_{ji}\}}{\partial q^k} - \frac{\partial \{^j_{jk}\}}{\partial q^i} + \left\{^j_{ji}\right\} \left\{^i_{ik}\right\} - \left\{^j_{jk}\right\} \left\{^k_{ki}\right\} \right] \delta q^i \delta' q^k = \\ &= \frac{1}{2} R^j_{.jki} \delta q^i \delta' q^k \end{aligned} \quad (30)$$

où  $R^j_{.jki}$  est le tenseur de Riemann.

Mais  $R^j_{.jki}$  ayant deux indices antisymétriques égaux, s'annule. On peut introduire une métrique généralisée dans laquelle nous pouvons poser:

$$g_{ik} = \underline{g}_{ik} + \underline{\underline{g}}_{ik} \quad (31)$$

c'est-à-dire décomposer le tenseur  $g_{ik}$  en une partie symétrique et une partie antisymétrique. Dans ce cas, nous aurons:

$$\Gamma^l_{ik} = \underline{\Gamma}^l_{ik} + \underline{\underline{\Gamma}}^l_{ik} \quad (32)$$

où  $\Gamma^l_{ik}$ , dans le cas d'un champ symétrique est, comme  $\{^l_{ik}\}$ , le symbole de Christoffel de second ordre.

Nous avons, au moyen de (28) et (29)

$$\bar{p}_i = U p_i U^{-1} = p_i + \frac{1}{2} (p_j, \delta q^j_i) \quad (33)$$

Si nous appelons  $\Delta p_i$  la différence  $\bar{p}_i - p_i$ , nous aurons:

$$\Delta p_i = \frac{1}{2} \underset{\vee}{R}{}^j_{.jki} \delta q^i \delta' q^k \quad (34)$$

où  $\underset{\vee}{R}{}^j_{.jki}$  est le tenseur de Riemann composé par les  $\underset{\vee}{g}_{ik}$ .

(*La suite de cet article paraîtra ultérieurement.*)

#### BIBLIOGRAPHIE

1. B. DE WITT. *Rev. Mod. Phys.*, 29 (1957), p. 386 et suivantes.

*Laboratoire de Recherches nucléaires  
Institut de Physique, Genève*

**Paul Rossier.** — *Sur les faisceaux tangentiels coplanaires de paraboles.*

En coordonnées tangentialles, l'équation d'une parabole est de la forme

$$1) \quad P \equiv au^2 + buv + cv^2 + duv + evv = 0 .$$

La droite impropre du plan est caractérisée par  $u = 0$  et  $v = 0$ .

L'équation (1) contient cinq coefficients homogènes. Soient  $P_j = 0$  les équations de cinq paraboles indépendantes et invariables. Le premier membre de l'équation (1) peut être obtenu par une combinaison linéaire et homogène des cinq premiers membres des équations  $P_j = 0$  :

$$P \equiv \sum \lambda_j P_j = 0 .$$

Prenons les cinq coefficients  $\lambda_j$  comme coordonnées homogènes d'un point de l'espace quadridimensionnel. Ainsi est établie une correspondance biunivoque entre les points de cet hyperespace et les paraboles du plan, et aux propriétés des uns correspondent des propriétés corrélatives des autres. Par exemple, un faisceau de paraboles est représenté par les points